Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.Н. Красовского (ИММ УрО РАН)
Уральского отделения Российской академии наук
г. Екатеринбург, почтовый индекс 620108
ул. Софьи Ковалевской, д.16

29.07.2024 № 16343/15-2171

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Федерального
государственного бюджетного
учреждения науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения
Российской академии наук
(ИММ УрО РАН)
доктор физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов

"29" июля 2024 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации

на диссертацию Мехмонзода Сабзины Навбухор

«Точные оценки погрешности приближения некоторых классов функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена исследованию погрешности аппроксимации классов гладких функций двух переменных, заданных на квадрате, линейными и билинейными интерполяционными сплайнами. Рассматриваемые в диссертации классы приближаемых функций задаются при помощи модулей непрерывности.

Как известно, полиномиальные сплайны одной переменной определяются как функции, склеенные до нужной гладкости из "кусков" алгебраических многочленов. Систематические исследования сплайнов начались с работы И.Шёнберга 1946 года и в последующие годы продолжались многими математиками в разных странах. В настоящее время полиномиальные сплайны одной переменной являются одним из важнейших аппаратов аппроксимации. С их помощью были найдены поперечники многих классов дифференцируемых функций, решены задачи оптимального восстановления функций и их производных, задачи теории квадратурных формул, экстремальной интерполяции с минимальными значениями норм производных интерполирующих функций и ряд других задач. Хорошо известны результаты в области теории сплайнов, полученные В.М.Тихомировым, Ю.Н.Субботиным, Н.П.Корнейчуком, В.Ф.Бабенко, А.А.Лигуном, К. де Бором, Л.Шумейкером, И.Шёнбергом, Ю.С.Завьяловым, В.Н.Малозёмовым, Дж.Албергом и другими математиками. Наиболее эффективными и удобными для приложений показали себя интерполяционные сплайны: в прикладных задачах, когда приближаемая функция имеет конечную гладкость, классические методы, основанные на полиномах и дробно-рациональных функциях, ведут себя неустойчиво при увеличении количества точек интерполяции, в то время как сплайны приводят к устойчивым численным алгоритмам.

По сравнению с одномерным случаем, изучение аппроксимации функций нескольких переменных значительно усложняется ввиду появления новых особенностей: область, на которой происходит аппроксимация, может иметь достаточно сложную структуру, даже в случае геометрически простых областей (например, связного компакта), при увеличении размерности аппарат аппроксимации значительно усложняется, а дифференциальные свойства функций могут быть различными по разным направлениям. Эти особенности не позволяют непосредственно переносить на функции нескольких переменных многие результаты, полученные для функций одной переменной.

Сказанное в равной мере относится и к полиномиальным сплайнам двух и более переменных. Самый простой вариант – рассматривать сплайны двух переменных на разбиении единичного квадрата и склеивать многочлены вдоль отрезков прямых, параллельных осям координат. Но и здесь возникают немалые трудности, поскольку склеивать полиномы нужно не в конечном числе точек, как это происходит в случае одной переменной, а на отрезках. Поэтому при исследовании погрешности аппроксимации сплайнами двух и более переменных на первый план выходят так называемые локальные интерполянты, когда на каждом фрагменте разбиения исходной области можно найти интерполянт в явном виде, а склеивание интерполянтов друг с другом до нужной гладкости осуществляется автоматически. Именно такими свойствами обладают линейные и билинейные сплайны двух переменных, приближения которыми рассматриваются в диссертации. Приближения линейными и билинейными сплайнами двух переменных ранее рассмтривались в работах В.Ф.Сторчая, В.Ф.Бабенко и Т.Ю.Лескевич (случай n переменных), С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, которые содержатся в списке цитированной литературы к диссертации. Результаты, полученные в этих работах, относятся главным образом к случаю равномерного разбиения исходной области. В диссертационной работе оценки погрешности приближения получены на более широких классах функций и для неравномерных разбиений. В силу сказанного, тематика диссертационной работы представляется актуальной.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы. Объём диссертации 70 страниц, список литературы содержит 36 наименований. Переходим к характеристике диссертации по главам.

Во введении даётся общая характеристика диссертационной работы и перечисляются результаты, выносимые на защиту.

В первой главе получены следующие результаты. Пусть

$$Q = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

– единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^2$, $\omega(f;h)$ – определяемый этой нормой модуль непрерывности:

$$\omega(f;h) = \sup \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{C(Q)}: \ \|u\| \le h\}$$

и $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, т.е. функция, в нуле равная нулю, неубывающая и полуаддитивная. Класс интерполируемых функций определяется следующим образом:

$$H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q) = \{f(x,y): \ |f(M') - f(M'')| \le \omega(\|M' - M''\|)\},$$

где $M' = (x', y') \in Q$, $M'' = (x'', y'') \in Q$. Если рассматривается пространство $\mathbb{R}^2$ со стандартной l_p-нормой ($1 \le p \le \infty$), то для введённого выше класса функций используется обозначение $H^{\omega}_p(Q)$.

Строится разбиение квадрата Q прямыми, параллельными осям координат, которые задаются с помощью следующих разбиений (сеток) сторон квадрата:

$$\Delta_m: \ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1, \quad \Delta_n: \ 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1;$$

определяется решётка $\Delta_{m,n} = \Delta_m \times \Delta_n$ и вводятся обозначения для шагов каждой из двух сеток $h_k = x_k - x_{k-1}$, $\eta_i = y_i - y_{i-1}$ и прямоугольных фрагментов $Q_{k,i} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]$ ($k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$) разбиения исходного квадрата. Каждый из этих прямоугольных фрагментов $Q_{k,i}$ разбивается диагональю на два треугольника и в результате получается триангуляция исходного квадрата (естественно, определяемая неоднозначно). Теперь на каждом из получившихся треугольников строится линейная функция $a_{k,i}x + b_{k,i}y + c_{k,i}$, коэффициенты которой однозначно находятся из условий интерполяции в вершинах треугольника. В результате получается непрерывная функция $\mathcal{L}_{m.n}(f; x, y)$, состоящая из кусков плоскостей, являющаяся линейным сплайном двух переменных, которая в диссертации названа многогранной функцией.

В теореме 1.2.1. для треугольника T с вершинами в точках $(0,0), (1,0), (0,1)$ доказана неулучшаемая поточечная оценка сверху уклонения интерполируемой функции от её линейного интерполянта. Затем полученная оценка рассматривается для наиболее важного частного случая, когда норма в $\mathbb{R}^2$ является стандартной l_p-нормой ($1 \le p \le \infty$) и $\omega = \omega(t)$ – произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности. Автором доказано (теорема 1.2.2), что в этом случае для уклонения произвольной функции $f \in H^{\omega}_p(T)$ от интерполирующей её линейной многогранной функции $\mathcal{L}(f; x, y)$ при $1 \le p \le 3$ выполняется поточечное неравенство

$$\max_{(x,y)\in T} |f(x,y) - \mathcal{L}(f; x, y)| \le \omega(2^{1/p-1}),$$

которое при $p > 3$, вообще говоря, не имеет места. Доказательство основано на установленной автором интересной лемме 1.2.2, согласно которой при $1 \le p \le 3$

$$\max_{t\in[0,1]} \Big(x^p(1-x) + x(1-x)^p\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^p,$$

в то время как при $p > 3$ это неверно. Затем оценка из теоремы 1.2.2 переносится на каждый фрагмент триангуляции $T_{k,i}$ исходного квадрата Q посредством линейного преобразования. В результате получается теорема 1.2.3, согласно которой при $1 \le p \le$

3 для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ и произвольной (не обязательно равномерной) решётки $\Delta_{m,n}$ имеет место соотношение

$$\sup_{f\in H_p^\omega(Q)} \|f(x,y) - \mathcal{L}_{m,n}(f;x,y)\|_{C(Q)} = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\|\Delta_m\|^p + \|\Delta_n\|^p}\right),$$

где $\|\Delta_m\| = \max\{h_k: \ k = 1, 2, \ldots, m\}$ и $\|\Delta_n\| = \max\{\eta_i: \ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

В частном случае получается аналог этого результата для равномерной решётки $\overline{\Delta}_{m,n}$, когда $\|\overline{\Delta}_m\| = 1/m$ и $\|\overline{\Delta}_n\| = 1/n$. Далее показано, что равномерная решётка является наилучшей при интерполяции на классе $H_p^\omega(Q)$, т.е. при $1 \le p \le 3$ и выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega = \omega(t)$ выполняется

$$\inf_{\Delta_{m,n}} \sup_{f\in H_p^\omega(Q)} \|f(x,y) - \mathcal{L}_{m,n}(f;x,y)\|_{C(Q)} = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}\right)^p + \left(\frac{1}{n}\right)^p}\right).$$

Также в первой главе диссертации в теоремах 1.3.1 и 1.4.1 получены оценки сверху погрешностей аппроксимаций частных производных функций, принадлежащих классам $W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, соответствующими частными производными интерполирующих их линейных сплайнов. Найденные оценки справедливы для произвольных решёток $\Delta_{m,n}$ и выражаются в терминах величин $\|\Delta_m\|$ и $\|\Delta_n\|$. Определения указанных выше классов функций даны в диссертации на с. 13.

Вторая глава диссертации посвящена интерполяции билинейными сплайнами двух переменных на классе функций

$$W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q) = \left\{f(x,y) \in C(Q): \ \omega_*\Big(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}; h, \eta\Big) \le \omega_*(x,y)\right\},$$

где

$$\omega_*(\varphi; h,\eta) = \sup\Big\{|\varphi(x',y') - \varphi(x'',y') - \varphi(x',y'') + \varphi(x'',y'')|: \ |x'-x''| \le h, |y'-y''| \le \eta\Big\}$$

– двумерный модуль непрерывности функции $\varphi(x,y)$, а $\omega_*(x,y)$ – заданный двумерный модуль непрерывности, свойства которого перечислены в диссертации на с. 11. Интерполяционный билинейный сплайн $S_{1,1}(f;x,y)$ задаётся следующим образом. На каждом прямоугольном фрагменте $Q_{k,i}$ $(k = 1, 2, \ldots, m; \ i = 1, 2, \ldots, n)$ разбиения исходного квадрата Q функция $S_{1,1}(f;x,y)$ имеет вид

$$S_{1,1}(f;x,y) = a_{k,i} + b_{k,i}x + c_{k,i}y + d_{k,i}xy,$$

где $a_{k,i}, b_{k,i}, c_{k,i}, d_{k,i}$ – константы, определяемые из интерполяционных условий в вершинах фрагмента $Q_{k,i}$: $S_{1,1}(f{:}\, x_k, y_i) = f(x_k, y_i)$. В отличии от главы 1, разбиение фрагментов $Q_{k,i}$ на треугольники при этом не производится.

По нашему мнению, основным результатом главы 2 является теорема 2.2.1, в которой доказано, что при равномерном разбиении квадрата Q выполняется

$$\sup_{f\in W^{(1,1)}\ H^{\omega_*}(Q)} \Big\|f(x,y) - S_{1,1}(f;x,y)\Big\|_{C(Q)} = \frac{1}{16}\int_0^{1/m}\int_0^{1/n} \omega_*(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

В диссертации проделана большая и содержательная работа. Все выносимые на защиту результаты полностью доказаны и являются новыми. Диссертация выполнена на высоком научном уровне, основные её результаты приведены с полными доказательствами и необходимыми ссылками на работы предшественников.

Работа имеет теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы в научно-исследовательской работе в Таджикском национальном университете, Московском государственном университете, Тульском государственном университете, Уральском федеральном университете, Институте математики НАН Украины, Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них одна статья в научном журнале РФ, одна статья в международном журнале Jaen Journal on Approximation и 6 – в журналах Республики Таджикистан.

Имеются некоторые замечания:

1. Не сказано явно, какие функции рассматриваются – вещественнозначные или комплекснозначные.

2. На с. 9 в формуле (1.1.1) пропущен sup. Должно быть написано

$$\omega(f,h)_X = \sup\{\|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_X : \ \|u\| \le h\}.$$

3. На с. 14 в определении сетки Δ_n надо x_n заменить на y_n.

4. Последний абзац на с. 27 надо писать в следующем виде: “Т. к. $\varphi''(x) < 0$ на $[0,1/2)$, то $\varphi'(x)$ убывает на $[0,1/2)$, а поскольку $\varphi'(1/2) = 0$, то $\varphi'(x) > 0$ при всех $x \in [0,1/2)$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ возрастает и

$$\max\{\varphi(x) : \ x \in [0,1/2]\} = \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^p}.\text{”}$$

Эти неточности не влияют на формулировку и доказательство леммы 1.2.2.

5. На с. 19 в абзаце, расположенном ниже формулы (1.1.15), после слова “выпуклый” нужно добавить слово “вверх”. На с. 28 в формулировке теоремы 1.2.2 после слова “выпуклый” нужно добавить слово “вверх”. Аналогичную правку нужно внести и в первом предложении доказательства упомянутой теоремы, а именно: после слова “выпуклости” добавить слово “вверх”. Аналогичные правки нужно внести в формулировке следствия 1.2.1 на с. 31, а также на с. 60 в абзаце, расположенном после формулы (2.2.27).

6. На с. 35 в теореме 1.3.1 неравенства (1.3.1) и (1.3.2) при $p = \infty$ имеют другой вид. Считаем, что надо писать в теореме 1.3.1, что $1 \le p < \infty$, либо результаты для $p = \infty$ приводить отдельными формулами.

7. В списке литературы в [18] авторы должны быть написаны в обратном порядке: “Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.”; а в [20] после слова “Днепропетровский” нужно добавить слова.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Диссертация Мехмонзода Сабзины Навбухор “Точные оценки погрешности приближения некоторых классов функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями" является законченной квалификационной научно-исследовательской работой, в которой решены задачи, вносящие существенный вклад в развитие теории аппроксимации сплайнами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет всем условиям пп. 9-11,13,14 действующего положения "О порядке присуждения ученых степеней" ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автор диссертации, Мехмонзода Сабзина Навбухор, заслуживает присвоения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовили д. ф.-м. н., профессор Арестов В.В. и к. ф.-м. н. Новиков С.И. Отзыв обсужден и утвержден на заседании совместного семинара отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН (протокол № 111 от 25 июля 2024 года).

Почтовый адрес: 620108, г.Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, ИММ УрО РАН.
Телефон: +7 343 3748332, факс: +7 343 3742581, e-mail: dir-info@imm.uran.ru
Адрес сайта: https://www.imm.uran.ru

Ведущий научный сотрудник
отдела аппроксимации и приложений
ИММ УрО РАН
доктор физ.-мат. наук по специальности
01.01.01. – математический анализ,
профессор Арестов Виталий Владимирович

Старший научный сотрудник
отдела аппроксимации и приложений
ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук по специальностям
01.01.07. – вычислительная математика,
01.01.01. – математический анализ Новиков Сергей Игоревич

Ученый секретарь заседания —
старший научный сотрудник
отдела аппроксимации и приложений
ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук Плещева Екатерина Александровна
29.07.2024

Подписи В.В. Арестова, С.И. Новикова и Е.А. Плещевой удостоверяю

Врио ученого секретаря ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук Б.В. Дигас
29.07.2024