**Department of Mathematics and Applied Mathematics**

**Prof. Dr. Elena Berdysheva**

University of Cape Town, Private Bag X3, Rondebosch 7701, South Africa
E-mail: elena.berdysheva@uct.ac.za

Cape Town, April 04, 2024

# ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию Мехмонзоды Сабзины Навбухор
**"Точные оценки погрешности приближения некоторых классов функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями"**,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация С.Н. Мехмонзоды посвящена экстремальным задачам теории приближения функций. А именно, в диссертации изучаются точные оценки приближения некоторых классов функций двух переменных, заданных с помощью модулей непрерывности, и их производных многогранными функциями и билинейными сплайнами.

Сплайны являются классическим аппаратом теории приближения функций одной и нескольких переменных. Они имеют колоссальное практическое значение и широко применяются в прикладной математике и компьютерной графике. Кроме того, сплайны являются решениями ряда теоретических задач математического анализа.

Термин "сплайн" впервые появился в знаменитой работе И.Дж. Шёнберга 1946 года; однако, сплайны фактически применялись в математике и раньше, например, в работах Л. Эйлера. Существенный вклад в теорию сплайнов внесли, например, К. де Бор, Л. Шумейкер, С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин, Н.П. Корнейчук. Основополагающие результаты в близких к теме диссертации задачах о приближении ломаными и многогранными фукнциями получили Н.П. Корнейчук, В.Н. Малоземов, А.С. Логинов, В.Ф. Сторчай, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун, Т.Ю. Лескевич и другие математики. Задачами о приближении билинейными сплайнами занимались Н.П. Корнейчук, С.Б. Вакарчук, В.Ф. Сторчай, М.Ш. Шабозов и другие математики.

Изучение сплайнов и их свойств является актуальной тематикой и в наше время; существуют несколько научных школ в разных странах мира, которые активно работают в этом направлении. Это несомненно связано с важностью сплайнов в теоретических исследованиях и для практических применений.

В диссертационной работе С.Н. Мехмонзоды получены несколько новых точных оценок погрешности приближения некоторых классов функций двух переменных многогранными функциями и билинейными сплайнами.

Диссертация имеет объем 70 страниц и состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении автор описивает место своих результатов в математике, кратко описывает полученные в диссертации результаты и их теоретическое и практическое значение. Основные результаты работы и их доказательства являются содержанием двух глав работы; тут же приводится обзор исторических результов, непосредственно связанных с тематикой работы. Заключение содержит краткое описание основых научных результатов работы. Список литературы состоит из 36 наименований, из которых 9 являются работами автора (индивидуально или совместно с научными руководителями).

Первая глава посвящена вопросам приближения функций, заданных на квадрате $Q = [0,1] \times [0,1]$, и их производных многогранными функциями. Изучается класс $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ функций $f$, определенных и непрерывных на $Q$, и таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega(\|M' - M''\|), \quad M', M'' \in Q,$$

где $\omega$ — заданный модуль непрерывности, а $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^2$. Чаще всего будет рассматриваться обычная $\ell_p$-норма на $\mathbb{R}^2$; класс функций в этом случае будут обозначаться $H^{\omega}_{p}(Q)$. Также рассмативаются аналогичные классы, определенные в терминах первых частных производных функции $f$. Рассмотрим триангуляцию квадрата $Q$ по узлам прямоугольной сетки $\Delta_{m,n}$. Интерполирующая многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ есть функция, которая является линейной функцией на каждом треугольнике триангуляции и интерполирует $f$ в узлах разбиения $\Delta_{m,n}$. Отклонение многогранной функции $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ от функции $f$ есть

$$e(f; \Delta_{m,n}) := \|\mathscr{L}_{m,n}(f) - f\|_{C(Q)};$$

из результатов диссертации следует, что эта величина зависит только от разбиения $\Delta_{m,n}$, но не от выбора конкретной триангуляции. Изучаются величины

$$E(H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q); \Delta_{m,n}) := \sup\{e(f; \Delta_{m,n}) : f \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)\}$$

и для заданных $m, n$

$$\mathscr{E}_{m,n}(H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)) := \inf_{\Delta_{m,n}} E(H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q); \Delta_{m,n}),$$

а также аналогичные величины для приближения частных производных первого порядка соответствующими производными интерполирующей многогранной функции. Заметим, что так как многогранная функция является кусочно-линейной, рассматривание производных высшего порядка не имеет смысла.

В теореме 1.2.1 приводится точная оценка уклонения $\|\mathscr{L}_{m,n}(f) - f\|_C$ на одном треугольнике для произвольного модуля непрерывности $\omega$ и произвольной нормы $\|\cdot\|$. Эта оценка специализируется в теореме 1.2.2 для случая, когда модуль непрерывности $\omega$ является выпуклым вверх, а норма $\|\cdot\|$ есть $\ell_p$-норма при $1 \le p \le 3$. Одним из основных результатов диссертации является теорема 1.2.3, в которой вычислены величины $E(H^{\omega}_{p}(Q); \Delta_{m,n})$ и $\mathscr{E}_{m,n}(H^{\omega}_{p}(Q))$ для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega$ и $1 \le p \le 3$. Удивительным образом эти оценки в общем случае не верны, если $p > 3$; этот факт также доказан в работе. Это результат неожиданный. Поскольку оказалось, что обычные методы для работы с нормой $\ell_2$ невозможно перенести на случай, когда $p \ne 2$, в диссертации разработано новое весьма оригинальное доказательство для случая $p \ne 2$.

В теореме 1.3.1 приводятся оценки приближения частных производных функции $f$ соответствующими частными производными интерполирующей многогранной функции для произвольного модуля непрерывности $\omega$ и произвольного $1 \leq p \leq \infty$. В теоремах 1.4.1 и 1.4.2 получены результаты, аналогичные теореме 1.3.1 для близких, но несколько иных классов функций.

Во второй главе диссертации изучается приближение функций, заданных и непрерывных на квардате $Q$, билинейными сплайнами. Снова рассматривается прямоугольная сетка $\Delta_{m,n}$. Для заданной функции $f$ билинейный интерполяционный сплайн $S_{1,1}(f)$ — это функция, которая интерполирует $f$ в узлах разбиения $\Delta_{m,n}$ и на каждой прямоугольной ячейке разбиения является функцией, линейной по каждой из переменных. Основным результатом второй главы является теорема 2.2.1, в которой доказаны точные оценки погрешности приближения билинейными интерполяционными сплайнами на некотором классе функций, определенных с помощью модуля непрерывности.

Результаты диссертационной работы С.Н. Мехмонзоды интересны, и некоторые из них оказались весьма неожиданными. Результаты диссертации вносят вклад в теорию приближения сплайнами. Диссертантом проделана большая и нетривиальная работа. Результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из которых четыре работы совместные с научными руководителями.

Диссертационная работа С.Н. Мехмонзоды “Точные оценки погрешности приближения некоторых классов функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями” является законченным научным иссследованием и удовлетворяет всем требованиям пп. 9-11, 13, 14 действующего положения “О порядке присуждения ученых степеней” ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, предъявляемым к диссертациям на сосискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Считаю, что С.Н. Мехмонзода заслуживает присуждения ей степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор математики Университета Кейптауна

E. Berdysheva

Елена Е. Бердышева