Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Мехмонзода Сабзина Навбухор

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МНОГОГРАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ И СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научные руководители:
академик Национальной академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор М.Ш. Шабозов;
доктор физико-математических наук, профессор математики Университета Кейптауна (ЮАР) Е.Е. Бердышева

Д У Ш А Н Б Е – 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. В теории приближения функций многогранные функции и сплайн-функции начали использовать сравнительно недавно, примерно с семидесятых годов прошлого столетия, но эти функции заняли прочное место, как бы заранее для них предназначенное. Следует отметить, что в частных задачах аппроксимационного содержания сплайны, или более точно кусочно-полиномиальные функции, применялись гораздо раньше. Достаточно вспомнить метод ломаных Эйлера, предложенное Лебегом доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами, кусочно-полиномиальную аппроксимацию степенной функции в работах С.М. Никольского в начале пятидесятых годов об оптимальных квадратурных формулах, метод промежуточных приближений ломаными Н.П. Корнейчука семидесятых годах прошлого столетия. Следует также отметить, что сплайны вошли в теорию аппроксимации через задачи теории интерполирования и восстановления функции.

При анализе решения экстремальных задач обнаружилось, что интерполяционные сплайны не только предпочтительнее многочленов с точки зрения вычислительных удобств, но в ряде ситуаций обладают наилучшими аппроксимационными свойствами, обеспечивают минимально возможную погрешность на классах функций. В ряде принципиально важных задач, связанных с оценкой погрешности сплайн-интерполяции на классах функций, точное решение оказалось возможным получить благодаря внутренней специфике сплайнов. К настоящему времени многие экстремальные задачи теории сплайн-аппроксимации для функции одной переменной решены и нашли практическое применение в задачах прикладной математики. Однако, по сравнению с одномерным случаем, исследование вопросов приближения функций двух переменных значительно усложняется ввиду появления новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Во-первых, область, на которой осуществляется приближение, может иметь весьма сложную структуру, даже если он односвязный компакт. Трудности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций многих переменных, поскольку эти свойства могут быть различными по разным направлениям. Наконец, усложняется и приближающий аппарат. Всё это вместе взятое приводит к тому, что методы исследования экстремальных задач, существенно использующие специфику одномерного случая, не всегда удаётся перенести на функции двух переменных.

В связи с этим точных результатов в задачах оценки погрешности приближения в многомерном случае, в том числе и в задачах многомерной сплайн-интерполяции, совсем мало.

Диссертационная работа посвящена получению некоторых результатов окончательного характера, связанных с оценкой погрешности приближения многогранными функциями и оценкой погрешности сплайн-аппроксимации на классах функций двух переменных, задаваемых различными модулями непрерывности.

Отметим, что первые точные результаты о сплайн-аппроксимации функций двух переменных получены в работах В.Ф. Сторчая [19, 20], С.Б. Вакарчука [4], С.Б. Вакарчука и К.Ю. Мыскина [5] и М.Ш. Шабозова [23, 24].

Актуальность диссертационной работы определяется тем, что в ней решены экстремальные задачи сплайн-приближений на более широких классах функций, которые ранее не поддавались решению известными методами.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2022 гг. по теме "Теория приближения функций".

Цели и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \leq p \leq 3)$, $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$;
- найти оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$;
- найти оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функции класса $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r,s) = (0,1);\ (r,s) = (1,0))$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f;x,y)$ многогранной функции;
- найти точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы многомерной сплайн-аппроксимации и методы решения экстремальных задач теории сплайн-аппроксимации в нормированных пространствах, разработанные в научных школах Н.П.Корнейчука и Ю.Н.Субботина.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- найдены точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \leq p \leq 3)$, $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функции класса $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r,s) = (0,1);\ (r,s) = (1,0))$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f;x,y)$ многогранной функции;
- найдены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках приближения многогранными функциями на классах функций $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \leq p \leq 3)$, $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$;
- теорема об оценках приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$ многогранной функции на классах функций $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$;
- теоремы об оценках приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функции класса $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r,s) = (0,1);\ (r,s) = (1,0))$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f;x,y)$ многогранной функции;
- теорема о точных оценках погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты о приближении многогранными функциями и билинейными сплайн-функциями имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближений многогранными функциями и сплайн-функциями в многомерном случае на различных классах функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" и "Прикладная математика".

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе 2015-2022 гг.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе,15-25 августа 2016 г.);
- международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);

- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений "(Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами"(Душанбе, 30-31 июня 2020 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 печатных работах [29–36], из них 1 статья опубликована в научном журнале Российской Федерации, 1 статья опубликована в международном журнале Jaen Journal on Approximation и 6 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из 8 работ 5 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 3 в других изданиях. Из совместных с научными руководителями М.Ш.Шабозовым и Е.Е.Бердышевой работ [29], [30], [31] и [36] соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 36 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста, набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Приближение функций двух переменных и их производных многогранными функциями

§ 1.1. Предварительные факты, вспомогательные утверждения и история вопроса

1.1.1. Модули непрерывности и задаваемые ими классы функций

В теории аппроксимации, как правило, многие результаты по наилучшему приближению функций полиномами и сплайнами задаются ограничением на норму в $L_p := L_p[a,b]$ r-й производной. Более тонкой, чем норма $\|f\|_X$, характеристикой функции $f(t)$ является её модуль непрерывности $\omega(f,\delta)_X$ в произвольном функциональном нормированном пространстве X. Если X — нормированное пространство заданных на всей оси (в частности, периодических) функций $f(t)$, то по определению полагаем для $h \geq 0$

$$\omega(f,h)_X := \Big\{\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_X : \ |u| \leq h\Big\}. \tag{1.1.1}$$

Если же X — нормированное пространство функций $f(t)$, заданных на конечном отрезке $[a,b]$, то в равенстве (1.1.1) при каждом u, $|u| \leq h$ норма вычисляется по той части отрезка $[a,b]$, которая вместе с точкой t содержит также и точку $t+u$, и при этом $0 < h \leq b-a$.

В случае $X = L_p[a,b]$ функцию (1.1.1) называют интегральным модулем непрерывности.

Модуль непрерывности (1.1.1) функции $f(t) \in X$, где $X = C[a,b]$ или $X = L_p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$, обладает следующими свойствами (см., например, монографию Н.П. Корнейчука [10, с.176]):

1) $\omega(f,0)_X = 0$;

2) $\omega(f,h)_X$ не убывает по h в своей области определения;

3) модуль непрерывности $\omega(f,\delta)_X$ есть полуаддитивная функция, то есть

$$\omega(f,h_1+h_2)_X \le \omega(f,h_1)_X + \omega(f,h_2)_X;$$

4) функция $\omega(f,\delta)_X$ непрерывная в своей области определения.

По определению будем называть модулем непрерывности заданную на $[0,+\infty)$ непрерывную, не убывающую и полуаддитивную функцию $\omega(t)$, в нуле равную нулю. Все эти условия, определяющие модуль непрерывности $\omega(t)$, содержатся в следующих соотношениях:

$$\lim_{t\to 0+0}\omega(t)=\omega(0)=0, \quad 0\le \omega(t_2)-\omega(t_1)\le \omega(t_2-t_1) \quad (0\le t_1\le t_2).$$

Важными примерами модулей непрерывности являются функции Kt^α ($t \ge 0$, $0<\alpha\le 1$, $K>0$), а также функции, совпадающие с Kt^α ($0<\alpha\le 1$, $K>0$) на $[0,\delta]$ и с $K\delta^\alpha$ при $t\ge\delta$.

Определим теперь понятие модуля непрерывности для функции двух переменных $f(x,y)$. Всюду далее: $C:=C(Q)$ — линейное пространство непрерывных на квадрате $Q=\big\{(x,y):\ 0\le x,y\le 1\big\}$ функций $f(x,y)$ с обычной чебышевской нормой

$$\big\|f\big\|_C := \max\Big\{\big|f(x,y)\big|:\ (x,y)\in Q\Big\},$$

$C^{(r,s)}:=C^{(r,s)}(Q)$ — множество функций $f(x,y)\in C(Q)$, имеющих в области Q непрерывные частные производные

$$f^{(i,j)}(x,y):=\partial^{i+j}f\big/\partial x^i\partial y^j, \quad i\le r, j\le s,\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ f^{(0,0)}=f.$$

Специфика двумерного случая позволяет функции $f\in C(Q)$ сопоставить различные модули непрерывности. Так, например, равенством

$$\omega(f;h,\eta):=\sup\Big\{\big|f(x',y')-f(x'',y'')\big|:\ \big|x'-x''\big|\le h,\ \big|y'-y''\big|\le\eta\Big\}, \quad (1.1.2)$$

где (x', y'), $(x'', y'') \in Q$, определяют *полный модуль непрерывности*, а соотношениями

$$\omega(f; h, 0) := \sup\Big\{\big|f(x', y) - f(x'', y)\big|:\ \big|x' - x''\big| \leq \delta,\, 0 \leq y \leq 1\Big\}, \tag{1.1.3}$$

$$\omega(f; 0, \eta) := \sup\Big\{\big|f(x, y') - f(x, y'')\big|:\ \big|y' - y''\big| \leq \eta,\, 0 \leq x \leq 1\Big\} \tag{1.1.4}$$

определяют *частные модули непрерывности*, которые характеризуют изменение функции $f(x, y)$ вдоль каждой переменной.

Известно [11, с.124-125], что функция (1.1.2) обладает всеми характеристическими свойствами, которые присущи одномерным модулям непрерывности, поэтому о произвольной функции $\omega(h, \eta)$ говорят, как о *модуле непрерывности*, если она удовлетворяет условиям:

а) $\omega(0, 0) = 0$;

б) $\omega(h, \eta)$ не убывает по h и η, непрерывна и полуаддитивна, то есть если

$$\omega(h' + h'', \eta' + \eta'') \leq \omega(h', \eta') + \omega(h'', \eta'').$$

Модулем непрерывности функции $f \in C(Q)$ также называют функцию

$$\omega_*(f; h, \eta) := \sup\Big\{\big|f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x'', y'')\big|:$$

$$\big|x' - x''\big| \leq h,\ \big|y' - y''\big| \leq \eta,\ x', x'' \in [0, 1],\, y', y'' \in [0, 1]\Big\}. \tag{1.1.5}$$

Легко проверить, что кроме тех характеристических свойств, которыми обладает модуль непрерывности (1.1.2), функция $\omega_*(f; h, \eta)$ обладает ещё следующими свойствами:

в) если $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, то $\omega_*(f; h, \eta) \equiv 0$;

г) если $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то $\omega_*(f; h, \eta) = \omega(f_1, \delta) \cdot \omega(f_2, \eta)$;

д) $\omega_*(f; h, \eta) \leq 2 \min\big\{\omega(f; h, 0), \omega(f; 0, \eta)\big\}$.

Введём определения классов функций, рассматриваемых в дальнейшем.

Обозначим через $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ — класс определённых на Q функций $f(x,y)$, таких, что для любых точек $(x',y')\in Q$, $(x'',y'')\in Q$ выполняется неравенство

$$\bigl|f(x',y')-f(x'',y'')\bigr|\le\omega_1\bigl(|x'-x''|\bigr)+\omega_2\bigl(|y'-y''|\bigr), \tag{1.1.6}$$

где $\omega_1(t)$, $\omega_2(\tau)$ — заданные одномерные модули непрерывности, то есть непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0\le\omega_1(t'')-\omega_1(t')\le\omega_1(t''-t'),\quad 0\le t'\le t''\le 1,\quad \omega_1(0)=0;$$

$$0\le\omega_2(t'')-\omega_2(t')\le\omega_2(t''-t'),\quad 0\le t'\le t''\le 1,\quad \omega_2(0)=0.$$

Легко проверить, что неравенство (1.1.6) эквивалентно системе неравенств

$$\bigl|f(x',y)-f(x'',y)\bigr|\le\omega_1\bigl(|x'-x''|\bigr),\quad 0\le y\le 1,$$

$$\bigl|f(x,y')-f(x,y'')\bigr|\le\omega_2\bigl(|y'-y''|\bigr),\quad 0\le x\le 1.$$

Будем также рассматривать класс $H^{\omega}_{\rho_p}(Q)$ функций $f(x,y)$, заданных на Q и таких, что

$$\bigl|f(M')-f(M'')\bigr|\le\omega\bigl(\rho_p(M',M'')\bigr),$$

где

$$\rho_p(M',M'')=\begin{cases}\sqrt[p]{|x'-x''|^p+|y'-y''|^p}, & \text{если}\ \ 1\le p<\infty,\\ \max\bigl\{|x'-x''|,|y'-y''|\,\bigr\}, & \text{если}\ \ p=\infty,\end{cases} \tag{1.1.7}$$

— l_p – расстояние $(1\le p\le\infty)$ между двумя произвольными точками $M':=M(x',y')$, $M'':=M(x'',y'')$, принадлежащими Q, а $\omega(t)$ — заданный и определённый для $0\le t\le\sqrt[p]{2}$ $(1\le p\le\infty)$ модуль непрерывности.

Обозначим через $W^{(r,s)}H^{\omega}:=W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$ $(r,s\in\mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H^{\omega}=H^{\omega})$ — класс функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s\in\mathbb{N}$, таких, у которых в области

Q существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in Q$ удовлетворяющая условию

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y'')\right|\le\omega\bigl(|x'-x''|,|y'-y''|\bigr),\qquad(1.1.8)$$

где $\omega(t,\tau)$ — заданный двумерный полный модуль непрерывности, то есть функция $\omega(t,\tau)$ в нуле равна нулю, не убывает по h и η, непрерывна и полуаддитивна:

$$\omega\bigl(h_1+h_2,\eta_1+\eta_2\bigr)\le\omega\bigl(h_1,\eta_1\bigr)+\omega\bigl(h_2,\eta_2\bigr).$$

Через $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}:=W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $(r,s\in\mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H^{\omega_1,\omega_2}=H^{\omega_1,\omega_2})$ обозначим класс таких функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s\in\mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y'')\right|\le\omega_1\bigl(|x'-x''|\bigr)+\omega_2\bigl(|y'-y''|\bigr).\qquad(1.1.9)$$

Аналогичным образом определим класс $W^{(r,s)}H^{\omega}_{\rho_p}$ функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s\in\mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая ограничению

$$\left|f^{(r,s)}(M')-f^{(r,s)}(M'')\right|\le\omega\bigl[\rho_p(M',M'')\bigr],\quad 1\le p\le\infty,\qquad(1.1.10)$$

где $\rho_p(M',M'')$ определёно равенством (1.1.7).

Параллельно, аналогичным образом, введём класс $W^{(r,s)}H^{\omega_*}$ функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s\in\mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая условию

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y')-f^{(r,s)}(x',y'')+f^{(r,s)}(x'',y'')\right|\le$$

$$\le\omega_*\bigl(|x'-x''|,|y'-y''|\bigr),$$

где $\omega_*(t,\tau)$ — заданный двумерный модуль непрерывности типа (1.1.5).

Вышеприведённые классы функций можно задавать посредством нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^2$. Пусть, например, ω — произвольный модуль непрерывности, а $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^2$, и пусть $r,s\in\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Определим класс $W^{(r,s)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ функций $f(x,y)\in C^{(r,s)}(Q)$, таких, для которых

$$\left|f^{(r,s)}(M') - f^{(r,s)}(M'')\right| \le \omega\big(\|M'-M''\|\big), \quad M',M''\in Q.$$

При этом полагаем $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q) := W^{(0,0)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$. Как в большинстве случаев, рассмотрим обычную l_p-норму, которую определим равенством

$$\big\|(x,y)\big\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{|x|^p+|y|^p}, & \text{если } \ 1\le p<\infty, \\ \max\big\{|x|,|y|\,\big\}, & \text{если } \ p=\infty. \end{cases}$$

В этих случаях, соответствующие классы обозначим $W^{(r,s)}H^{\omega}_p(Q)$ и $H^{\omega}_p(Q)$ при всех $1\le p\le\infty$.

1.1.2. Определения многогранных функций

Фиксируем два разбиения отрезка $[0,1]$:

$$\Delta_m:\ 0=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=1,$$

$$\Delta_n:\ 0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=1,$$

которыми задаются решётка разбиения

$$\Delta_{m,n} := \Delta_m\times\Delta_n$$

единичного квадрата Q на ячейки

$$Q_{k,i} := [x_{k-1},x_k]\times[y_{i-1},y_i], \quad k=1,2,\ldots,m;\ i=1,2,\ldots,n.$$

Точки $M_{k,i} := (x_k, y_i)$, $k = 0,1,\ldots,m$; $i = 0,1,\ldots,n$, называются узлами разбиения квадрата Q. Всюду далее полагаем

$$h_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1,2,\ldots,m;\ \eta_i := y_i - y_{i-1},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\big\|\Delta_m\big\| := \max\big\{h_k :\ k = 1,2,\ldots,m\big\}, \quad \big\|\Delta_n\big\| := \max\big\{\eta_i :\ i = 1,2,\ldots,n\big\}.$$

Равномерное разбиение квадрата Q обозначим через

$$\overline{\Delta}_{m,n} := \left\{\left(\frac{k}{m}, \frac{i}{n}\right) :\ k = 1,2,\ldots,m;\ i = 1,2,\ldots,n\right\}.$$

Определение 1.1.1. (В.Ф.Сторчай [19]) *Для заданной функции $f \in C(Q)$ многогранной функцией, вписанной в $f(x,y)$ в узлах $M_{k,i}$, называется функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$, для которой:*

1) $\mathscr{L}_{m,n}(f;M_{k,i}) = f(M_{k,i})$, $k = 0,1,\ldots,m$; $i = 0,1,\ldots,n$;

2) каждый прямоугольник $Q_{k,i}$ можно разделить диагональю на два треугольника, внутри каждого из которых $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ совпадает с некоторой плоскостью.

Функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является непрерывным линейным сплайном, интерполирующим $f(x,y)$ в узлах

$$M_{k,i} = (x_k, y_i)\ (k = 0,1,\ldots,m;\ i = 0,1,\ldots,n).$$

Ясно, что для любой функции $f(x,y) \in C(Q)$ многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) \in C(Q)$ определяется при фиксированных узлах, вообще говоря, неоднозначно. Для $(x,y) \in Q_{k,i}$ $(k = 1,2,\ldots,m;\ i = 1,2,\ldots,n)$ полагаем

$$H_{0,k}(x) := \frac{x_k - x}{h_k}, \quad H_{1,k}(x) := \frac{x - x_{k-1}}{h_k}, \quad H_{0,k}(x) + H_{1,k}(x) = 1;$$

$$N_{0,i}(y) := \frac{y_i - y}{\eta_i}, \quad N_{1,i}(y) := \frac{y - y_{i-1}}{\eta_i}, \quad N_{0,i}(y) + N_{1,i}(y) = 1.$$

Если соединить точки $M_{k-1,i-1} := (x_{k-1}, y_{i-1})$ и $M_{k,i} := (x_k, y_i)$ диагональю $\overline{M_{k-1,i-1}M}_{k,i}$, то прямоугольник $Q_{k,i}$ разделится на два треугольника

$$T_{k,i}^{(1)} := \Big\{(x,y) :\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} + H_{1,k}(x)\eta_i \le y \le y_i\Big\},$$

$$T_{k,i}^{(2)} := \Big\{(x,y) :\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} \le y \le y_{i-1} + H_{1,k}(x)\eta_i\Big\}.$$

В этом случае функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ непрерывная и может быть задана формулой [19] (см. также монографию [25])

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) :=$$

$$= \begin{cases} N_{0,i}(y)f(x_{k-1},y_{i-1}) + \big(N_{1,i}(y) - H_{1,k}(x)\big)f(x_{k-1},y_i) + \\ +H_{1,k}(x)f(x_k,y_i),\ (x,y) \in T_{k,i}^{(1)}, \\ H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_{i-1}) + \big(H_{1,k}(x) - N_{1,i}(y)\big)f(x_k,y_{i-1}) + \\ +N_{1,i}(y)f(x_k,y_i),\ (x,y) \in T_{k,i}^{(2)}. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Аналогичным образом, если соединить точки $M_{k-1,i} := (x_{k-1,i}, y_i)$ и $M_{k,i-1} := (x_k, y_{i-1})$ диагональю $\overline{M_{k-1,i}M}_{k,i-1}$, то получим следующие два треугольника

$$T_{k,i}^{(3)} := \Big\{(x,y) :\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} \le y \le y_i - H_{1,k}(x)\eta_i\Big\},$$

$$T_{k,i}^{(4)} := \Big\{(x,y) :\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_i - H_{1,k}(x)\eta_i \le y \le y_i\Big\}.$$

Многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ в этом случае задаётся выражением

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) :=$$

$$= \begin{cases} \big(H_{0,k}(x) - N_{1,i}(y)\big)f(x_{k-1},y_{i-1}) + N_{1,i}(y)f(x_{k-1},y_i) + \\ +H_{1,k}(x)f(x_k,y_{i-1}),\ (x,y) \in T_{k,i}^{(3)}, \\ H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_i) + \big(H_{1,k}(x) - N_{0,i}(y)\big)f(x_k,y_i) + \\ +N_{0,i}(y)f(x_k,y_{i-1}),\ (x,y) \in T_{k,i}^{(4)}. \end{cases} \tag{1.1.12}$$

Из представлений (1.1.11) и (1.1.12) сразу видно, что в каждом из треугольников $T_{k,i}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ многогранная функция имеет вид

$$\mathscr{L}_{m,n}(f; x, y) := a_{k,i}^{(\nu)} + b_{k,i}^{(\nu)} x + c_{k,i}^{(\nu)} y \ \ (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

где $a_{k,i}^{(\nu)}\, b_{k,i}^{(\nu)}$, $c_{k,i}^{(\nu)}$ — некоторые действительные числа. Ясно, что значения $\mathscr{L}_{m,n}(f; x, y)$ в фиксированной точке $(x_0, y_0) \in Q$ определяются значениями $f(x, y)$ в вершинах соответствующего треугольника, поэтому погрешность можно оценить локально на каждом из таких треугольников.

1.1.3. Известные точные оценки погрешности приближения некоторых классов функций многогранными функциями

В этом пункте приведём известные точные оценки и сформулируем общую задачу приближения функции f из класса $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и её производных $f^{(l,j)}$ функций $f \in W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$, $((l, j) = (1, 0)$ или $(0, 1))$ вписанными в них многогранными функциями и их соответствующими производными. Заметим, что поскольку $\mathscr{L}_{m,n}(f; x, y)$ является линейной функцией по обеим переменным x и y, то её производные выше первого порядка обращаются в нуль, а в соответствии с этим приближение производных выше первого порядка функции f соответствующими производными многогранными функциями не имеет смысла.

Для фиксированного разбиения $\Delta_{m,n}$ квадрата Q пусть

$$e^{(0,0)}(f; x, y, \Delta_{m,n}) = f(x, y) - \mathscr{L}_{m,n}(f; x, y)$$

в каждой точке $(x, y) \in Q_{k,i}$ $(k = \overline{1, m},\ i = \overline{1, n})$. Полагаем

$$e^{(0,0)}(f; \Delta_{m,n}) := \Big\| f - \mathscr{L}_{m,n}(f) \Big\|_{C(Q)}.$$

Заметим, что из наших результатов будет следовать, что значение этой величины не зависит от выбора вписанной в функцию многогранной функции $\mathscr{L}_{m,n}(f)$. Далее, положим

$$e^{(l,j)}(f;\Delta_{m,n}) := \sup\left\{\left|f^{(l,j)}(x,y) - \mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)\right| :\ (x,y)\in Q_0\right\},$$

где $(l,j)=(1,0)$ или $(0,1)$ и Q_0 есть подмножество из Q, где $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является дифференцируемой функцией, то есть мы исключаем из Q стороны прямоугольников $Q_{k,i}$ вместе с диагоналями триангуляции, где частные производные $\mathscr{L}^{(1,0)}_{m,n}(f;x,y)$ и $\mathscr{L}^{(0,1)}_{m,n}(f;x,y)$ претерпевают разрыв первого порядка. После этого мы определим для $(l,j)=(0,0)$, $(1,0)$ или $(0,1)$ и фиксированного разбиения $\Delta_{m,n}$ величину

$$E^{(l,j)}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q);\Delta_{m,n}) := \sup\left\{e^{(l,j)}(f;\Delta_{m,n}) :\ f\in W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)\right\}$$

и для фиксированных $m,n\in\mathbb{N}$ положим

$$\mathscr{E}^{(l,j)}_{m,n}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)) := \inf_{\Delta_{m,n}} E^{(l,j)}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)). \tag{1.1.13}$$

Сформулированную задачу, когда решетка узлов равномерная, то есть когда

$$M_{k,i} := \left(\frac{k}{m},\frac{i}{n}\right) \quad \left(k=\overline{0,m};\ i=\overline{1,n}\right)$$

и $r=s=0$, для некоторых классов функций изучал В.Ф.Сторчай [19].

Рассматривая разность

$$e(f;x,y) := f(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) \tag{1.1.14}$$

на одном из треугольников $T^{(\nu)}_{k,i}$ $\left(\nu=\overline{1,4}\right)$, где $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ линейна по обеим переменным x и y, и учитывая, что в вершинах $M_{k,i}$ этого треугольника $e(f;x,y)$ обращается в нуль, можно оценить величину (1.1.14) через *полный* *и частные модули непрерывности* функции $f(x,y)$ или же их мажоранты, используя соображения, сходные с теми, которые привлекались в одномерном случае. Приведём результаты В.Ф.Сторчая [19], полученные в случае равномерного разбиения $\overline{\Delta}_{m,n}$ квадрата Q:

$$\sup_{f\in C(Q)} \frac{\big\|f-\mathscr{L}_{m,n}(f)\big\|}{\omega\big(f;1/(2m),0\big)+\omega\big(f;0,1/(2n)\big)}=\frac{3}{2}.$$

Если $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ — класс функций $f(x,y)\in C(Q)$, у которых

$$\omega\big(f;\delta,0\big)\le\omega_1\big(\delta\big),\quad \omega\big(f;0,\eta\big)\le\omega_2\big(\eta\big),$$

где $\omega_1\big(\delta\big)$ и $\omega_2\big(\eta\big)$ — заданные модули непрерывности, то при условии выпуклости вверх $\omega_1\big(\delta\big)$ и $\omega_2\big(\eta\big)$ имеет место равенство

$$\sup_{H^{\omega_1,\omega_2}(Q)}\big\|f-\mathscr{L}_{m,n}(f)\big\|_{C(Q)}=\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right). \tag{1.1.15}$$

Определив класс $H_2^{\omega}(Q)$ функций $f\in C(Q)$ условием $\omega(f;\delta,\eta)\le\omega\big(\sqrt{\delta^2+\eta^2}\big)$, где ω — выпуклый по обеим переменным модуль непрерывности, В.Ф.Сторчай [20], доказал, что

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(0,0)}\big(H_2^{\omega}(Q)\big)=E^{(0,0)}\big(H_2^{\omega}(Q),\overline{\Delta}_{m,n}\big)=\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}}\right). \tag{1.1.16}$$

Заметим, что в соотношениях (1.1.15) и (1.1.16) правые части не уменьшаются [20], если вместо $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ взять эрмитовый сплайн $S_{m,n}(f;x,y)\in S_{2r-1,2s-1}^{(r,s)}(\Delta_{m,n})$, определяемый равенствами

$$S^{(\nu,\mu)}(f;x_k,y_i)=f^{(\nu,\mu)}(x_k,y_i),$$

$$\nu=0,1,\cdots,r-1;\ k=0,1,\cdots,m;$$

$$\mu=0,1,\cdots,s-1;\ i=0,1,\cdots,n,$$

где надо положить $f^{(\nu,\mu)}(x_k,y_i)=0$ при $\nu>0$ и $\mu>0$.

Таким образом, как и в одномерном случае, повышение гладкости приближающих сплайнов не сказывается на оценке погрешности для классов $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_2^{\omega}(Q)$ (см., например, [11, стр. 336]).

Следует также отметить близкие к теме исследований работы В.Ф. Бабенко [1], В.Ф.Бабенко, А.А. Лигуна [2] и В.Ф.Бабенко, Т.Ю. Лескевич [3], в которых получены точные результаты для некоторых классов функций.

§ 1.2. Точные оценки приближения функций для классов $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(0 < p \le 3)$, $Q := \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\}$ многогранными функциями

В этом параграфе мы рассмотрим задачу приближения функций классов $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ многогранными функциями. Нам понадобится одно утверждение, доказанное Н.П.Корнейчуком [9] и приведенное в дополнении Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [15].

Лемма 1.2.1. ([15, лемма D.5]). *Пусть в области $S \in \mathbb{R}^d$ $(d \ge 2)$ фиксирована произвольная система точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$, ρ — произвольное расстояние в $\mathbb{R}^d$ и функция $g(M)$ определена равенством*

$$g(M) := \min_{1 \le j \le k} \varphi[\rho(M, M_j)], \quad M \in S,$$

где $\varphi(t)$ — неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le \varphi(t_2 - t_1), \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le G,$$

(G — диаметр области S) функция. Тогда для любых точек M' и M'' из S имеет место неравенство

$$\Big|g(M') - g(M'')\Big| \le \varphi\big[\rho(M', M'')\big].$$

Сначала мы изучим приближение функции $f \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ в одном треугольнике линейной функцией, интерполирующей функцию f в вершинах треугольника. Ради простоты рассмотрим замкнутый треугольник T с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Ясно, что оценку погрешности приближения для произвольного треугольника затем можно получить линейной заменой переменных.

Обозначим через $\mathscr{L}(f;x,y)$ линейную функцию, интерполирующую функцию $f(x,y)$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— произвольная норма в* $\mathbb{R}^2$ *и пусть* ω *— произвольный модуль непрерывности. Для каждой функции* $f \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$ *имеет место неравенство*

$$\max_{(x,y)\in T}\Big|f(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)\Big| \le$$

$$\le \max_{(x,y)\in T}\Big\{(1-x-y)\omega\Big(\big\|(x,y)\big\|\Big)+x\omega\Big(\big\|(x,y)-(1,0)\big\|\Big)+$$

$$+y\omega\Big(\big\|(x,y)-(0,1)\big\|\Big)\Big\}. \tag{1.2.1}$$

Оценка (1.2.1) *на классе* $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$ *точная в том смысле, что существует функция* $F \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$*, для которой* (1.2.1) *обращается в равенство.*

Доказательство. Линейный интерполянт для функции $f(x,y)$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$ задается формулой

$$\mathscr{L}(f;x,y)=(1-x-y)f(0,0)+xf(1,0)+yf(0,1).$$

Так как

$$f(x,y)=(1-x-y)f(x,y)+xf(x,y)+yf(x,y),$$

то для любого $(x,y)\in T$ имеем

$$\Big|f(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)\Big| \le$$

$$\le (1-x-y)\Big|f(x,y)-f(0,0)\Big|+x\Big|f(x,y)-f(1,0)\Big|+y\Big|f(x,y)-f(0,1)\Big|.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$ в силу неравенств

$$\Big|f(x,y)-f(x',y')\Big| \le \omega\Big(\big\|(x,y)-(x',y')\big\|\Big)$$

для любых точек $(x,y),(x',y')\in T$ получаем

$$\Big|f(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)\Big|\le(1-x-y)\omega\Big(\big\|(x,y)-f(0,0)\big\|\Big)+$$

$$+x\omega\Big(\big\|(x,y)-(1,0)\big\|\Big)+y\omega\Big(\big\|(x,y)-(0,1)\big\|\Big). \qquad (1.2.2)$$

Из (1.2.2) сразу следует оценка (1.2.1).

Теперь покажем, что неравенство (1.2.1) точно на классе $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$, то есть существует функция $F\in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$, для которой в (1.2.1) реализуется знак равенства. Положим

$$\Phi(x,y):=(1-x-y)\omega\Big(\big\|(x,y)-(0,0)\big\|\Big)+$$

$$+x\omega\Big(\big\|(x,y)-(1,0)\big\|\Big)+y\omega\Big(\big\|(x,y)-(0,1)\big\|\Big). \qquad (1.2.3)$$

Функция $\Phi(x,y)$ является непрерывной, а потому достигает свой максимум на компактном множестве T. Пусть $(x^*,y^*)\in T$ — точка, в которой

$$\max_{(x,y)\in T}\Phi(x,y)=\Phi(x^*,y^*).$$

Положим

$$\mathscr{A}:=\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)\big\|\Big)-\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(1,0)\big\|\Big),$$

$$\mathscr{B}:=\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)\big\|\Big)-\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(0,1)\big\|\Big)$$

и введём в рассмотрение функцию

$$F(x,y):=$$

$$:=\min\big\{\omega\big(\|(x,y)\|\big),\,\mathscr{A}+\omega\big(\|(x,y)-(1,0)\|\big),\,\mathscr{B}+\omega\big(\|(x,y)\|-\|(0,1)\|\big)\big\}. \qquad (1.2.4)$$

Очевидно, что $F(x,y)$ является непрерывной. При этом $F(0,0)=0$. Действительно, $\omega\Big(\big\|(0,0)\big\|\Big)=\omega(0)=0$, и таким образом

$$F(0,0)=\min\Big\{0,\,\mathscr{A}+\omega\Big(\big\|(1,0)\big\|\Big),\,\mathscr{B}+\omega\Big(\big\|(0,1)\big\|\Big)\Big\}.$$

Из полуаддитивности модуля непрерывности имеем оценку

$$\omega\Big(\big\|(x^*, y^*) - (1,0)\big\|\Big) \le \omega\Big(\big\|(x^*, y^*)\big\| + \big\|(1,0)\big\|\Big) \le$$

$$\le \omega\Big(\big\|(x^*, y^*)\big\|\Big) + \omega\Big(\big\|(1,0)\big\|\Big),$$

которая влечёт $\mathscr{A} + \omega\Big(\big\|(1,0)\big\|\Big) \ge 0$. Аналогичным образом $\mathscr{B} + \omega\Big(\big\|(0,1)\big\|\Big) \ge 0$. Таким же образом можно показать, что $F(1,0) = \mathscr{A}$, $F(0,1) = \mathscr{B}$.

Функция F принадлежит классу $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$. Чтобы показать это, мы воспользуемся схемой доказательства леммы 1.2.1 (леммы Д.5 из [15]). Пусть (x, y), $(x', y') \in T$ и пусть сначала

$$F(x,y) = \mathscr{A} + \omega\Big(\big\|(x,y) - (1,0)\big\|\Big).$$

Пользуясь полуаддитивностью ω, получаем

$$F(x,y) - F(x', y') \le$$

$$\le \omega\Big(\big\|(x,y) - (1,0)\big\|\Big) - \omega\Big(\big\|(x',y') - (1,0)\big\|\Big) \le \omega\Big(\big\|(x,y) - (x',y')\big\|\Big).$$

В двух других случаях также легко получаем

$$F(x,y) - F(x', y') \le \omega\Big(\big\|(x,y) - (x',y')\big\|\Big)$$

и, наконец, поменяв (x, y) и (x', y') местами, приходим к неравенству

$$\Big|F(x,y) - F(x', y')\Big| \le \omega\Big(\big\|(x,y) - (x',y')\big\|\Big),$$

которое согласно определению означает, что $F(x, y) \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$.

Теперь рассмотрим точку (x^*, y^*). По построению имеем

$$F(x^*, y^*) = \omega\Big(\big\|(x^*, y^*)\big\|\Big) = F(1,0) + \omega\Big(\big\|(x^*, y^*) - (1,0)\big\|\Big) =$$

$$= F(0,1) + \omega\Big(\big\|(x^*, y^*) - (0,1)\big\|\Big),$$

а потому

$$F(x^*,y^*)=(1-x^*-y^*)\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)\big\|\Big)+$$

$$+x^*\Big[F(1,0)+\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(1,0)\big\|\Big)\Big]+$$

$$+y^*\Big[F(0,1)+\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(0,1)\big\|\Big)\Big].$$

Сравнивая это с выражением

$$\mathscr{L}(f;x^*,y^*)=x^*F(1,0)+y^*F(0,1)$$

и вспомнив, что (x^*,y^*) является точкой максимума правой части (1.2.1), мы получаем

$$F(x^*,y^*)-\mathscr{L}(f;x^*,y^*)=(1-x^*-y^*)\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)\big\|\Big)+$$

$$+x^*\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(1,0)\big\|\Big)+y^*\omega\Big(\big\|(x^*,y^*)-(0,1)\big\|\Big)=$$

$$=\max_{(x,y)\in T}\Big\{(1-x-y)\omega\Big(\big\|(x,y)\big\|\Big)+x\omega\Big(\big\|(x,y)-(1,0)\big\|\Big)+$$

$$+y\omega\Big(\big\|(x,y)\big\|-\big\|(0,1)\big\|\Big)\Big\}.$$

Заметим, что из (1.2.1) также вытекает, что

$$F(x^*,y^*)-\mathscr{L}(f;x^*,y^*)=\max_{(x,y)\in T}\Big\{F(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)\Big\},$$

откуда и следует, что (1.2.1) обращается в равенство для функции $F(x,y)\in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$, чем мы завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Оценка, полученная в теореме 1.2.1, далее специализируется для случая, когда модуль непрерывности ω является выпуклой вверх функцией, а норма $\|\cdot\|$ является l_p-нормой для $1\le p\le 3$. Сначала мы сформулируем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2.2. *Пусть* $1 \le p \le 3$. *Для функции* $\varphi(x) = x^p(1-x)+x(1-x)^p$ *имеем*

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p. \tag{1.2.5}$$

При $p > 3$ *точка* $x = \dfrac{1}{2}$ *является точкой локального минимума функции* $\varphi(x)$ *и, следовательно,*

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

Доказательство. Равенство (1.2.5) для $1 \le p \le 2$ и $2 \le p \le 3$ доказывается разными методами. Сначала приведём доказательство равенства (1.2.5) для $1 \le p \le 2$. Функцию $\varphi(x)$ запишем в виде

$$\varphi(x) = g(x) + g(1-x),$$

где $g(x) = x^p(1-x)$. Элементарный анализ показывает, что функция $g(x)$ возрастает на отрезке $[0, p/(p+1)]$ и убывает на интервале $[p/(p+1), 1]$, причем $1/2 \le p/(p+1) \le 2/3$. Далее, функция $g(x)$ выпукла на отрезке $[0, (p-1)/(p+1)]$ и вогнута на отрезке $[(p-1)/(p+1), 1]$, причем $0 \le (p-1)/(p+1) \le 1/3$. Полагая $c := (p-1)/p$ (имеем $(p-1)/(p+1) \le (p-1)/p \le 1/2$), рассмотрим функцию

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x)}{c} \cdot x, & 0 \le x \le c, \\ g(x), & c \le x \le 1. \end{cases}$$

Функция $\widetilde{g}(x)$ непрерывна, непрерывно дифференцируема и выпукла на отрезке $[0,1]$. Прямая $y = \dfrac{g(x)}{c} \cdot x$ является касательной линией к графику $g(x)$ в точке c и одновременно секущей в точках 0 и c. Отсюда следует, что $g(x) \le \widetilde{g}(x)$ для всех $x \in [0,1]$.

В силу выпуклости функции $\widetilde{g}(x)$ мы при всех $x \in [0,1]$ имеем

$$\varphi(x) = g(x) + g(1-x) \le \widetilde{g}(x) + \widetilde{g}(1-x) \le$$

$$\le 2\widetilde{g}\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right) = 2\widetilde{g}\left(\frac{1}{2}\right) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p,$$

и этим утверждение леммы 1.2.2 для случая $1 \le p \le 2$ доказано.

Теперь докажем (1.2.5) для случая $2 < p \le 3$. Заметим, что $\varphi(x) = \varphi(1-x)$, а потому достаточно рассматривать функцию $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 1/2]$. Имеем

$$\varphi'(x) = px^{p-1}(1-x) - x^p + (1-x)^p - px(1-x)^{p-1},$$

причём $\varphi'\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0$. Покажем, что $\varphi'(x) > 0$ для всех $x \in (0, 1/2)$. Для этого рассмотрим вторую производную

$$\varphi''(x) = p(p-1)\Big[x^{p-2}(1-x) + x(1-x)^{p-2}\Big] - 2p\Big[x^{p-1} + (1-x)^{p-1}\Big].$$

Так как

$$\varphi''\Big(\frac{1}{2}\Big) = p(p-3)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-2} \le 0$$

для $x \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$, то, используя неравенство $p-1 \le 2$, запишем

$$\varphi''(x) \le 2p\Big[x^{p-2}(1-x) + x(1-x)^{p-2}\Big] - 2p\Big[x^{p-1} + (1-x)^{p-1}\Big] =$$

$$= 2p(1-2x)\Big[x^{p-2} - (1-x)^{p-2}\Big] < 0,$$

где в последнем соотношении мы учли тот факт, что $x^{p-2} < (1-x)^{p-2}$ для $x \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$ и $p - 2 > 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi'(x)$ возрастает на интервале $\Big(0, \frac{1}{2}\Big)$. С учётом $\varphi'(1/2) = 0$ получаем, что $\varphi'(1/2) > 0$ для всех $x \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$ и, следовательно, для $2 < p \le 3$

$$\max_{x\in[0,1/2]} \varphi(x) = \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^p},$$

откуда и следует равенство (1.2.5).

Заметим, что если $p > 3$, то мы имеем $\varphi'(1/2) = 0$ и $\varphi''(1/2) = p(p-3)(1/2)^{p-2} > 0$, а потому точка $x = 1/2$ является точкой локального минимума функции φ, и

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) > \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^p}.$$

Лемма 1.2.2 доказана.

Теперь мы сможем сформулировать специальный случай теоремы 1.2.1 для модуля непрерывности ω и l_p-нормы, при $1 \le p \le 3$.

Теорема 1.2.2. *Пусть ω — выпуклый модуль непрерывности и $1 \le p \le 3$. Для каждой функции $f(x,y) \in H_p^\omega(T)$ справедливо неравенство*

$$\max_{(x,y)\in T} \Big| f(x,y) - \mathscr{L}(f;x,y) \Big| \le \omega\Big(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\Big). \tag{1.2.6}$$

Оценка (1.2.6) *точна на классе $H_p^\omega(T)$ в том смысле, что существует функция $f_0(x,y) \in H_p^\omega(T)$, для которой* (1.2.6) *обращается в равенство. Неравенство* (1.2.6) *при $p > 3$ в общем случае не имеет место.*

Доказательство. Пусть $f(x,y) \in H_p^\omega(T)$, $1 \le p \le 3$ и $(x,y) \in T$. Используя свойство выпуклости функций ω и $\sqrt[p]{t}$ и оценку (1.2.2), запишем

$$\Big| f(x,y) - \mathscr{L}(f;x,y) \Big| \le \Phi(x,y) =$$

$$= (1-x-y)\omega\big(\sqrt[p]{x^p+y^p}\big) + x\omega\big(\sqrt[p]{(1-x)^p+y^p}\big) + y\omega\big(\sqrt[p]{x^p+(1-y)^p}\big) \le$$

$$\le \omega\left(\Big\{(1-x-y)(x^p+y^p) + x\big((1-x)^p+y^p\big) + y\big(x^p+(1-y)^p\big)\Big\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\Big\{x^p(1-x) + x(1-x)^p + y^p(1-y) + y(1-y)^p\Big\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\big\{\varphi(x) + \varphi(y)\big\}^{1/p}\right), \tag{1.2.7}$$

где функция $\Phi(x,y)$ определена в (1.2.3), а функция φ определена в лемме 1.2.2. В силу леммы 1.2.2 и (1.2.7) имеем

$$\Big|f(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)\Big| \le \Phi(x,y) \le$$

$$\le \omega\left(\left\{\varphi(x)+\varphi(y)\right\}^{1/p}\right) \le \omega\left(\left\{2\Big(\frac{1}{2}\Big)^p\right\}^{1/p}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\right),$$

откуда и следует неравенство (1.2.6). Докажем теперь точность неравенства (1.2.6) на классе $H_p^{\omega}(T)$. Будем использовать схему рассуждений, применённую нами при доказательстве теоремы 1.2.1. Так как $\Phi(x,y) \le \omega\Big(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\Big)$ и $\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \omega\Big(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\Big)$, то мы имеем $(x^*,y^*) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Функцию $F(x,y)$ из (1.2.4) берём в виде

$$F(x,y) = \min\left\{\omega\big(\sqrt[p]{x^p+y^p}\big),\, \omega\big(\sqrt[p]{(1-x)^p+y^p}\big),\, \omega\big(\sqrt[p]{x^p+(1-y)^p}\big)\right\}.$$

Имеем $F(0,0) = F(1,0) = F(0,1) = 0$. Следовательно, $\mathscr{L}(F;x,y) \equiv 0$, и поэтому имеем

$$\left|F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \mathscr{L}\left(F;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \omega\left(\sqrt[p]{\Big(\frac{1}{2}\Big)^p+\Big(\frac{1}{2}\Big)^p}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\right).$$

Следовательно,

$$\max_{(x,y)\in T}\Big|F(x,y)-\mathscr{L}(F;x,y)\Big| = \Big|F(x^*,y^*)-\mathscr{L}(F;x^*,y^*)\Big| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \mathscr{L}\left(F;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\right),$$

откуда и вытекает точность неравенства (1.2.6).

Пусть теперь $p>3$. Покажем, что оценка (1.2.6) не имеет места для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)=t$. По теореме 1.2.1 для функции

$F(x,y) \in H_p^\omega(T)$, построенной нами в (1.2.5), имеет место равенство

$$\max_{(x,y)\in T} \Big| F(x,y) - \mathscr{L}(F;x,y) \Big| = \max_{(x,y)\in T} \Phi(x,y).$$

Поскольку $\Phi\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \omega\Big(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\Big)$ (в котором, если $p = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{2} = 1$) оценка (1.2.7) соответствует ситуации, когда максимум функции $\Phi(x,y)$ достигается в точке $(x^*, y^*) = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Покажем, что этого не будет в случае, когда $p > 3$ и $\omega(t) = t$.

Пусть сначала $3 < p < \infty$ и функция $\Phi(x,y)$ имеет вид

$$\Phi(x,y) = (1-x-y)\sqrt[p]{x^p + y^p} + x\sqrt[p]{(1-x)^p + y^p} + y\sqrt[p]{x^p + (1-y)^p}.$$

Несложное вычисление показывает, что

$$\Phi^{(1,0)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Phi^{(0,1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Далее находим

$$\Phi^{(2,0)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Phi^{(0,2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}+1}(p-5),$$

$$\Phi^{(1,1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}+1}(p-1),$$

и таким образом

$$\Phi^{(2,0)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \Phi^{(0,2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left[\Phi^{(1,1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{p}-1}(p-3). \quad (1.2.8)$$

Мы видим, что последнее выражение является неотрицательным, только лишь когда $1 \le p \le 3$ (в этом случае точка $\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$ является как локальным, так и глобальным максимумом функции $\Phi(x,y)$). Если $p > 3$, то соотношение (1.2.8) является отрицательным и точка $\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$ является седловой точкой функции $\Phi(x,y)$, а потому не может быть точкой максимума, но это означает, что оценка (1.2.7) не имеет места в этом случае.

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$. Имеем $\max\{1-x, y\} = 1-x$ и $\max\{x, 1-y\} = 1-y$ в треугольнике T, и тем самым получаем

$$\Phi(x,y) = (1-x-y)\max(x,y) + x(1-y) + y(1-x).$$

Простые вычисления показывают, что максимум функции $\Phi(x,y)$ в треугольнике T равен $\frac{4}{7}$ и достигается в точках $\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$ и $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Полагая, например, $(x^*, y^*) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$, мы получаем функцию $F(x,y)$ в (1.2.5) со значениями $A = -\frac{1}{7}$, $B = -\frac{2}{7}$, т.е.

$$F(x,y) = \min\left\{\max(x,y), \frac{6}{7} - x, \frac{5}{7} - y\right\}.$$

Для нее $F(0,0) = 0$, $F(1,0) = -\frac{1}{7}$, $F(0,1) = -\frac{2}{7}$, а потому линейным интерполянтом для этой функции является функция

$$\mathscr{L}(f; x, y) = -\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y.$$

В итоге имеем

$$\left| F\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right) - \mathscr{L}\left(F; \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right) \right| = \frac{4}{7} > \frac{1}{2} = \omega\left(\frac{1}{2}\right),$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Из этой теоремы получаем

Следствие 1.2.1. *Пусть ω — выпуклый модуль непрерывности и $1 \le p \le 3$. Пусть $f \in H_p^\omega(Q)$ и $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ есть вписанная многогранная функция в f. Для каждого треугольника $T_{k,i}^{(\nu)}$ ($k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$) и $\nu \in \{1,2,3,4\}$, на котором $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ является линейной функцией, имеем*

$$\max_{(x,y)\in T_{k,i}^{(\nu)}} \left| f(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}(f; x, y) \right| \le \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{h_k^p + \eta_i^p}\right). \qquad (1.2.9)$$

Доказательство. В частичном треугольнике $T_{k,i}^{(\nu)}$ рассмотрим функцию $f \in H_p^\omega(Q)$, которая зависит от геометрии треугольника. Проведем следующую замену переменных

$$\begin{cases} x = x_{k-1} + th_k, \quad y = y_i - \tau\eta_i & \text{для} \quad (x,y) \in T_{k,i}^{(1)}, \\ x = x_k + th_k, \quad y = y_{i-1} + \tau\eta_i & \text{для} \quad (x,y) \in T_{k,i}^{(2)}, \\ x = x_{k-1} + th_k, \quad y = y_{i-1} + \tau\eta_i & \text{для} \quad (x,y) \in T_{k,i}^{(3)}, \\ x = x_k - th_k, \quad y = y_i - \tau\eta_i & \text{для} \quad (x,y) \in T_{k,i}^{(4)}. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

При этом $(t,\tau) \in T$. Рассмотрим функцию $\widetilde{f}(t,\tau) := f(x,y)$, где точки (t,τ) и (x,y) взаимосвязаны соотношениями (1.2.10). Тогда $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) = \mathscr{L}_{m,n}(\widetilde{f};t,\tau)$ для всех точек $(x,y) \in T_{k,i}^{(\nu)}$ $(\nu = \overline{1,4})$. Очевидно, что функция $\widetilde{f}(t,\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\widetilde{f}(t,\tau) - \widetilde{f}(t',\tau')\right| \le \omega\Big(\big\|h_k(t-t'), \eta_i(\tau-\tau')\big\|_p\Big).$$

Как и при доказательстве теоремы 1.2.2, для $(x,y) \in T_{k,i}^{(\nu)}$ будем иметь

$$\left|f(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)\right| = \left|\widetilde{f}(t,\tau) - \mathscr{L}_{m,n}(\widetilde{f};t,\tau)\right| \le$$

$$\le (1-t-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{(h_k t)^p + (\eta_i\tau)^p}\right) + t\omega\left(\sqrt[p]{(h_k(1-t))^p + (\eta_i\tau)^p}\right) +$$

$$+\tau\omega\left(\sqrt[p]{(h_k t)^p + (\eta_i(1-\tau))^p}\right) \le \omega\left(\left\{h_k^p\varphi(t) + \eta_i^p\varphi(\tau)\right\}^{1/p}\right) \le$$

$$\le \omega\left(\left\{h_k^p\Big(\frac{1}{2}\Big)^p + \eta_i^p\Big(\frac{1}{2}\Big)^p\right\}^{1/p}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{h_k^p + \eta_i^p}\right),$$

откуда и следует утверждение следствия 1.2.1.

Следующее утверждение является основным результатом этого параграфа.

Теорема 1.2.3. *Пусть ω является выпуклым вверх модулем непрерывности и $1 \le p \le 3$. Для произвольного фиксированного разбиения $\Delta_{m,n}$ имеет место равенство*

$$E^{(0,0)}\big(H_p^\omega(Q,\Delta_{m,n})\big) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\|\Delta_m\|^p + \|\Delta_n\|^p}\right). \tag{1.2.11}$$

Среди всех разбиений $\Delta_{m,n}$ с фиксированными m и n правая часть (1.2.11) *принимает минимальное значение на равномерном разбиении $\overline{\Delta}_{m,n}$, то есть*

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(0,0)}\big(H_p^\omega(Q\big) = \min_{\Delta_{m,n}} E^{(0,0)}\big(H_p^\omega(Q,\Delta_{m,n})\big) =$$

$$= E^{(0,0)}\big(H_p^\omega(Q,\overline{\Delta}_{m,n})\big) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}\right)^p + \left(\frac{1}{n}\right)^p}\right). \tag{1.2.12}$$

Этот результат при $p > 3$ в общем случае не имеет места.

Доказательство. Пусть $f(x,y) \in H_p^\omega(Q)$, $\Delta_{m,n}$ — разбиение Q и пусть $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ вписанная в $f(x,y)$ многогранная функция. Пусть $\{T_{k,i}^{(\nu)}\}$ — множество треугольников, в каждом из которых $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является линейной функцией. Тогда в силу (1.2.9) имеем

$$\Big\|f - \mathscr{L}_{m,n}(f)\Big\|_{C(Q)} \le$$

$$\le \max_{k,i} \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{h_k^p + \eta_i^p}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\|\Delta_m\|^p + \|\Delta_n\|^p}\right). \tag{1.2.13}$$

Пусть теперь $\widetilde{T}$ треугольник из $\{T_{k,i}^{(\nu)}\}$, стороны которого имеют длины $\|\Delta_m\|$ и $\|\Delta_n\|$, и пусть $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ его вершины. Записав экстремальную функцию (1.2.5) для треугольника $\widetilde{T}$ в виде

$$\widetilde{F}(M) := \min\Big\{\omega\Big(\big\|M - M^{(1)}\big\|_p\Big),\, \omega\Big(\big\|M - M^{(2)}\big\|_p\Big),\, \omega\Big(\big\|M - M^{(3)}\big\|_p\Big)\Big\},$$

где $M \in Q$, получаем равенство

$$\widetilde{F}\big(M^{(1)}\big) = \widetilde{F}\big(M^{(2)}\big) = \widetilde{F}\big(M^{(3)}\big) = 0.$$

Как мы знаем, согласно лемме 1.2.1 Н.П.Корнейчука функция $\widetilde{F}(x, y)$ принадлежит классу $H_p^\omega(Q)$, причём

$$\left\|\widetilde{F} - \mathscr{L}_{m,n}(\widetilde{F})\right\|_{C(Q)} \geq \left\|\widetilde{F} - \mathscr{L}_{m,n}(\widetilde{F})\right\|_{C(T)} = \left\|\widetilde{F}\right\|_{C(T)} =$$
$$= \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\|\Delta_m\|^p + \|\Delta_n\|^p}\right). \tag{1.2.14}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.2.13) с оценкой снизу (1.2.14), получаем требуемое равенство (1.2.11).

Повторение схемы рассуждения теоремы 1.2.2 для треугольника $\widetilde{T}$ показывает, что оценка (1.2.11) для $p > 3$ и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t) = t$ не имеет места. Очевидно, что правой части (1.2.11) минимальное значение достигается на равномерном разбиении $\overline{\Delta}_{m,n}$, откуда и следует равенство (1.2.12). Теорема 1.2.3 доказана.

Следует отметить, что полученные нами оценки не являются единственным случаем, когда результаты, верные при $1 \leq p \leq 3$, не имеют места при $p > 3$. Так, например, изучая приближение функций одной переменной из класса $H^\omega[0, 1]$ кусочно-постоянными функциями, Н.П.Корнейчук [11, § 5.2] получил точную оценку погрешности при $0 < p \leq 3$, которая при $p > 3$ не имеет места.

§ 1.3. Оценки для приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими производными $\mathscr{L}_{m,n}^{(l,j)}(f;x,y)$ $(l,j=0,1;\ 0\le l+j\le 1)$ многогранной функции на классе $W^{(l,j)}H_{\|\cdot\|_p}^{\omega}(Q)$ $(l,j=0,1;\ 0\le l+j\le 1)$

В этом параграфе мы изучаем вопрос приближения частных производных первого порядка $f^{(l,j)}(x,y)$, $(l,j=0,1;\ 0\le l+j\le 1)$ функций $f(x,y)\in W^{(l,j)}H_{\|\cdot\|_p}^{\omega}(Q)$ соответствующими производными вписанной в них многогранной функции. Мы получим оценки сверху для выражений

$$E^{(l,j)}\big(W^{(l,j)}H_{\|\cdot\|_p}^{\omega}(Q),\Delta_{m,n}\big) \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_{m,n}^{(l,j)}\big(W^{(l,j)}H_{\|\cdot\|_p}^{\omega}(Q)\big).$$

Не умаляя общности, мы рассмотрим сформулированную задачу относительно переменной x, то есть когда $(l,j)=(1,0)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть ω произвольный модуль непрерывности. Для всех $m,n\in\mathbb{N}$ и всех $1\le p\le\infty$ и произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ справедлива оценка*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_p^{\omega}(Q),\Delta_{m,n}\big)\le\frac{1}{\|\Delta_m\|}\int_0^{\|\Delta_m\|}\omega\big(\sqrt[p]{t^p+\|\Delta_n\|^p}\big)dt. \tag{1.3.1}$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_p^{\omega}(Q)\big)\le m\int_0^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\frac{1}{n^p}}\right)dt. \tag{1.3.2}$$

Доказательство. Дифференцируя равенства (1.1.11) и (1.1.12) по переменному x, получаем

$$\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)=$$

$$=\begin{cases} h_k^{-1}\big[f(x_k,y_i)-f(x_{k-1},y_i)\big], & (x,y)\in T_{k,i}^{(1)} \quad \text{или} \quad (x,y)\in T_{k,i}^{(4)},\\ h_k^{-1}\big[f(x_k,y_{i-1})-f(x_{k-1},y_{i-1})\big], & (x,y)\in T_{k,i}^{(2)} \quad \text{или} \quad (x,y)\in T_{k,i}^{(3)}.\end{cases}$$

Используя очевидное соотношение

$$f(x',y)-f(x,y)=\int\limits_{x}^{x'} f^{(1,0)}(t,y)dt=\int\limits_{0}^{x'-x} f^{(1,0)}(x+t,y)dt,$$

для $(x,y)\in T_{k,i}^{(1)}$ или $(x,y)\in T_{k,i}^{(4)}$ запишем

$$f^{(1,0)}(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)=$$

$$=f^{(1,0)}(x,y)-h_k^{-1}\big[f(x_k,y_i)-f(x_{k-1},y_i)\big]=$$

$$=f^{(1,0)}(x,y)-h_k^{-1}\big[f(x_k,y_i)-f(x,y_i)+f(x,y_i)-f(x_{k-1},y_i)\big]=$$

$$=h_k^{-1}[(x_k-x)+(x-x_{k-1})]f^{(1,0)}(x,y)-$$

$$-h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x_k-x} f^{(1,0)}(x+t,y_i)dt-h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x-x_{k-1}} f^{(1,0)}(x-t,y_i)dt=$$

$$=h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x_k-x}\big[f^{(1,0)}(x,y)-f^{(1,0)}(x+t,y_i)\big]dt+$$

$$+h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x-x_{k-1}}\big[f^{(1,0)}(x,y)-f^{(1,0)}(x-t,y_i)\big]dt.$$

Используя тот факт, что $f^{(1,0)}(x,y)\in H_p^{\omega}(Q)$, получаем отсюда оценку

$$\Big|f^{(1,0)}(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)\Big|\le$$

$$\le h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x_k-x}\omega\Big(\big\|(t,y-y_i)\big\|_p\Big)dt+h_k^{-1}\int\limits_{0}^{x-x_{k-1}}\omega\Big(\big\|(t,y-y_i)\big\|_p\Big)dt. \qquad (1.3.3)$$

При фиксированном y вводим в рассмотрение функцию

$$\psi_y(x):=\int\limits_{0}^{x_k-x}\omega\Big(\big\|(t,y-y_i)\big\|_p\Big)dt+\int\limits_{0}^{x-x_{k-1}}\omega\Big(\big\|(t,y-y_i)\big\|_p\Big)dt.$$

Вычислим её максимум на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Так как

$$\psi'_y(x) = -\omega\Big(\big\|(x_k - x, y - y_i)\big\|_p\Big) + \omega\Big(\big\|(x - x_{k-1}, y - y_i)\big\|_p\Big),$$

и так как $\big\|(t, y - y_i)\big\|_p$ является монотонно возрастающей функцией от t, отсюда следует, что $\psi'_y(x)$ убывает на отрезке $[x_{k-1}, (x_{k-1}+x_k)/2]$ и возрастает на отрезке $[(x_{k-1} + x_k)/2, x_k]$. Таким образом, максимум $\psi_y(x)$ достигается в точках x_{k-1} и x_k, принимая значение

$$\psi_y(x_{k-1}) = \psi_y(x_k) = \int\limits_0^{x_k - x_{k-1}} \omega\Big(\big\|(t, y - y_i)\big\|_p\Big)dt.$$

Отсюда и из (1.3.3) следует, что

$$\Big|f^{(1,0)}(x, y) - \mathscr{L}^{(1,0)}_{m,n}(f; x, y)\Big| \le h_k^{-1} \int\limits_0^{h_k} \omega\Big(\big\|(t, \eta_i)\big\|_p\Big)dt \tag{1.3.4}$$

для $(x, y) \in T^{(1)}_{k,i}$ или $(x, y) \in T^{(4)}_{k,i}$. Аналогичным образом такую же оценку можно получить для $(x, y) \in T^{(2)}_{k,i}$ или $(x, y) \in T^{(3)}_{k,i}$.

Для доказательства неравенства (1.3.1) следует установить, что функция, стоящая в правой части (1.3.4), является монотонно возрастающей функцией от h_k. С этой целью для фиксированного y рассмотрим функцию

$$\Psi_y(h) := h^{-1} \int\limits_0^{h} \omega\Big(\big\|(t, y)\big\|_p\Big)dt.$$

Прямым вычислением получаем

$$\Psi'_y(h) := h^{-2}\Big[h\omega\Big(\big\|(h, y)\big\|_p\Big) - \int\limits_0^{h} \omega\Big(\big\|(t, y)\big\|_p\Big)dt\Big] =$$

$$= h^{-2} \int\limits_0^{h} \Big[\omega\Big(\big\|(h, y)\big\|_p\Big) - \omega\Big(\big\|(t, y)\big\|_p\Big)dt\Big] \ge 0,$$

поскольку

$$\omega\Big(\big\|(h,y)\big\|_p\Big) \geq \omega\Big(\big\|(t,y)\big\|_p\Big)$$

для $t \in [0,h]$. Отсюда следует, что функция $\Psi_y(h)$ является монотонно возрастающей и так как $\omega\big(\big\|(t,y)\big\|_p\big)$ по y тоже возрастает, то мы имеем:

$$\Psi_y(h_k) \leq \Psi_{\eta_i}\big(\max_k h_k\big) \leq \Psi_{\max \eta_i}\big(\|\Delta_m\|\big) =$$

$$= \Psi_{\|\Delta_n\|}\big(\|\Delta_m\|\big) = \frac{1}{\|\Delta_m\|} \int\limits_0^{\|\Delta_m\|} \omega\Big(\big\|\big(t, \|\Delta_n\|\big)\big\|_p\Big) dt,$$

откуда и следует неравенство (1.3.1).

Наконец, поскольку $\|\Delta_m\|$ и $\|\Delta_n\|$ минимальные значения принимают только при равномерном разбиении $\overline{\Delta}_{m,n}$, то из монотонного возрастания $\Psi_y(h)$ сразу получаем (1.3.2).

Используя явный вид l_p-норм, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}, & 1 \leq p \leq \infty, \\ \max\big\{|x|, |y|\big\}, & p = \infty, \end{cases}$$

получаем формулы (1.3.1) и (1.3.2). Этим теорема 1.3.1 полностью доказана.

Из теоремы 1.3.1 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 при* $p = 1$ *и* $\omega(t) = Kt^\alpha$, $K > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ *вытекают неравенства*

$$E^{(1,0)}\Big(W^{(1,0)} H_1^{Kt^\alpha}(Q), \Delta_{m,n}\Big) \leq \frac{K}{\|\Delta_m\|} \cdot \frac{\Big(\|\Delta_m\| + \|\Delta_n\|\Big)^{\alpha+1} - \big(\|\Delta_n\|\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\big(W^{(1,0)} H_1^{Kt^\alpha}(Q)\big) \leq \frac{mK}{\alpha+1} \left\{ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \right\}.$$

Если $\alpha = 1$, то из последних соотношений вытекает, что

$$E^{(1,0)}\Big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^\alpha}(Q), \Delta_{m,n}\Big) \le \frac{K}{2}\Big(\|\Delta_m\| + 2\|\Delta_n\|\Big),$$

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\Big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^\alpha}(Q)\Big) \le \frac{K}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right).$$

Замечание. В завершении этого параграфа отметим, что приведённое доказательство теоремы 1.3.1 верно для любой нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$, обладающей тем свойством, что $\|(t,y)\|$ является монотонно возрастающей функцией по t при фиксированной y, а также что $\|(t,x)\| = \|(-t,x)\|$.

Для таких норм утверждение теоремы всегда имеет место. В то же время существуют нормы, для которых указанные свойства не имеют места. В качестве примера рассмотрим норму

$$\|(x,y)\| := \sqrt{(x+y)^2 + 10(x-y)^2}.$$

Простое вычисление показывает, что для этой нормы $\|(0,1)\| > \Big\|\Big(\frac{1}{2},1\Big)\Big\|$, а также $\Big\|\Big(-\frac{1}{2},1\Big)\Big\| \ne \Big\|\Big(\frac{1}{2},1\Big)\Big\|$.

§ 1.4. Оценки для приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функций классов $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$, $((r,s) = (0,1); (r,s) = (1,0))$ соответствующими производными $\mathscr{L}_{m,n}^{(r,s)}(f;x,y)$ многогранной функции

В этом параграфе мы получим верхние грани оценки погрешности выражений, аналогичных (1.3.1) и (1.3.2), для классов функций $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}$ при $(r,s) = (1,0)$ и $(r,s) = (0,1)$. Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — произвольные модули непрерывности. Для всех $m,n \in \mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ справедлива оценка*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q), \Delta_{m,n}\big) \le \frac{1}{\|\Delta_m\|} \int\limits_0^{\|\Delta_m\|} \omega_1(t)dt + \omega_2\big(\|\Delta_n\|\big), \qquad (1.4.1)$$

$$E^{(1,0)}\big(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q), \Delta_{m,n}\big) \le \omega_1\big(\|\Delta_n\|\big) + \frac{1}{\|\Delta_n\|} \int\limits_0^{\|\Delta_n\|} \omega_2(t)dt.$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) \le m \int\limits_0^{1/m} \omega_1(t)dt + \omega_2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (1.4.2)$$

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(0,1)}\big(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) \le \omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + n \int\limits_0^{1/n} \omega_2(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Докажем формулы (1.4.1) и (1.4.2). В предыдущем параграфе для произвольных точек $(x,y) \in T_{k,i}^{(1)}$ и $(x,y) \in T_{k,i}^{(2)}$ мы доказали, что имеет место равенство

$$f^{(1,0)}(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y) =$$

$$= h_k^{-1} \int\limits_0^{x_k - x} \Big[f^{(1,0)}(x,y) - f^{(1,0)}(x+t,y_i)\Big]dt +$$

$$+h_k^{-1}\int\limits_0^{x-x_{k-1}}\Big[f^{(1,0)}(x,y)-f^{(1,0)}(x-t,y_i)\Big]dt. \qquad (1.4.3)$$

Используя тот факт, что функция $f^{(1,0)}(x,y)\in W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, оценим

$$\Big|f^{(1,0)}(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)\Big|\le$$

$$\le h_k^{-1}\int\limits_0^{x_k-x}\omega_1(t)dt+h_k^{-1}(x_k-x)\omega_2(|y-y_i|)+$$

$$+h_k^{-1}\int\limits_0^{x-x_{k-1}}\omega_1(t)dt+h_k^{-1}(x-x_{k-1})\omega_2(|y-y_i|).$$

Отсюда, как и в теореме 1.2.3, получаем

$$\Big|f^{(1,0)}(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)\Big|\le$$

$$\le h_k^{-1}\int\limits_0^{h_k}\omega_1(t)dt+\omega_2(\eta_i)\le\frac{1}{\|\Delta_m\|}\int\limits_0^{\|\Delta_m\|}\omega_1(t)dt+\omega_2(\|\Delta_n\|),$$

откуда и следует неравенство (1.4.1). Как следствие из него вытекает неравенство (1.4.2).

Предложенный выше метод доказательства теоремы 1.2.3 и теоремы 1.4.1 обеспечивает возможность получить аналогичные утверждения для класса функций $W^{(r,s)}H^{\omega}$.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\omega(t,\tau)$ — произвольный полный модуль непрерывности. Тогда для произвольных $m,n\in\mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ имеют место неравенства*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega},\Delta_{m,n}\big)\le\frac{1}{\|\Delta_m\|}\int\limits_0^{\|\Delta_m\|}\omega(t,\|\Delta_n\|)dt, \qquad (1.4.4)$$

$$E^{(1,0)}\big(W^{(0,1)}H^{\omega},\Delta_{m,n}\big)\leq\frac{1}{\|\Delta_n\|}\int\limits_0^{\|\Delta_n\|}\omega(\|\Delta_n\|,\tau)d\tau.$$

Более того,

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\big(W^{(0,1)}H^{\omega}\big)\leq m\int\limits_0^{1/m}\omega\Big(t,\frac{1}{n}\Big)dt, \tag{1.4.5}$$

$$\mathscr{E}^{(0,1)}_{m,n}\big(W^{(0,1)}H^{\omega}\big)\leq n\int\limits_0^{1/n}\omega\Big(\frac{1}{m},\tau\Big)d\tau.$$

Доказательство. В самом деле, на этот раз для любых точек $(x,y)\in T^{(1)}_{k,i}$ и $(x,y)\in T^{(4)}_{k,i}$ для произвольной функции $f(x,y)\in W^{(0,1)}H^{\omega}$ имеем

$$\Big|f^{(1,0)}(x,y)-\mathscr{L}^{(1,0)}_{m,n}(f;x,y)\Big|\leq$$

$$=h_k^{-1}\int\limits_0^{x_k-x}\omega\big(t,|y-y_i|\big)dt+h_k^{-1}\int\limits_0^{x-x_{k-1}}\omega\big(t,|y-y_i|\big)dt\leq$$

$$\leq h_k^{-1}\int\limits_0^{h_k}\omega(t,\eta_i)dt\leq\frac{1}{\|\Delta_m\|}\int\limits_0^{\|\Delta_m\|}\omega\big(t,\|\Delta_n\|\big)dt$$

и этим неравенство (1.4.4) доказано. Из него очевидным образом следует (1.4.5). Теорема 1.4.2 доказана.

ГЛАВА 2. Точные оценки приближения билинейными (дважды линейными) сплайнами на классах функций

§ 2.1. Предварительные факты. Определение сплайнов. Классы функций

Следует отметить, что в задачах теории приближения сплайны (кусочно-полиномиальные функции) появились совсем недавно с опубликованием статьи И.Дж. Шёнберга 1946 г. под названием «Schoenberg I.J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions», «Quart. Appl. Math., 4 (1946), p.45–99, 112–141».

После 1946 г. Шёнберг и некоторые его ученики продолжили изучение сплайнов и моносплайнов. В частности Шёнберг и Уитни [26, 27] впервые доказали существование и единственность некоторых интерполяционных сплайнов. Для развития современной теории сплайнов весьма важную роль сыграла работа Холлидея [28].

Сплайны вошли в теорию приближения очень стремительно и сразу заняли в ней место, как будто им предназначенное, и в дальнейшем сыграли основную роль при решении экстремальных задач теории аппроксимации функций.

В частных задачах аппроксимационного характера сплайн-функции (т.е. кусочно-полиномиальные функции) применялись намного раньше.

В этой связи достаточно вспомнить метод ломаных Эйлера, предложенное Лебегом доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами, кусочно-полиномиальную аппроксимацию степенной функции в работах С.М. Никольского [14] о наилучших квадратурных формулах в начале пятидесятых годов. Сплайны появились в качестве экстремальных функций в работах Фаварда [22] о верхних гранях наилучших приближений периодических функций на классах функций и в работах А.Н. Колмогорова [7] о точных неравенствах для норм промежуточных производных.

В настоящее время теория сплайнов и сплайн-аппроксимации функций представляет собой весьма важный и интенсивно развивающийся раздел теории приближения функций.

Во многих задачах сплайны являются более естественным аппаратом приближения, чем многочлены. К таким задачам относятся практически важные задачи интерполирования и сглаживания функций, численного дифференцирования, численного интегрирования функций. В теоретических исследованиях сплайны появляются как решение различного рода вариационных задач теории приближения, в частности, задачи о поперечниках. Приближения сплайнами, как отмечалось выше, естественно возникают также при исследовании квадратурных формул. Как промежуточное приближение они появились в глубоких исследованиях Н.П. Корнейчука [8] о приближении дифференцируемых функций. Отметим также работы В.М. Тихомирова [21] по поперечникам функциональных классов и Ю.Н. Субботина [16] по функциональной интерполяции, в которых естественным образом появляются полиномиальные сплайны.

Напомним определение полиномиальных сплайнов.

Определение 2.1.1. [11]. *Сплайнами называют функции «склеенные» из «кусков» многочленов. Точнее, функция $S(t)$, заданная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, называется полиномиальным сплайном порядка m $(m \in \mathbb{N})$ с узлами t_i $(i = \overline{1, n})$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$, если на каждом из* *промежутков* $[a, t_1]$, $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = \overline{1, n-1})$, $[t_n, b]$ *функция* $S(t)$ *есть алгебраический многочлен степени, не превосходящей* m, *а в каждой из точек* t_i *некоторая производная* $S^{(\nu)}(t)$ $(1 \le \nu \le m)$ *может иметь разрыв.*

Из сказанного следует, что основными характеристиками сплайна являются наибольший порядок m многочленов, из которых он склеен, количество и расположение узлов, а также гладкость склейки в каждом узле. Для характеризации гладкости сплайна пользуются понятием дефекта сплайна. Говорят, что сплайн $S(t)$ порядка m имеет дефект k_i в узле t_i $(1 \le k_i \le m)$, если в точке t_i непрерывны функции $S(t)$, $S'(t)$, $\ldots$, $S^{(m-k_i)}(t)$, а производная $S^{(m-k_i+1)}(t)$ в точке t_i терпит разрыв. Число $k = \max\limits_{1 \le i \le n} k_i$ называют дефектом сплайна $S(t)$.

Пусть фиксирована система точек

$$\Delta_n := \Delta_n[0,1]: \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1, \tag{2.1.1}$$

которую назовём разбиением отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим множество $S_m^k(\Delta_n) := S_m^k(\Delta_n[0, 1])$ заданных на $[0, 1]$ сплайнов порядка m, имеющих узлы только в точках t_i $(i = \overline{1, n-1})$ разбиения (2.1.1) с дефектами $k_i \le k$. Легко заметить, что не каждая точка t_1, t_2, $\cdots$, t_{n-1} обязательно является узлом сплайна $S(t) \in S_m^k(\Delta_n)$; например, $S(t)$ может быть многочленом на промежутке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, и тогда точка t_i считается фиктивным узлом с дефектом $k_i = 0$. В частности, в $S_m^k(\Delta_n)$ содержатся все алгебраические многочлены степени не выше m.

Приведём примеры сплайнов.

I. Совокупность всех непрерывных на $[0, 1]$ функций $S(t)$, линейных на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \cdots, n)$ разбиения (2.1.1), то есть множество ломаных с возможными узлами в точках $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$, образует линейное многообразие $S_1(\Delta_n) := S_1\big(\Delta_n[0,1]\big)$ сплайнов порядка 1 дефекта 1, размерности $n+1$.

II. Усечённой степенной функцией, или сплайном порядка m дефекта 1 с узлом $u = a$, называют функцию

$$\big(x-a\big)_+^m := \begin{cases} (x-a)^m, & x > a, \\ 0, & x \le a. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Отметим некоторые её очевидные свойства:

$$\Big(\big(x-a\big)_+^m\Big)' = m(x-a)_+^{m-1},\ m \ge 2;\ \Big(\big(x-a\big)_+^1\Big)' = (x-a)_+^0,\ x \ne a;$$

$$(x-a)_+^m = (x-a)^m - (-1)^m\big[-(x-a)\big]_+^m,$$

$$(x-a)^k \cdot (x-a)_+^m = (x-a)_+^{k+m},\ k \ge -m.$$

В зависимости от базисных функций можно получить различные представления сплайнов. Так, например, любой линейный сплайн $S_1(t) \in S_1(\Delta_n[0,1])$ по узлам (2.1.1) при помощи функции (2.1.2) представим в виде [11, с.10]:

$$S_1(t) = \sum_{\nu=0}^{1} c_\nu t^\nu + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (t-t_i)_+. \tag{2.1.3}$$

При этом

$$c_\nu = S^{(\nu)}(0)/\nu!, \quad \nu = 0, 1,$$

$$\alpha_i = S'(t_i+0) - S'(t_i-0), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Обратно, любая функция вида (2.1.3), где $\alpha_i \ne 0$ $(i = \overline{1, n-1})$ и $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < 1$, есть сплайн порядка 1 (ломаная) с узлами в точках t_i.

Аналогичным образом легко установить, что любой сплайн $S_m(t) \in S_m^k(\Delta_n[0,1])$ представим в виде [11, с.12]

$$S_m(t) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu t^\nu + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{i,j}(t-t_i)_+^{m-j}, \tag{2.1.4}$$

где

$$c_\nu = S^{(\nu)}(0)/\nu!, \quad \nu = 0,1,\dots,m,$$

$$\alpha_{i,j} = \Big[S^{m-j}(t_i+0) - S^{m-j}(t_i-0)\Big]\Big/(m-j)!, \ (i = \overline{1,n-1};\ j = 0,1,\dots,k-1),$$

причём представление (2.1.3) через те же базисные функции единственно.

Введем в области $Q := \Big\{(t,\tau):\ 0 \le t,\tau \le 1\Big\}$ сетку $\Delta := \Delta_t \times \Delta_\tau$, где

$$\Delta_t:\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

$$\Delta_\tau:\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = 1.$$

Пусть в узлах $(t_i,\tau_j) \in \Delta$ заданы значения некоторой функции $f_{i,j} := f(t_i,\tau_j)$. Интерполяционным сплайном первой степени $S_{1,1}(t,\tau)$ будем называть функцию, которая в каждой ячейке $Q_{ij} := [t_{i-1},t_i] \times [\tau_{j-1},\tau_j]$ представима в виде

$$S_{1,1}(t,\tau) = c_{ij} + a_{ij}t + b_{ij}\tau + d_{ij}t\tau$$

и удовлетворяет условиям

$$S_{1,1}(t_i,\tau_j) = f_{ij} \quad (i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m}).$$

Очевидно, что на всём Q сплайн $S_{1,1}(t,\tau)$ также представим в виде

$$S_{1,1}(t,\tau) = \sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{1} c_{\mu\nu} t^\mu \tau^\nu + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}(t-t_i)_+(\tau-\tau_j)_+. \tag{2.1.5}$$

Отметим, что порядковые оценки погрешности для норм разности

$$\big\|f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)\big\|_{C(Q)}$$

приведены в монографии [6, с.56-58].

Наша цель заключается в нахождении точной оценки указанной нормы разности для некоторых классов функций, задаваемых модулем непрерывности функции $f(t,\tau) \in C(Q)$, где как обычно $C(Q)$ — линейное пространство непрерывных на квадрате Q функций $f(t,\tau)$ с обычной нормой

$$\left\|f(t,\tau)\right\|_{C(Q)} := \max\left\{\left|f(t,\tau)\right| : \ (t,\tau) \in Q\right\};$$

$C^{(r,s)}(Q)$ — множество функций $f(t,\tau) \in C(Q)$, имеющих непрерывные частные производные

$$f^{(k,l)}(t,\tau) = \partial^{k+l} f / \partial t^k \partial y^l, \quad k \le r, \ l \le s, \ r,s \in \mathbb{Z}_+, \ f^{(0,0)} = f.$$

В первой главе при определении модулей непрерывности функций двух переменных $f(t,\tau)$ для любых двух точек (t',τ'), $(t'',\tau'') \in Q$ мы определили *полный модуль непрерывности* функции f равенством

$$\omega(f;\delta,\eta) := \sup\Big\{\left|f(t',\tau') - f(t'',\tau'')\right| : \ \left|t' - t''\right| \le \delta, \ \left|\tau' - \tau''\right| \le \eta,$$
$$t', t'' \in [0,1], \ \tau', \tau'' \in [0,1]\Big\}$$

и отметили, что $\omega(f;\delta,\eta)$ обладает всеми характеристическими свойствами, которые присущи одномерным модулям непрерывности. Напомним, что произвольную функцию $\omega(\delta,\eta)$ называют модулем непрерывности, если она удовлетворяет следующим условиям: $\omega(0,0) = 0$; $\omega(\delta,\eta)$ — не убывает по δ и по η, непрерывна и полуаддитивна, т.е.

$$\omega(\delta' + \delta'', \eta' + \eta'') \le \omega(\delta',\eta') + \omega(\delta'',\eta'').$$

Модулем непрерывности функции $f(t,\tau) \in C(Q)$ также называют функцию

$$\omega_*(f;\delta,\eta) := \sup\Big\{\left|f(t',\tau') - f(t'',\tau') - f(t',\tau'') + f(t'',\tau'')\right| :$$

$$\left|t' - t''\right| \le \delta,\ \left|\tau' - \tau''\right| \le \eta,\ t', t'' \in [0,1],\ \tau', \tau'' \in [0,1]\Big\}. \tag{2.1.6}$$

Основные свойства модуля непрерывности приведены в первом параграфе первой главы (стр. 11).

Через $W^{(r,s)}H^{\omega_*}(Q)$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $W^{(0,0)}H^{\omega_*}(Q) \equiv H^{\omega_*}(Q)$ обозначим класс функций $f(t,\tau) \in C^{(r,s)}(Q)$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$\omega_*(f^{(r,s)}; \delta, \eta) \le \omega_*(\delta, t),$$

где $\omega_*(\delta, \tau)$ — заданный модуль непрерывности.

Аналогично, через

$$W^{(r,s)}H^{\max\{\omega_1,\omega_2\}}(Q), \quad r, s \in \mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H^{\max\{\omega_1,\omega_2\}}(Q) \equiv H^{\max\{\omega_1,\omega_2\}}(Q)$$

обозначим класс функций $f(t,\tau) \in C^{(r,s)}(Q)$, частные модули каждой из которых удовлетворяют условиям

$$\omega(f^{(r,s)}; \delta, 0) \le \omega_1(\delta), \quad \omega(f^{(r,s)}; 0, \eta) \le \omega_2(\eta),$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\eta)$ — заданные модули непрерывности.

§ 2.2. Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$

Зададим в области $Q := \big\{(t,\tau)\colon\ 0 \le t,\tau \le 1\big\}$ сетку узлов $\Delta_{mn} := \Delta_m^t \times \Delta_n^\tau$, где

$$\Delta_m^t\colon\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1,$$

$$\Delta_n^\tau\colon\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1.$$

Пусть $h_k = t_k - t_{k-1},\ k = 1,2,\dots,m;\ \eta_l = \tau_l - \tau_{l-1},\ l = 1,2,\dots,n,$

$$\big\|\Delta_m\big\| = \max_{1\le k\le m} h_k, \quad \big\|\Delta_n\big\| = \max_{1\le l\le n} \eta_l.$$

В случае, когда

$$\overline{\Delta}_m^t\colon\ \bar{t}_k = k/m,\ k = 0,1,\dots,m; \quad \overline{\Delta}_n^\tau\colon\ \overline{\tau}_k = l/n,\ l = 0,1,\dots,n,$$

то разбиение

$$\overline{\Delta}_{mn} := \big\{(\bar{t}_k,\overline{\tau}_l)\big\}_{k,l=0}^{m,n} = \big\{(k/m, l/n)\big\}_{k,l=0}^{m,n}$$

— равномерное разбиение области Q.

Поставим в соответствие каждой функции $f(t,\tau) \in C(Q)$ функцию $S_{1,1}(f;t,\tau) \in C(Q)$, однозначно определённую условиями:

а) на каждой ячейке $Q_{k,l} := \big\{t_{k-1} \le t \le t_k,\ \tau_{l-1} \le \tau \le \tau_l\big\}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$ функция $S_{1,1}(f;t,\tau)$ является алгебраическим многочленом первой степени по t и по τ, то есть $S_{1,1}(f;t,\tau) = a_{kl} + b_{kl}t + c_{kl}\tau + d_{kl}t\tau$, где a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, $d_{kl} \in \mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$;

б) $S_{1,1}(f;t_k,\tau_l) = f(t_k,\tau_l),\ (k = 0,1,\dots,m;\ l = 0,1,\dots,n).$

Функции $S_{1,1}(f;t,\tau)$ называют интерполяционными сплайнами первой степени двух переменных или билинейными интерполяционными сплайнами (см., например, [6], [18]). Очевидно, что для

$$(t,\tau) \in Q_{k,l} \ (k = 1, 2, \dots, m; \ l = 1, 2, \dots, n)$$

имеет место представление

$$S_{1,1}(f; t, \tau) = f(t_{k-1}, \tau_{l-1}) H_{0,k}(t) N_{0,l}(\tau) +$$

$$+ f(t_k, \tau_{l-1}) H_{1,k}(t) N_{0,l}(\tau) + f(t_{k-1}, \tau_l) H_{0,k}(t) N_{1,l}(\tau) +$$

$$+ f(t_k, \tau_l) H_{1,k}(t) N_{1,l}(\tau) =$$

$$= \sum_{p=0}^{1} \sum_{q=0}^{1} f(t_{k+p-1}, \tau_{l+q-1}) H_{p,k}(t) N_{q,l}(\tau), \tag{2.2.1}$$

где

$$H_{0,k}(t) = \frac{t_k - t}{h_k}, \quad H_{1,k} = \frac{t - t_{k-1}}{h_k}, \quad \sum_{p=0}^{1} H_{p,k}(t) \equiv 1,$$

$$N_{0,l}(\tau) = \frac{\tau_l - \tau}{\eta_l}, \quad N_{1,l} = \frac{\tau - \tau_{l-1}}{\eta_l}, \quad \sum_{q=0}^{1} N_{q,l}(\tau) \equiv 1.$$

В монографии [11, с.323] отмечено, что по сравнению с одномерным случаем исследование вопросов приближения функций многих переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. В основном эти сложности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций, поскольку эти свойства могут быть различными по разным направлениям.

При этом усложняется и приближающий аппарат. Все эти обстоятельства приводят к тому, что точные результаты в экстремальных задачах приближения функций в многомерном случае, в том числе и в задачах многомерной сплайн-интерполяции, получены в немногих случаях. Отметим, что некоторые точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классах функций найдены в работах В.Ф. Сторчая [19, 20], С.Б. Вакарчука [4], С.Б. Вакарчука и К.Ю. Мыскина [5] и М.Ш. Шабозова [23, 24].

Целью второй главы данной работы является получение результатов окончательного характера, связанных с точными оценками погрешности билинейными сплайнами на классах функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

В силу свойств локальности сплайна $S_{1,1}(f;t,\tau)$ достаточно рассматривать разность

$$e(f;t,\tau) := f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau) \tag{2.2.2}$$

на ячейке $Q_{k,l}$, где $S_{1,1}(f;t,\tau)$ имеет вид (2.2.1). Учитывая, что в вершинах этой ячейки $e(f;t,\tau)$ обращается в нуль, мы можем оценить погрешность (2.2.2) через модули непрерывности $\omega_*(t,\tau)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$, являющиеся мажорантами соответствующих модулей непрерывности $\omega_*(f^{(1,1)};t,\tau)$, $\omega(f^{(1,0)};t,0)$, $\omega(f^{(0,1)};0,\tau)$.

Отметим, что для класса H^{ω_1,ω_2} функций $f(t,\tau)\in C(Q)$, для любых точек $(t',\tau'),(t'',\tau'')\in Q$, удовлетворяющих условию

$$\Big|f(t',\tau') - f(t'',\tau'')\Big| \le \omega_1\big(|t'-t''|\big) + \omega_2\big(|\tau'-\tau''|\big),$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — заданные выпуклые вверх модули непрерывности, В.Ф.Сторчай [19] доказал равенство

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{m,n}\big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) := \mathscr{E}\big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q), \overline{\Delta}_{m,n}\big) := \\ = \sup\Big\{\big\|f - S_{1,1}(f)\big\|_{C(Q)}\colon\ f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big\} = \\ = \omega_1\left(\frac{1}{2m}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2n}\right).\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

В работе М.Ш.Шабозова [24] для класса $W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ функций

$f(t,\tau) \in C^{(1,1)}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left| f^{(1,1)}(t',\tau') - f^{(1,1)}(t'',\tau'') \right| \le \omega_1\big(|t'-t''|\big) + \omega_2\big(|\tau'-\tau''|\big),$$

доказано равенство

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) := \mathscr{E}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q), \overline{\Delta}_{m,n}\big) :=$$

$$= \sup\left\{ \left\| f - S_{1,1}(f) \right\|_{C(Q)} :\ f \in W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/m} \omega_1(t)dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n} \omega_2(\tau)d\tau, \qquad (2.2.4)$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — выпуклые вверх на $[0,1]$ модули непрерывности.

Здесь также следует упоминуть результат С.Б.Вакарчука [4] для класса $W^{(1,1)}H^{\omega}(Q)$

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega}(Q)\big) := \mathscr{E}\big(W^{(1,1)}H^{\omega}(Q), \overline{\Delta}_{m,n}\big) :=$$

$$= \sup\left\{ \| f^{(1,1)} - S_{1,1}^{(1,1)}(f) \|_C : f \in W^{(1,1)}H^{\omega}(Q) \right\} =$$

$$= mn \int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n} \omega(t,\tau)d\tau dt, \qquad (2.2.5)$$

где $\omega(t,\tau)$ — мажоранта полного модуля непрерывности $\omega(f^{(1,1)};t,\tau)$.

Представляет несомненный интерес доказать аналог равенства (2.2.5) для класса $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$. Отметим, что соотношения (2.2.3) – (2.2.5) являются обобщением известных результатов В.Н. Малоземова [12], полученных для приближения функций одной переменной интерполяционными ломаными:

$$\mathscr{E}_n\big(H^{\omega}[0,1]\big) := \sup_{f \in H^{\omega}[0,1]} \left\| f(t) - S_1(f,t) \right\|_{C[0,1]} = \omega\Big(\frac{1}{2n}\Big),$$

$$\mathscr{E}_n\big(W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\big) :=$$

$$:= \sup\Big\{\big\|f(t)-S_1(f,t)\big\|_{C[0,1]}\colon\ f\in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\Big\} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega(t)dt,$$

где ω — выпуклый вверх модуль непрерывности, на случай приближения функции двух переменных $f(t,\tau)$ билинейными интерполяционными сплайнами $S_{1,1}(f;t,\tau)$ на классах $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(1,1)}H^{\omega}(Q)$ на равномерном приближении.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big) := \mathscr{E}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q),\overline{\Delta}_{m,n}\big) :=$$

$$= \sup\Big\{\big\|e(f;\cdot,\cdot)\big\|_{C(Q)}\colon\ f\in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\Big\}. \qquad (2.2.6)$$

Предварительно докажем следующую лемму, позволяющую получить оценку погрешности (2.2.2) в каждой точке $(t,\tau)\in Q$.

Лемма 2.2.1. *Пусть функция $f(t,\tau)\in C(G)$, $G := \big\{a\le t\le b,\ c\le\tau\le d\big\}$, и пусть для произвольной точки $(x_0,y_0)\in G$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned}&\int\limits_a^b f(t,y_0)dt = 0, \quad c\le y_0\le d,\\ &\int\limits_c^d f(x_0,\tau)d\tau = 0, \quad a\le x_0\le b.\end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

Тогда для функции

$$F(t,\tau) = \int\limits_a^t\int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu, \quad (t,\tau)\in G, \qquad (2.2.8)$$

справедливо неулучшаемое неравенство

$$\big|F(t,\tau)\big| \le \frac{(b-t)(t-a)(d-\tau)(\tau-c)}{(b-a)^2(d-c)^2}\int\limits_0^{b-a}\int\limits_0^{d-c}\omega_*(f;t,\tau)d\tau dt. \qquad (2.2.9)$$

Доказательство. Будем пользоваться схемой рассуждения работы [24], где аналогичный факт доказан для функции

$$F(t,\tau) = \int\limits_a^t f(u,\tau)du + \int\limits_c^\tau f(t,v)dt, \quad (t,\tau) \in G.$$

Зафиксируем $(t,\tau) \in G$ и определим функции $\rho(u)$ и $\delta(v)$ равенствами

$$g(u) = g(\rho(u)), \quad a \le u \le t \le \rho(u) \le b, \tag{2.2.10}$$

$$q(v) = q(\delta(v)), \quad c \le v \le \tau \le \delta(v) \le d, \tag{2.2.11}$$

где функции $g(u)$ и $q(v)$ определены соотношениями

$$g(u) = \int\limits_a^u \varphi(x)dx, \quad \varphi(x) := \begin{cases} b-t, & a < x < t, \\ a-t, & t < x < b, \end{cases} \tag{2.2.12}$$

$$q(v) = \int\limits_c^v \psi(y)dy, \quad \psi(y) := \begin{cases} d-\tau, & c < y < \tau, \\ c-\tau, & \tau < y < d. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

В [11, с.195] доказано, что функции $\rho(u)$ и $\delta(v)$, определённые в (2.2.10) и (2.2.11), на указанных отрезках абсолютно непрерывны и для них почти всюду выполняются равенства

$$g'(u) = g'\big(\rho(u)\big) \cdot \rho'(u), \quad a < u < t, \tag{2.2.14}$$

$$q'(v) = q'\big(\delta(v)\big) \cdot \delta'(v), \quad c < v < \tau. \tag{2.2.15}$$

Из соотношений (2.2.14) и (2.2.15), с учётом (2.2.12) и (2.2.13), следует, что

$$\rho'(u) = \frac{b-t}{a-t}, \quad a < u < t, \tag{2.2.16}$$

$$\delta'(v) = \frac{d-\tau}{c-\tau}, \quad c < v < \tau. \tag{2.2.17}$$

Заметим, что при любых $\tau_0 \in [c,d]$ и $t_0 \in [a,b]$ из равенств (2.2.7) вытекает

$$\begin{aligned} \int\limits_a^t f(u,\tau_0)du = -\int\limits_t^b f(u,\tau_0)du, \\ \int\limits_c^\tau f(t_0,v)dv = -\int\limits_\tau^d f(t_0,v)dv. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Воспользовавшись соотношениями (2.2.18), представим функцию (2.2.8) в следующем удобном нам в дальнейшем виде:

$$F(t,\tau) = \int\limits_a^t \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^t \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu =$$

$$= \frac{\big[(b-t)+(t-a)\big]\big[(d-\tau)+(\tau-c)\big]}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^t \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu =$$

$$= \frac{(b-t)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^t \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu - \frac{(t-a)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_t^b \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu -$$

$$-\frac{(b-t)(\tau-c)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^t \int\limits_\tau^d f(u,v)dvdu +$$

$$+\frac{(t-a)(\tau-c)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_t^b \int\limits_\tau^d f(u,v)dvdu, \ (t,\tau) \in G. \tag{2.2.19}$$

Сделав замену переменных $u = \rho(x)$ и $v = \delta(y)$ в интегралах в правой части (2.2.19) соответственно по промежуткам $[t,b]$ и $[\tau,d]$, с учётом соотношений (2.2.16) и (2.2.17) представим функцию (2.2.19) в следующем виде:

$$F(t,\tau) = \frac{(b-t)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^t \int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu -$$

$$-\frac{(t-a)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau f(\rho(u),v)\cdot\frac{b-t}{t-a}dvdu-$$

$$-\frac{(b-t)(\tau-c)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau f(u,\delta(v))\cdot\frac{d-\tau}{\tau-c}dvdu+$$

$$+\frac{(t-a)(\tau-c)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau f(\rho(u),\delta(v))\frac{b-t}{t-a}\cdot\frac{d-\tau}{\tau-c}dvdu=$$

$$=\frac{(b-t)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau\Big[f(u,v)-f(u,\delta(v))-$$

$$-f(\rho(u),v)+f(\rho(u),\delta(v))\Big]dvdu. \tag{2.2.20}$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.2.20), согласно определению модуля непрерывности (2.1.6) получаем

$$\big|F(t,\tau)\big|\le\frac{(b-t)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau\omega_*(f;\rho(u)-u,\delta(v)-v)dvdu. \tag{2.2.21}$$

Положим в последнем двойном интеграле $x=\rho(u)-u$ и $y=\delta(v)-v$. Имеем:

$$x=\rho(a)-a=b-a,\quad x=\rho(t)-t=0,$$

$$dx=\big(\rho'(u)-1\big)du=\left(\frac{b-t}{a-t}-1\right)du=\frac{b-a}{a-t}du,\quad du=\frac{a-t}{b-a}dx,$$

$$y=\delta(c)-c=d-c,\;\; y=\delta(\tau)-\tau=0,$$

$$dy=\big(\delta'(v)-1\big)dv=\left(\frac{d-\tau}{c-\tau}-1\right)dv=\frac{d-c}{c-\tau}du,\quad du=\frac{c-\tau}{d-c}dy.$$

Подставляя эти равенства в (2.2.21), получаем

$$\big|F(t,\tau)\big|\le\frac{(b-t)(d-\tau)}{(b-a)(d-c)}\int\limits_0^{b-a}\int\limits_0^{d-c}\omega_*(f;x,y)\frac{a-t}{b-a}\cdot\frac{c-\tau}{d-c}dydx=$$

$$= \frac{(b-t)(t-a)(d-\tau)(\tau-c)}{(b-a)^2(d-c)^2} \int\limits_0^{b-a} \int\limits_0^{d-c} \omega_*(f;u,v)dvdu. \qquad (2.2.22)$$

Неулучшаемость неравенства (2.2.9) (или, что то же самое, (2.2.22)) проверяется прямым вычислением на функции $f_0(u,v) = g_h'(u) \cdot q_\eta'(v)$ при $h \to 0$, $\eta \to 0$, где $g_h(u)$ и $q_\eta(v)$ — функции Стеклова для заданных равенствами (2.2.12) и (2.2.13) функций $g(u)$ и $q(v)$ (см., например, одномерный случай в [11, с. 234]). Заметим, что полученная оценка (2.2.22) справедлива в каждой точке (t,τ) области G. Из (2.2.22) также вытекает другая оценка

$$\big|F(t,\tau)\big| \leq \frac{(b-t)(t-a)(d-\tau)(\tau-c)}{(b-a)(d-c)} \omega_*(f;b-a,d-c), \qquad (2.2.23)$$

тоже неулучшаемая на всём классе $H^{\omega_*}(G)$. Лемма 2.2.1 полностью доказана.

Применим доказанную лемму к вопросу об оценке погрешности интерполяции функции $f \in C(Q)$ билинейными сплайнами в каждой точке (t,τ) области Q. Если обозначить через $\omega_*(f;Q_{k,l},t,\tau)$ модуль непрерывности функции $f \in C(Q)$, рассматриваемый только на ячейке

$$Q_{k,l} := \Big\{(t,\tau):\ t_{k-1} \leq t \leq t_k,\ \tau_{l-1} \leq \tau \leq \tau_l\Big\},$$
$$(k = 1,2,\ldots,m;\ l = 1,2,\ldots,n),$$

то из доказанной леммы 2.2.1 сразу вытекает

Лемма 2.2.2. *Пусть $f(t,\tau) \in C^{(1,1)}(G)$ и $S_{1,1}(f;t,\tau)$ – билинейный сплайн, интерполирующий функцию $f(t,\tau)$ в узлах (t_k,τ_l) произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ квадрата Q на частные прямоугольники $Q_{k,l}$ $(k = 1,2,\ldots,m;\ l = 1,2,\ldots,n)$. Тогда в каждой точке $f(t,\tau) \in Q_{k,l}$ выполняется неравенство*

$$\big|e(f;t,\tau)\big| = \big|f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)\big| \leq$$

$$\leq \frac{(t_k-t)(t-t_{k-1})(\tau_l-\tau)(\tau-\tau_{l-1})}{(t_k-t_{k-1})^2(\tau_l-\tau_{l-1})^2} \int\limits_0^{t_k-t_{k-1}} \int\limits_0^{\tau_l-\tau_{l-1}} \omega_*\big(f^{(1,1)}, Q_{k,l}, t, \tau\big) d\tau dt =$$

$$= H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)N_{0,l}(\tau)N_{1,l}(\tau) \int\limits_0^{h_k} \int\limits_0^{\eta_l} \omega_*\big(f^{(1,1)}, Q_{k,l}, t, \tau\big) d\tau dt. \qquad (2.2.24)$$

Если разбиение $\Delta_{m,n}$ *квадрата* Q *равномерное,* $\Delta_{m,n} = \overline{\Delta}_{m,n}$*, то из* (2.2.24) *для произвольной функции* $f(t,\tau) \in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(G)$ *в точке*

$$(t,\tau) \in \overline{Q}_{k,l} := \Big\{(t,\tau):\ \overline{t}_{k-1} \leq t \leq \overline{t}_k,\ \overline{\tau}_{l-1} \leq \tau \leq \overline{\tau}_l\Big\}$$

справедлива оценка

$$\big|e(f;t,\tau)\big| = \big|f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)\big| \leq$$

$$\leq H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)N_{0,l}(\tau)N_{1,l}(\tau) \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega_*\big(t,\tau\big) d\tau dt. \qquad (2.2.25)$$

Доказательство следующего утверждения основано на неравенстве (2.2.25).

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\omega_*(t,\tau)$ *— произвольный выпуклый вверх по каждой переменной модуль непрерывности. Тогда для любых* $m,n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big) = \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega_*(t,\tau) d\tau dt. \qquad (2.2.26)$$

Доказательство. Из неравенства (2.2.25) с учётом равенства

$$\max\Big\{H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)N_{0,l}(\tau)N_{1,l}(\tau):\ (t,\tau) \in \overline{Q}_{k,l}\Big\} =$$

$$= \max\left\{m^2\left(t - \frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m} - t\right) n^2 \left(\tau - \frac{l-1}{n}\right)\left(\frac{l}{n} - \tau\right):\ (t,\tau) \in \overline{Q}_{k,l}\right\} =$$

$$= \max_{(k-1)/m \leq t \leq k/m} m^2\left(t - \frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m} - t\right) \times$$

$$\times \max_{(l-1)/n \le \tau \le l/n} n^2 \left(\tau - \frac{l-1}{n}\right)\left(\frac{l}{n} - \tau\right) = \frac{1}{16}$$

получаем оценку сверху

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big) =$$

$$= \sup\Big\{\big\|f - S_{1,1}(f)\big\|_{C(Q)}:\ f \in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\Big\} \le$$

$$\le \frac{1}{16}\int_0^{1/m}\int_0^{1/n} \omega_*(t,\tau)d\tau dt. \tag{2.2.27}$$

Здесь следует отметить, что неравенство (2.2.27) получено без каких-либо ограничений на модуль непрерывности $\omega_*(t,\tau)$. Докажем теперь, что если $\omega_*(t,\tau)$ — выпуклый модуль непрерывности, то в соотношении (2.2.27) знак неравенства превращается в равенства. С этой целью на прямоугольнике

$$\overline{Q}_{1,1} = \Big\{(t,\tau):\ 0 \le t \le 1/m,\ 0 \le \tau \le 1/n\Big\}$$

определим функцию

$$\varphi(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}\omega_*\left(\frac{1}{m} - 2t, \frac{1}{n} - 2\tau\right), & (t,\tau) \in \left[0, \frac{1}{2m}\right] \times \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ -\frac{1}{4}\omega_*\left(2t - \frac{1}{m}, \frac{1}{n} - 2\tau\right), & (t,\tau) \in \left[\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right] \times \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ -\frac{1}{4}\omega_*\left(\frac{1}{m} - 2t, 2\tau - \frac{1}{n}\right), & (t,\tau) \in \left[0, \frac{1}{2m}\right] \times \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{4}\omega_*\left(2t - \frac{1}{m}, 2\tau - \frac{1}{n}\right), & (t,\tau) \in \left[\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right] \times \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

и, полагая

$$\varphi\left(t + \frac{2}{m}, \tau\right) = \varphi\left(t, \tau + \frac{2}{n}\right) = \varphi(t,\tau),$$

продолжим функцию $\varphi(t,\tau)$ с периодом $2/m$ по t и периодом $2/n$ по τ на всю плоскость. Нетрудно убедиться, что функция

$$f_0(t,\tau)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \varphi(u,v)dvdu, \quad (t,\tau)\in Q$$

принадлежит классу $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$. Так как

$$f_0^{(1,1)}(t,\tau)=\varphi(t,\tau),$$

то для доказательства того, что $f_0(t,\tau)\in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ достаточно доказать, что функция $\varphi(t,\tau)\in H^{\omega_*}(Q)$. Для этого мы должны убедиться в том, что при условии выпуклости вверх по обеим переменным модуля непрерывности $\omega_*(t,\tau)$ для всех $t',t''\in[0,1]$ и всех $\tau',\tau''\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$\Big|\varphi(t',\tau')-\varphi(t'',\tau')-\varphi(t',\tau'')+\varphi(t'',\tau'')\Big|\le\omega_*\big(|t'-t''|,|\tau'-\tau''|\big).$$

Действительно, если $0\le t'<t''\le 1/(2m),\ 0\le\tau'<\tau''\le 1/(2n)$, то в силу полуаддитивности модуля непрерывности $\omega_*(t,\tau)$ имеем:

$$\Big|\varphi(t',\tau')-\varphi(t'',\tau')-\varphi(t',\tau'')+\varphi(t'',\tau'')\Big|=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t',\frac{1}{n}-2\tau'\right)-\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t'',\frac{1}{n}-2\tau'\right)-\right.$$

$$\left.-\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t',\frac{1}{n}-2\tau''\right)+\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t'',\frac{1}{n}-2\tau''\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left|\omega_*\left(2\big(t''-t'\big),\frac{1}{n}-2\tau'\right)-\omega_*\left(2\big(t''-t'\big),\frac{1}{n}-2\tau''\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4}\omega_*\left(2\big(t''-t'\big),2\big(\tau''-\tau'\big)\right)\le\omega_*\big(t''-t',\tau''-\tau'\big)=\omega_*\big(|t''-t'|,|\tau''-\tau'|\big).$$

Точно так же, если $1/(2m)\le t'<t''\le 1/m,\ 1/(2n)\le\tau'<\tau''\le 1/n$, то, снова в силу полуаддитивности модуля непрерывности $\omega_*(t,\tau)$, имеем:

$$\Big|\varphi(t',\tau')-\varphi(t'',\tau')-\varphi(t',\tau'')+\varphi(t'',\tau'')\Big|=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\omega_*\left(2t'-\frac{1}{m},2\tau'-\frac{1}{n}\right)-\omega_*\left(2t''-\frac{1}{m},2\tau'-\frac{1}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-\omega_*\left(2t'-\frac{1}{m},2\tau''-\frac{1}{n}\right)+\omega_*\left(2t''-\frac{1}{m},2\tau''-\frac{1}{n}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left|\omega_*\left(2\big(t''-t'\big),2\tau'-\frac{1}{n}\right)-\omega_*\left(2\big(t''-t'\big),2\tau''-\frac{1}{n}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4}\omega_*\Big(2\big(t''-t'\big),2\big(\tau''-\tau'\big)\Big)\le\omega_*\Big(|t''-t'|,|\tau''-\tau'|\Big).$$

Если же $0\le t'<1/(2m)<t''\le 1/m,\ 0\le\tau'<1/(2n)<\tau''\le 1/n$, то, с учётом выпуклости вверх модуля непрерывности $\omega_*(t,\tau)$, имеем:

$$\Big|\varphi(t',\tau')-\varphi(t'',\tau')-\varphi(t',\tau'')+\varphi(t'',\tau'')\Big|=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t',\frac{1}{n}-2\tau'\right)+\omega_*\left(2t''-\frac{1}{m},\frac{1}{n}-2\tau'\right)+\right.$$

$$\left.+\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t',2\tau''-\frac{1}{n}\right)+\omega_*\left(2t''-\frac{1}{m},2\tau''-\frac{1}{n}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left|\omega_*\left(\big(t''-t'\big),\frac{1}{n}-2\tau'\right)+\omega_*\left(\big(t''-t'\big),2\tau''-\frac{1}{n}\right)\right|\le$$

$$\le\omega_*\big(t''-t',\tau''-\tau'\big)=\omega_*\Big(|t''-t'|,|\tau''-\tau'|\Big).$$

Шесть оставшихся случаев, ввиду определения функции $\varphi(t,\tau)$, доказываются совершенно аналогичным образом. В общем случае, когда $t',t''\in[0,1]$ и $\tau',\tau''\in[0,1]$, то существуют точки $u',u''\in[0,1/m]$ и $v',v''\in[0,1/n]$ такие, что $|u'-u''|\le|t'-t''|$ и $|v'-v''|\le|\tau'-\tau''|$ и $\varphi(t',\tau')=\varphi(u',v')$,

$\varphi(t'',\tau')=\varphi(u'',v')$, $\varphi(t',\tau'')=\varphi(u',v'')$, $\varphi(t'',\tau'')=\varphi(u'',v'')$, а потому, в силу уже доказанного, получаем

$$\Big|\varphi(t',\tau')-\varphi(t'',\tau')-\varphi(t',\tau'')+\varphi(t'',\tau'')\Big|=$$

$$=\Big|\varphi(u',v')-\varphi(u'',v')-\varphi(u',v'')+\varphi(u'',v'')\Big|\le$$

$$\le\omega_*\big(|u''-u'|,|v''-v'|\big)\le\omega_*\big(|t''-t'|,|\tau''-\tau'|\big).$$

Этим нами установлено, что справедливо неравенство

$$\omega_*\big(\varphi;t,\tau\big)\le\omega_*\big(t,\tau\big),\quad 0\le t,\tau\le 1,$$

означающее, что $\varphi(t,\tau)\in H^{\omega_*}(Q)$.

С другой стороны, если $0\le t\le 1/m$, $0\le\tau\le 1/n$, то

$$\varphi\left(\frac{1}{2m}+\frac{t}{2},\frac{1}{2n}+\frac{\tau}{2}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2m}-\frac{t}{2},\frac{1}{2n}+\frac{\tau}{2}\right)-$$

$$-\varphi\left(\frac{1}{2m}+\frac{t}{2},\frac{1}{2n}-\frac{\tau}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2m}-\frac{t}{2},\frac{1}{2n}-\frac{\tau}{2}\right)=\omega_*(t,\tau),$$

так что справедливо равенство

$$\omega_*\big(\varphi;t,\tau\big)=\omega_*\big(t,\tau\big),\ 0\le t\le\frac{1}{m},\ 0\le\tau\le\frac{1}{n}.$$

Так как $S_{1,1}(f_0;t,\tau)\equiv 0$, то мы имеем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big)\ge\big\|f_0-S_{1,1}(f_0)\big\|_{C(Q)}=\big\|f_0\big\|_{C(Q)}=$$

$$=\left|f_0\left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\right)\right|=\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/(2m)}\int\limits_0^{1/(2n)}\omega_*\left(\frac{1}{m}-2t,\frac{1}{n}-2\tau\right)d\tau dt=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega_*(t,\tau)d\tau dt. \tag{2.2.28}$$

Требуемое равенство (2.2.26) получаем из сопоставления оценки сверху (2.2.27) с оценкой снизу (2.2.28), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1. Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *при*

$$\omega_*\big(t,\tau\big) = 2\min\Big\{\omega_1(t),\omega_2(\tau)\Big\},$$

где $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(\tau)$ *— заданные выпуклые вверх модули непрерывности, имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\min\{\omega_1,\omega_2\}}\big) =$$

$$= \sup\Big\{\big\|f - S_{1,1}(f)\big\|_{C(Q)}: \ f \in W^{(1,1)}H^{\min\{\omega_1,\omega_2\}}\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{8}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\min\Big\{\omega_1(t),\omega_2(\tau)\Big\}d\tau dt. \qquad (2.2.29)$$

Доказательство. В самом деле, легко проверить, что верхняя грань в равенстве (2.2.29) реализуется функцией

$$f_0(x,y) = \int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y}\varphi(u,v)dvdu, \quad (t,\tau)\in Q, \qquad (2.2.30)$$

где $\varphi_0(t,\tau) = 2\min\big\{\varphi_1(t),\varphi_2(\tau)\big\}$, а функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(\tau)$ определены равенствами

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega_1\left(\dfrac{1}{m} - 2t\right), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2m}\right], \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\omega_1\left(2t - \dfrac{1}{m}\right), & t \in \left[\dfrac{1}{2m}, \dfrac{1}{m}\right], \end{cases}$$

$$\varphi_2(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega_2\left(\dfrac{1}{n} - 2\tau\right), & \tau \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right], \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\omega_2\left(2\tau - \dfrac{1}{n}\right), & \tau \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Далее, соотношениями (см., напр., работу Н.В. Малоземова [12])

$$\varphi_1\left(t+\frac{2}{m}\right)=\varphi_1(t), \quad \varphi_2\left(\tau+\frac{2}{n}\right)=\varphi_2(\tau)$$

соответственно с периодами $2/m$ и $2/n$ продолжим указанные функции на всей оси.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- вычислены точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$, $Q := \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\}$;
- получены оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x, y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f; x, y)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \le l+j \le 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{p}(Q)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \le l + j \le 1)$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x, y)$ функций классов $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r, s) = (0, 1);\ (r, s) = (1, 0))$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f; x, y)$ многогранной функции;
- вычислены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты о приближении многогранными функциями и билинейными сплайн-функциями имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы могут найти применение при нахождении точных оценок погрешности приближений многогранными функциями и сплайн-функциями в многомерном случае на различных классах функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] *Бабенко В.Ф.* Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными // Матем. заметки. – 1978. – Т.24, №1. – С.43–52.

[2] *Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Об интерполяции многогранными функциями // Матем. заметки. – 1975. – Т.18, №6. – С.803–814.

[3] *Бабенко В.Ф. Лескевич Т.Ю.* Погрешность при интерполяции некоторых классов функций многих переменных многогранными функциями и полилинейными сплайнами // Вестник Днепропетровского университета. Серия. матем. – 2012. – Т.20. – С. 41–48.

[4] *Вакарчук С.Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Матем. заметки. – 1990. – Т.47, №5. – С. 26–30.

[5] *Вакарчук С.Б., Мыскин К.Ю.* Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейнами сплайнами // Укр. матем. журнал. – 2005. – Т.57, №2. – С. 147–157.

[6] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций // М.:Наука. – 1980. – 352 с.

[7] *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Учёные записки МГУ. – 1939, №30. – С. 3–16.

[8] *Корнейчук Н.П.* О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций // ДАН СССР. – 1961. – Т.141. – С. 304–307.

[9] *Корнейчук Н.П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. – 1968. – Т.3, №5. – С. 565–576.

[10] *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения // М. – 1976. – 320 с.

[11] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения // М. – 1984. – 352 с.

[12] *Малоземов В.Н.* Об отклонении ломаных // Вестник Ленинградского университета. – 1966, №7. – С. 150–153.

[13] *Малоземов В.Н.* К полигональной интерполяции // Матем. заметки. – 1967. – Т.1, №5. – С. 537–540.

[14] *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи матем. наук. – 1950. – Т.5. Вып. 2(36). – С. 165–177.

[15] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы // М.: Наука. – 1988. – 256 с.

[16] *Субботин Ю.Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. – 1965. – Т.78. – С. 24–42.

[17] *Субботин Ю.Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Матем. заметки. – 1967. – Т.1, №1. – С. 63–70.

[18] *Субботин Ю.С., Стечкин С.Б.* Сплайны в вычислительной математике // М. – 1976. – 248 с.

[19] *Сторчай В.Ф.* Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Известия вузов. Математика. – 1973, №8. – С. 84–88.

[20] *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике // В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровский. – 1975. – С. 82–89.

[21] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. – 1960. Т.15, №3. – С. 81–120.

[22] *Фавард Дж. (Favard J.)* Sur les mailleurs procédés *d*′approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques // Bull. Sci. Math., – 1937. V.61. – P. 209–224, – P. 243–256.

[23] *Шабозов М.Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр. матем. журнал. – 1994. – Т.46, №11. – С. 1554–1560.

[24] *Шабозов М.Ш.* Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Матем. заметки. – 1996. – Т.59, №1. – С. 142–152.

[25] *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations: Structure for Algorithms and Applications // Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2010.

[26] *Schoenberg I.J., Whitney A.* Sur la positivité des déterminants de translations de fonctions de fréquence de Pólya avec une application au probléme d'interpolation par des fonctions «spline» // Compt. Rend., 228. 1949. – P. 1996–1998.

[27] *Schoenberg I.J., Whitney A.* On Polya frequency functions. III // Trans. Am. Math. Soc., 1953. 74. – P. 246–259.

[28] *Holladay J.C.* Smoothes curve approximation // Math. Tables Aids Comput., 1957. 11. – P. 233–243.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, входящих в Перечень ВАК Российской Федерации:

[29] *Шабозов М.Ш., Мехмонзода С.Н.* Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций // Матем. заметки. – 2017. – Т.102, №3. – С. 462–469.

[30] *Berdysheva E.E., Mehmonzoda S.N., Shabozov M.Sh.* Approximation of functions of several variables by continuous linear splines on rectilinear grids // Jaen Journal on Approximation. – 2021. – V.12, №1-2. – P. 1–23.

[31] *Шабозов М.Ш., Мехмонзода С.Н.* Точные оценки совместного приближения функций двух переменных и их производных многогранными функциями // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2015, №4(161). – С. 7–15.

[32] *Мехмонзода С.Н.* О приближении функций двух переменных многогранными функциями // ДАН РТ. – 2015. – Т.58, №10. – С. 867–872.

[33] *Мехмонзода С.Н.* Приближение непрерывных функций двух переменных φ-сплайнами в метрике C // ДАН РТ. – 2016. – Т.59, №1-2. – С. 22–27.

В других изданиях:

[34] *Мехмонзода С.Н.* Верхние грани одновременного приближения функций двух переменных и их производных многомерными функциями // Труды международной летней математической Школы – Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – 2016. – С. 173–176.

[35] *Мехмонзода С.Н.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями // Материалы международной научной конференции „*Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций*", посвященной 90-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.). – С. 101–104.

[36] *Бердышева Е.Е., Мехмонзода С.Н., Шабозов М.Ш.* Приближение функций многих переменных многогранными функциями на прямоугольной сетке // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 38–44.