

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ТАДЖИКСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

*На правах рукописи*

**УДК 534.8, 621.3.082.4**

**Меликхуджа Навруз**

**ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО  
ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ОДНО- И ДВУХСЛОЙНЫХ  
ОБРАЗЦОВ С ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОДЛОЖКОЙ**

Специальность: 1.3.8. – физика конденсированного состояния

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:

Член-корреспондент НАНТ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор Салихов Т.Х.

Душанбе – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. Литературный обзор. Линейный и нелинейный механизмы генерации фотоакустического сигнала.....	11
1.1. Вклад поглощения подложки в формирование линейного фотоакустического сигнала твердотельными образцами.....	11
1.2. Нелинейный фотоакустический отклик однослойных и оптически однородных твердотельных образцов.....	17
1.3. Нелинейный фотоакустический отклик однослойных и оптически неоднородных твердотельных образцов .....	20
1.4. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных двухслойных твердотельных образцов.....	27
ГЛАВА II. Вклад поглощения подложки на формирование линейного и нелинейного фотоакустического отклика.....	36
2.1. Вклад поглощения подложки на параметры линейного фотоакустического сигнала твердотельных образцов.....	36
2.2. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика. Математическая модель.....	41
2.3. Стационарное поле температуры.....	44
2.4. Вклад поглощения подложки на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала.....	46
2.5. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика .....	52
ГЛАВА III. Вклад поглощения подложки на формирование линейного и нелинейного фотоакустического откликов двухслойных образцов.....	58
3.1. Вклад поглощения подложки на параметры линейного фотоакустического сигнала двухслойных твердотельных образцов.....	58
3.2. Вклад поглощения подложки на параметры нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов. Математическая модель.....	63

3.3. Температурное поле в фотоакустической камере.....	67
3.4. Вклад поглощения подложки на формирование основной гармоника нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов.....	70
3.5. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоника нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов.....	80
Основные выводы.....	89
Список литературы.....	91

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Явление генерации звуковых волн посредством пучка фотонов достаточно хорошо известно и берет свое начало из классической работы Александра Белла. Очевидно, что появление лазеров существенно стимулировала внимание исследователей к этому явлению. В зависимости от метода детектирования возбуждаемого акустического сигнала были развиты различные высокочувствительные экспериментальные методы и метод газомикрофоновой фотоакустики (ФА-спектроскопии) является одним из них. Основные достижения существующих методов ФА-спектроскопии поэтапно и последовательно изложены в обзорах [1-13] и монографиях [14-20]. Очевидно, что главную роль в этом сыграли одно- и трёхмерные линейные теории этого явления [21-23], согласно которым параметры ФА- сигнала насыщены информацией об оптических, акустических и теплофизических параметрах исследуемых систем.

Между тем, очевидно, что с ростом интенсивности падающего луча в ФА-экспериментах происходит существенный нагрев образцов, приводящий к тому, что все макроскопические параметры последних становятся функцией температуры. Тогда, очевидно, справедливость линейных теорий ФА-отклика остаётся под вопросом, поскольку в этих работах макроскопические величины принимались постоянными. Вместе с тем, оказалось [24-27], что температурные зависимости макроскопических величин приводят к нелинейному механизму генерации акустических волн в среде. Достаточно часто этот нелинейный механизм считается вкладом от тепловой нелинейности (ТН). Систематические исследования этого вклада в одно- и двух-слойных системах проведено в [28-83], где было показано, что параметры нелинейного ФА-сигнала являются более насыщенными, чем у линейного и позволяют определить не только сами макроскопические параметры образцов, но и их температурные зависимости. Вместе с тем, все эти работы проводились для случая, когда подложка является прозрачной. Однако до настоящего времени случай с поглощающей подложкой оказался не исследован-

ным. Этим и обусловлена необходимость создания линейной и нелинейной теорий ФА-отклика одно- и двухслойных образцов на поглощающей подложке, что является весьма актуальной задачей.

**Степень изученности проблемы, теоретическая и методологическая основа исследования.** К настоящему времени достаточно хорошо развита как линейная, так и нелинейная теории существующих механизмов генерации ФА-сигналов конденсированными средами, когда подложка одно- или двухслойного твердотельного образца является прозрачной. Тем самым, оказались не исследованными как линейный, так и нелинейный механизмы возбуждения ФА-сигналов этими образцами с поглощающей подложкой.

**Целью работы** является создание теории генерации линейного и нелинейного ФА-сигналов одно- и двухслойными образцами на поглощающей подложке при газо-микрофонной регистрации возбуждаемого сигнала.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие основные задачи:

-**создание** линейной теории генерации ФА-сигналов для случая, когда одно- или двухслойные образцы находятся на поглощающей подложке;

-**исследование** особенностей формирования установившегося поля температуры в ФА-камере с одно- и двухслойными образцами на поглощающей подложке с учетом тепловой нелинейности теплофизических и оптических величин;

-**создание** теории генерации основной и второй гармоник нелинейного ФА-отклика для одно- и двухслойных систем на поглощающей подложке.

**Научная новизна** работы состоит в том, что для одно- и двухслойных образцов на поглощающей подложке впервые:

-**создана** линейная теория генерации ФА-сигнала одно- и двухслойными образцами на поглощающей подложке;

-**исследовано** влияние тепловой нелинейности теплофизических величин одно- и двухслойных образцов и поглощающей подложки, а также тем-

пературной зависимости оптических параметров самой подложки на формирование температурного поля в ФА-камере;

**-разработана** теория генерации нелинейного ФА-сигнала, обусловленного тепловой нелинейностью теплофизических величин газового слоя, образца и поглощающей подложки, а также оптических параметров последней.

**Практическая значимость.** Выражения для температурного поля в ФА-камере дают возможность определения пространственного распределения температуры в одно- и двухслойных системах на поглощающей подложке в ФА-камере. Полученные простые выражения для амплитуды и фазы основной и второй гармоник нелинейного ФА-сигнала могут быть использованы для независимого определения температурной зависимости теплофизических величин одно- и двухслойных прозрачных образцов на поглощающей подложке, а также температурную зависимость оптических параметров самой подложки.

**Положения, вносимые на защиту:**

**-аналитические выражения** для описания особенностей формирования температурного поля и генерации линейного ФА-сигнала одно- и двухслойными образцами на поглощающей подложке;

**-аналитические выражения**, описывающие особенности формирования температурного поля в ФА-камере с одно- и двухслойными образцами, учитывающие вклады от тепловой нелинейности не только теплофизических, но и оптических параметров образцов и поглощающей подложки;

**-аналитические выражения** для амплитуды и фазы основной гармоники нелинейного ФА-отклика одно- и двухслойных образцов, обусловленного тепловой нелинейностью теплофизических и оптических величин образцов, газового слоя и подложки;

**-выражения**, описывающие особенности генерации второй гармоники нелинейного ФА-сигнала одно- и двухслойными прозрачными образцами, учитывающие тепловую нелинейность теплофизических и оптических параметров всех слоев в ФА-камере.

**Достоверность** результатов обеспечивается корректностью исходных линейных и нелинейных уравнений теплопроводности для одно- и двухслойных образцов, газового слоя и поглощающей подложки, а так же набора начальных и граничных условий к ним, корректностью использованных методов решений.

Основные результаты были доложены на: республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной международному десятилетию действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 гг.», «Году развития туризма и народных ремесел», «140-й годовщине со дня рождения Героя Таджикистана С. Айни» и «70-й годовщине со дня создания Таджикского национального университета» (Душанбе, 2018); международной конференции «Актуальные проблемы современной физики», посвящённой 80-летию профессора Б.Н. Нарзиева (Душанбе, 2018) ; V1-й международной конференции «Современные проблемы физики», посвящённой 110-летию академика С.У.Умарова и 90-летию академика А.А.Адхамова (Душанбе, 2018); международной научно-практической конференции «Образование и наука в XXI веке, современные тенденции и перспективы», посвящённой 70-й годовщине со дня образования Таджикского национального университета» (Душанбе, 2018 ); IV международной конференции «Вопросы физической и координационной химии», посвящённой памяти докторов химических наук, профессоров Якубова Х.М. и Юсуфова З.Н (Душанбе, Май, 2019); республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвящённой годам развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021г.) и 2400-летию Миробида Сайидо Насафи (Душанбе, апрель, 2019); республиканской науч.-теорет. конференции профессорского - преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвящённой 5500-летию древнего Саразма, 700-летию выдающего таджикского поэта Камоли Худжанди и двадцатилетию развития естественных, точных и математических наук (Душанбе, апрель, 2020); VII международной конференции «Со-

временные проблемы физики»( ФТИ им С.У.Умарова НАНТ) (Душанбе, Октябрь, 2020 ); международной научно-практической конференции «Современные проблемы химии, применение и их перспективы», посвящённой 60-летию кафедры органической химической и памяти д.х.н., профессора Холикова Ширинбека Холиковича (Душанбе, Май, 2021); симпозиуме физиков Таджикистана, посвященного 85-летию академика Р.Марупова (Душанбе, ноябрь, 2021).

**Личный вклад** соискателя заключается в его непосредственном участии в поиске теоретического и экспериментального материала, формулировке математических моделей сформулированных задач и получении их решений; все численные расчеты выполнены лично соискателем.

**Публикации.** Результаты научных работ опубликовано в 9 статей и 11 тезисов докладов в материалах международных и республиканских конференций, в том числе 9 в рецензируемых журналах из Перечня ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Содержание работы изложено на 107 страницах, включая 11 рисунков и список литературы из 139 наименований.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные задачи работы, показана научная новизна и перечислены основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** является обзорной и состоит из четырех разделов. В разделе 1.1 вкратце описана линейная теория ФА-эффекта для случая микрофонной регистрации сигнала, которая известна как теория Розенсвайга-Гершо [21]. Здесь же приведена информация об обобщении теории Розенсвайга-Гершо для случая, когда образец является прозрачным, а подложка поглощающей [84]. В разделе 1.2 изложены результаты экспериментальных и теоретических работ по особенностям нелинейного ФА-отклика в однослойных оптически однородных системах, обусловленного температурной зависимостью теплофизических параметров всех слоев в ФА-каме-



ре. Особенности генерации нелинейных ФА-сигналов в оптически неоднородных одно- и двухслойных системах изложены в разделах 1.3 и 1.4, соответственно.

**Вторая глава** посвящена теоретическому исследованию линейного и нелинейного ФА-сигналов для однослойных систем на поглощающей подложке. В разделе 2.1 изложены результаты обобщения линейной теории Барроса и Фария [84] для случая поглощающей подложки с учетом поглощения однослойного образца. Формулировке математической модели задачи нелинейного ФА-отклика однослойного образца на поглощающей подложке посвящен раздел 2.2. Особенности формирования стационарного поля температуры в ФА-камере рассмотрены в разделе 2.3, где получены выражения для температурного поля в различных слоях ФА-камеры и проведен численный расчёт, позволяющий получить зависимости опорных температур от интенсивности падающего луча. Исследованию особенностей генерации основной и второй гармоник нелинейного ФА-сигнала однослойных систем на поглощающей подложке посвящены разделы 2.4 и 2.5 работы, соответственно. Здесь получены общие выражения для акустического колебания давления и простые выражения для амплитуды и фазы гармоник ФА-сигнала, соответствующие предельным случаям-термически тонким образцам, которые устанавливают связь между параметрами этого сигнала и теплофизическими параметрами образца на поглощающей подложке, а также комбинациями термических коэффициентов этих величин.

**Глава третья** посвящена разработке линейного и нелинейного теорий возбуждения ФА-отклика в двухслойных образцах на поглощающей подложке. В разделе 3.1 изложена линейная теория ФА-сигнала для двухслойных систем на поглощающей подложке. Математическая модель сформулированной нелинейной ФА-задачи и стационарного температурного поля в этой системе описаны в разделе 3.2. Особенности формирования температурного поля двухслойных систем в ФА-камере описаны в разделе 3.3. Здесь получены выражения для температурного поля в ФА-камере, которые

позволяют получить зависимость температуры от интенсивности падающего луча для соответствующих слоёв. В разделе 3.4 получены общие выражения для основной гармоники нелинейного ФА-сигнала, составляющего акустического колебания давления в буферном газе. Созданию теории возбуждения второй гармоники нелинейного ФА-сигнала для рассматриваемого случая посвящен раздел 3.5, где получено общее выражение для колебания температуры на удвоенной частоте, а также выражение для второй гармоники колебания давления в газовом слое. Здесь же выполнен анализ этих выражений и получены простые выражения, связывающие амплитуду и фазу этой гармоники нелинейного ФА-сигнала с теплофизическими параметрами и их термическими коэффициентами.

# ГЛАВА I. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР. ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

К настоящему времени опубликована достаточное количество обзоров и монографий, где обстоятельно изложены результаты многочисленных теоретических и экспериментальных работ по опто- и фотоакустике [1-20]. Между тем, детальный анализ результатов нелинейной теории выполнен в [85-89]. В этой связи мы будем, в основном, обсуждать работы, которые выполнены за последние годы, а также работы, которые имеют непосредственное отношение к теме настоящего обзора.

## 1.1. Вклад поглощения подложки в формирование линейного фотоакустического сигнала твердотельными образцами

Прежде всего, отметим, что линейная теория ФА-эффекта для случая микрофонной регистрации сигнала была предложена более 45 лет тому назад в известной работе Розенсвайга и Гершо [21], которая затем получила свое обобщение для трехмерного случая [22] и систем с фазовым переходом [90-97]. Они исходили из того, что под действием падающего луча, интенсивность которого  $I_0$  модулирована по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , в образце формирует колебание температуры. В свою очередь, это приводит к появлению колебательной составляющей температуры в приповерхностном слое буферного газа толщиной, равной длине тепловой диффузии  $\mu_g = (2\chi_g / \omega)^{1/2}$ , где  $\chi_g = \kappa_g / C_{pg}$  - температуропроводность,  $\kappa_g$  - коэффициент теплопроводности и  $C_{pg}$  - теплоёмкость единицы объема газового слоя. Именно эта колебательная составляющая температуры в буферном слое газа и генерирует колебание давления и это механизм принято называть механизмом динамического теплового акустического поршня генерации ФА-сигнала. В рамках теории Розенсвайга и Гершо для величины акустического колебания температуры в газе  $\Phi_g(x, \omega)$  получено следующее выражение

$$\Phi_g(x, \omega) = \Theta_{RG} \exp[-\sigma_g x],$$

где  $\sigma_g = (1+i)/\mu_g$  - комплексная длина тепловой волны, возбуждаемой в газовой среде от поверхности образца,

$$\Theta_{RG}(\omega) = \frac{\beta I_0 (r+1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (r+1)(b-1)e^{-\sigma_s l} + 2(b-r)e^{-\beta l}}{2k_s (\beta^2 - \sigma_s^2)[(g+1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (g-1)(b-1)e^{-\sigma_s l}]} - \quad (1.1.1)$$

комплексная амплитуда вариации температуры в буферном газе,  $b = k_b \sigma_b / k_s \sigma_s$ ,  $g = k_g \sigma_g / \sigma_s \mu_s$ ,  $r = \beta / \sigma_s = (1-i)\beta \mu_s / 2$ ,  $\beta$  - оптический коэффициент поглощения образца. В этом случае величина колебания давления  $p(\omega)$  определяется выражением [21]

$$p(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_0 l_g} \int_0^{2\pi l_g} \Phi_g(\omega, x) dx, \quad (1.1.2)$$

где  $T_0$  и  $p_0$  - температура и давление окружающей среды, а  $\gamma$  - показатель адиабаты,  $l_g$  - толщина газового слоя в ФА-камере. Нетрудно заметить, что выражение (1.1.2) совместно с (1.1.1) является достаточно сложным, поскольку параметры генерируемого ФА-сигнала одновременно зависят, как от оптических свойств исследуемой системы, так и от теплофизических величин образца, газового слоя и подложки. Несмотря на эти сложности, теория Розенсвайга и Гершо достаточно эффективно применяется для исследования термодинамических и оптических свойств различных сред и в различных фазах, включая биологические системы [98-112]. Следует особо отметить и факт успешного применения этого метода в различных областях медицины, такие как, например, онкологии, ревматологии, нейронауках, офтальмологии, кардиологии и дерматологии [11,12].

Теория генерации ФА-сигнала для случая, когда образец является прозрачным, а подложка поглощающей, предложена в [84]. Авторы использовали ту же одномерную геометрию Розенсвайга и Гершо (рис. 1.1). Тогда система уравнений теплопроводности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} - \sigma_g^2 T_g = 0, \quad l_s \leq x \leq (l_s + l_g), \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - \sigma_s^2 T_s = 0, \quad 0 \leq x \leq l_s, \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} - \sigma_b^2 T_b = \left( \frac{\eta_b \beta_b I_0}{2k_b} \right) \exp(\beta_b x), \quad x \leq 0, \quad (1.1.5)$$

где  $\beta_b$  - оптический коэффициент поглощения подложки.

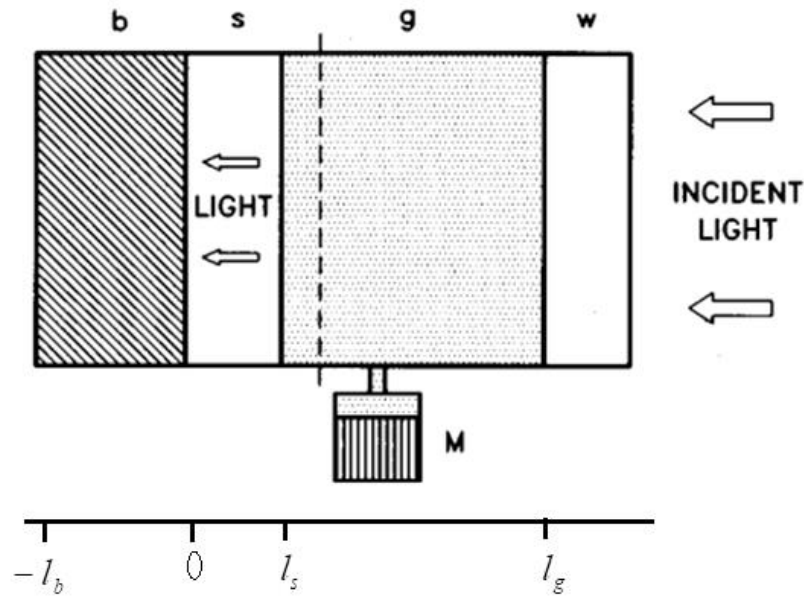


Рис. 1.1. Схема закрытой фотоакустической ячейки с прозрачным образцом на поглощающей подложке [84].

Из совместного решения системы уравнений (1.1.3)-(1.1.5) авторами получено следующее выражение для колебательной составляющей температуры газового слоя:

$$\Phi_g(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\eta_b r_b I_0}{k_b \sigma_b (r_b + 1)} \right) \frac{b \exp i(\omega t - \pi/4)}{(g+1)(b+1) \exp(\sigma_s l_s) - (g-1)(b-1) \exp(-\sigma_s l_s)}. \quad (1.1.6)$$

Тогда для колебания давления в газовом слое справедливо выражение

$$p_g(t) = \frac{2\pi \mu_g \gamma P_0}{l_g} \frac{\Phi_g(t)}{T_0}, \quad (1.1.7)$$

которое также является достаточно сложным. В этой связи возникает необходимость рассмотрения тех случаев, которые сравнительно легко реализуются в эксперименте.

**Случай 1.** Предположим, что:

1. Материал подложки оптически толстый, т.е. оптическая длина пробега фотонов  $\mu_{\beta b} = 1/\beta_b$  значительно меньше длины тепловой диффузии в подложке ( $\mu_{\beta} \ll \mu_b$  ( $r_b \gg 1$ ));
2. Теплопроводность образца значительно больше теплопроводности газового слоя и подложки, т.е. справедливы условия  $g \ll 1$  и  $b \ll 1$ .

При таком случае для комплексной амплитуды фотоакустического сигнала имеет место выражение

$$Q = \frac{A\mu_g}{k_b\sigma_b} \left( \frac{2b}{sh(\sigma_s l_s)} \right), \quad (1.1.8)$$

где  $A = (\gamma\eta_b P_0 I_0) / (\sqrt{2} l_g T_0)$ . Из (1.1.8) видно, что для термически толстого образца ( $l_s / \mu_s \ll 1$ ) амплитуда  $Q$  и фаза сигнала  $\varphi$  определяются выражениями

$$Q \approx A\mu_g \frac{2b}{k_b\sigma_b} \exp(-\sigma_s l_s), \quad (1.1.9)$$

$$\varphi = -\sqrt{\frac{l_s^2 \omega}{2a_s}} - \frac{\pi}{2}. \quad (1.1.10)$$

Из (1.1.9) и (1.1.10) нетрудно заметить, что частотная зависимость фазы  $\varphi$  является линейной функцией  $\omega^{1/2}$ , а амплитуда уменьшается согласно  $\omega^{-1}$ , поскольку длина тепловой диффузии  $\mu_s \sim \omega^{-1/2}$ .

С другой стороны, если образец термически тонкий, тогда  $\sigma_s l_s \ll 1$  и амплитуда определяется выражением

$$Q \approx A\mu_g \frac{2b}{k_b\sigma_b\sigma_s l_s}, \quad (1.1.11)$$

а ее частотная зависимость уменьшается согласно закону  $\omega^{-3/2}$ .

**Случай 2.** Сохраняя первую часть условий случая 1, предположим, что подложка является хорошим теплопроводящим материалом по сравнению с материалом образца. Тогда справедливо условие  $b \gg 1$ . В этом случае, при дополнительном условии термически толстого образца, т.е. при  $(b_{bs} + 1)\exp(\sigma_s l_s) \gg (b_{bs} - 1)\exp(-\sigma_s l_s)$ , величина ФА-сигнала определяется выражением

$$Q \approx A\mu_s \frac{b}{k_b \sigma_b (b + 1)} \exp(-\sigma_s l_s) \quad (1.1.12)$$

И здесь, как и для выражения (1.1.9), частотная зависимость  $Q$  соответствует  $\omega^{-1}$ . Используя обозначения величины опорного сигнала в виде  $Q_R \approx \frac{A\mu_b}{2k_b \sigma_b}$  и фазы  $\varphi = -\pi/2$ , соответствующие тонким образцам, для  $V_N = Q/Q_R$  - нормализованного значения амплитуды ФА-сигнала из (1.1.12) получим следующее выражение:

$$V_N = \frac{2b}{b + 1} \exp(-\alpha_s \sqrt{\omega}), \quad (1.1.13)$$

где  $\alpha_s = l_s (2\chi_s)^{-1/2}$  - величина, зависящая от толщины и теплопроводности образца. В этом случае частотная зависимость фазы сигнала соответствует выражению (1.1.10).

Для проверки выше полученных закономерностей упомянутыми авторами были измерены частотные зависимости амплитуды и фазы генерируемого сигнала для трех прозрачных полимерных плёнок из поливинилфторида (ПВФ), полиметилметакрилата (ПММА) и поливинилхлорида (ПВХ).

Результаты этих измерений представлены на рис. 1.2. Согласно [84], все образцы для измерений представляли собой круглые плёнки диаметром 8 мм с окрашенными черными чернилами поверхностями, контактирующими

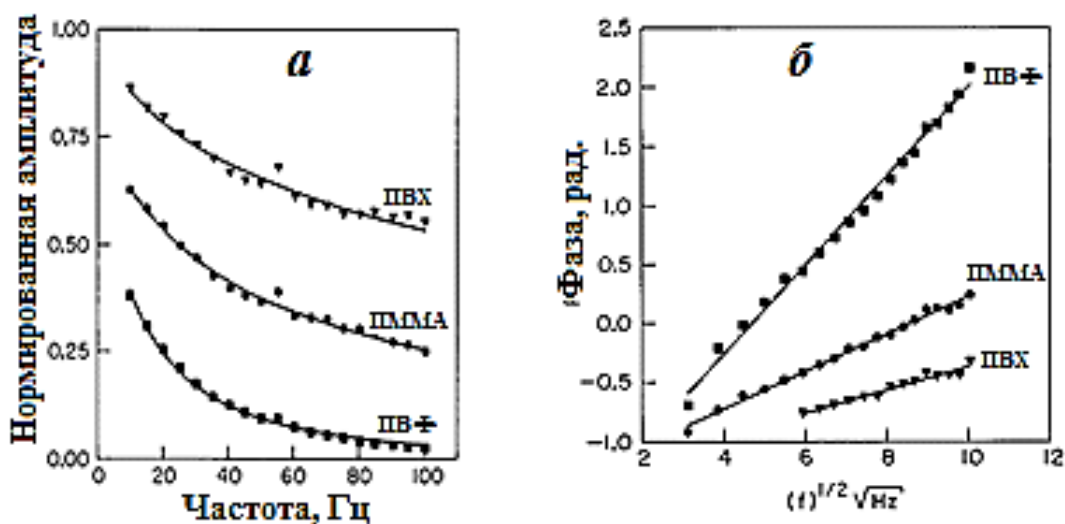


Рис. 1.2. Частотная зависимость нормализованной амплитуды (а) и фазы (б) ФА-сигнала для трех прозрачных полимеров.

с подложкой для обеспечения идеального оптически толстого состояния материала подложки. Толщина образцов составляла 50, 30 и 9 мм для ПВФ, ПММА и ПВХ соответственно и обеспечивают условия термически толстого образца. Следовательно, для обработки результатов эксперимента необходимо использовать выражением (1.1.13). В этом случае фаза определяется выражением (1.1.10). Из рис. (1.2) видно, что эти выражения достаточно хорошо описывают результаты эксперимента. Авторами, используя это совпадение, были определены численные значения величин теплопроводности и температуропроводности исследованных образцов, которые прекрасно совпадают с существующими табличными данными для этих материалов.

Таким образом, выше упомянутыми авторами впервые была предложена линейная теория генерации ФА-сигнала для случая прозрачных образцов на поглощающей подложке. В следующей главе будут обобщены эти результаты для случая, когда одновременно и образец и подложка являются поглощающими.



## 1.2. Нелинейный фотоакустический отклик однослойных и оптически однородных твердотельных образцов

**Введение.** Прежде всего, отметим, что вопросы возникновения нелинейности в опто- и фотоакустике последние годы стали весьма актуальными и это связано с ее широким применением в медицине. Именно этим вопросам посвящены обзоры [11,12], где достаточно подробно обсуждены различные механизмы возникновения этих нелинейностей. Нам представляется, что один из универсальных механизмов появления нелинейного ФА-отклика является тепловая нелинейность, обусловленная температурной зависимостью теплофизических и оптических параметров исследуемых образцов. В этой связи в настоящем обзоре мы, в основном, остановимся именно на этом механизме.

**ФА-микроскоп на второй гармонике сигнала.** Сравнительно недавно было показано [113,114], что вторая гармоника нелинейного ФА-сигнала может быть использована для создания сверхточных фотоакустических микроскопов, которые позволят обнаруживать достаточно малые образования в биологических объектах. Выполним анализ этих работ.

Авторы [113,114] исходили из установившегося убеждения о том, что нагрев системы приводит к тому, что все теплофизические параметры среды становятся функцией температуры и при гармоническом изменении подающего на систему гауссового лазерного луча происходит генерация второй гармоники ФА-сигнала. Оказалось, что фотоакустический микроскоп на этой волне существенно превосходит по своим показателям все существующие до этого другие микроскопы. Авторы воспользовались, тем что в линейном режиме радиальное распределение поля температуры описывается выражением

$$T_{(0)}(\omega, r) = -\frac{\beta I_0}{2k} \sqrt{\frac{\chi}{\omega}} \exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (1.2.1)$$

Принимая во внимание связь между возмущениями давления и температуры  $P' \propto \alpha_T T' / K_T$  [14-18], где  $K_T$  - коэффициент изотермического сжатия, а

$\alpha_T$  - коэффициент теплового расширения, для акустического сигнала на основной гармонике было получено выражение

$$P(\omega) = \frac{\beta \alpha_T I_0}{k^{(0)} K_T} \sqrt{\frac{\chi}{\omega}} \exp[-(\frac{r}{a})^2]. \quad (1.2.2)$$

Необходимо отметить, что в этом случае в среде возникают тепловые волны, распространяющиеся в среде со скоростью  $v = (2\chi^{(0)}\omega)^{1/2}$ . В режиме тепловой нелинейности авторы приняли температурную зависимость коэффициента температуропроводности в линейном виде  $\chi = \chi^{(0)}(1 + T'\delta)$ , где  $\delta = \delta_2 - \delta_1$  - термический коэффициент этой величины,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  - термические коэффициенты теплоёмкости единицы объема и теплопроводности системы. Тогда, для колебания температуры на второй гармонике справедливо выражение

$$T(2\omega) = \frac{\sqrt{2}\beta^2 I_0^2 \chi^{(0)}}{16(k^{(0)})^2 \omega} \delta \exp[-(\frac{r}{a/\sqrt{2}})^2] \exp[i(2\omega t + 2(\frac{r}{a})^2)], \quad (1.2.3)$$

а для акустического сигнала на второй гармонике можно написать выражение

$$P(2\omega) = \frac{\sqrt{2}\alpha_T}{16K_T} (\frac{\beta I_0}{k^{(0)}})^2 \frac{\chi^{(0)}\delta}{\omega} \exp[-(\frac{r}{a/\sqrt{2}})^2]. \quad (1.2.4)$$

В работе [113] выполнено измерение параметров ФА-сигнала для слабого раствора воды с чернильным красителем, которое обеспечивало соответствующую вариацию оптического коэффициента поглощения. Результаты опытов представлены на рис. 1.3. Из этого рисунка обнаруживается квадратичная зависимость амплитуды второй гармонике ФА-сигнала, как от интенсивности падающего луча, так и от концентрации красителя.

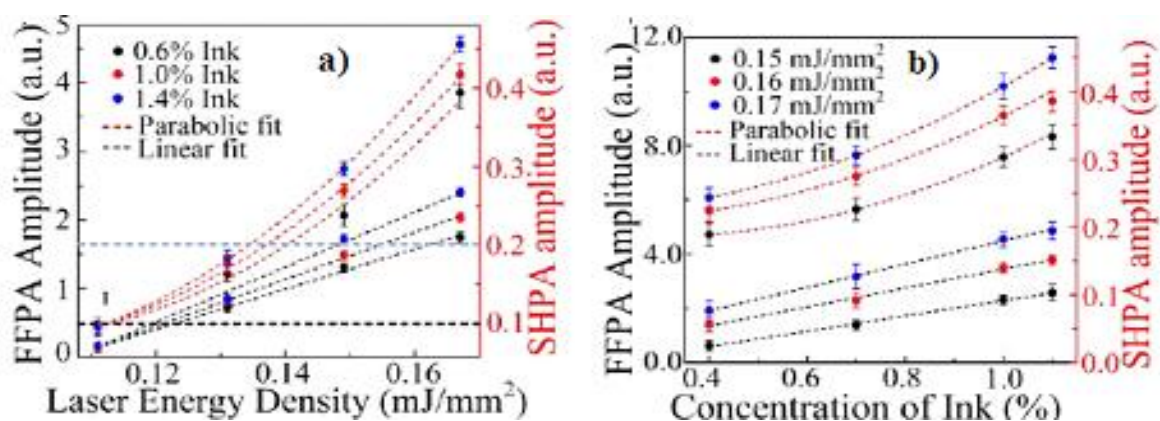


Рис. 1.3. Зависимость амплитуды основной (левая шкала) и второй (правая шкала) гармоник ФА-сигнала: *а*- от интенсивности падающего луча для различных концентраций красителя; *б*- от концентрации красителя для различных значений интенсивности луча [113].

Также обнаружена линейная зависимость амплитуды основной гармоники от этих же параметров.

Используя выражение (1.2.2.) и (1.2.4), можно ввести нелинейный параметр

$$\eta = P(2\omega) / P^2(\omega) = \delta \times \sqrt{2} K_T / 16\alpha_T, \quad (1.2.5)$$

который является линейной функцией параметра термического коэффициента  $\delta$ . Считается, что величина теплового расширения биологических систем в ходе эксперимента остаётся постоянным. Из анализа выше приведенных выражения следует, что величина параметра  $\eta$  не зависит от оптического поглощения и выполненные измерения для нескольких биологических объектов показали справедливость этого вывода.

Авторы, используя эти выводы, создали ФА-микроскоп на второй гармонике и оказалось, что ее разрешающая способность существенно выше аналогичного микроскопа на основной гармонике. Бесспорно, этот метод расширяет возможности традиционной визуализации и открывает новые возможности для получения изображений сверхвысокого разрешения, предвосхищая огромный потенциал биологических изображений и осмотр материалов.

### 1.3. Нелинейный фотоакустический отклик однослойных и оптически неоднородных твердотельных образцов

Справедливости ради отметим, что сравнительно недавно [70-79] была развита теория генерации нелинейных ФА-сигналов для систем, у которых оптический коэффициент поглощения является функцией температуры, т.е.  $\beta(t, x) = \beta(T(t, x))$ . По существу, в указанных работах была создана обобщённая теория нелинейного механизма генерации ФА-сигнала для оптически неоднородных сред. В этом случае исходными уравнениями может служить следующая система нелинейных уравнений теплопроводности для всех трех слоев (газового, образца и прозрачной подложки) ФА-камеры:

$$C_{pg}(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_g(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial x}), \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (1.3.1)$$

$$C_{ps} \frac{\partial T'_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_s(T) \frac{\partial T'_s}{\partial x}] + 0.5 I_0 A(T_s) (1 + e^{i\omega t}) \frac{\partial}{\partial x} e^{\int_0^x \beta(t, y) dy}, \quad -l_s \leq x \leq 0, \quad (1.3.2)$$

$$C_{pb}(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_b(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial x}), \quad -(l_b + l_s) \leq x \leq -l_s, \quad (1.3.3)$$

где  $A_s(T)$ - поглощательная способность образца. Температурную зависимость величин  $C_{pi}(T)$ ,  $\kappa_i(T)$ ,  $A_s(T)$  и оптического коэффициента поглощения образца  $\beta(T_s)$  представим в виде

$$C_{pi}[T(t, x)] = C_{pi}^{(0)} [1 + \delta_i T'_i(t, x)], \quad \kappa_i[T(t, x)] = \kappa_i^{(0)} [1 + \delta_i T'_i(t, x)],$$

$$A_s[T(t, x)] = A_s^{(0)} [1 + \delta_3 T'_s(t, x)], \quad \beta[T(t, x)] = \beta^{(0)} [1 + \delta_4 T'_s(t, x)],$$

где

$$C_{pi}^{(0)} = C_{pi}(T_0), \quad \kappa_i^{(0)} = \kappa(T_0), \quad A^{(0)} = A(T_0), \quad \beta^{(0)} = \beta(T_0) - \text{начальные значения, а}$$

$$\delta_i = (1/C_{pi}^{(0)}) (\partial C_{pi} / \partial T), \quad \delta_{1i} = (1/c_{pi}^{(0)}) (\partial c_{pi}^{(0)} / \partial T), \quad \delta_{2i} = (1/\kappa_{2i}^{(0)}) (\partial \kappa_i / \partial T), \quad \delta_3 = (1/A^{(0)}) (\partial A / \partial T),$$

$$\delta_4 = (1/\beta^{(0)}) (\partial \beta / \partial T) - \text{термические коэффициенты (ТК) этих параметров,}$$

$$\delta_i = \delta_{li} - \alpha_{\pi}, \quad \alpha_{\pi} = -(1/\rho_{0i}) (\partial \rho_i / \partial T)_p - \text{коэффициент теплового расширения, } c_{pi}^{(0)} - \text{удельная}$$

теплоемкость соответствующего слоя.

**Стационарное температурное поле.** Авторы [72], разделяя системы (1.3.1.)-(1.3.3) на стационарную и колебательную части, для стационарной части поля температуры соответствующих слоев получили выражения

$$g_g(x) = [1 + \delta_{2g} \Theta_0 (2 + \delta_{2g} \Theta_0) (1 - \frac{x}{l_g})]^{1/2} - 1, \quad (1.3.4)$$

$$g_s(x) = [\Lambda^2 (1 + 2R_1(x) \delta_{2s}) - 2\Lambda [\Lambda_1 R_2(x) + \Lambda_2 R_3(x)] \delta_{2s}]^{1/2} \Lambda^{-1} - 1 \quad (1.3.5)$$

$$g_b(x) = \{1 + \delta_{2b} W_0 (2 + \delta_{2b} W_0) (1 + \frac{x}{l_s + l_b}) \frac{l_s + l_b}{l_b}\}^{1/2} - 1. \quad (1.3.6)$$

где  $T'_i(x) = \delta_{2i}^{-1} g_i(x)$ ,  $T'_{0s}(0) = \Theta_0$ ,  $T'_{0s}(-l_s) = W_0$  -возмущения температур на поверхности образца, контактирующего с газовым слоем и подложкой соответственно, а

$$\Lambda = -\frac{A_1 \delta_{4s}}{\beta^{(0)}} + \frac{A_1 \delta_{4s} E_0}{2\beta^{(0)}} ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2\beta^{(0)} l_s + 2) + l_s + A_1 \delta_{4s} l_s, \quad A_1 = \frac{I_0 A_s^{(0)}}{2k_s^{(0)} \beta^{(0)}},$$

$$\Lambda_1 = A_1^2 \delta_{4s} [E_0 (\beta^{(0)} l_s - 2 + E_0) + 0.5] + A_1 [\delta_{3s} (\Theta_0 - E_0 \Theta_0) - \delta_{4s} (\Theta_0 E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1) - W_0) - E_0 + 1] + \Theta_0 (1 + 0.5 \delta_{2s} \Theta_0) - W_0 (1 + 0.5 \delta_{2s} W_0),$$

$$\Lambda_2 = A_1 \delta_{4s} (\beta^{(0)})^{-1} \{ [0.5 E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1)^2 + 1] \Theta_0 - A_1 E_0 - W_0 + A_1 [0.5 E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1)^2 + 1] \} + [A_1 + A_1 (1 + \delta_{3s} \Theta_0) + (\Theta_0 + 0.5 \delta_{2s} \Theta_0)] l_s.$$

В выражения (1.3.4), (1.3.5) и (1.3.6) входят величины  $\Theta_0$  и  $W_0$ , для определения которых из условия непрерывности потоков тепла на границах между слоями имеет место следующая система нелинейных алгебраических уравнений:

$$\Theta_0^2 (\delta_{2s} + d \delta_{2g}) + 2\Theta_0 (1 + d + N_1) - W_0^2 \delta_{2s} - 2W_0 (N_2 + 1) + N_3 = 0, \quad (1.3.7)$$

$$\Theta_0^2 \delta_{2s} + 2\Theta_0 (N_4 + 1) - W_0^2 (\delta_{2s} + d_1 \delta_{2g}) - 2W_0 (1 + d_1 + N_5) + N_6 = 0. \quad (1.3.8)$$

В (1.3.7) и (1.3.8) использованы следующие обозначения:

$$d_1 = k_b^{(0)} l_s / k_s^{(0)} l_b, \quad d = k_g^{(0)} l_s / k_s^{(0)} l_g,$$

$$N_1 = A_1 \delta_{4s} [d - \frac{d}{l_s \beta^{(0)}} + \frac{E_0 d}{2\beta^{(0)} l_s} ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2\beta^{(0)} l_s + 2) + E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1)] + A_1 \delta_3 (1 - E_0 - \beta^{(0)} l_s),$$

$$N_3 = A_1^2 \delta_{4s} [3 - 2A \beta^{(0)} l_s - E_0 ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2\beta^{(0)} l_s + 2) + 2E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1) + E_0 (E_0 - 2) - 2E_0] - 2A_1 [\beta^{(0)} l_s + 1 - E_0],$$

$$N_4 = A_1 \delta_{4s} E_0 [(\beta^{(0)} l_s + 1) + (\beta^{(0)})^2 l_s^2] + A_1 \delta_{3s} [1 - E_0 - \beta^{(0)} l_s E_0], \quad N_2 = A_1 \delta_{4s},$$

$$N_5 = A_1 \delta_{4s} \left[ d_1 - \frac{d_1}{l_s \beta^{(0)}} + \frac{d_1 E_0}{2 \beta^{(0)} l_s} (\beta^{(0)} l_s^2 + 2 \beta^{(0)} l_s + 2) - \frac{E_0}{2} ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2 \beta^{(0)} l_s + 2) + E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1) + 1 \right],$$

$$N_6 = A_1^2 \delta_{4s} [2 \beta^{(0)} (E_0^2 - E_0) l_s + 2 E_0 - 2 \beta^{(0)} l_s E_0 - E_0 ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2 \beta^{(0)} l_s + 2) + 2 E_0 (\beta^{(0)} l_s + 1) - 2 E_0^2 (\beta^{(0)} l_s + 1) + 1 - 2 E_0 + E_0 (E_0 - 2) + 2 E_0 (\beta^{(0)})^2 l_s^2] - A_1 E_0 [2 \beta^{(0)} l_s + 2 \delta_{4s} (\beta^{(0)} l_s + 1) - \delta_{4s} ((\beta^{(0)})^2 l_s^2 + 2 \beta^{(0)} l_s + 2) - 2] + 2 A_1$$

Отметим, что в (1.3.7)-(1.3.8) опущены слагаемые, содержащие  $\sim \delta_i^2$  и  $\sim \delta_i \delta_j$ , поскольку они, как минимум, на 2-3 порядка меньше по сравнению с другими вкладками. Из этих выражений видно, что для нахождения поля температуры, прежде всего, необходимо найти зависимости величин  $\Theta_0$  и  $W_0$  от интенсивности падающего луча. С этой целью авторами [72] было выполнено численное решение системы уравнений (1.3.7)-(1.3.8), результаты которого представлены на рис. 1.4. В качестве образца было выбрано кварцевое стекло, для которого  $\beta^{(0)} = 325 \cdot 10^4 m^{-1}$  (для  $\lambda = 9 \mu k$ ) и  $\delta_{4s} = 3.7 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ . Для изучения влияния температурной зависимости  $\beta_s(T)$  они также получили численное решение системы нелинейных уравнений (1.3.7)-(1.3.8)

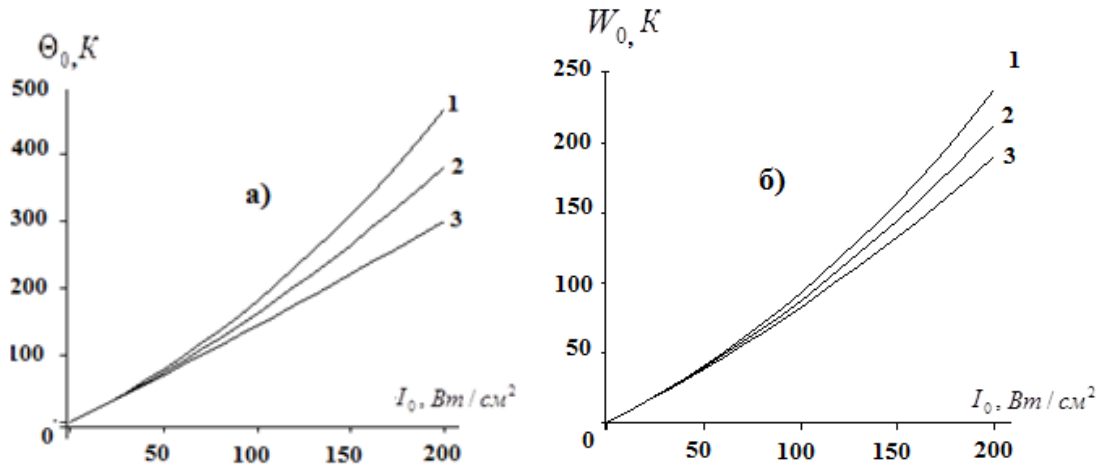


Рис. 1.4. Зависимость температуры облучаемой (а) и тыльной (б) сторон кварцевого стекла ( $T_0 = 300 K$ ,  $\kappa_s^{(0)} = 1,36 Bm / m \cdot K$  [115,116]), контактирующего с двуокисью циркония ( $\kappa_b^{(0)} = 1,7 Bm / m \cdot K$ ,  $\delta_{2b} = 0,104 \cdot 10^{-3} K^{-1}$  [115,116]) в ФА-камере от интенсивности падающего луча при  $\delta_{2s} = 0,56 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ ,  $\delta_{3s} = 1,2 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ ,  $A^{(0)} = 0,26$  [116-118] ( $\lambda = 9 \mu k$ ),  $\beta^{(0)} = 325 \cdot 10^4 m^{-1}$  при  $\delta_{4s} = 3,7 \cdot 10^{-3} K^{-1}$  [116-118] (кривая 1),  $\delta_{4s} = 0$  (кривая 2) и  $\delta_{4s} = -3,7 \cdot 10^{-3} K^{-1}$  (кривая 3). Параметры для воздуха  $\kappa_g^{(0)} = 0,025 Bm / m \cdot K$ ,  $\delta_{2g} = 2,39 \cdot 10^{-3} K^{-1}$  [115,116].

при  $\delta_{4s} = 0$  (при отсутствии температурной зависимости ОКП) и  $\delta_{4s} < 0$  (спаде ОКП с ростом температуры). В качестве подложки выбрана низко теплопроводящая система-двуокись циркония.

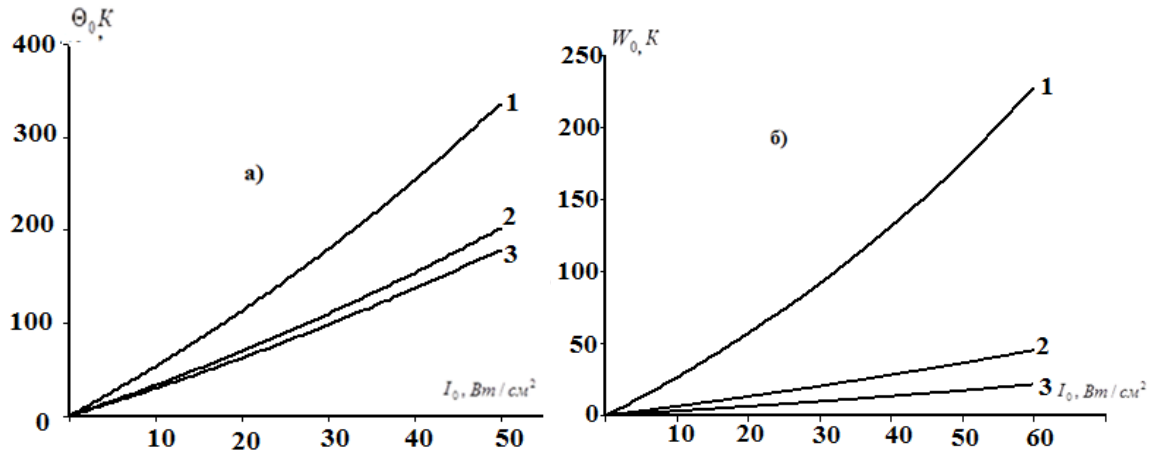


Рис. 1.5. Зависимость температуры облучаемой (а) и тыльной (б) сторон кварцевого стекла ( $A^{(0)} = 0.87, \beta^{(0)} = 50 \text{ см}^{-1}, \delta_{3s} = 1.2355 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \delta_{4s} = -3.7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ) для случая подложек из: оксида циркония ( $\kappa_b^{(0)} = 1.7 \text{ W / м.К}, \delta_{2b} = 0.104 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ) [116] (кривая 1), поликристаллического висмута ( $\kappa_b^{(0)} = 7 \text{ W / м.К}, \delta_{2b} = 2.38 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [115,116] (кривая 2) и нержавеющей стали ( $\kappa_b^{(0)} = 14.9 \text{ W / м.К}, \delta_{2b} = 0.94 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ) (кривая 3) [115,116] от интенсивности падающего луча. Температуры плавления поликристаллического висмута  $\sim 271^\circ \text{C}$  [115,116], нержавеющей стали 1300-1500 $^\circ \text{C}$ ) [116].

Толщины:  $l_g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, l_s = 10^{-3} \text{ м}, l_b = 10^{-3} \text{ м}$ . Температура плавления двуокиси циркония 2700 $^\circ \text{C}$  и кварцевого стекла 1700 $^\circ \text{C}$  [115,116]. Из рис. 1.4 видно, что зависимости величин  $\Theta_0$  и  $W_0$  от  $I_0$  являются не-линейными. Переход приведенных величин из области  $\delta_4 > 0$  в  $\delta_4 < 0$  означает уменьшение световой энергии, превратившейся в тепло. Также, исследование влияния подложки на величины  $\Theta_0$  и  $W_0$  привело к решению выше приведенной системы уравнений для кварцевого стекла с модельными значениями  $A^{(0)} = 0.87, \beta^{(0)} = 50 \text{ см}^{-1}, \delta_{3s} = 1.2355 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \delta_{4s} = -3.7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  на трех различных подложках (см. рис. 1.5). Из рис 1.5 видно, что с ростом теплопроводности подложки

значительно падают величины температур  $\Theta_0$  и  $W_0$ , что связано с существенным ростом переноса тепла к тыльной стороне образца.

Из полученных зависимостей авторы делают вывод, что:

1. Рост теплопроводности подложки приводит к значительному уменьшению значений температур  $\Theta_0$  и  $W_0$ , что обусловлено существенным ростом переноса тепла в тыльную сторону образца;
2. Температурная зависимость оптического коэффициента поглощения существенно влияет на формирование стационарного поля температуры в ФА-камере и для каждого конкретного случая необходимо выполнить численное решение полученной системы нелинейных алгебраических уравнений.

**Основная гармоника.** Очевидно, что колебательная часть возмущения температуры проявляется как на основной, так и на второй гармониках. В работе [73] для колебания давления на основной гармонике получено выражение, которое является достаточно сложным и мы здесь его не приводим. Подчеркнем, что рассматриваемая задача содержит три характерных масштабных параметра:  $l$ -толщина образца,  $\mu_\beta = l/\beta$  - длина пробега фотона и  $\mu_s(\omega)$  - длина тепловой волны в среде. Очевидно, что наиболее существенным является случай сильно поглощающих систем, для которых справедливы выражения  $\beta^{(0)}l \gg 1$  и  $\exp(-\beta^{(0)}l) \approx 0$ . В дальнейшем авторами [73] рассмотрен именно этот случай. Поскольку, в зависимости от соотношения между  $\mu_s$ ,  $\mu_\beta$  и  $l$ , в эксперименте могут иметь место разные ситуации, то эти случаи были рассмотрены отдельно. Приведем их результаты.

**А) Случай термически тонких образцов ( $l \ll \mu_s(\omega)$ ).** В данном случае для величины  $\delta p_{1N}(\omega)$  было получено выражение [73]

$$\delta p_{1N}(\omega) = \delta p_L(\omega)[K_{1(1)}\Theta_0 + K_{1(2)}W_0], \quad (1.3.9)$$

где  $K_{1(1)} = (\delta_3 - \delta_{2s})$ ,  $K_{1(2)} = [\delta_{2s} - (\delta_b + \delta_{2b})]$ . Нетрудно заметить, что в этом случае вклад от  $\beta = \beta(T)$  в параметры основной гармоники нелинейного ФА-сигнала отсутствует. Между тем, поскольку  $\Theta_0 \propto I_0$  и  $W_0 \propto I_0$ , то для этого случая амплитуда сигнала подчиняется зависимостям  $|\delta p_{1N}(\omega, l \ll \mu_s)| \sim I_0^2$ ,  $|\delta p_{1N}(\omega, l \ll \mu_s)| \sim \omega^{-1}$ .



**Б) Случай термически толстых образцов.** В этом случае длина тепловой волны меньше толщины образца и имеют место условия  $\mu_s < l$ ,  $\mu_s > \mu_\beta$ ,  $\exp(-\beta l) \approx 0$  и  $\exp(-\sigma_s l) \approx 0$  и  $|r| > 1$ . При этом было получено выражение

$$\delta p_{1N} = \delta p_{1L} \Theta_0 K_{1(2)}, \quad (1.3.10)$$

где  $K_{1(2)} = \delta_3 - 0.5(\delta_{2s} + \delta_s)$ .

**В) Случай термически толстых образцов,** когда справедливы условия  $\mu_s \ll l_s$ ,  $\mu_s < \mu_\beta$ ,  $\exp(-\sigma_s l_s) \approx 0$ ,  $|r| < 1$ . Для этого случая для основной гармоники ФА-сигнала справедливо выражение

$$\delta p_{1N}(\mu_s \ll l, \mu_s < \mu_\beta) = \delta p_{1L} \Theta_0 K_{1(3)}, \quad (1.3.11)$$

где  $K_{1(3)} = -(\delta_3 + \delta_4) - 0.5(\delta_{2s} + \delta_s)$ . Если представить (1.3.11) в виде

$$\delta p_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta) = |\delta p_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta)| \exp[i\psi_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta)], \quad (1.3.12)$$

то амплитуда и фаза ФА-сигнала будут описываться выражениями

$$\begin{aligned} |\delta p_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta)| &= \frac{\gamma p_0 A^{(0)} I_0 \mu_g \mu_s^2}{4\sqrt{2} l_g T_{00} k_s^{(0)}} K_{1(3)} \Theta_0, \quad (1.3.13) \\ \psi_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta) &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} \dots \text{если} \dots K_{1(3)} > 0 \\ -\frac{3\pi}{4} \dots \text{если} \dots K_{1(3)} > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Из (1.3.13) следует, что частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала соответствует условию  $|\delta p_{1N}(\omega, l \gg \mu_s, \mu_s < \mu_\beta)| \sim \omega^{-3/2}$ .

Из полученных результатов авторы [73] заключают, что влияние ТК оптического коэффициента поглощения на параметры основной гармоники нелинейного ФА-сигнала проявляется лишь для термически толстых образцов. Это означает, что именно только для таких твердотельных образцов появляется возможность определения ТК оптического коэффициента поглощения и, тем самым, температурной зависимости этой величины из результатов измерения параметров основной гармоники нелинейного ФА-сигнала.

**Вторая гармоника.** Авторы [71] подробно рассмотрели случай сильно поглощающей системы, для которых  $\beta l \gg 1$  и  $\exp(-\beta l) \approx 0$  и учли условие

$g \ll 1$ . Между тем, известно, что параметры второй гармоники нелинейного ФА-сигнала также существенно зависят от соотношения между величинами  $l$ ,  $\mu_{2s}(\omega)$  и  $\mu_\beta = \beta^{-1}$ .

**А).** Для термически тонких образцов выполняются условия  $l \ll \mu_s$ ,  $\mu_s \beta \gg 1$ , тогда  $\exp(\pm \sigma_s l) \approx 1$ ,  $|r| \gg 1$  и  $|r| \gg b$  и для второй гармоники акустического колебания давления получено выражение

$$\delta p(2\omega, \mu_s \beta \gg 1) = \frac{\mathcal{P}_0 I_0^2 \mu_{2g} \mu_b^2}{16\sqrt{2} T_{00} l_g k_b^{(0)2}} e^{i\psi_2(l \ll \mu_s)} K_{2(1)}, \quad (1.3.15)$$

где  $K_{2(1)} = (2 + \sqrt{2})^{-1} [(2\delta_{2g} - \delta_g) - (2\delta_{2b} + \sqrt{2}\delta_b)] + \sqrt{2}(\delta_3 + \delta_4)$  - нелинейный коэффициент, определяемый как комбинация ТК оптических и теплофизических величин, а фаза  $\psi_2(\omega, l \ll \mu_s) = -3\pi/4$  при  $K_{2(1)} > 0$  и  $\psi_2(\omega, l \ll \mu_s) = \pi/4$  при  $K_{2(1)} < 0$ .

**Б).** Для случая термически толстых образцов с условиями  $\mu_s < l$ ,  $\mu_s > \mu_\beta$ ,  $\mu_{2s} > \mu_\beta$ ,  $\exp(-\beta l) \approx 0$  и  $\exp(-\sigma_s l) \approx 0$  и  $|r| > 1$  получена следующая формула для искомой величины:

$$\delta p(2\omega, l > \mu_s) = \frac{\mathcal{P}_0 (A^{(0)} I_0 \mu_s)^2 \mu_{2s}}{16\sqrt{2} T_{00} l_g (\kappa_s^{(0)})^2} K_{2(2)} \exp[\psi_{2N}(l > \mu_s)], \quad (1.3.16)$$

где  $K_{2(2)} = (2 + \sqrt{2})^{-1} (2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2s} - \sqrt{2}\delta_s) + \sqrt{2}(\delta_3 + \delta_4)$  - нелинейный коэффициент, соответствующий этому случаю. Из (1.3.16) следует, что амплитуда второй гармоники для нелинейного ФА-сигнала для этого случая не зависит от ТК параметров подложки, а определяется ТК коэффициента поглощения и поглощательной способности образца, а также теплофизических величин газа и образца. При этом фаза ФА-сигнала при  $K_{2(2)} < 0$  равна  $45^\circ$ , а при  $K_{2(2)} > 0$  составляет  $135^\circ$ ; частотная зависимость подчиняется закону  $\sim \omega^{-3/2}$ .

**В).** Для термически толстых образцов с условиями  $\mu_s \ll l$ ,  $\mu_s < \mu_\beta$ ,  $\exp(-\beta l) \approx 0$  и  $\exp(-\sigma_s l) \approx 0$ ,  $|r| < 1$  получено следующее выражение для акустического колебания давления на второй гармонике:

$$\delta p(2\omega, \mu_s \beta < 1) = \frac{\mathcal{P}_0 (I_0 A^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_s^4}{32\sqrt{2} T_{00} l_g \kappa_s^{(0)2}} K_{2(3)} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (1.3.17)$$

где  $K_{2(3)} = (2\delta_{2g} - \delta_g)(\sqrt{2} + 2)^{-1} - \delta_s + \delta_3 + \delta_4$  - нелинейный коэффициент, соответствующий этому случаю. Спад амплитуды с ростом частоты при этом подчиняется закону  $\sim \omega^{-5/2}$ , а фаза этого сигнала равна  $3\pi/4$  при  $K_{2(3)} > 0$  и  $\pi/4$  при  $K_{2(3)} < 0$ .

Из полученных выражений (1.3.13), (1.3.16) и (1.3.17) следует, что амплитуда второй гармоники ФА-сигнала простым образом связана с нелинейными коэффициентами. Следовательно, из результатов измерения этого параметра принципиально возможно определение ТК величин, входящих в  $K_{2(i)}$ , включая  $\delta_3$  и  $\delta_4$  - ТК поглощательной способности и коэффициента поглощения образцов.

#### 1.4. Нелинейный механизм фотоакустического отклика оптически неоднородных двухслойных твердотельных образцов

Для рассмотрения этого случая авторы [74-79] исходят из следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений теплопроводности для всех четырех слоёв ФА-камеры, в которых учтены оптическая неоднородность обоих слоев образцов:

$$C_{pg}(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_g(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial x}), \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (1.4.1)$$

$$C_{PS(1)} \frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_{S(1)}(T) \frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial x}] + 0.5I_0 A_{S(1)}(T) (1 + e^{i\omega t}) \frac{\partial}{\partial x} e^{\int_0^x \beta_1(t,y) dy}, \quad -l_{S(1)} \leq x \leq 0, \quad (1.4.2)$$

$$C_{PS(2)} \frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_{S(2)}(T) \frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial x}] + 0.5I_0 A_{S(2)}(T) (1 - R_{S(1)}(T)) (1 + e^{i\omega t}) e^{\int_0^{-l_1} \beta_1(t,x) dx} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\int_{-l_1}^x \beta_2(t,y) dy}, \quad -(l_{S(1)} + l_{S(1)}) \leq x \leq -l_{S(1)}, \quad (1.4.3)$$

$$C_{pb}(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_b(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial x}), \quad -(l_b + l_{S(1)} + l_{S(2)}) \leq x \leq -l_{S(1)} - l_{S(2)}. \quad (1.4.4)$$

Здесь  $R_{S(i)}(T)$  - коэффициент отражения соответствующих слоев, температурную зависимость которых примем в виде  $(1 - R_{1S(1)}) = (1 - R_{1S(1)})^{(0)} (1 + \delta_{5(1)} T'_{S(1)}(0, t))$ .

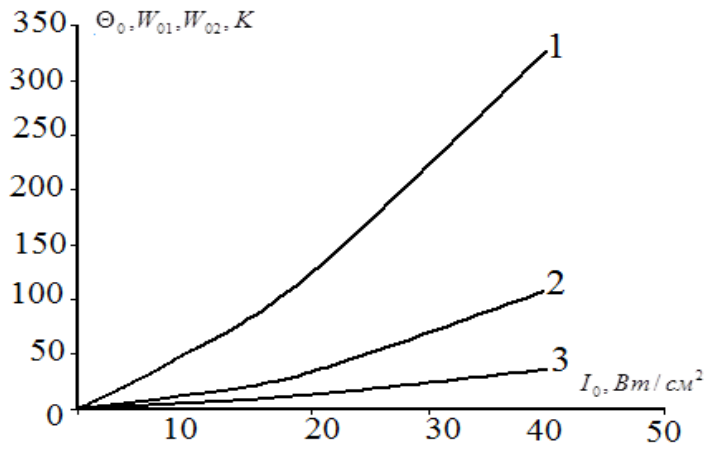


Рис. 1.6. Зависимость приращения опорных температур от интенсивности падающего луча для двухслойного образца кварцевое стекло-сапфир, контактирующего с подложкой из нержавеющей стали. Численные значения величин:  $\kappa_{s(1)}^{(0)} = 1,36 \text{ Bm} / \text{м} \cdot \text{К}$  [115,116],  $\kappa_{s(2)}^{(0)} = 11 \text{ Bm} / \text{м} \cdot \text{К}$  [115,116],  $A_1^{(0)} = 0.26$  [116,118],  $A_2^{(0)} = 0.59$  [118],  $\delta_{2s(1)} = 0.56 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\delta_{3s(1)} = 1.2355 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\delta_{4s(1)} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [116,117],  $\delta_{2s(2)} = -1.1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\delta_{3s(2)} = 0.07 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\delta_{4s(2)} = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\kappa_b^{(0)} = 14.9 \text{ Bm} / \text{м} \cdot \text{К}$  [116],  $\delta_{2b} = 0.94 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [118],  $\kappa_g^{(0)} = 0.025 \text{ Bm} / \text{м} \cdot \text{К}$  [116],  $\delta_{2g} = 2.39 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [115],  $l_g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $l_{s(1)} = l_{s(2)} = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $l_b = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = 50 \text{ см}^{-1}$ ; 1-облучаемая поверхность; 2-поверхности между обоими слоями образца, 3-поверхность второго слоя, контактирующего с подложкой.

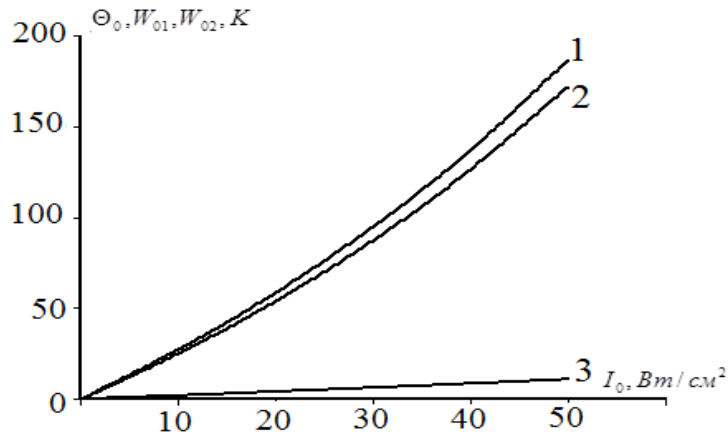


Рис. 1.7. Зависимость приращения опорных температур от интенсивности падающего луча для двухслойного образца сапфир-кварцевое стекло, контактирующего с подложкой из нержавеющей стали. Численные значения величин как на рис. 1.6.

Авторами упомянутых работ и здесь удалось разделить три задачи: стационарное поле температуры, характеристики основной и второй гармо-

ник ФА-сигнала. В частности, ими получены выражения, описывающие пространственное распределения температуры в ФА-камере, а также путем численного решения изучены особенности зависимостей температур поверхностей образца, граничащих с газовым слоем, с подложкой и на границе между обоими слоями образца от интенсивности падающего луча.

Результаты решения упомянутой нелинейной системы уравнений для двухслойных оптически неоднородных образцов на примере систем кварцевое стекло-сапфир и сапфир-кварцевое стекло в ФА-камере приведены на рис.1.6 и 1.7, соответственно. Из рис.1.6 видно, что величины  $\Theta_0, W_{01}, W_{02}$  нелинейно зависят от интенсивности падающего луча. Существенное отличие величины  $\Theta_0$  от  $W_{01}$  обусловлено значительно низким значением коэффициента теплопроводности кварцевого стекла по сравнению с сапфиром. Обнаруженное поведение в зависимостях величин  $\Theta_0, W_{01}, W_{02}$  от величины  $I_0$  (рис. 1.7) обусловлено высоким значением  $\kappa_{s(1)}$  первого облучаемого слоя и низким значением  $\kappa_{s(2)}$  второго слоя.

**Основная гармоника.** И здесь авторами [74,75,79] получено достаточно сложное выражение для описания особенностей формирования основной гармоники нелинейного ФА-сигнала и подробно исследован лишь случай сильно поглощающей системы, для которой длина тепловой диффузии  $\mu(\omega)$  всегда значительно больше длины пробега фотона  $\mu_\beta = \beta^{-1}$  [79]. Далее, они рассматривают те случаи, которые могут реализоваться на эксперименте.

А. Случай сильно поглощающего первого слоя, для которого выполняются условия  $l_{s(1)} \gg \mu_{\beta(1)}$  и  $\exp(-l_{s(1)}\beta_1^{(0)}) \approx 0$ .

1А. Оба слоя образца считаются термически толстыми, для которых справедливы условия  $l_{s(1)} \gg \mu_{1s(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{1s(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{s(2)} \gg \mu_{1s(2)}(\omega)$ ,  $\exp(-\sigma_{1s(1)}l_1) \approx 0$ ,  $\exp(-\sigma_{1s(2)}l_2) \approx 0$  и имеет место соотношение

$$\delta p_{1N1}(\omega) = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{s(1)}^{(0)} \Theta_0 e^{-i\pi/4}}{2k_{s(1)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1s(1)}} K_{1N1}, \quad (1.4.5)$$

где  $K_{1N1}(l_{S(i)} \gg \mu_{2S(i)}, \mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta 1}) = \delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)} - 0.5(\delta_{S(1)} + \delta_{2S(1)})$ . Из этого выражения нетрудно заметить, что в этом случае зависимость амплитуды ФА-сигнала от частоты имеет вид  $|\delta p| \propto \omega^{-1}$ .

2А. Случай, когда оба слоя образца являются термически толстыми, для которых справедливо условия  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \gg \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{1S(1)} \ll \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ . Тогда справедливо выражение

$$\delta p_{1N2}(\omega) = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)} \Theta_0 \beta_1^{(0)} e^{-i3\pi/4}}{2k_{S(1)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(1)}^2} K_{1N2}, \quad (1.4.6)$$

где  $K_{1N1}(l_{S(i)} \gg \mu_{2S(i)}, \mu_{2S(1)} \ll \mu_{\beta 1}) = \delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)}$ . Из (1.4.6) видно, что для этого случая имеет место оценка  $|\delta p| \propto \omega^{-3/2}$ .

3А. Случай, когда второй слоя образца термически толстый, а первый термически тонкий с условиями  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{1S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$  и  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ . Для этого случая получено выражение

$$\delta p_{1N3} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)} e^{-i\pi/4}}{2k_{S(2)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(2)}} [(\delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)})\Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} - \frac{\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)}}{2})W_{01}], \quad (1.4.7)$$

из которого следует, что частотная зависимость колебания давления на основной гармонике подчиняется закону  $|\delta p| \propto \omega^{-1}$ .

4А. Случай, когда оба слоя образца термически тонкие, для которых справедливы условия  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{1S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \ll \mu_{1(2)}(\omega)$  и имеет место соотношение

$$\delta p_{1N4} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)} e^{-i\pi/4}}{2k_b^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1b}} [(\delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)})\Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)})W_{01} - (\frac{\delta_b - 3\delta_{2b}}{2} + \delta_{2S(2)})W_{02}], \quad (1.4.8)$$

из которого следует, что зависимость амплитуды ФА-сигнала от частоты подчиняется закону  $|\delta p| \propto \omega^{-1}$ .

Б. Сильно поглощающий второй слой и прозрачный первый, для которого справедливы соотношения

$$\beta_1^{(0)} l_1 \ll 1, \quad \exp(-\beta_1^{(0)} l_1) \approx 1 - \beta_1^{(0)} l_1, \quad \exp(-\beta_2^{(0)} l_2) \approx 0.$$

1Б. Случай, когда оба слоя образца термически тонкие, для которых справедливы условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $|r_1| > 1$  и  $|r_2| > 1$ ,  $r_i = \beta_i^{(0)} / \sigma_i$ . В результате достаточно длинных вычислений авторами получено следующее выражение для ФА-сигнала на основной гармонике

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) e^{-\gamma l_{1N}}}{2k_b^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1b}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} + \delta_{3S(2)}) W_{01} - \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2} - \delta_{2S(2)} + \delta_{2b}) W_{02}]. \quad (1.4.9)$$

Нетрудно заметить, что и для этого случая зависимость амплитуды ФА-сигнала от частоты описывается законом  $|\delta p| \propto \omega^{-1}$ .

2Б. Случай термически толстого второго и термически тонкого первого слоёв, для которых имеют место условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $r_i = \beta_i^{(0)} / \sigma_i$ ,  $|r_1| > 1$  и  $|r_2| < 1$ ,  $\exp(-\sigma_{1S(2)} l_2) \approx 0$ ,  $\exp(-\sigma_{1S(1)} l_1) \approx 1$ . Тогда имеет место выражение

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0 [A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2^{(0)} / \sigma_{1S(2)}] e^{-\gamma l}}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} + \delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)}) W_{01}] - \right. \\ \left. - \left[ \frac{(\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)})}{2} \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) (\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)}) \beta_2^{(0)}}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)} \sigma_{1S(1)}} W_{01} \right] \right\} \quad (1.4.10)$$

из которого следует, что для этого случая зависимость амплитуды нелинейного ФА-сигнала на основной гармонике от частоты является сложная функция и описывается зависимостью

$$|\delta p| \propto C_1 \omega^{-1} + C_2 \omega^{-3/2},$$

где  $C_i$ , в основном, определяются посредством ТК теплофизических и оптических величин второго слоя.

3Б. Случай термически толстого второго и термически тонкого первого слоёв, но первый с условиями  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $|r_1| \gg 1$ ,  $|r_2| \gg 1$  и  $l_{S(1)} \beta_1^{(0)} \ll 1$ ,  $l_{S(2)} \beta_2^{(0)} \ll 1$ . Для этого случая получены следующие выражения:

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0 [A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2^{(0)} / \sigma_{1S(2)}] e^{-\gamma l_{1N}}}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + \right. \\ \left. + \frac{3\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} - \delta_{S(2)} + 2(\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)})}{2} W_{01}] \right\} \quad (1.4.11)$$

$$\Psi_{1N(1)}(l_1 \ll \mu_{1S(1)}, l_2 \gg \mu_{1S(2)}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \dots \text{если} \dots [K_{1N(1)}(l_1 \ll \mu_{1S(1)}, l_2 \gg \mu_{1S(2)})\Theta_0 + K_{1N(2)}(l_1 \ll \mu_{1S(1)}, l_2 \gg \mu_{1S(2)})W_0] < 0, \\ -\frac{\pi}{2} \dots \text{если} \dots [K_{1N(1)}(l_1 \ll \mu_{1S(1)}, l_2 \gg \mu_{1S(2)})\Theta_0 + K_{1N(2)}(l_1 \ll \mu_{1S(1)}, l_2 \gg \mu_{1S(2)})W_0] > 0. \end{cases}$$

Оказалось, что и для этого случая уменьшение амплитуды нелинейного ФА-сигнала на основной гармонике с ростом частоты подчиняется закону

$$|\delta p| \propto C_1 \omega^{-1} + C_2 \omega^{-3/2},$$

где параметры  $C_i$  являются сложной функцией коэффициента теплопроводности второго слоя и ее ТК.

С. Случай прозрачных обоих слоёв, для которого справедливы соотношения  $\exp(-l_{S(1)}\beta_1^{(0)}) \approx 1 - l_{S(1)}\beta_1^{(0)}$ ,  $\exp(-l_{S(2)}\beta_2^{(0)}) \approx 1 - l_{S(2)}\beta_2^{(0)}$ .

1С. Случай, когда второй слой термически толстого второго и тонкого первого слоёв, для которых имеют место условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $|r_1| \gg 1$ ,  $|r_2| \gg 1$  и  $l_{S(1)}\beta_1^{(0)} \ll 1$ ,  $l_{S(2)}\beta_2^{(0)} \ll 1$ . Для этого случая получено выражение

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) e^{-i\Psi}}{2k_{S(2)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(2)}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (2\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} - \delta_{S(2)}) W_{01}], \quad (1.4.12)$$

из которого видно, что уменьшение амплитуды ФА-сигнала с ростом частоты происходит по закону  $\propto \omega^{-1}$ .

2С. Случай термически толстого второго и тонкого первого слоёв, для которого справедливы условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$ ,  $|r_1| \gg 1$ ,  $|r_2| \gg 1$  и  $l_{S(1)}\beta_1^{(0)} \ll 1$ ,  $l_{S(2)}\beta_2^{(0)} \gg 1$ . Для этого случая получено выражение

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0 [A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2^{(0)} / \sigma_{1S(2)}] e^{-i\Psi}}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)}) W_{01}] - \right. \\ \left. - (\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)}) W_{01} I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1 / 4k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)} \right\}, \quad (1.4.13)$$

из которого следует, что зависимость амплитуды основной гармоники нелинейного ФА-сигнала от частоты подчиняется закону

$$|\delta p| \propto C_1 \omega^{-1} + C_2 \omega^{-3/2}.$$



Из этого выражения нетрудно заметить, что в зависимости от величин параметров  $C_1$  и  $C_2$  может иметь место, как общий вид, так и вид с одним из слагаемых в правой части соотношения.

3С. Случай термически тонких первого и второго слоёв, для которого имеют место условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)}(\omega)$ ,  $|r_1| > 1$  и  $|r_2| > 1$ , справедливо выражение

$$\delta P_{1N} = \frac{\gamma P_0 e^{-i\varphi}}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0}{2k_b^{(0)} \sigma_{1b}} [A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2^{(0)} l_2 [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)}) W_{01} - (\delta_{2S(2)} + \delta_b - 2\delta_{2b}) W_{02}] + \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \delta_{3S(1)} \beta_1^{(0)} l_1}{2k_b \sigma_{1b}} \Theta_0 + \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \delta_{3S(2)} \beta_2^{(0)} l_2}{2k_b \sigma_{1b}} W_{01} \right\}, \quad (1.4.14)$$

из которого следует, что для этого случая уменьшение амплитуды ОГ нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты починяется закону  $\propto \omega^{-1}$ .

Как видно, частотная зависимость амплитуды основной гармоники нелинейного ФА-сигнала является достаточно сложной функцией. Между тем, оказалось, что закон  $\sim \omega^{-1}$  имеет место в большинстве из рассмотренных случаев. Зависимости типа  $\sim \omega^{-3/2}$  появляются в виде суперпозиции  $|\delta p| \propto C_1 \omega^{-1} + C_2 \omega^{-3/2}$  и могут стать основными, если первое слагаемое пренебрежимо мало. Очевидно, что простые выражения для параметров ФА-сигнала позволяют определить теплофизические и оптические параметры того или иного слоя и их термические коэффициенты из измерений величины амплитуды этой гармоники ФА-сигнала.

**Вторая гармоника.** В [76] получено общее выражение для колебания давления на второй гармонике в газовом слое и выполнен его обстоятельный анализ. Очевидно, что и здесь основную роль играет соотношение между длиной пробега фотона  $\mu_{\beta(i)}(\omega) = (\beta_i^{(0)})^{-1}$ , длиной тепловой диффузии  $\mu_{2(i)}(\omega)$  и толщинами соответствующих слоёв образца  $l_{S(i)}$ .

А. Случай не прозрачного первого слоя, для которого выполняются условия  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}$ ,  $\exp(-l_{S(1)} \beta_1^{(0)}) \approx 0$ .

1А. Случай термически толстых обоих слоёв, для которого справедливы условия  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \gg \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{\beta(i)}(\omega) = \beta_i^{-1}$ ,

$\exp(-\sigma_{2S(1)}l_1) \approx 0$ ,  $\exp(-\sigma_{2S(2)}l_2) \approx 0$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}(\omega)$ . Для этого случая получено выражение

$$\delta p_{2(1)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2(A_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2S(1)}^2}{8\sqrt{2}(k_{S(1)}^{(0)})^2} e^{-i\pi/4} K_{2N(1)}(l_{S(1)} \gg \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta_1}, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}). \quad (1.4.15)$$

2А. Случай термически толстых обоих слоёв с условиями  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} > \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{2S(1)} \ll \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}(\omega)$ , для которого имеет место выражение

$$\delta p_{2(2)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2(A_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2S(1)}^4 e^{-i3\pi/4}}{8\sqrt{2}(k_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{\beta_1}^2} K_{2N(2)}(l_{S(1)} \gg \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} \ll \mu_{\beta_1}, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}). \quad (1.4.16)$$

3А. Случай термически толстого второго и тонкого первого слоёв с условиями  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$  и  $l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}(\omega)$ , для которого справедливо выражение

$$\delta p_{2(3)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2(A_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2S(2)}^2 e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2}(k_{S(2)}^{(0)})^2} K_{2N(3)}(l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta_1}, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}). \quad (1.4.17)$$

4А. Случай термически тонких обоих слоёв с условиями  $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $\mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$  и  $l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)}(\omega)$ , для которого имеет место равенство

$$\delta p_{2(4)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2(A_{S(2)}^{(0)})^2 (1 - R_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2b}^2 e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2}(k_b^{(0)})^2} \times \quad (1.4.18)$$

$$\times K_{2N(4)}(l_{S(1)} \beta_1 \gg 1, l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta_1}, l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)})$$

Величины

$$K_{2N}(l_{S(i)} \gg \mu_{2S(i)}, \mu_{2S(i)} \gg \mu_{\beta_1}) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} (2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2S(1)} - \sqrt{2}\delta_{S(1)}) + \sqrt{2}(\delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)}),$$

$$K_{2N(2)}(l_{S(1)} \gg \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} \ll \mu_{\beta_1}, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} (2\delta_{2g} - \delta_g) + (\delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)} - \delta_{S(1)}),$$

$$K_{2N(3)}(l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, |r_1| > 1, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} (2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2S(2)} - \sqrt{2}\delta_{S(2)}) + \sqrt{2}(\delta_{3S(1)} + \delta_{4S(2)}),$$

$$K_{2N(4)}(l_{S(1)} \beta_1 \gg 1, l_{S(i)} \ll \mu_{2S(i)}, |r_1| > 1) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} (2\delta_{2g} - \delta_g - \sqrt{2}\delta_b - 2\delta_{2b}) + \sqrt{2}\delta_{3S(1)}$$

в выражениях (1.4.15)-(1.4.18) являются искомыми нелинейными коэффициентами для рассматриваемого случая и состоят из комбинации ТК теплофи-

зических параметров, оптического коэффициента поглощения и поглощательной способности слоев.

Б. Случай первого прозрачного и второго не прозрачного слоёв. Для этого случая справедливы условия  $\exp(-l_{S(2)}\beta_2^{(0)}) \approx 0$ ,  $l_{S(1)}\beta_1 \ll 1$ ,  $\exp(-l_{S(1)}\beta_1^{(0)}) \approx 1 - l_{S(1)}\beta_1^{(0)}$ .

1Б. Случай термически тонких обоих слоёв, для которого имеются условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)}(\omega)$ ,  $|r_1| > 1$  и  $|r_2| > 1$ . Для этого случая получено выражение

$$\delta p_{2(5)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2 (A_{S(2)}^{(0)})^2 (1 - R_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2b}^2 e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2} (k_b^{(0)})^2} \times, \quad (1.4.19)$$

$$\times K_{2N(5)}(l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, |r_i| > 1, l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)})$$

$$K_{2N(5)}(l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, |r_i| > 1, l_{S(2)} \ll \mu_{2S(2)}) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} (2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2b} - \sqrt{2}\delta_b) + \sqrt{2}(\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)})$$

2Б. Случай термически толстого второго и тонкого первого слоёв, для которых справедливы условия  $l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}(\omega)$ ,  $|r_1| \gg 1$ ,  $|r_2| \gg 1$  и  $l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}(\omega)$ . Для

этого случая получено выражение

$$\delta p_{2(6)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2 (A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}))^2 \mu_{2g} \mu_{2S(2)}^2 e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2} (k_{S(2)}^{(0)})^2} \times, \quad (1.4.20)$$

$$\times K_{2N(6)}(l_{S(1)}\beta_1^{(0)} \ll 1, \beta_2^{(0)} l_{S(2)} \gg 1, l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, |r_i| > 1, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)})$$

$$K_{2N(6)}(l_{S(1)} \ll \mu_{2S(1)}, |r_i| > 1, l_{S(2)} \gg \mu_{2S(2)}) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} [2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2S(2)} - \sqrt{2}\delta_{S(2)}] + \sqrt{2}(\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)}).$$

Выражения (1.4.15)-(1.4.20) показывают, что лишь для одного случая (2А) частотная зависимость амплитуды возбуждаемых сигналов  $\sim \omega^{-5/2}$ , а во всех остальных  $\sim \omega^{-3/2}$ . Между тем, нетрудно заметить, что во всех случаях ТК оптического коэффициента поглощения слоев входит аддитивно с величиной ТК поглощательной способности этих же слоев. Следовательно, из результатов экспериментального измерения амплитуды этого сигнала можно определить не только абсолютную величину оптического коэффициента поглощения, но и её температурную зависимость.

## ГЛАВА II. ВКЛАД ПОГЛОЩЕНИЯ ПОДЛОЖКИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

**Введение.** Из приведённого литературного обзора видно, что вклад поглощения подложки в линейный ФА-сигнал исследован не полностью, в то же самое время нет каких-либо сведений о закономерностях нелинейного ФА-отклика в твёрдотельных системах. Восполнение этих пробелов и является целью настоящей главы.

### 2.1. Вклад поглощения подложки на параметры линейного фотоакустического сигнала твердотельных образцов

Отметим, что одномерная линейная теория ФА-эффекта была предложена в известной работе Розенсвайга и Гершо [21]. В [84] был рассмотрен случай прозрачного образца на поглощающей подложке. Однако случай поглощающего образца на поглощающей подложке оказался не рассмотренным. Устранение этого пробела и является целью настоящего раздела работы [120, 121].

Рассмотрим классическую трехслойную модель ФА-камеры [21], состоящей из газового слоя (g), образца (s) и подложки (b) (рис.2.1).

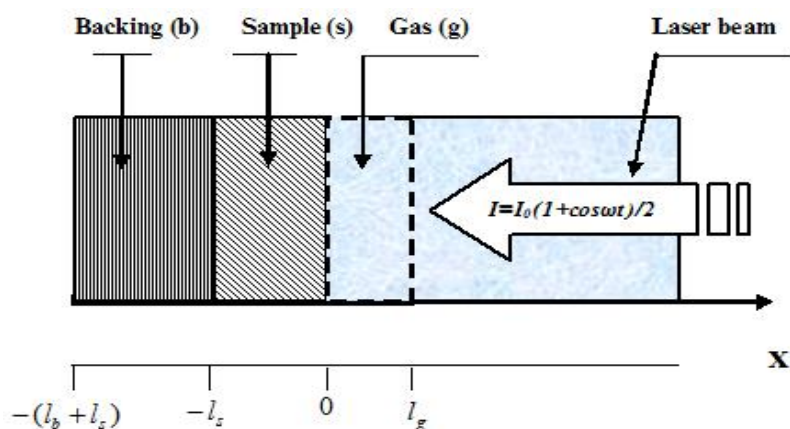


Рис. 2.1. Геометрия задачи для однослойных образцов в ФА-ячейке:  
g- газовый слой; s-образец; b- поглощающая подложка.

Газ считается прозрачным для падающего луча, а образец и подложка поглощающими с коэффициентами поглощения  $\beta_s$  и  $\beta_b$ , соответственно. Тогда для этих систем справедлива следующая система уравнений теплопроводности:

$$C_{pg} \frac{\partial T_g}{\partial t} = \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (2.1.1)$$

$$C_{ps} \frac{\partial T'_s}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T'_s}{\partial x^2} + 0.5 I_0 \beta_s A_s (1 + e^{i\omega t}) e^{\beta_s x}, \quad -l_s \leq x \leq 0, \quad (2.1.2)$$

$$C_{pb} \frac{\partial T'_b}{\partial t} = \kappa_b \frac{\partial^2 T'_{s(2)}}{\partial x^2} + 0.5 I_0 \beta_b A_b (1 - R_s) (1 + e^{i\omega t}) e^{-\beta_s l_s} e^{\beta_b (x+l_s)}, \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (2.1.3)$$

где  $C_{pi}, \kappa_{pi}, A_i, R_i$  - теплоемкость единицы объема, коэффициент теплопроводности, поглощательной способности и коэффициент отражения соответствующих слоев.

Принимая во внимание, что измерения параметров ФА-сигнала проводятся после выхода поля температуры ФА-камеры в стационарное состояние, возмущения температур  $T'_i(x, t)$  представим в виде суммы равновесных  $T_{0i}(x)$  и колебательных (акустических)  $\Phi_i(x, t)$  частей:  $T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_i(x, t)$ . Также учитывая, что падающий лазерный луч модулирован по гармоническому закону, временное изменение величины  $\Phi_i(x, t)$  представим в виде  $\Phi_i(x, t) = \Phi_i(x, \omega) \exp(i\omega t)$ . Тогда из системы уравнений (2.1.1) – (2.1.3) для  $\Phi_i(x, \omega)$  получим следующую систему:

$$\frac{d^2 \Phi_g}{dx^2} - \sigma_g^2 \Phi_g = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{d^2 \Phi_s}{dx^2} - \sigma_s^2 \Phi_s = -\frac{\beta_s A_s I_0 e^{\beta_s x}}{2\kappa_s}, \quad -l_s \leq x \leq 0, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{d^2 \Phi_b}{dx^2} - \sigma_b^2 \Phi_b = -\frac{\beta_b A_b (1 - R_s) I_0 e^{-\beta_s l_s} e^{\beta_b (x+l_s)}}{2\kappa_b}, \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (2.1.6)$$

где  $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i$ ,  $\sigma_i = (1 + i)a_i$ ,  $a_i = 1 / \mu_i$ ,  $\mu_i = (2\chi_i / \omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии,  $\chi_i = \kappa_i / C_p$  - температуропроводности соответствующих слоев.

Совместное решение системы (2.1.4)-(2.1.6), подчиняющейся граничным условиям

$$\begin{aligned} \Phi_g(l_g, \omega) = 0, \quad \Phi_g(0, \omega) = \Phi_s(0, \omega), \quad \Phi_s(-l_s, \omega) = \Phi_b(-l_b, \omega), \\ \Phi_b(-l_s - l_b, \omega) = 0, \quad \kappa_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial x} \Big|_{x=0} = \kappa_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \kappa_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Big|_{x=-l_s} = \kappa_b \frac{\partial \Phi_b}{\partial x} \Big|_{x=-l_s}, \end{aligned}$$

позволяет получить выражение для комплексной амплитуды колебания температуры в газовом слое

$$\Theta = \frac{I_0}{\Delta} \left[ \frac{\beta_s \Delta_1}{2\kappa_s (\beta_s^2 - \sigma_s^2)} + \frac{b\beta_b A_b (1 - R_s)(r_b - 1)E}{\kappa_b (\beta_b^2 - \sigma_b^2)} \right], \quad (2.1.7)$$

посредством, которого детектируется ФА-сигнал микрофоном. В (2.1.7) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b = k_b \sigma_b / k_s \sigma_s, \quad r_i = \beta_i / \sigma_i, \quad E = \exp(-\beta_s l_s), \\ \Delta_1 = (b+1)(r_s - 1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s + 1)\exp(-\sigma_s l_s) + 2(b - r_s)E, \\ \Delta = (b+1)(r_s - 1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s + 1)\exp(-\sigma_s l_s). \end{aligned}$$

Выражение (2.1.7) показывает, что для рассматриваемого случая величина  $\Theta$  состоит из двух частей, обусловленных поглощением падающего луча образцом и подложкой соответственно и, если положить  $\beta_b = 0$ , тогда будем иметь результат теории [21], а при  $\beta_s = 0$  результат теории [84].

Возмущения давления в газовом слое определяются усреднением  $\Phi_g(x, \omega) = \Theta \exp(-\sigma_g x)$  по длине тепловой диффузии в газе согласно выражения [21]

$$\delta p(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \overline{\Phi}_g(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_0 l_g} \int_0^{2\pi\mu_g} \Phi_g(\omega, x) dx. \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.7) и (2.1.8) следует, что акустическое колебание давления в буферном газе состоит из двух составляющих  $\delta p = \delta p_1 + \delta p_2$ , где

$$\delta p_1(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \overline{\Phi}_{g(1)}(\omega), \quad \delta p_2(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \overline{\Phi}_{g(2)}(\omega).$$

Представив эти величины в виде  $\delta p_i(t) = Q_i \exp[i(\omega t - \pi/4)]$  и, выполняя соответствующие вычисления, для комплексных амплитуд ФА-сигнала будем иметь

$$Q_1 = \frac{Y\beta_s}{a_g \kappa_s (\beta_s^2 - \sigma_s^2)} \frac{[(b+1)(r_s - 1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s + 1)\exp(-\sigma_s l_s) + 2(b-r_s)E]}{(b+1)(r_s - 1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s + 1)\exp(-\sigma_s l_s)}, \quad (2.1.9)$$

$$Q_2 = \frac{2Yb\beta_b}{a_g \kappa_b (\beta_b^2 - \sigma_b^2)} \frac{b\beta_b A_b (1-R_s)(r_b - 1)}{(b+1)(r_s - 1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s + 1)\exp(-\sigma_s l_s)}, \quad (2.1.10)$$

где  $Y = \mu_0 I_0 / 2\sqrt{2} l_g T_0$ . Подчеркнем, что появление слагаемого  $\delta p_2(\omega)$  полностью связано с поглощением подложки.

Очевидно, что если образец является непрозрачным, тогда  $\beta_s \ell_s \gg 1$ ,  $E \approx 0$  и вклад, обусловленный поглощением подложки, отсутствует. Для прозрачных образцов величина  $\beta_s \ell_s \ll 1$  и часть падающего светового потока проходит через подложку, поглощение которого генерирует колебания температуры в ней, которые затем по диффузионному закону передаются образцу и буферному газу. Именно этот случай является интересным, поэтому в дальнейшем будем подробно его рассматривать.

А) Предположим, что образец является термически тонким и  $\ell_s \ll \mu_s$ ,  $\exp(\pm \sigma_s l_s) \approx 1$ , тогда  $\Delta \approx 2b$ . В этом случае ФА-сигнал, генерируемый лишь поглощением образца, определяется выражением [21]

$$\delta p_1(t) = \frac{YA_s(1-i)\beta_s \ell_s}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)]. \quad (2.1.11)$$

Между тем, для характеристики подложки существуют две характерных длины: длина пробега фотона  $\mu_{\beta b}$  и длина тепловой диффузии  $\mu_b$ . В зависимости от соотношения между этими величинами могут реализоваться следующие два случая.

1А). В случае выполнения условия  $\mu_{\beta b} \gg \mu_b$  из (2.1.10) получим

$$\delta p_2(t) = \frac{Y(1-R_s)A_b(1-i)}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)]. \quad (2.1.12)$$

Из сравнения последних двух выражений следует, что в этом случае амплитуда ФА-сигнала, возбуждаемого колебанием температуры подложки

и передаваемого в буферный газ через образец, является доминирующей, поскольку  $\beta_s l_s \ll 1$ . Нетрудно также заметить, что в этом случае частотные зависимости амплитуды обоих сигналов меняются по закону  $\propto \omega^{-1}$ .

2А). Пусть  $\mu_{\beta b} \ll \mu_b$ . Для этого случая, выполняя необходимые вычисления, из выражения (2.1.10) будем иметь

$$\delta p_2(t) = -\frac{iY(1-R_s)A_b\beta_b\mu_b}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)], \quad (2.1.13)$$

из которого следует, что в этом случае формирование колебаний температуры в газовом слое происходит в конкуренции между степенью прозрачности образца ( $\beta_s l_s \ll 1$ ) и оптической толщиной подложки  $\mu_b \beta_b$ . Также обнаруживается сдвиг фазы  $\delta p_2(t)$  на величину  $\pi/4$  по сравнению с  $\delta p_1(t)$ , а частотная зависимость амплитуды этого сигнала меняются по закону  $\propto \omega^{-3/2}$ .

Б) Предположим, что  $l_s < \mu_s$  и  $\mu_s < \mu_\beta$ , тогда  $\exp(\pm\sigma_s l_s) \approx 1 \pm \sigma_s l_s$ ,  $\Delta \approx 2(b + \sigma_s l_s) \approx 2b$ . Вычисление приводит к выражению [21]

$$\delta p_1(t) = \frac{YA_s(1-i)\beta_s l_s}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)], \quad (2.1.14)$$

совпадающему с (2.1.11). И в этом случае реализуются два случая для подложки.

1Б). При выполнении условия  $\mu_{\beta b} \gg \mu_b$  из уравнения (2.1.10) получаем

$$\delta p_2(t) = \frac{Y(1-R_s)A_b(1-i)}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)]. \quad (2.1.15)$$

2Б). Пусть  $\mu_{\beta b} \ll \mu_b$ , тогда справедливо выражение

$$\delta p_2(t) = -\frac{iY(1-R_s)A_b\beta_b\mu_b}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)]. \quad (2.1.16)$$

Видно, что выражения (2.1.12) и (2.1.14), (2.1.13) и (2.1.16) совпадают.

С) Для термически толстых образцов  $l_s \gg \mu_s$ ,  $\exp(-\sigma_s l_s) \approx 0$  и колебания температуры, передаваемые из подложки в образец, затухают в приповерхностном слое образца и её вклад в генерацию ФА-сигнала отсутствует.



Подводя итоги настоящей раздела работы, можно заключить, что нами обобщена линейная теория ФА-эффекта для случая, когда подложка, наряду с образцом, является поглощающей. Выявлено, что вклад от поглощающей подложки в генерируемый ФА-сигнал является существенным лишь для термически тонких слабопоглощающих образцов. Обнаружено, что частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала, обусловленная поглощающей подложкой, изменяется по законам  $\propto \omega^{-1}$  при  $\mu_{pb} \gg \mu_b$  и  $\propto \omega^{-3/2}$  при  $\mu_{pb} \ll \mu_b$ .

## 2.2. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика: математическая модель

Различные аспекты теории возбуждения нелинейного фотоакустического отклика для одно- и двухслойных образцов на прозрачной подложке подробно исследованы в [51-55, 57-67, 70-79]. Между тем, очевидно, что при выполнении условия  $\beta_s l_s \ll 1$  определенная часть светового потока падает на подложку. С другой стороны, если подложка для падающего луча является поглощающей с оптическим коэффициентом поглощения  $\beta_b$ , тогда в ней, также как в образце, генерируются колебания температуры, которые по диффузионному закону передаются посредством образца газовому слою и, в результате, появляется дополнительный вклад в ФА-сигнал, детектируемый микрофоном. В [120, 121] была предложена линейная теория этого вклада для однослойных образцов. Поиск вклада этого механизма в формирование нелинейного ФА-отклика и является целью настоящей главы работы [122-127].

**Математическая модель задачи.** Исходим из следующей системы нелинейных уравнений теплопроводности для ФА-камеры, состоящей из газового слоя (g), образца (s) и поглощающей подложки (b):

$$C_{pg}(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_g(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial x}), \quad 0 \leq x \leq l_g \quad (2.2.1)$$

$$C_{ps}(T_s) \frac{\partial T'_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_s(T_s) \frac{\partial T'_s}{\partial x}) + 0.5A_s(T)\beta_s I_0 (1 + e^{i\alpha x}) \exp(\beta_s x), \quad -l_s \leq x \leq 0 \quad (2.2.2)$$

$$C_{pb}(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_b(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial x}) + \frac{I_1 \beta_b A_b(T) e^{\beta_b(x+l_s)}}{2} (1 + e^{i\omega t}), \quad -(l_b + l_s) \leq x \leq -l_s \quad . \quad (2.2.3)$$

где  $I_1 = (1 - R_s) I_0 \exp(-\beta_s l_s)$ . Шесть граничных условий, необходимых для решения системы (2.2.1)-(2.2.3), являются равенства

$$T'_g(t, l_g) = 0; \quad T'_b[t, -(l_b + l_s)] = 0; \quad T'_g(t, 0) = T'_s(t, 0); \quad T'_s(t, -l_s) = T'_b(t, -l_s), \\ [k_s(T_s) \frac{dT'_s}{dx}]_{x=0} = [k_g(T_g) \frac{dT'_g}{dx}]_{x=0}; \quad [k_s(T'_s) \frac{dT'_{s(2)}}{dx}]_{x=-l_s} = [k_b(T'_b) \frac{dT'_b}{dx}]_{x=-l_s},$$

соответствующие условиям непрерывности температур и потоков тепла на границах газ-образец, образец-подложка и подложка-газ.

Система нелинейных уравнений теплопроводности (2.2.1)-(2.2.3) совместно с граничными условиями являются исходными для исследования особенностей возбуждения нелинейного ФА-отклика, когда подложка в ФА-камере является поглощающей.

Представим возмущение температуры в виде суммы локально-равновесной  $T_{0i}(x)$ , линейных  $\Phi_i(x, t)$  и нелинейных акустических  $\Phi_{Ni}(x, t)$  частей, т.е. в виде

$$T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_{Li}(x, t) + \Phi_{1Ni}(x, t) + \Phi_{2Ni}(x, t). \quad (2.2.4)$$

Тогда система уравнений (2.2.1)-(2.2.3) распадается на следующие три системы уравнений для  $T_{0i}(x)$ ,  $\Phi_{1Ni}(x, t)$  и  $\Phi_{2Ni}(x, t)$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0g}(x)}{dx} + 0.5 \delta_{2g} \frac{dT_{0g}^2(x)}{dx} \right] = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0s}(x)}{dx} + 0.5 \delta_{2s} \frac{T_{0s}^2(x)}{dx} \right] + \frac{0.5 \beta_s A_s^{(0)} I_0 \delta_{3s} T_{0s}(0) e^{\beta_s x}}{k_s^{(0)}} = - \frac{0.5 \beta_s A_s^{(0)} I_0 e^{\beta_s x}}{k_s^{(0)}}, \quad -l_s \leq x \leq 0, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0b}(x)}{dx} + 0.5 \delta_{2b} \frac{dT_{0b}^2(x)}{dx} \right] + 0.5 I_1 \delta_{3b} \beta_b A_b^{(0)} T_{0s}(0) e^{\beta_b(x+l_s)} = 0.5 \beta_b A_b^{(0)} I_1 e^{\beta_b(x+l_s)}, \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{i0}} \frac{\partial \Phi_{1Ng}}{\partial t} = -(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1g}}{\chi_{g0}} \frac{\partial}{\partial t})(T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x, t)), \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ns}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{s0}} \frac{\partial \Phi_{1Ns}}{\partial t} = -(\delta_{2s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1s}}{\chi_{s0}} \frac{\partial}{\partial t})(T_{0i}(x)\Phi_{L_s}(x,t)) - \frac{A^{(0)}\beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} [T_{0s}(0)e^{i\omega t} + \Phi_L(0,t)]e^{\beta_s x}, \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{i0}} \frac{\partial \Phi_{1Nb}}{\partial t} = -(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1b}}{\chi_{b0}} \frac{\partial}{\partial t})(T_{0b}(x)\Phi_{L_b}(x,t)) - \frac{A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} [T_{0b}(-l_s, t)e^{i\omega t} + \Phi_{lb}(-l_s, t)]e^{\beta_b(x+l_s)}, \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ng}}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{Lg}^2(x,t)), \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Ns}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_s^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ns}}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\delta_{2s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_s}{\chi_s^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L_s}(x,t)^2 - \frac{A_s^{(0)}\beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} \Phi_L(0,t)e^{i\omega t} e^{\beta_s x}), \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Nb}}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L_b}^2(x,t) - \frac{A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} \Phi_b(-l_s, t)e^{i\omega t} e^{\beta_b(x+l_s)}), \quad (2.2.13)$$

Отметим, что выражение для  $\Phi_{L_i}(x,t)$  в рассматриваемой геометрии ФА- эксперимента соответствует выражению (2.1.7) и получено в [120].

Учитывая, что в правых частях уравнений (2.2.8)-(2.2.13) источники изменяются по гармоническому закону, представим временную зависимость колебательных частей возмущения температур в виде  $\Phi_L(x,t) = \Phi_L(x,\omega)\exp(i\omega t)$ .

Тогда для функций

$$\Psi_{1i}(x,\omega) = \Phi_{1Ni}(x,\omega) + \delta_{2i} T_{0i}(x)\Phi_{L_i}(x,\omega), \quad \Psi_{2i}(t,\omega) = \Phi_{2Ni}(\omega,x) + 0,5\delta_{2i}\Phi_{L_i}^2(\omega,x)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \Psi_{1g}}{dx^2} - \sigma_g^2 \Psi_{1g} = \sigma_g^2 (\delta_g - \delta_{2g}) T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x,\omega), \quad (2.2.14)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1s}}{dx^2} - \sigma_s^2 \Psi_{1s} = \sigma_s^2 (\delta_s - \delta_{2s}) T_{0s}(x) \Phi_{L_s}(x,\omega) - \frac{A_s^{(0)}\beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} [T_{0s}(0) + \Phi_{L_s}(0,\omega)]e^{\beta_s x}, \quad (2.2.15)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1b}}{dx^2} - \sigma_b^2 \Psi_{1b} = \sigma_b^2 (\delta_b - \delta_{2b}) T_{0b}(x) \Phi_{L_b}(x,\omega) - \frac{A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} [T_{0b}(-l_s, t)e^{i\omega t} + \Phi_{lb}(-l_s, t)]e^{\beta_b(x+l_s)}, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2g}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2 \Psi_{2g} = \frac{(\delta_g - \delta_{2g})}{2} \sigma_{2g}^2 \Phi_{Lg}^2(\omega,x), \quad (2.2.17)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2s}}{dx^2} - \sigma_{2s}^2\Psi_{2s} = \frac{(\delta_s - \delta_{2s})}{2}\sigma_{2s}^2\Phi_{L_s}^2(\omega, x) - 0.5A_s^{(0)}\beta_s I_0\delta_{3s}\Phi_{L_s}(0, \omega)e^{\beta_s x}, \quad (2.2.18)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2b}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2\Psi_{2b} = \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2}\sigma_{2b}^2\Phi_{L_b}^2(\omega, x) - 0.5A_b^{(0)}\beta_b I_1\delta_{3b}\Phi_{L_b}(0, \omega)e^{\beta_b(x+l_s)}, \quad (2.2.19)$$

Системы уравнений (2.2.5)-(2.2.7) и (2.2.14)-(2.2.19) представляют собой математическую модель рассматриваемой проблемы и позволяют детально исследовать вклад тепловой нелинейности оптических параметров поглощающей подложки на характеристики возбуждаемого нелинейного ФА-сигнала.

**2.3. Стационарное поле температуры.** Система уравнений (2.2.5)-(2.2.7) позволяет найти стационарное поле температуры в ФА-камере. Для этого, как и в [51,52], введем безразмерные функции  $g_i(x) = \delta_{2i}T_{0i}(x)$  и учтем, что  $T_{0s}(0) = T_{0g} = \Theta_0$ ,  $T_{0b}(-l_s) = T_{0s}(-l_s) = W_0$ . Тогда решение системы (2.2.5)-(2.2.7) можно представить в следующем виде:

$$g_g(x) = [1 + \delta_{2g}\Theta_0(2 + \delta_{2g}\Theta_0)(1 - \frac{x}{l_g})]^{1/2} - 1, \quad (2.3.1)$$

$$g_s(x) = \{1 + \delta_{2s}\Theta_0(2 + \delta_{2s}\Theta_0)(1 + \frac{x}{l_s}) - \delta_{2s}W_0(2 + \delta_{2s}W_0)\frac{x}{l_s} + \frac{A_s^{(0)}I_0\delta_{2s}(1 + \delta_{3s}\Theta_0)}{\beta_s\kappa_s^{(0)}}[1 + \frac{x}{l_s} - (e^{\beta_s x} + E_0\frac{x}{l_s})]\}^{1/2} - 1, \quad (2.3.2)$$

$$g_b(x) = \{1 + [\frac{A_b^{(0)}\delta_{2b}I_1(1 + \delta_{3b}W_0)}{\beta_b\kappa_b^{(0)}}[1 + (1 - E_b)\frac{x+l_s}{l_b} - \exp(\beta_b(x+l_s))]] + W_0\delta_{2b}(2 + \delta_{2b}W_0)(1 + \frac{x+l_s}{l_b})\}^{1/2} - 1, \quad (2.3.3)$$

где  $E = \exp(-\beta_s l_s)$ ,  $E_b = \exp(-\beta_b l_b)$ . Используя условия непрерывности потока тепла на границе газ-образец и образец-подложка, получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения величин  $\Theta_0$ ,  $W_0$ :

$$\Theta_0^2(\delta_{2s} + d\delta_{2g}) + \Theta_0(2 + 2d + U\delta_{3s}) - W_0^2\delta_{2s} - 2W_0 + U = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\Theta_0^2\delta_{2s} + \Theta_0(2 + U_1\delta_{3s}) - W_0^2(\delta_{2s} + d_1\delta_{2b}) - W_0(2 + 2d_1 + U_2\delta_{3b}) + U_3 = 0. \quad (2.3.5)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$d = \frac{\kappa_g^{(0)} l_s}{\kappa_s^{(0)} l_g}, \quad d_1 = \frac{\kappa_b^{(0)} l_s}{\kappa_s^{(0)} l_b}, \quad U = \frac{A_s^{(0)} I_0}{\beta_s^{(0)} \kappa_s^{(0)}} (1 - E_0 - \beta_s^{(0)} l_s), \quad U_1 = \frac{A_s^{(0)} I_0}{\beta_s^{(0)} \kappa_s^{(0)}} [1 - E_0 (1 + \beta_s^{(0)} l_s)],$$

$$U_2 = \frac{A_b^{(0)} I_1}{\beta_b \kappa_b^{(0)}} [1 - E_b - \beta_b^{(0)} l_b], \quad U_3 = U_1 - U_2.$$

Выражения (2.3.1)-(2.3.3) совместно с полученной системой алгебраических уравнений (2.3.4)-(2.3.5) и является решением сформулированной задачи, т.е. позволяет определить вклад температурной зависимости теплофизических и оптических параметров подложки на формирования температурного поля в ФА-камере. Очевидно, что нелинейная система уравнений (2.3.4)-(2.3.5) может быть решена только численно. Нами получены эти решения для случая кварцевого стекла на подложке из нержавеющей стали. Результаты представлены на рис. 2.2. Теплофизические и оптические параметры имеют следующие значения:  $\kappa_g^{(0)} = 0.025 \text{ Вт/мК}$ ,  $\delta_{2g} = 2.39 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $\kappa_s^{(0)} = 1.36 \text{ Вт/мК}$ ,  $A_s^{(0)} = 0.26$ ,  $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$ ,  $\delta_{2s} = 0.58 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $\delta_{3s} = -1.2 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [115,116],  $\kappa_b^{(0)} = 14.9 \text{ Вт/мК}$ ,  $A_b^{(0)} = 0.72$ ,  $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$ ,  $\delta_{2b} = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $\delta_{3b} = 0.19 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$  [115,116]. Толщины:  $l_g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $l_b = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $l_s = 10^{-3} \text{ м}$ .

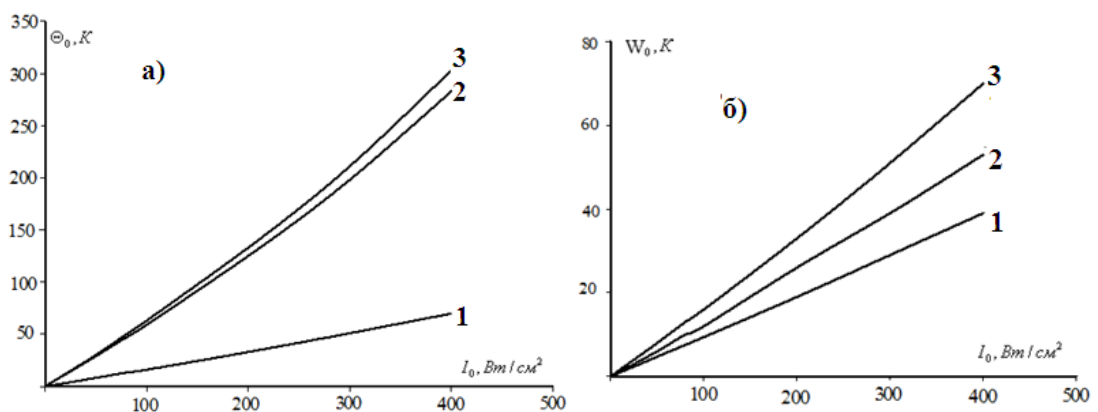


Рис. 2.2. Зависимость величин  $\Theta_0$  (а) и  $W_0$  (б) от интенсивности падающего луча для системы кварцевое стекло - нержавеющая сталь при  $\beta_s^{(0)} = 0$ ,  $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$  (кривая 1),  $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$ ,  $\beta_b^{(0)} = 0$  (кривая 2) и  $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$ ,  $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$  (кривая 3).

Из рис. 2.2 видно, что при прозрачности образца также происходит нагрев ее облучаемой поверхности, что обусловлено переносом тепла из контактирующей поверхности образца и подложки и малостью коэффициента теплопроводности подложки. В дальнейшем поглощение образца приводит к росту величин  $\Theta_0$  и  $W_0$  и постепенному переходу зависимости этих величин от интенсивности луча от линейной к нелинейной.

Таким образом, в настоящем разделе работы предложена математическая модель теории генерации нелинейного ФА-сигнала, для случая поглощающей подложки. Получены выражения, описывающие пространственное распределение поля температуры в ФА-камере и система нелинейных алгебраических уравнений для температур облучаемой поверхности образца и её обратной стороны (опорные температуры). Выполнено численное решение этой системы уравнений для случая, когда образцом является кварцевое стекло, а подложкой - нержавеющей сталь. Обнаружено, что с ростом интенсивности падающего луча зависимость опорных температур от интенсивности луча становится нелинейной.

#### **2.4. Вклад поглощения подложки на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала**

В предыдущем разделе нами предложена математическая модель явлений генерации нелинейного фотоакустического сигнала и формирования стационарного поля температуры в ФА-камере для случая, когда подложка является поглощающей. Справедливости ради отметим, что различные аспекты теории генерации первых двух гармоник нелинейного ФА-сигнала, обусловленного тепловой нелинейностью теплофизических и оптических величин среды, достаточно подробно исследованы в [51-62]. Целью настоящего раздела работы является развитие теории генерации основной гармоники нелинейного ФА-сигнала однослойным твердотельным образцом на поглощающей подложке [125,126]. В рассматриваемом случае считается, что подлож-

ка, как и образец, является поглощающей с оптическим коэффициентом поглощения  $\beta_b$ . Тогда, очевидно, что также как в образце, в подложке возбуждаются колебания температуры, которые посредством образца по диффузионному закону передаются газовому слою и, в результате, появляется дополнительный вклад в ФА-сигнал, детектируемый микрофоном.

В разделе 2.2 для величины  $\Psi_{1i}(x, \omega) = \Phi_{1Ni}(x, \omega) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(x, \omega)$  была получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \Psi_{1Ng}}{dx^2} - \sigma_g^2 \Psi_{1Ng} = \sigma_g^2 (\delta_g - \delta_{2g}) T'_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x, \omega), \quad (2.4.1)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1Ns}}{dx^2} - \sigma_s^2 \Psi_{1Ns} = \sigma_s^2 (\delta_s - \delta_{2s}) T_{0s}(x) \Phi_{Ls}(x, \omega) - \frac{A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} [T'_{0s}(0) + \Phi_{Ls}(0, \omega)] e^{\beta_s x}, \quad (2.4.2)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{1Nb}}{dx^2} - \sigma_b^2 \Psi_{1Nb} = \sigma_b^2 (\delta_b - \delta_{2b}) T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(x, \omega) - \frac{A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} [T'_{0b}(-l_s) + \Phi_{Lb}(-l_s, \omega)] e^{\beta_b(x+l_s)}. \quad (2.4.3)$$

Выражения для  $\Phi_{Li}(x, t)$ , полученные в разделе 2.1 можно переписать в следующем виде:

$$\Phi_{Lg}(x, \omega) = \Theta_L e^{-\sigma_g x}, \quad \Phi_{Ls}(x, \omega) = U_L e^{\sigma_s x} + V_L e^{-\sigma_s x} - E_s e^{\beta_s x}, \quad \Phi_{Lb}(x, \omega) = W_L e^{\sigma_b(x+l_s)} - E_b e^{\beta_b(x+l_s)},$$

где

$$U = \Delta_1 / \Delta, V = \Delta_2 / \Delta, \quad \Delta_1 = E_s [(g+r_s)(b+1)e^{\sigma_s l} - (g-1)(b-r_s)e^{-\beta_s l}] + E_b b(1-g)(r_b-1),$$

$$E_s = 0.5 \beta_s A^{(0)} I_0 [k_s^{(0)}(T_0)(\beta_s^2 - \sigma_s^2)]^{-1}, \quad \Delta_2 = E_s [(g+1)(b-r_s)e^{-\beta_s l} - (b-1)(g+r_s)e^{-\sigma_s l}] + (g+1)(r_b-1)bE_b,$$

$$\Delta = [(g+1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (g-1)(b-1)e^{-\sigma_s l}], \quad E_b = 0.5 \beta_b A_b^{(0)} I_1 [k_b^{(0)}(T_0)(\beta_b^2 - \sigma_b^2)]^{-1}, \quad g = k_g^{(0)} \sigma_g / k_s^{(0)} \sigma_s, \quad b = k_b^{(0)} \sigma_b^{(0)} / k_s^{(0)} \sigma_s^{(0)},$$

$$W_L = 0.5 \Theta_L [(1+g)e^{\sigma_s l} + (1-g)e^{-\sigma_s l}] - 0.5 E_s [(r_s-1)e^{\sigma_s l} - (r_s+1)e^{-\sigma_s l}] - E_s e^{-\beta_s l} + E_b,$$

$r_s = \beta_s \sigma_s^{-1} = (1-i)\beta_s \mu_s / 2$ ,  $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i^{(0)}$ ,  $\sigma_i = (1+i)a_i$ ,  $a_i = 1 / \mu_i$ ,  $\mu_i = (2\chi_i^{(0)} / \omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии.

Для решения системы трёх дифференциальных уравнений второго порядка требуется наличие шести граничных условий. Эти условия получены в разделе 2.2 и имеют вид

$$\Phi_{1Ns}(\omega, 0) = \Phi_{1Ng}(\omega, 0), \quad \Phi_{1Nb}(\omega, -l_s) = \Phi_{1Ns}(\omega, -l_s), \quad \Phi_{1Nb}(\omega, -l_s - l_b) = \Phi_{1Ng}(\omega, l_g) = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\left[ \frac{\partial \Psi_{1Ng}(\omega, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \frac{\partial \Psi_{1Ns}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \Psi_{1Nb}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=-l_s} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \frac{\partial \Psi_{1Ns}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=-l_s}. \quad (2.4.5)$$

Используя обозначение  $R_{1i} = 0,5\delta_{2i}^{-1}\sigma_i(\delta_i - \delta_{2i})$  и функции

$$S_{1g}(x) = \int g_{0g}(x)\Phi_{Lg}(x, \omega)e^{-\sigma_g x} dx, \quad S_{2g}(x) = \int g_{0g}(x)\Phi_{Lg}(x, \omega)e^{\sigma_g x} dx,$$

$$\Omega_{1s}(x) = (0,25A_s^{(0)}\beta_s I_0 \delta_3)(\kappa_s^{(0)})^{-1}\sigma_s^{-1} \int [\Theta_0 + \Phi_{Ls}(\omega, 0)]e^{(\beta_s - \sigma_s)x} dx, \quad S_{1s}(x) = \int g_{0s}(x)\Phi_{Ls}(x, \omega)e^{-\sigma_s x} dx,$$

$$\Omega_{2s}(x) = (0,25A_s^{(0)}\beta_s I_0 \delta_3)(\kappa_s^{(0)})^{-1}\sigma_s^{-1} \int [\Theta_0 + \Phi_{Ls}(\omega, 0)]e^{(\beta_s + \sigma_s)x} dx, \quad S_{2s}(x) = \int g_{0s}(x)\Phi_{Ls}(x, \omega)e^{\sigma_s x} dx$$

$$N_{1b}(x) = (0,25A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b})(\kappa_b^{(0)})^{-1}\sigma_b^{-1} \int [W_0 + \Phi_{Lb}(\omega, -l_s)]e^{(\beta_b - \sigma_b)(x+l_s)} dx, \quad S_{1b}(x) = \int g_{0b}(x)\Phi_{Lb}(x, \omega)e^{-\sigma_b(x+l_s)} dx,$$

$$N_{2b}(x) = (0,25A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b})(\kappa_b^{(0)})^{-1}\sigma_b^{-1} \int [W_0 + \Phi_{Lb}(\omega, -l_s)]e^{(\beta_b + \sigma_b)(x+l_s)} dx, \quad S_{2b}(x) = \int g_{0b}(x)\Phi_{Lb}(x, \omega)e^{\sigma_b(x+l_s)} dx,$$

решения уравнений (2.4.1)-(2.4.3) можно написать в виде

$$\Psi_{1Ng} = \Theta_{1N}e^{-\sigma_g x} + R_{1g}S_{1g}(x)e^{\sigma_g x} - R_{1g}S_{2g}(x)e^{-\sigma_g x}, \quad (2.4.6)$$

$$\Psi_{1Ns} = U_{1N}e^{\sigma_s x} + V_{1N}e^{-\sigma_s x} + [R_{1s}S_{1s}(x) - \Omega_{1s}(x)]e^{\sigma_s x} - [R_{1s}S_{2s}(x) - \Omega_{2s}(x)]e^{-\sigma_s x}, \quad (2.4.7)$$

$$\Psi_{1Nb}(\omega, x) = W_{1N}e^{\sigma_b(x+l_s)} + [R_{1b}S_{1b}(x) - N_{1b}(x)]e^{\sigma_b(x+l_s)} - [R_{1b}S_{2b}(x) - N_{2b}(x)]e^{-\sigma_b(x+l_s)}. \quad (2.4.8)$$

Для нахождения комплексных амплитуд  $\Theta_{1N}$ ,  $U_{1N}$ ,  $V_{1N}$  и  $W_{1N}$ , входящих в выражения (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.8), будем использовать выше приведенные граничные условия и получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \Theta_{1N} + R_{1g}[S_{1g}(0) - S_{2g}(0)] - g_{0g}(0)\Phi_{Lg}(0, \omega) = \\ & = U_{1N} + V_{1N} + R_{1s}[S_{1s}(0) - S_{2s}(0)] - g_{0s}(0)\Phi_{Ls}(0, \omega) + \Omega_{2s}(0) - \Omega_{1s}(0), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$g[R_{1g}(S_{1g}(0) + S_{2g}(0)) - \Theta_{N1}] = U_{1N} - V_{1N} + R_{1s}[S_{1s}(0) + S_{2s}(0)] - \Omega_{1s}(0) - \Omega_{2s}(0), \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} & U_{1N}e^{-\sigma_s l_s} + V_{1N}e^{\sigma_s l_s} + [R_{1s}S_{1s}(-l_s) - \Omega_{1s}(-l_s)]e^{-\sigma_s l_s} - [R_{1s}S_{2s}(-l_s) - \Omega_{2s}(-l_s)]e^{\sigma_s l_s} - g_{0s}(-l_s)\Phi_{Ls}(-l_s, \omega) = \\ & = W_{1N} + R_{1b}[S_{1b}(-l_b) - S_{2b}(-l_b)] - g_{0b}(-l_b)\Phi_{Lb}(-l_b, \omega) - N_{1b}(-l_b) + N_{2b}(-l_b) \end{aligned}, \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} & U_{1N}e^{-\sigma_s l_s} - V_{1N}e^{\sigma_s l_s} + [R_{1s}S_{1s}(-l_s) - \Omega_{1s}(-l_s)]e^{-\sigma_s l_s} + [R_{1s}S_{2s}(-l_s) - \Omega_{2s}(-l_s)]e^{\sigma_s l_s} = \\ & = b\{W_{1N} + R_{1b}[S_{1b}(-l_b) + S_{2b}(-l_b)] - N_{1b}(-l_b) - N_{2b}(-l_b)\} \end{aligned}. \quad (2.4.12)$$

Ввиду того, что ФА-сигнал регистрируется микрофоном посредством газового слоя, то достаточно из этой системы получить выражение для величины  $\Theta_{1N}$ , посредством которого и определяются нелинейные составляющие колебания давления в этом слое.



Исключив величины  $U_{1N}$ ,  $V_{1N}$  и  $W_{1N}$  из системы (2.4.9)-(2.4.12), а также учитывая условие  $g \ll 1$  и равенства  $\Phi_{L_s}(0) = \Phi_{L_g}(0) = \Theta_L$ ,  $\Phi_{L_s}(-l_s) = \Phi_{L_b}(-l_b) = Ue^{-\sigma l_s} + Ve^{\sigma l_s} - E_s e^{-\beta l_s} = W_L - E_b$ ,  $g_{0g}(0) = \sqrt{1+b_g} - 1 = \Theta_0 \delta_{2g}$ ,  $g_{0s}(0) = \sqrt{1+b_s} - 1 = \Theta_0 \delta_{2s}$ ,  $g_{0b}(-l_b) = \sqrt{1+b_b} - 1 = W_0 \delta_{2b}$ ,  $g_{0s}(-l_s) = W_0 \delta_{2s}$ , из системы (2.4.9)-(2.4.12) для величин  $U_{1N}$ ,  $V_{1N}$  и  $W_{1N}$  получим следующие выражения:

$$W_{1N} = b^{-1} \{ U_{1N} e^{-\sigma l_s} - V_{1N} e^{\sigma l_s} + [R_{1s} S_{1s}(-l_s) - \Omega_{1s}(-l_s)] e^{-\sigma l_s} + [R_{1s} S_{2s}(-l_s) - \Omega_{2s}(-l_s)] e^{\sigma l_s} \} - R_{1b} [S_{1b}(-l_b) + S_{2b}(-l_b)] + N_{1b}(-l_b) + N_{2b}(-l_b). \quad (2.4.13)$$

$$U_{1N} = 0.5 \{ \Theta_{1N} (1-g) + R_{1g} [S_{1g}(0)(1+g) - S_{2g}(0)(1-g)] - 2R_{1s} S_{1s}(0) - 2\Omega_{1s}(0) + g_{0s}(0) \Phi_{L_s}(0, \omega) - g_{0g}(0) \Phi_{L_g}(0, \omega) \} \quad (2.4.14)$$

$$V_{1N} = 0.5 \{ \Theta_{1N} (1+g) + R_{1g} [S_{1g}(0)(1-g) - S_{2g}(0)(1+g)] + 2R_{1s} S_{2s}(0) - 2\Omega_{2s}(0) + g_{0s}(0) \Phi_{L_s}(0, \omega) - g_{0g}(0) \Phi_{L_g}(0, \omega) \}. \quad (2.4.15)$$

Учитывая эти равенства, для искомой величины  $\Theta_{1N}$  получим выражение

$$\Theta_{1N} = \{ \Delta \Theta_L [\Theta_0 (\delta_{2g} - \delta_{2s})] + R_{1g} \Delta [S_{2g}(0) - S_{1g}(0)] + 2e^{\sigma l_s} (b+1) [\Omega_{2s}(0) - R_{1s} S_{2s}(0)] + 2(1-b) e^{-\sigma l_s} [\Omega_{1s}(0) - R_{1s} S_{1s}(0)] + 2\Psi_2 - 2[\Omega_{2s}(-l_s) e^{\sigma l_s} (b+1) - \Omega_{1s}(-l_s) e^{-\sigma l_s} (b-1)] \} \Delta^{-1}. \quad (2.4.16)$$

Здесь использованы обозначения

$$\Psi_2 = R_{1s} [(1-b) S_{1s}(-l_s) e^{-\sigma l_s} + (1+b) S_{2s}(-l_s) e^{\sigma l_s}] + b [(g_{0s}(-l_s) \Phi_{L_s}(-l_s) - g_{0b}(-l_b) \Phi_{L_b}(-l_b) - 2R_{1b} S_{2b}(-l_b) + 2N_{2s}(-l_s)].$$

Принимая во внимание, что  $\Theta_0 \gg \Theta_L$  и  $W_0 \gg W_L$ , выражения для функций  $\Omega_{1s}(\omega, x)$ ,  $\Omega_{2s}(\omega, x)$  и  $N_{1s}(\omega, x)$ ,  $N_{2s}(\omega, x)$  можно записать в виде

$$\Omega_{1s}(x) = (0.25 A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_3) (\kappa_s^{(0)})^{-1} \sigma_s^{-1} \Theta_0 (\beta_s - \sigma_s)^{-1} e^{(\beta_s - \sigma_s)x}, \quad (2.4.17)$$

$$\Omega_{2s}(x) = (0.25 A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_3) (\kappa_s^{(0)})^{-1} \sigma_s^{-1} \Theta_0 (\beta_s + \sigma_s)^{-1} e^{(\beta_s + \sigma_s)x}. \quad (2.4.18)$$

$$N_{1b}(x) = (0.25 A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}) (\kappa_b^{(0)})^{-1} \sigma_b^{-1} W_0 (\beta_b^{(0)} - \sigma_b)^{-1} e^{(\beta_b^{(0)} - \sigma_b)(x+l_s)}, \quad (2.4.19)$$

$$N_{2b}(x) = (0.25 A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}) (\kappa_b^{(0)})^{-1} \sigma_b^{-1} W_0 (\beta_b^{(0)} + \sigma_b)^{-1} e^{(\beta_b^{(0)} + \sigma_b)(x+l_s)}. \quad (2.4.20)$$

Выражения для функций  $S_{1g}(\omega, x)$ ,  $S_{2g}(\omega, x)$ ,  $S_{1s}(\omega, x)$  и  $S_{2s}(\omega, x)$  получены в [53,54]. Реализуя способ интегрирования, предложенный в [52], для функции  $S_{2b}(\omega, x)$  получим следующее выражение:

$$S_{2b}(\omega, x) = \frac{W_L}{2\sigma_b} \left[ \sqrt{D_0} - 1 + \frac{D_3}{2l_b \sqrt{D_0}} (x + l_s - \frac{1}{2\sigma_b}) \right] e^{2\sigma(x+l_s)} - \frac{E_b}{\beta_b + \sigma_b} \left[ \sqrt{D_0} - 1 + \frac{D_3}{2l_b \sqrt{D_0}} (x + l_s - \frac{1}{\beta_b + \sigma_b}) \right] e^{(\beta_b + \sigma_b)(x+l_s)} - \frac{D_1}{2\sqrt{D_0}} \left[ \frac{W_L}{\beta_b + 2\sigma_b} e^{(\beta_b + 2\sigma_b)(x+l_s)} - \frac{E_b}{\sigma_b + 2\beta_b} e^{(\sigma_b + 2\beta_b)(x+l_s)} \right], \quad (2.4.20)$$

где  $D_0 = 1 + D_1 + D_2$ ,  $D_1 = A_b^{(0)} \delta_{2b} I_1 (1 + \delta_{2b} W_0) / \beta_b \kappa_b^{(0)}$ ,  $D_2 = \delta_{2b} W_0 (2 + \delta_{2b} W_0)$ ,  $D_3 = D_1 (1 + E_{0u}) + D_2$ ,  $E_{0b} = \exp(-\beta_b l_b)$ .

Полученное выражение (2.4.16) для  $\Theta_{1N}$  совместно с формулами (2.4.17)-(2.4.20) является решением сформулированной задачи и позволяет определить особенности генерации нелинейного составляющего акустического колебания давления на основной гармонике в буферном газе. Для этого воспользуемся выражением [54]

$$\delta p_{1N}(\omega) = \delta p_L \left[ \Theta_L^{-1} \Theta_{1N} - 0.25(3\delta_{2g} + \delta_g) \Theta_0 \right], \quad (2.4.21)$$

где  $\delta p_L = \gamma p_0 \Theta_L / T_0 l_g \sigma_g$  - линейная составляющая этого сигнала [21,120]. Отметим, что для рассматриваемого случая величина генерируемого линейного ФА-сигнала состоит из двух частей  $\delta p_L = \delta p_{Ls} + \delta p_{Lb}$ , обусловленных, соответственно, поглощением образца и подложки [120], которые можно представить в виде  $\delta p_{Li}(t) = Q_i \exp[i(\omega t - \pi/4)]$ , где

$$Q_s = \frac{Y \beta_s}{a_g \kappa_s (\beta_s^2 - \sigma_s^2)} \frac{[\Delta_0 + 2(b-r_s)E]}{\Delta}, \quad Q_b = \frac{2Yb\beta_b}{a_g \kappa_b (\beta_b^2 - \sigma_b^2)} \frac{A_b(1-R_s)(r_b-1)}{\Delta}, \quad Y = \gamma p_0 l_0 / 2\sqrt{2} l_g T_0,$$

$$\Delta_0 = (b+1)(r_s-1)\exp(\sigma_s l_s) - (b-1)(r_s+1)\exp(-\sigma_s l_s).$$

Из выражений для  $\Theta_{1N}$  и  $\delta p_L$  видно, что выражение для  $\delta p_{1N}(\omega)$  является достаточно сложным. В связи с этим поэтапно будем рассматривать те случаи, которые являются наиболее интересными.

В рамках настоящей раздела рассмотрим случай, когда образец является прозрачным, т.е.  $\beta_s = 0$  и  $\delta p_{Ls} = 0$ . Тогда источником генерации тепловых колебаний становится лишь поверхность подложки, контактирующей с образцом и, очевидно, генерация ФА-сигнала, включая и нелинейную составляющую, возможна лишь для термически тонких образцов, для которых

$l_s \ll \mu_s$  и  $\Delta \approx 2b$ . Пренебрегая слагаемыми порядка  $\delta_2^2$ ,  $\delta_2\delta_3$ , а также принимая во внимание, что для этого случая имеют место равенства

$$\Omega_{1s}(x) = \Omega_{2s}(x) = 0, S_{2g}(0) \approx 0, \Delta_1 = bE_b(r_b - 1), \Delta_2 = bE_b(r_b - 1), U_{Ls} = 0.5E_b(r_b - 1), V_{Ls} = 0.5E_b(r_b - 1),$$

$$\Phi_{Ls}(x, \omega) = 0.5\Theta_{Ls}(e^{\sigma_s x} + e^{-\sigma_s x}), \Theta_{Ls} = E_b(r_b - 1), N_{2b}(-l_b) = (0.25A_b^{(0)}\beta_b I_1 \delta_{3b})(\kappa_b^{(0)})^{-1} \sigma_b^{-1} W_0(\beta_b^{(0)} + \sigma_b)^{-1},$$

$$S_{1g}(0) \approx -\frac{\Theta_0 \Theta_L \delta_{2g}}{2\sigma_g}, S_{1s}(0) \approx \frac{V_L}{2\sigma_s} (-\delta_{2s} \Theta_0), S_{2s}(0) \approx \frac{U_L}{2\sigma_s} (\delta_{2s} \Theta_0), N_{2b}(-l_b) = 0.5W_0(\delta_{3b} \Theta_L),$$

$$S_{2b}(-l_b) = \frac{\Theta_L}{2\sigma_b} \left[ \left( \frac{\delta_{2b} W_0(r_b(r_b + 1) - 2)}{r_b^2 - 1} + D_1 \left( \frac{r_b(r_b + 1) - 2}{2(r_b^2 - 1)} - \frac{r_b + 1}{(r_b + 2)(1 + 2r_b)} \right) \right) \right],$$

$$\Psi_2 = b\Theta_L \{0.25\Theta_0(\delta_s - \delta_{2s}) + W_0(\delta_{2s} - \delta_{2b}) + W_0\delta_{3b} + 0.5(\delta_b - \delta_{2b})H\},$$

для искомой величины получим выражение

$$\Theta_{1N} = \Theta_L \{0.25\Theta_0(\delta_g + 3\delta_{3g} + 2(\delta_s - 3\delta_{2s}) + W_0(\delta_{2s} - \delta_{2b} + \delta_{3b}) + 0.5(\delta_b - \delta_{2b})[W_0(r_b(r_b + 1) - 2)(r_b^2 - 1)^{-1}]\}. \quad (2.4.22)$$

Отметим, что при получении  $S_{1g}(0)$ ,  $S_{2g}(0)$ ,  $S_{1s}(0)$ ,  $S_{2s}(0)$  и  $S_{2b}(-l_b)$  в знаменателях использовалось приближение  $D_0 \approx 1$ , которое выполняется с хорошим запасом. Также считалось, что толщина подложки удовлетворяет условию  $l_b \gg \mu_b$ .

Подставляя выражение (2.4.22) в (2.4.21) и выполняя необходимые выкладки, для  $\delta p_{1N}(\omega)$  получим выражение

$$\delta p_{1N}(\omega) = \delta p_{Lb} \{ \Theta_0 [0.5(\delta_s - 3\delta_{2s}) - \delta_{2s} + W_0(\delta_{2s} - \delta_{2b} + \delta_{3b}) + 0.5(\delta_b - \delta_{2b})[W_0(r_b(r_b + 1) - 2)(r_b^2 - 1)^{-1}] \}. \quad (2.4.23)$$

Между тем, очевидно, что поглощающая подложка будет характеризоваться двумя характерными длинами  $\mu_{\beta b} = \beta_b^{-1}$  -длиной пробега фотона и  $\mu_b$  -длиной тепловой диффузии, соответственно. Тогда, в зависимости от соотношения между этими величинами, в эксперименте может реализоваться два существенно различных случая. Подробно рассмотрим эти случаи.

1. Если длина порога фотона гораздо больше длины тепловой диффузии, тогда  $|r_b| \ll 1$  и из (2.4.23) будем иметь

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\sqrt{2Y}\beta_b A_b (1 - R_s^{(0)}) (\kappa_g^{(0)})^{1/2}}{\kappa_b^{(0)} C_{pb} \omega^{3/2}} [\Theta_0 K_{1(1)N} + W_0 K_{1(2)N}] e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad (2.4.24)$$

где  $K_{1(1)N} = 0.5(\delta_s - 3\delta_{2s})$  и  $K_{1(2)N} = \delta_{2s} + \delta_b - 2\delta_{2b} + \delta_{3b}$  - нелинейные коэффициенты. Из (2.4.24) следует, что в этом случае спад амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты происходит по закону  $\propto \omega^{-3/2}$ .

2. В обратном случае, т.е. при  $|r_b| \gg 1$ , имеет место равенство

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\sqrt{2Y}A_b^{(0)} (1 - R_s^{(0)}) (\chi_b^{(0)} \chi_g^{(0)})^{1/2}}{\kappa_b^{(0)} \omega} [\Theta_0 K_{2(1)N} + W_0 K_{2(2)N}] e^{-i\frac{\pi}{2}}. \quad (2.4.25)$$

Здесь величины  $K_{2(1)N} = 0.5(\delta_s - 3\delta_{2s})$  и  $K_{2(2)N} = \delta_{2s} - \delta_b - \delta_{2b} + 2\delta_{3b}$  также являются нелинейными коэффициентами. Нетрудно заметить, что в этом случае уменьшение амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты подчиняется закону  $\propto \omega^{-1}$ .

Таким образом, в рамках настоящего раздела удалось создать теорию генерации основной гармоники нелинейного ФА-сигнала для случая, когда подложка, наряду с образцом, также является поглощающей. Выполнен полный анализ для случая, когда образец является прозрачным. Экспериментальное измерение амплитуды этого сигнала позволит определить термические коэффициенты теплофизических параметров всех слоев в ФА-камере, а также поглощательную способность подложки.

## **2.5. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика**

Существующие теории генерации первых двух гармоник нелинейного ФА-сигнала показывают [51-62], что параметры этих сигналов являются достаточно информативными. Так, например, их амплитуды содержат информацию, как о теплофизических и оптических параметрах образцов, так и о температурных коэффициентах этих же величин. Однако особенности формирования второй гармоники для случая, когда подложка является поглоща-

ющей с оптическим коэффициентом поглощения  $\beta_b$ , остались не исследованными. Устранение этого пробела и является целью настоящей настоящей работы.

Исходим из следующей системы дифференциальных уравнений для  $\Phi_{2Ni}(x,t)$ - колебания нелинейного составляющего температуры на второй гармонике в ФА-камере, полученной в разделе 2.2 [126, 127]:

$$\frac{d^2\Psi_{2g}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2 \Psi_{2g} = \frac{(\delta_g - \delta_{2g})}{2} \sigma_{2g}^2 \Phi_{Lg}^2(\omega, x), \quad (2.5.1)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2s}}{dx^2} - \sigma_{2s}^2 \Psi_{2s} = \frac{(\delta_s - \delta_{2s})}{2} \sigma_{2s}^2 \Phi_{Ls}^2(\omega, x) - B_s \Phi_{Ls}(0, \omega) e^{\beta_1 x}, \quad (2.5.2)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2b}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2 \Psi_{2b} = \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2} \sigma_{2b}^2 \Phi_{Lb}^2(\omega, x) - B_b \Phi_{Lb}(-l_b, \omega) e^{\beta_b(x+l_s)}, \quad (2.5.3)$$

где  $B_s = 0.5A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s} (k_s^{(0)})^{-1}$ ,  $B_b = 0.5A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b} (k_b^{(0)})^{-1}$ ,  $\sigma_{2i}^2 = 2i\omega / \chi_i^{(0)}$ .

Граничные условия, необходимые для решения системы уравнений (2.5.1)-(2.5.3), имеют вид

$$\Phi_{2Ns}(\omega, 0) = \Phi_{2Ng}(\omega, 0), \quad \Phi_{2Ns}(\omega, -l_s) = \Phi_{2Nb}(\omega, -l), \quad \Phi_{2Nb}(\omega, -l_s - l_b) = \Phi_{2Ng}(\omega, l_g) = 0, \quad (2.5.4)$$

$$\left[ \frac{\partial \Psi_{2Ng}(\omega, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \frac{\partial \Psi_{2Ns}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \Psi_{2Nb}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=-l_s} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \frac{\partial \Psi_{2Ns}(\omega, x)}{\partial x} \Big|_{x=-l_s}. \quad (2.5.5)$$

Система уравнений (2.5.1)-(2.5.3) совместно с граничными условиями позволяет исследовать особенности генерации ВГ нелинейного ФА-сигнала с учётом оптического поглощения подложки.

Решения уравнения (2.5.1)-(2.5.3), можно написать в виде

$$\Psi_{2Ng}(\omega, x) = \Theta_{2Ng} e^{-\sigma_{2g} x} + e^{\sigma_{2g} x} W_{1g}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2g} x} W_{2g}(\omega, x), \quad (2.5.6)$$

$$\Psi_{2Ns}(\omega, x) = U_{2N} e^{\sigma_{2s} x} + V_{2N} e^{-\sigma_{2s} x} + [W_{1s}(\omega, x) - Q_{1s}(x, \omega)] e^{\sigma_{2s} x} - [W_{2s}(\omega, x) - Q_{2s}(x, \omega)] e^{-\sigma_{2s} x}, \quad (2.5.7)$$

$$\Psi_{2Nb}(\omega, x) = W_{2Nb} e^{\sigma_{2b}(x+l_s)} + [W_{1b}(\omega, x) - N_{1b}(\omega, x)] e^{\sigma_{2b}(x+l_s)} - [W_{2b}(\omega, x) - N_{2b}(\omega, x)] e^{-\sigma_{2b}(x+l_s)}. \quad (2.5.8)$$

Здесь использованы обозначения:  $R_{2i} = 0,25\sigma_{2i}(\delta_i - \delta_{2i})$ ,

$$W_{1g}(\omega, x) = R_{2g} \int e^{-\sigma_{2g} x} \Phi_{Lg}^2(\omega, x) dx, \quad W_{2g}(\omega, x) = R_{2g} \int e^{\sigma_{2g} x} \Phi_{Lg}^2(\omega, x) dx,$$

$$\begin{aligned}
W_{1b}(\omega, x) &= R_{2b} \int e^{-\sigma_{2b}(x+l_s)} \Phi_{Lb}^2(\omega, x) dx, & N_{2b}(\omega, x) &= (0.5B_b \sigma_{2b}^{-1} \int \Phi_{Lb}(\omega, -l_s) e^{(\beta_b + \sigma_{2b})(x+l_s)} dx, \\
W_{2b}(\omega, x) &= R_{2b} \int e^{\sigma_{2b}(x+l_s)} \Phi_{Lb}^2(\omega, x) dx, & N_{1b}(\omega, x) &= (0.5B_b \sigma_{2b}^{-1} \int \Phi_{Lb}(\omega, -l) e^{(\beta_b - \sigma_{2b})(x+l_s)} dx, \\
W_{1s}(\omega, x) &= R_{2s} \int e^{-\sigma_{2s}x} \Phi_{Ls}^2(\omega, x) dx, & Q_{1s}(\omega, x) &= 0.5B_s \sigma_{2s}^{-1} \int \Phi_{Ls}(\omega, 0) e^{(\beta - \sigma_{2s})x} dx, \\
W_{2s}(\omega, x) &= R_{2s} \int e^{\sigma_{2s}x} \Phi_{Ls}^2(\omega, x) dx, & Q_{2s}(\omega, x) &= (0.5B_s \sigma_{2s}^{-1} \int \Phi_{Ls}(\omega, 0) e^{(\beta + \sigma_{2s})x} dx.
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что учет температурной зависимости поглощательной способности образца и подложки приводит к появлению слагаемых  $Q_{1s}(\omega, x)$ ,  $Q_{2s}(\omega, x)$ ,  $N_{1b}(\omega, x)$  и  $N_{2b}(\omega, x)$ .

Далее, используя граничные условия (2.5.4)-(2.5.5), для определения комплексных величины  $\Theta_{2N}$ ,  $U_{2N}$ ,  $V_{2N}$  и  $W_{2N}$  получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\Theta_{2N} + W_{1g}(\omega, 0) - W_{2g}(\omega, 0) - 0.5\Theta_L^2(\delta_{2g} - \delta_{2s}) &= U_{2N} + V_{2N} + W_{1s}(\omega, 0) - \\
-W_{2s}(\omega, 0) + Q_{2s}(\omega, 0) - Q_{1s}(\omega, 0) &, \quad (2.5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2N} e^{-\sigma_{2s}l_s} + V_{2N} e^{\sigma_{2s}l_s} + e^{-\sigma_{2s}l_s} [W_{1s}(\omega, -l_s) - Q_{1s}(\omega, -l_s)] - e^{\sigma_{2s}l_s} [W_{2s}(\omega, -l_s) - Q_{2s}(\omega, -l_s)] - \\
- 0.5\Phi_{Ls}^2(\omega, -l_s)(\delta_{2s} - \delta_{2b}) &= W_{2Nb} + W_{1b}(\omega, -l_b) - W_{2b}(\omega, -l_b) + N_{1b}(\omega, -l_b) - N_{2b}(\omega, -l_b), \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

$$-\Theta_{2N} + W_{1g}(\omega, 0) + W_{2g}(\omega, 0) = g^{-1} [U_{2N} - V_{2N} + W_{1s}(\omega, 0) + W_{2s}(\omega, 0) - Q_{1s}(\omega, 0) - Q_{2s}(\omega, 0)], \quad (2.5.11)$$

$$\begin{aligned}
U_{2N} e^{-\sigma_{2s}l_s} - V_{2N} e^{\sigma_{2s}l_s} + e^{-\sigma_{2s}l_s} [W_{1s}(\omega, -l_s) - Q_{1s}(\omega, -l_s)] + \\
+ e^{\sigma_{2s}l_s} [W_{2s}(\omega, -l_s) - Q_{2s}(\omega, -l_s)] &= b [W_{2Nb} + W_{1b}(\omega, -l_b) + W_{2b}(\omega, -l_b) - N_{1b}(\omega, -l_b) - N_{2b}(\omega, -l_b)], \quad (2.5.12)
\end{aligned}$$

где  $g = k_g^{(0)} \sigma_{2g} / k_s^{(0)} \sigma_{2s} = k_g^{(0)} \sigma_g / k_s^{(0)} \sigma_s$ ,  $b = k_b^{(0)} \sigma_{2b} / k_s^{(0)} \sigma_{2s} = k_b^{(0)} \sigma_b / k_s^{(0)} \sigma_s$ .

$$U_{2Ns} = 0.5 \{ \Theta_{2N} (1-g) + W_{1g}(\omega, 0) (1+g) - W_{2g}(\omega, 0) (1-g) - 2W_{1s}(\omega, 0) + 2Q_{1s}(\omega, 0) - 0.5\Theta_L^2(\delta_{2g} - \delta_{2s}) \}, \quad (2.5.13)$$

$$V_{2Ns} = 0.5 \{ \Theta_{2N} (1+g) + W_{1g}(\omega, 0) (1-g) - W_{2g}(\omega, 0) (1+g) + 2W_{2s}(\omega, 0) - 2Q_{2s}(\omega, 0) - 0.5\Theta_L^2(\delta_{2g} - \delta_{2s}) \}, \quad (2.5.14)$$

$$\begin{aligned}
W_{2Nb} = b^{-1} \{ U_{2N} e^{-\sigma_{2s}l_s} - V_{2N} e^{\sigma_{2s}l_s} + e^{-\sigma_{2s}l_s} [W_{1s}(\omega, -l_s) - Q_{1s}(\omega, -l_s)] + e^{\sigma_{2s}l_s} [W_{2s}(\omega, -l_s) - Q_{2s}(\omega, -l_s)] \\
- W_{1b}(\omega, -l_b) - W_{2b}(\omega, -l_b) + N_{3b}(\omega, -l_b) + N_{4b}(\omega, -l_b) \} \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая величина ФА-сигнала на второй гармонике определяется выражением [126]

$$\delta p_{2N}(2\omega, t) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi i_{2g}(\omega)}{T_{00} l_g} \bar{\Phi}_{2N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00} l_g} \left[ \frac{\Theta_{2N}}{\sigma_{2g}} - \frac{\Theta_L^2}{4\sigma_g} (\delta_{2g} + \frac{2R_{2g} \sigma_{2g}}{\sigma_{2g}^2 - 4\sigma_g^2}) \right]. \quad (2.5.16)$$

Из (2.5.16) следует, что для определения явного вида искомой величины необходимо иметь соответствующее выражение для  $\Theta_{2Ng}$ . Решая систему уравнений (2.5.12)-(2.5.15), получим выражение

$$\Theta_{2N} = \Delta^{-1} \{ (b+1)\Lambda_1(\omega)e^{\sigma_{2s}l_s} + (b-1)\Lambda_2(\omega)e^{-\sigma_{2s}l_s} + b\Phi_{L_s}^2(\omega, -l_s)(\delta_{2s} - \delta_{2b}) - 2bN_{2b}(\omega, -l_b) - 4bW_{2b}(\omega, -l_b) + \frac{\Theta_L^2}{2}(\delta_{2g} - \delta_{2s})[(b-1)e^{-\sigma_{2s}l_s} + (b+1)e^{\sigma_{2s}l_s}] \}, \quad (2.5.17)$$

в котором использованы следующие обозначения:

$$\Delta = e^{\sigma_{2s}l_s}(b+1)(g+1) - e^{-\sigma_{2s}l_s}(b-1)(g-1),$$

$$\Lambda_1(\omega) = (1+g)W_{2g}(\omega, 0) + (g-1)W_{1g}(\omega, 0) - 2[W_{2s}(\omega, -0) - Q_{2s}(\omega, 0)] + 2[W_{2s}(\omega, -l_s) - Q_{2s}(\omega, -l_s)],$$

$$\Lambda_2(\omega) = (1-g)W_{2g}(\omega, 0) - (g+1)W_{1g}(\omega, 0) + 2[W_{1s}(\omega, 0) - Q_{1s}(\omega, 0)] - 2[W_{1s}(\omega, -l_s) - Q_{1s}(\omega, -l_s)].$$

Выражение (2.5.16) совместно с (2.5.17) и является общим решением сформулированной задачи.

Подставляя функции  $\Phi_{L_g}(x, \omega)$ ,  $\Phi_{L_s}(x, \omega)$  и  $\Phi_{L_b}(x, \omega)$  в подынтегральные выражения для  $W_{1g}(\omega, x)$ ,  $W_{2g}(\omega, x)$ ,  $W_{1s}(\omega, x)$ ,  $W_{2s}(\omega, x)$ ,  $W_{1b}(\omega, x)$ ,  $W_{2b}(\omega, x)$ ,  $Q_{1s}(\omega, x)$ ,  $Q_{2s}(\omega, x)$ ,  $N_{1b}(\omega, x)$ ,  $N_{2b}(\omega, x)$  и, выполнив интегрирование, будем иметь

$$W_{1g}(\omega, x) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g} e^{-(\sigma_{2g}+2\sigma_g)x}}{(\sigma_{2g}+2\sigma_g)}, \quad W_{2g}(\omega, x) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g} e^{-(2\sigma_g-\sigma_{2g})x}}{(2\sigma_g-\sigma_{2g})}, \quad N_{1b}(\omega, x) = \frac{0.5B_b(W_L - E_b)e^{(\beta-\sigma_{2b})(x+l_s)}}{\sigma_{2b}(\beta-\sigma_{2b})},$$

$$W_{1s}(\omega, x) = -R_{2s} \left[ \frac{U_L^2 e^{(2\sigma_s-\sigma_{2s})x}}{(\sigma_{2s}-2\sigma_s)} + \frac{2U_L V_L e^{-\sigma_{2s}x}}{\sigma_{2s}} + \frac{V_L^2 e^{-(\sigma_{2s}+2\sigma_s)x}}{(\sigma_{2s}+2\sigma_s)} \right], \quad Q_{1s}(\omega, x) = \frac{0.5B_s \Theta_L e^{(\beta-\sigma_{2s})x}}{\sigma_{2s}(\beta-\sigma_{2s})},$$

$$W_{2s}(\omega, x) = R_{2s} \left[ \frac{U_L^2 e^{(2\sigma_s+\sigma_{2s})x}}{(\sigma_{2s}+2\sigma_s)} + \frac{2U_L V_L e^{\sigma_{2s}x}}{\sigma_{2s}} + \frac{V_L^2 e^{(\sigma_{2s}-2\sigma_s)x}}{(\sigma_{2s}-2\sigma_s)} \right], \quad Q_{2s}(\omega, x) = \frac{0.5B_s \Theta_L e^{(\beta+\sigma_{2s})x}}{\sigma_{2s}(\beta+\sigma_{2s})},$$

$$W_{1b}(\omega, x) = -R_{2b} \left[ \frac{W_L^2 e^{-(\sigma_{2b}-2\sigma_b)(x+l_s)}}{(\sigma_{2b}-2\sigma_b)} - \frac{2W_L E_b e^{-\sigma_{2b}(x+l_s)}}{\sigma_{2b}} + \frac{E_b^2 e^{-(\sigma_{2b}-\beta_b)(x+l_s)}}{(\sigma_{2b}-\beta_b)} \right],$$

$$W_{2b}(\omega, x) = R_{2b} \left[ \frac{W_L^2 e^{(\sigma_{2b}+2\sigma_b)(x+l_s)}}{(\sigma_{2b}+2\sigma_b)} - \frac{2W_L E_b e^{\sigma_{2b}(x+l_s)}}{\sigma_{2b}} + \frac{E_b^2 e^{(\sigma_{2b}+\beta_b)(x+l_s)}}{(\sigma_{2b}+\beta_b)} \right], \quad N_{2b}(\omega, x) = \frac{0.5B_b(W_L - E_b)e^{(\beta+\sigma_{2b})(x+l_s)}}{\sigma_{2b}(\beta+\sigma_{2b})}.$$

Как и в разделе 2.3., в настоящем разделе рассмотрим случай прозрачного образца, для которого  $\beta_s = 0$  и  $\delta p_{L_s} = 0$ . Тогда источником генерации второй гармоники тепловых колебаний становится лишь поверхность подложки, контактирующая с образцом. Между тем, очевидно, что возбуждение ФА-

сигнала, включая и нелинейную составляющую, возможно лишь для термически тонких образцов, для которых  $l_s \ll \mu_s$ ,  $\exp(\pm\sigma_s l) \approx 1$  и  $\Delta \approx 2b$ . Пренебрегаем слагаемыми порядка  $\delta_2^2$ ,  $\delta_2\delta_3$ , а также примем во внимание, что для этого случая имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Delta_1 = bE_b(r_b - 1), \quad \Delta_2 = bE_b(r_b - 1), \quad U_{L_s} = 0.5E_b(r_b - 1), V_{L_s} = 0.5E_b(r_b - 1), \quad \Phi_{L_s}(x, \omega) = 0.5\Theta_{L_s}(e^{\sigma_s x} + e^{-\sigma_s x}), \\ \Theta_{L_s} = E_b(r_b - 1), \quad Q_{1s}(\omega, -l_s) \approx Q_{2s}(\omega, -l_s) = 0, \quad Q_{1s}(\omega, -0), Q_{2s}(\omega, -0) = 0, \quad W_{1s}(\omega, 0) - W_{1s}(\omega, -l_s) = 0 \\ , \quad W_{2s}(\omega, 0) - W_{2s}(\omega, -l_s) = 0, \quad \Lambda_1(\omega) = W_{2g}(\omega, 0) - W_{1g}(\omega, 0), \quad \Lambda_2(\omega) = W_{2g}(\omega, 0) - W_{1g}(\omega, 0), \end{aligned}$$

для искомой величины получим

$$\Theta_{2N} = W_{2g}(\omega, 0) - W_{1g}(\omega, 0) + W_L^2(\delta_{2s} - \delta_{2b}) + 2bN_{2b}(\omega, -l_b) - 4W_{2b}(\omega, -l_b) + \Theta_L^2(\delta_{2g} - \delta_{2s}).$$

Тогда, выполняя необходимые вычисления, получим, что

$$\Theta_{2N} = 0.5\Theta_L^2[2\delta_{2g} - \delta_g - \frac{(\delta_b + \sqrt{2}\delta_{2b})}{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{2}\delta_{3b}]. \quad (2.5.18)$$

Подставляя выражение (2.5.18) в (2.5.16) и проводя необходимые вычисления, для акустического колебания давления на удвоенной частоте получим

$$\delta p_{2N}(2\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 \Theta_L^2 \mu_{2g} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\Gamma_{00} l_g} K_{2(1)}, \quad (2.5.19)$$

где

$$K_{2(1)} = 0,25[(7 - 2\sqrt{2})\delta_{2g} - 3\delta_g] - \frac{\delta_b + \sqrt{2}\delta_{2b}}{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{2}\delta_{3b}$$

является нелинейным коэффициентом, который определяется посредством комбинации термических коэффициентов теплофизических параметров газа и подложки, а также поглощательной способности подложки.

Примем во внимание, что поглощающая подложка характеризуется двумя характерными длинами:  $\mu_{\beta b} = \beta_b^{-1}$  - длина пробега фотона и  $\mu_b$  - длина тепловой диффузии, соответственно. Тогда, очевидно, что в зависимости от соотношения между  $\mu_{\beta b}$  и  $\mu_b$  в эксперименте могут иметь место две существенно различные ситуации. Детально рассмотрим эти случаи.



1. Пусть длина пробега фотона  $\mu_{\beta b}$  гораздо меньше длины тепловой диффузии  $\mu_b$ , тогда  $|r_b| \gg 1$  и из (2.5.19) получим выражение

$$\delta p_{2N}(2\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 (A_b^{(0)})^2 I_1^2 \mu_{2g} \mu_b^2 e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{16\sqrt{2} T_{00} l_g (\kappa_b^{(0)})^2} K_{2(1)}, \quad (2.5.20)$$

из которого следует, что в этом случае спад амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты происходит по закону  $\propto \omega^{-3/2}$  и не зависит от величины  $\beta_b$ .

2. В обратном случае, то есть когда  $|r_b| \ll 1$ , справедливо равенство

$$\delta p_{2N}(2\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 (A_b^{(0)})^2 I_1^2 \beta_b^2 \mu_{2g} \mu_b^4 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{32\sqrt{2} T_{00} l_g (\kappa_b^{(0)})^2} K_{2(1)}. \quad (2.5.21)$$

Нетрудно заметить, что в этом случае уменьшение амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты подчиняется закону  $\propto \omega^{-5/2}$ , а её рост с ростом оптического коэффициента поглощения происходит по закону  $\propto \beta_b^2$ .

Таким образом, в рамках настоящего раздела нами создана теория генерации второй гармоники нелинейного ФА-сигнала для поглощающей подложки. Найден явный вид выражения для описания возбуждаемой второй гармоники ФА-сигнала для прозрачных и термически тонких образцов. Установлены законы спада амплитуды этого сигнала с ростом частоты модуляции, когда длина пробега фотона меньше длины тепловой диффузии в подложке и наоборот. Это позволит при проведении соответствующих измерений параметров этого сигнала определить температурные коэффициенты тех величин, которые входят в коэффициенты нелинейности, а также значение оптического коэффициента поглощения.

# ГЛАВА III. ВКЛАД ПОГЛОЩЕНИЯ ПОДЛОЖКИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ДВУХСЛОЙНЫХ ОБРАЗЦОВ

## 3.1. Вклад поглощения подложки на параметры линейного фотоакустического сигнала двухслойных твердотельных образцов

В зависимости от геометрии эксперимента существуют различные варианты теории ФА-эффекта в двух- и многослойных твердотельных системах. Наиболее распространенным является теория Фужи [128], которая является развитием одномерной теории Розенсвайга-Гершо [21], построенной для однослойных образцов. Однако в [128], как и в [21], рассматривался случай, когда подложка является прозрачной. В [84] предложена теория генерации ФА-сигнала для однослойных прозрачных систем, находящихся на поглощающей подложке. Общий случай, когда, как образец, так и подложка являются поглощающими, был рассмотрен в [120]. Целью настоящего раздела является построение теории генерации ФА-сигнала двухслойными системами, находящимися на поглощающей подложке (см. рис. 3.1).

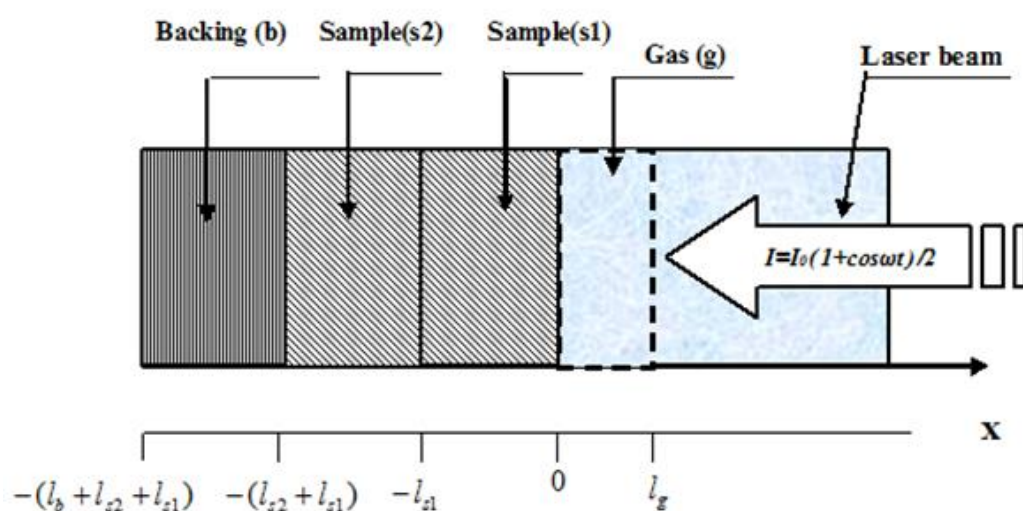


Рис 3.1. Геометрия задачи для двухслойных образцов в ФА-ячейке: g- газовый слой; s1-первый и s2-второй слои образца; b-поглощающая подложка.

Исходим из следующей системы линейных уравнений теплопроводности для газового слоя  $g$ , первого  $s_1$  и второго  $s_2$  слоев образца и поглощающей подложки  $b$  [129-132]:

$$\rho_g C_{pg} \frac{\partial T_g}{\partial t} = \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l_g; \quad (3.1.1)$$

$$\rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\beta_1 A_1 I_0}{2} e^{\beta_1 x} (1 + e^{i\omega t}), \quad -l_1 \leq x \leq 0; \quad (3.1.2)$$

$$\rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\beta_2 A_2 I_1}{2} e^{\beta_2(x+l_2)} (1 + e^{i\omega t}), \quad -(l_1+l_2) \leq x \leq -l_1; \quad (3.1.3)$$

$$\rho_b C_{pb} \frac{\partial T_b}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} + \frac{\beta_b A_b I_2}{2} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} (1 + e^{i\omega t}), \quad -(l_b+l_1+l_2) \leq x \leq -(l_1+l_2). \quad (3.1.4)$$

где  $I_1 = I_0(1 - R_{s1})\exp(-\beta_1 l_1)$ ,  $I_2 = I_1(1 - R_{s2})\exp(-\beta_2 l_2)$ .

Как и ранее, возмущения температур  $T'_i(x, t)$  представим в виде суммы равновесных  $T_{0i}(x)$  и акустических  $\Phi_i(x, t)$  частей:  $T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_i(x, t)$ . Также учитывая, что падающий лазерный луч модулирован по гармоническому закону, временное изменение величины  $\Phi_i(x, t)$  представим в виде:  $\Phi(x, t) = \Phi(x, \omega)\exp(i\omega t)$ . Тогда из системы уравнений (3.1.1) – (3.1.4) для  $\Phi_i(x, \omega)$  получим следующую систему:

$$\frac{d^2 \Phi_g}{dx^2} - \sigma_g^2 \Phi_g = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} - \sigma_1^2 \Phi_1 = -\frac{\beta_1 A_1 I_0 e^{\beta_1 x}}{2\kappa_1}, \quad -l_1 \leq x \leq 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} - \sigma_2^2 \Phi_2 = -\frac{\beta_2 A_2 I_1 e^{\beta_2(x+l_2)}}{2\kappa_2}, \quad -(l_1+l_2) \leq x \leq -l_1, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d^2 \Phi_b}{dx^2} - \sigma_b^2 \Phi_b = -\frac{\beta_b A_b I_2 e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}}{2\kappa_b}, \quad -(l_b+l_1+l_2) \leq x \leq -(l_1+l_2), \quad (3.1.8)$$

где  $\sigma_i^2 = i\omega/\chi_i$ ,  $\sigma_i = (1+i)a_i$ ,  $a_i = 1/\mu_i$ ,  $\mu_i = (2\chi_i/\omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии соответствующих слоев.

Решения однородного (3.1.5) и неоднородных (3.1.6)-(3.1.8) уравнений имеют следующий вид:

$$\Phi_g(x, \omega) = \Theta e^{-\sigma_1 x},$$

$$\Phi_1(x, \omega) = \gamma_1 e^{\sigma_s x} + \gamma_2 e^{-\sigma_1 x} + E_1 e^{\beta_1 x}, \quad E_1 = \frac{\eta_1 \beta_1}{2\kappa_1(\sigma_s^2 - \beta_s^2)}, \quad \eta_1 = I_0 A_{s(1)},$$

$$\Phi_2(x, \omega) = G_1 e^{\sigma_{s2}(x+l_1)} + G_2 e^{-\sigma_{s2}(x+l_1)} + E_2 e^{\beta_2(x+l_1)}, \quad E_2 = \frac{\eta_2 \beta_2}{2\kappa_2(\sigma_s^2 - \beta_s^2)}, \quad \eta_2 = I_0(1-R_{s(1)})A_{s(2)}e^{-\beta_1 l_1},$$

$$\Phi_b(x, \omega) = R_1 e^{\sigma_b(x+l_1+l_2)} + E_b e^{\beta_b(l_1+l_2+x)}, \quad E_b = \frac{\eta_b \beta_b}{2\kappa_b(\sigma_b^2 - \beta_b^2)}, \quad \eta_3 = \eta_2(1-R_{s(2)})A_{s(3)}e^{-\beta_2 l_2},$$

где величины  $\Theta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  и  $R_1$  являются комплексными амплитудами колебания температур в соответствующих слоях. Шесть граничных условий

$$\Phi_g(0, \omega) = \Phi_s(0, \omega), \quad \Phi_{s1}(-l_1, \omega) = \Phi_{s2}(-l_1, \omega), \quad \Phi_{s2}(-l_2 - l_1, \omega) = \Phi_b(-l_2 - l_1, \omega)$$

$$\kappa_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial x} \Big|_{x=0} = \kappa_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \kappa_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = \kappa_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big|_{x=-l_1}, \quad \kappa_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big|_{x=-l_1-l_2} = \kappa_b \frac{\partial \Phi_b}{\partial x} \Big|_{x=-l_1-l_2}$$

позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений для определения величин  $\Theta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $R_1$ . Исключив из них  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  и  $R_1$ , для амплитуды колебания температуры в газовом слое получим выражение, которое можно представить в виде  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$ , где

$$\Theta_1 = \frac{E_1 \{ N_1(1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + N_2(1+b)e^{\sigma_2 l_2} - 2e^{-\beta_1 l_1} N_3 \}}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}, \quad (3.1.9)$$

$$\Theta_2 = \frac{2sE_2[(r_2+1)(1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + (r_2-1)(1+b)e^{\sigma_2 l_2} - 2e^{-\beta_2 l_2}(r_2-b)]}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}, \quad (3.1.10)$$

$$\Theta_3 = \frac{2sbE_3(r_b-1)}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}. \quad (3.1.11)$$

В (3.1.9)-(3.1.11) использованы следующие обозначения:

$$s = \frac{k_2 \sigma_2}{k_1 \sigma_1}, \quad b = \frac{k_b \sigma_b}{k_2 \sigma_2}, \quad r_1 = \frac{\beta_1}{\sigma_1}, \quad r_2 = \frac{\beta_2}{\sigma_2}, \quad r_b = \frac{\beta_b}{\sigma_b}, \quad N_1 = [(r_1+1)(1+s)e^{-\sigma_1 l_1} + (r_1-1)(1-s)e^{\sigma_1 l_1}],$$

$$N_2 = [(r_1+1)(1-s)e^{-\sigma_1 l_1} + (r_1-1)(1+s)e^{\sigma_1 l_1}], \quad N_3 = [(r_1+s)(1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + (r_1-s)(1+b)e^{\sigma_2 l_2}].$$

Возмущение давления в газовом слое определяется усреднением  $\Phi_g(x, \omega) = \Theta \exp(-\sigma_g x)$  по длине тепловой диффузии в газе согласно выражению [21]

$$\delta p(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi \mu_g}{T_0 l_g} \bar{\Phi}_g(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_0 l_g} \int_0^{2\pi \mu_g} \Phi_g(\omega, x) dx. \quad (3.1.12)$$

Из выше приведенных выражений следует, что акустическое колебание давления в буферном газе состоит из трех составляющих  $\delta p = \delta p_1 + \delta p_2 + \delta p_3$ , где

$$\delta p_1(\omega) = \frac{\gamma_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \bar{\Phi}_{g(1)}(\omega), \quad \delta p_2(\omega) = \frac{\gamma_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \bar{\Phi}_{g(2)}(\omega), \quad \delta p_3(\omega) = \frac{\gamma_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \bar{\Phi}_{g(3)}(\omega)$$

Подставляя выражение  $\Phi_g(x, \omega)$  в (3.1.12) и учитывая (3.1.9)-(3.1.11), а затем, выполняя соответствующие вычисления, представим результаты в виде  $\delta p_i(t) = Q_i \exp[i(\omega t - \pi/4)]$ . Тогда для комплексных амплитуд ФА-сигнала будем иметь

$$Q_1 = \frac{\eta_1 Y \beta_1 \mu_g}{\kappa_1 (\beta_1^2 - \sigma_1^2)} \frac{N_1(1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + N_2(1+b)e^{\sigma_2 l_2} - 2e^{-\beta_1 l_1} N_3}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}, \quad (3.1.13)$$

$$Q_2 = \frac{2Ys\beta_2\mu_g}{\kappa_2 (\beta_2^2 - \sigma_2^2)} \frac{\eta_2[(r_2+1)(1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + (r_2-1)(1+b)e^{\sigma_2 l_2} - 2e^{-\beta_2 l_2}(r_2-b)]}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}, \quad (3.1.14)$$

$$Q_3 = \frac{2Y\beta_{b3}\mu_g}{\kappa_b (\beta_b^2 - \sigma_b^2)} \frac{\eta_3 s b (r_3 - 1)}{[(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2}}. \quad (3.1.15)$$

Нетрудно заметить, что появление слагаемого  $\delta p_3(\omega)$  целиком и полностью обусловлено поглощением подложки.

Очевидно, что если бы хотя один из слоев образца является сильно поглощающим, тогда  $\beta_1 l_1 \gg 1$ ,  $E_1 \approx 0$  или  $\beta_2 l_2 \gg 1$ ,  $E_2 \approx 0$  и падающий луч не поступает в подложку и вклад, обусловленный её поглощением в формирование ФА-сигнала отсутствует. Когда оба слоя образца являются слабо поглощающими, тогда  $\beta_i l_i \ll 1$  и определенная часть падающего луча проходит через подложку, поглощение которой генерирует колебания температуры в нем, который затем по диффузионному закону передается через оба слоя образца в буферный газ. В дальнейшем подробно изучим этот случай, поскольку именно он представляется интересным для рассматриваемой задачи.

Предположим, что оба слоя образца являются термически тонкими, тогда  $\Delta = [(1-s)e^{\sigma_1 l_1} - (1+s)e^{-\sigma_1 l_1}](1-b)e^{-\sigma_2 l_2} + [(1+s)e^{\sigma_1 l_1} - (1-s)e^{-\sigma_1 l_1}](1+b)e^{\sigma_2 l_2} \approx 4bs$ , поскольку  $l_i \ll \mu_{si}$  и  $\exp(\pm \sigma_i l_i) \approx 1$ . В этом случае величина ФА-сигнала, генерируемого

в результате поглощения обоими слоями образца, определяется выражением [129,130]

$$\delta p_{1,2}(t) = \frac{Y(1-i)(\eta_1\beta_1l_1 + \eta_2\beta_2l_2)}{2a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)] \quad (3.1.16)$$

Очевидно, что в зависимости от соотношения между  $l_{\beta b}$  и  $\mu_b$  - длинами пробега фотона и тепловой диффузии могут реализоваться различные два случая. Подробно рассмотрим эти случаи.

1) В случае выполнения условия  $\beta_3 \gg \mu_3$  из (3.1.12) и (3.1.15) получим

$$\delta p_{3(1)}(t) = \frac{Y\eta_3(1-i)}{4a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)] \quad (3.1.17)$$

Сравнение последних двух выражений показывает, что в этом случае амплитуда ФА-сигнала, возбуждаемого колебанием температуры подложки и передаваемый в буферный газ посредством образца по диффузионному закону, может быть доминирующей, поскольку  $\beta_i l_i \ll 1$ . Нетрудно также заметить, что в этом случае частотная зависимость суммарной амплитуды генерируемого звука подчиняется закону  $\propto \omega^{-1}$ .

2) Пусть  $\beta_b \ll \mu_b$ , тогда справедливо выражение

$$\delta p_{3(2)}(t) = -\frac{iY\eta_3\beta_3\mu_b}{4a_g} \left(\frac{\mu_b}{\kappa_b}\right) \exp[i(\omega t - \pi/4)]. \quad (3.1.18)$$

Существенное отличие этого вклада от выражения (3.1.16) состоит в сравнительно быстром  $\propto \omega^{-3/2}$  спаде амплитуды этой составляющей ФА-сигнала с ростом частоты и сдвиг её фазы на величину  $\pi/4$  по сравнению  $\delta p_1(t)$ . Из сравнения выражений (3.1.18) и (3.1.16) также следует, что в этом случае формирование колебаний температуры газового слоя, генерирующих акустический поршень, происходит в конкуренции между степенью прозрачности обоих слоев образца ( $l_i\beta_i \ll 1$ ) и величиной оптической толщины подложки  $\mu_b\beta_b$ .

Таким образом, в настоящем разделе выполнено обобщение теории генерации ФА-сигнала двухслойными твердотельными образцами, находящимися на поглощающей подложке. Установлено, что вклад от поглощающей

подложки в генерируемый ФА-сигнал имеет место лишь в случае, если оба слоя образца являются термически тонкими и слабо поглощающими. Найдена величина вклада поглощающей подложки в суммарный ФА-сигнал, генерируемый в газовом слое и детектируемый микрофоном.

### **3.2. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов.**

#### **Математическая модель**

Выводы линейной теории фотоакустического (ФА) эффекта для одно- и двухслойных систем [21,22, 128] стимулировали постановку многочисленных экспериментов, направленных на определение теплофизических, оптических и акустических свойств различных систем. В [21,128] считалось, что в ФА-камере подложка является прозрачной. Случай, когда прозрачный одно- или двухслойные образцы находятся на поглощающей подложке был рассмотрен в [84,129]. Между тем, известно, что с ростом интенсивности падающего луча возникает нелинейный ФА-сигнал, который состоит из набора гармоник, основными из которых являются первые две. В [57-67, 71-79] подробно исследованы различные аспекты теории генерации нелинейного ФА-сигнала двухслойными системами, когда подложка является прозрачной. Случай, когда подложка, наряду с двумя слоями образца, является поглощающей, оказался не исследованным. Восполнение этого пробела и является целью следующей части настоящей главы работы.

**Математическая модель задачи.** Предположим, что на ФА-камеру с двухслойным образцом на поглощающей подложке падает модулированный с частотой  $\omega$  лазерный луч. Тогда в качестве исходных уравнений может служить следующая система нелинейных уравнений теплопроводности для всех четырех слоев (буферного газа, первых и вторых слоев образца и подложки) ФА-камеры:

$$C_{pg}(T_g) \frac{\partial T_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_g(T_g) \frac{\partial T_g}{\partial x}), \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (3.2.1)$$

$$C_{PS(1)} \frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_{S(1)}(T) \frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial x}] + 0.5 I_0 A_{S(1)}(T) (1 + e^{i\omega t}) e^{\beta_1 x}, \quad -l_1 \leq x \leq 0, \quad (3.2.2)$$

$$C_{PS(2)} \frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_{S(2)}(T) \frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial x}] + 0.5 I_0 A_{S(2)}(T) (1 - R_{S(1)}(T)) (1 + e^{i\omega t}) e^{-\beta_1 l_1} e^{\beta_2(x+l_1)}, \quad -(l_1+l_2) \leq x \leq -l_1, \quad (3.2.3)$$

$$C_{pb} \frac{\partial T_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k_b(T) \frac{\partial T_b}{\partial x}] + 0.5 \beta_b I_2 e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} (1 + e^{i\omega t}), \quad -(l_b+l_1+l_2) \leq x \leq -(l_1+l_2). \quad (3.2.4)$$

Восемь граничных условий, необходимых для решения системы (3.2.1)-(3.2.4), являются равенства

$$\begin{aligned} T'_{S(1)}(t, -l_{(1)}) &= T'_{S(2)}(t, -l_1); \quad T'_{S(2)}(t, -l_1 - l_2) = T'_b(t, -l_1 - l_2); \quad T'_g(t, 0) = T'_{S(1)}(t, 0), \\ [k_{S(1)}(T_{S(1)}) \frac{dT'_{S(1)}}{dx}]_{x=0} &= [k_g(T_g) \frac{dT'_g}{dx}]_{x=0}; \quad [k_{S(1)}(T_{S(1)}) \frac{dT'_{S(1)}}{dx}]_{x=-l_1} = [k_{S(2)}(T_{S(2)}) \frac{dT'_{S(2)}}{dx}]_{x=-l_1}, \\ [k_{S(2)}(T'_{S(2)}) \frac{dT'_{S(2)}}{dx}]_{x=-(l_1+l_2)} &= [k_b(T'_b) \frac{dT'_b}{dx}]_{x=-(l_1+l_2)}, \quad T'_b[t, -(l_b+l_1+l_2)] = 0; \quad T'_g(t, l_g) = 0, \end{aligned}$$

соответствующие условиям непрерывности температур и потоков тепла на границах газ-первый слой и два слоя образца, между слоями образца и образец-подложка, а также условия отсутствия нагрева на торцах ФА-камеры.

Система нелинейных уравнений теплопроводности (3.2.1)-(3.2.4) совместно с граничными условиями являются исходными для исследования особенностей возбуждения нелинейного ФА-отклика, когда подложка в ФА-камере является поглощающей.

Представим возмущение температуры в виде суммы локально-равновесной  $T_{0i}(x)$ , линейных  $\Phi_i(x, t)$  и нелинейных акустических частей  $\Phi_{Ni}(x, t)$ , т.е. в виде

$$T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_{Li}(x, t) + \Phi_{1Ni}(x, t) + \Phi_{2Ni}(x, t). \quad (3.2.5)$$

Тогда система уравнений (3.2.1)-(3.2.4) распадается на следующие три системы для  $T_{0i}(x)$ ,  $\Phi_{1Ni}(x, t)$  и  $\Phi_{2Ni}(x, t)$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0g}(x)}{dx} + 0.5 \delta_{2g} \frac{dT_{0g}^2(x)}{dx} \right] = 0, \quad (3.2.6)$$



$$k_{S(1)}^{(0)} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0S(1)}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2S(1)} \frac{dT_{0S(1)}^2(x)}{dx} \right] + 0.5I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 (1 + \Theta_0 \delta_{3S(1)}) e^{\beta_1 x} = 0, \quad (3.2.7)$$

$$k_{S(2)}^{(0)} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0S(2)}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2S(2)} \frac{dT_{0S(2)}^2(x)}{dx} \right] + 0.5I_0 A_{S(2)}^{(0)} \beta_2 (1 + W_{01} \delta_{3S(2)}) (1 - R_{S(1)}) e^{\beta_2(x+l_1)} e^{-\beta_1 l_1} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\kappa_b^{(0)} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0b}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2b} \frac{dT_{0b}^2(x)}{dx} \right] + 0.5\beta_b I_2 A_b^{(0)} (1 + W_{02} \delta_{3b}) e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ng}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Ng}}{\partial t} = -(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(t,x)], \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1NS(1)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(1)}}{\partial t} - (\delta_{2S(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(x,t)) - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 e^{\beta_1 x}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \times, \quad (3.2.11)$$

$$\times \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} \Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(0,t)]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1NS(2)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(2)}}{\partial t} - (\delta_{2S(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(x,t)) -$$

$$- \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} \beta_2 e^{\beta_2(x+l_1)} e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}} \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} W_{01} + \Phi_{LS(2)}(-l_1, t)] \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Nb}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Nb}}{\partial t} = -(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(t,x)] - \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}}{2\kappa_b^{(0)}} \times, \quad (3.2.13)$$

$$\times \delta_{3b} [e^{i\omega t} W_{02} + \Phi_{Lb}(-l_1, -l_2, -t)]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Ng}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ng}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [\Phi_{Lg}^2(t,x)], \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2NS(1)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2NS(1)}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2S(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) \Phi_{LS(1)}^2(x,t) - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 e^{\beta_1 x}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \delta_{3(1)} \Phi_{LS(1)}(0,t) e^{i\omega t}, \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2NS(2)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2NS(2)}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2S(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) \Phi_{LS(2)}^2(x,t) - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}) \beta_2 e^{\beta_1 l_1} e^{\beta_2(x+l_1)}}{2k_{S(2)}^{(0)}} \times, \quad (3.2.16)$$

$$\times e^{i\omega t} \delta_{3(1)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, t)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Nb}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Nb}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [\Phi_{Lb}^2(t,x)] - \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} e^{i\omega t}}{2\kappa_b^{(0)}} \times. \quad (3.2.17)$$

$$\times \delta_{3b} \Phi_{Lb}(-l_1, -l_2, t)$$

Отметим, что выражение для  $\Phi_{Li}(x,t)$  в рассматриваемой геометрии ФА- эксперимента получено в [129].

Принимая во внимание, что  $\Phi_L(t,x) = \Phi_L(\omega,x) \exp(i\omega t)$ ,  $\Phi_L^2 \approx \Phi_L^2(\omega,x) \exp(i2\omega t)$ , положим  $\Phi_{1Ni}(t,x) = \Phi_{1Ni}(\omega,x) \exp(i\omega t)$ . Тогда для

функций  $\Psi_{1i}(x, \omega) = \Phi_{1Ni}(x, \omega) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(x, \omega)$  получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \Psi_{1N(g)}}{dx^2} - \sigma_{1(g)}^2 \Psi_{1N(g)} = \sigma_{1(g)}^2 (\delta_g - \delta_{2g}) T_{0(g)}(x) \Phi_{L(g)}(\omega, x), \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1NS(1)}}{dx^2} - \sigma_{1S(1)}^2 \Psi_{1NS(1)} = \\ = \sigma_{1S(1)}^2 (\delta_{S(1)} - \delta_{2S(1)}) T_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(\omega, x) - B_1 [\Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(\omega, 0)] e^{\beta_1 x} \end{aligned}, \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1NS(2)}}{dx^2} - \sigma_{1S(2)}^2 \Psi_{1NS(2)} = \\ = \sigma_{1S(2)}^2 (\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)}) T_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(\omega, x) - B_2 [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1)] e^{\beta_2(x+l_1)} \end{aligned}, \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1N(b)}}{dx^2} - \sigma_{1(b)}^2 \Psi_{1N(b)} = \sigma_{1(b)}^2 (\delta_b - \delta_{2b}) T_{0(b)}(x) \Phi_{L(b)}(\omega, x) - \\ - B_3 [W_{02} e^{i\omega t} + \Phi_{Lb}(-l_1 - l_2, \omega)] e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} \end{aligned}, \quad (3.2.21)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2Ng}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2 \Psi_{2g} = \frac{(\delta_g - \delta_{2g})}{2} \sigma_{2g}^2 \Phi_{Lg}^2(\omega, x), \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{2NS(1)}}{\partial x^2} - \sigma_{2S(1)}^2 \Psi_{2S(1)} = \frac{\sigma_{2S(1)}^2 (\delta_{1S(1)} - \delta_{2S(1)}) \Phi_{LS(1)}^2(x, \omega)}{2} - \\ - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 \delta_{3S(1)} e^{\beta_1 x} \Phi_{LS(1)}(0, \omega)}{2k_{S(1)}^{(0)}}, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{2NS(2)}}{\partial x^2} - \sigma_{2S(2)}^2 \Psi_{2S(2)} = \frac{\sigma_{2S(2)}^2 (\delta_{1S(2)} - \delta_{2S(2)}) \Phi_{LS(2)}^2(x, \omega)}{2} - \\ - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}) \delta_{3S(2)} \beta_2 e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}} e^{\beta_2(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega) \end{aligned}, \quad (3.2.24)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2Nb}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2 \Psi_{2b} = \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2} \sigma_{2b}^2 \Phi_{Lb}^2(\omega, x) - B_3 e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} \Phi_{Lb}(-l_1, -l_2, \omega), \quad (3.2.25)$$

$$\text{где } B_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 \delta_{3S(1)}}{2k_{S(1)}^{(0)}}, \quad B_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}) \beta_2 \delta_{3S(2)} e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}}, \quad B_3 = \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} \delta_{3b} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}}{2\kappa_b^{(0)}},$$

$$\sigma_{1(i)} = \left( \frac{i\omega}{\chi_i^{(0)}} \right)^{1/2}, \quad \sigma_{2(i)} = \left( \frac{2i\omega}{\chi_i^{(0)}} \right)^{1/2}.$$

В этом приближении граничные условия для функций  $\Phi_{1Ni}(t, x)$ ,  $\Phi_{2Ni}(x, t)$ ,

$\Psi_{1i}(x, t) = \Phi_{1Ni}(x, t) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(x, t)$  и  $\Psi_{2i}(t, \omega) = \Phi_{2Ni}(\omega, x) + 0,5 \delta_{2i} \Phi_{Li}^2(\omega, x)$  имеют вид

$$\Phi_{1Ns(1)}(t,0) = \Phi_{1Ng}(t,0), \quad \Phi_{1Nb}(t,-l_1-l_2) = \Phi_{1Ns(2)}(t,-l_1-l_2), \quad \Phi_{1Ns(1)}(t,-l_1) = \Phi_{1Ns(2)}(t,-l_1),$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{1g}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1s}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns(1)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_s^{(1)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns(2)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1},$$

$$\Phi_{1Nb}(t,-l_1-l_2-l_b) = \Phi_{1Ng}(t,l_g) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{1Nb}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_1+l_2)} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_1+l_2)}, \quad \Phi_{2Ns(1)}(t,0) = \Phi_{2Ng}(t,0),$$

$$\Phi_{2Nb}(t,-l_b-l_1-l_2) = \Phi_{2Ns(2)}(t,-l_b-l_1-l_2), \quad \Phi_{2Nb}(t,-l_1-l_2-l_b) = \Phi_{2Ng}(t,l_g) = 0,$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial \Psi_{2Ng}(t,x)}{\partial x} + \frac{I_0 A^{(0)} \delta_3}{2\kappa_g^{(0)}} \Phi_{Ls(1)}(t,x) e^{i\omega t} \right\} \right|_{x=0} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{2Ns}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \Phi_{2Ns(1)}(t,-l_1) = \Phi_{2Ns(2)}(t,-l_2),$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{2Ns(1)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_s^{(1)}} \left. \frac{\partial \Psi_{2Ns(2)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1}, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{2Nb}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1-l_2} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{2Ns}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1-l_2}.$$

Системы уравнений (3.2.10)-(3.2.13), (3.2.14)-(3.2.17), (3.2.18)-(3.2.21) и (3.2.22)-(3.2.25) совместно с граничными условиями и выражениями для линейных частей акустического колебания температуры представляют собой математическую модель сформулированной задачи. Эти уравнения будут служить исходными для определения температурного поля, а также параметров основной и второй гармоник нелинейного ФА-сигнала, генерируемого двухслойными твердотельными образцами с поглощающей подложкой.

### 3.3. Температурное поле в фотоакустической камере

Прежде всего, отметим, что некоторые особенности формирования температурного поля в ФА-камере для случая, когда образцы существенно отличаются оптическими характеристиками, недавно были рассмотрены в [80,81]. Исходим из системы дифференциальных уравнений (3.2.6)-(3.2.9) для поля температуры в ФА-камере, соответствующих рассматриваемому случаю. Граничные условия, необходимые для решения этой системы, можно написать в виде

$$T_{0g}(l_g) = 0; \quad T_{0b}[-(l_b+l_1+l_2)] = 0; \quad T_{0g}(0) = T_{0s(1)}(0) = \Theta_0;$$

$$T_{0S(1)}(-l_1) = T_{0S(2)}(-l_1) = W_{01}; \quad T_{0S(2)}(-l_1 - l_2) = T_{0b}(-l_1 - l_2) = W_{02};$$

$$[k_{S(1)}(T_{S(1)}) \frac{dT_{0S(1)}}{dx}]_{x=0} = [k_g(T_g) \frac{dT_{0g}}{dx}]_{x=0}; \quad [k_{S(1)}(T_{S(1)}) \frac{dT_{0S(1)}}{dx}]_{x=-l_1} = [k_{S(2)}(T_{S(2)}) \frac{dT_{0S(2)}}{dx}]_{x=-l_1}$$

$$[k_{S(2)}(T_{S(2)}) \frac{dT_{0S(2)}}{dx}]_{x=-(l_1+l_2)} = [k_b(T'_b) \frac{dT_{0b}}{dx}]_{x=-(l_1+l_2)},$$

где  $\Theta_0$  и  $W_{01}$ ,  $W_{02}$  -приращение температур на границах между слоями.

Используя обозначение  $T_i(x) = \delta_{2i}^{-1} g_i(x)$ , решение системы дифференциальных уравнений (3.2.6)-(3.2.9), подчиняющихся выше выписанным граничным условиям, можно написать в виде

$$g_g(x) = [1 + \delta_{2g} \Theta_0 (2 + \delta_{2g} \Theta_0) (1 - \frac{x}{l_g})^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (3.3.1)$$

$$g_{S(1)}(x) = \{1 + \delta_{2S(1)} [(2\Theta_0 + \delta_{2S(1)} \Theta_0^2) (\frac{x}{l_1} + 1) - \frac{x}{l_1} (2W_{01} + \delta_{2S(1)} W_{01}^2) + 2F_1 (1 + \frac{x}{l_1} - (e^{\beta_1 x} + \frac{x}{l_1} E_{01}))]\}^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (3.3.2)$$

$$g_{S(2)}(x) = \{1 - 2\delta_{2S(2)} [F_2 ((E_{02} - \frac{l_1+l_2}{l_1}) \frac{l_1}{l_2} - \frac{x}{l_2} (1 - E_{02}) + e^{\beta_2(x+l_1)}) - \frac{1}{l_2} [(W_{01} + 0.5\delta_{2S(2)} W_{01}^2)(x+l_1+l_2) - (W_{02} + 0.5\delta_{2S(2)} W_{02}^2)(x+l_1)]]\}^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (3.3.3)$$

$$g_b = \{1 + 2\delta_{2b} [F_3 ((E_{0b} - 1) (\frac{x+l_1+l_2}{l_b} + 1) - e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}) + (W_{02} + 0.5\delta_{2b} W_{02}^2)]\}^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (3.3.4)$$

В этих выражениях

$$E_{01} = \exp(-\beta_1 l_1), \quad E_{02} = \exp(-\beta_2 l_2), \quad E_b = \exp(-\beta_b l_b)$$

$$F_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} (1 + \Theta_0 \delta_{3S(1)})}{2k_{S(1)}^{(0)} \beta_1}, \quad F_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 + W_{01} \delta_{3S(2)}) (1 - R_{S(1)})^{(0)} E_{01}}{2k_{S(2)}^{(0)} \beta_2},$$

$$F_3 = \frac{I_0 A_b^{(0)} (1 + W_{02} \delta_{3b}) (1 - R_{S(1)}) (1 - R_{S(2)})^{(0)} E_{01} E_{02}}{2k_b^{(0)} \beta_b}$$

Условия непрерывности потоков тепла на межслойных границах позволяют получить следующую систему алгебраических уравнений для определения величин  $\Theta_0$ ,  $W_{01}$  и  $W_{02}$ :

$$\Theta_0^2 a_{11} + \Theta_0 a_{12} + W_{01}^2 a_{13} + W_{01} a_{14} + 2G = 0, \quad (3.3.5)$$

$$b_{11} \Theta_0^2 + \Theta_0 b_{12} + W_{01}^2 b_{13} + W_{01} b_{14} + W_{02}^2 b_{15} + W_{02} b_{16} + D = 0, \quad (3.3.6)$$

$$c_{11} W_{02}^2 + c_{12} W_{02} + c_{13} W_{01}^2 + c_{14} W_{01} + 2F_s - 2a_3 F_b = 0. \quad (3.3.7)$$

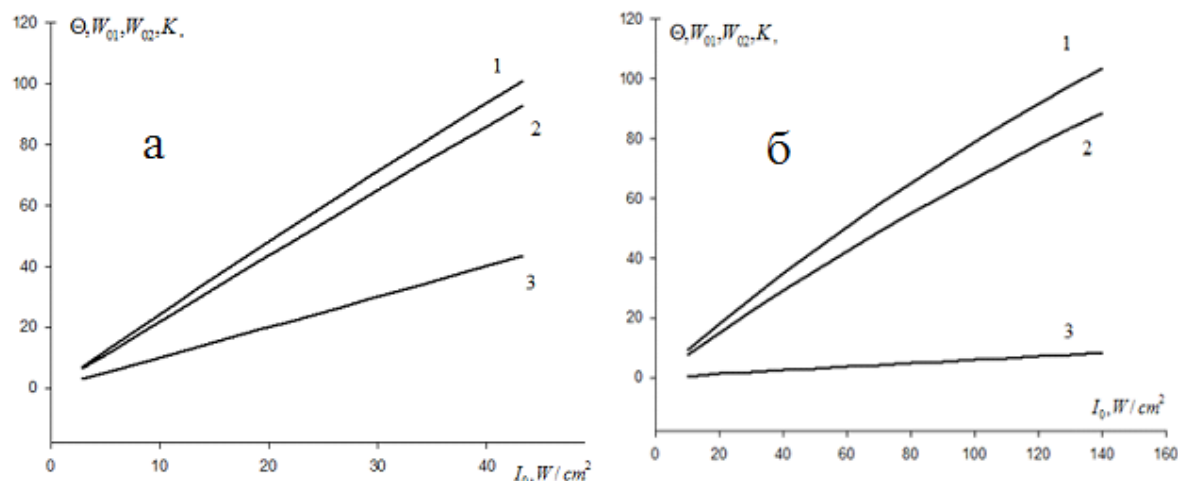
Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\delta_{2S(1)} + a_1 \delta_{2g}), & a_{12} &= 2(1 + a_1 + G \delta_{3S(1)}), & a_{13} &= -\delta_{2S(1)}, & a_{14} &= -2, & b_{11} &= \delta_{2S(1)}, \\ b_{12} &= 2 + a_2 D_1 \delta_{3S(1)}, & b_{13} &= -(\delta_{2S(1)} + 0.5 a_2 \delta_{2S(2)}), & b_{14} &= -(2 + a_2 + a_2 D_2 \delta_{3S(2)}), & b_{15} &= 0.5 a_2 \delta_{2S(2)}, \\ b_{16} &= a_2, & c_{13} &= \delta_{2S(2)}, & c_{12} &= -2(a_3 F_b \delta_{3b} + 1 + a_3), & c_{11} &= -(\delta_{2S(2)} + a_3 \delta_{2b}), & c_{14} &= 2(F_s \delta_{3s_2} + 1), \\ D &= D_1 - D_2, & G &= \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)}}{2k_{S(1)}^{(0)} \beta_1} [1 - \beta_1 l_1 - E_{01}], & a_1 &= \frac{k_g^{(0)} l_1}{k_{S(1)}^{(0)} l_g}, & a_2 &= \frac{k_{S(2)}^{(0)} l_1}{k_{S(1)}^{(0)} l_2}, & a_3 &= \frac{k_b^{(0)} l_2}{k_{S(2)}^{(0)} l_b}, \\ D_1 &= \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} [1 - E_{01} (\beta_1 l_1 + 1)]}{k_{S(1)}^{(0)} \beta_1}, & D_2 &= \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} a_2 (1 - R_{S(1)})^{(0)} (1 - E_{02} - \beta_2 l_2) E_{01}}{2k_{S(2)}^{(0)} \beta_2}, \\ F_b &= \frac{I_0 A_b^{(0)} (1 - R_{S(1)}) (1 - R_{S(2)})^{(0)} E_{01} E_{02}}{2k_b^{(0)} \beta_b} (1 - E_{0b} - \beta_b l_b), & F_s &= \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} E_{01}}{2k_{S(2)}^{(0)} \beta_2} [1 - E_{02} (\beta_2 l_2 + 1)], \end{aligned}$$

Выражения (3.3.1)-(3.3.4) совместно с системой нелинейных алгебраических уравнений (3.3.5)-(3.3.7) представляют собой решение сформулированной задачи и описывают особенности формирования температурного поля в ФА-камере с двухслойным образцом и поглощающей подложкой.

Очевидно, что для получения полной информации о температурном поле необходимо получить численное решение системы уравнения (3.3.5)-(3.3.7). Нами получен это решение для двухслойной системы полиметилметакрилат (ПММА) - полиэтилен низкой плотности (ПЭНП)  $\kappa_{S(1)}^{(0)} = 0.163 \text{ W/m.K}$ ,  $\delta_{2S(1)} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\kappa_{S(2)}^{(0)} = 0.3 \text{ W/m.K}$ ,  $\delta_{2S(2)} = -1.85 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [115, 116],  $A_{S(1)}^{(0)} = 0.5$ ,  $\delta_{3S(1)} = -3.0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $A_{S(2)}^{(0)} = 0.87$ ,  $\delta_{3S(2)} = 0.07 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [117, 118]), когда оба слоя являются низко теплопроводящими. В качестве подложки мы выбрали кварцевый стекло ( $\kappa_b^{(0)} = 1.36 \text{ W/m.K}$ ,  $\delta_{2b} = 0.104 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [115, 116],  $A_b^{(0)} = 0.72$ ,  $\delta_{3S(b)} = 0.19 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [117, 118]) и нержавеющей стал ( $\kappa_b^{(0)} = 14.9 \text{ W/m.K}$ ,  $\delta_{2b} = 0.56 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [115, 116],  $A_b^{(0)} = 0.72$ ,  $\delta_{3S(b)} = 0.19 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [117, 118]). Решение было получено для модельных значениях

оптического коэффициента поглощения  $\beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = 50 \text{ см}^{-1}$ , а для подложки  $\beta_b = 70 \text{ см}^{-1}$ . Результаты полученного решения иллюстрированы на рис.3.2.



**Рис.3.2.** Зависимости приращений температур  $\Theta_0$  (кривые 1),  $W_{01}$  (кривые 2) и  $W_{02}$  (кривые 3) от интенсивности падающего луча для двухслойных систем: а) - воздух- ПММА- ПЭНП- кварцевое стекло. б) - воздух- ПММА- ПЭНП- нержавеющая сталь;

Результаты полученного решения иллюстрированы на рис.3. Нетрудно заметит, что существенное отличие зависимости величин  $\Theta_0$ ,  $W_{01}$  и  $W_{02}$  от интенсивности падавшего луча для двух вариантов подложки связано большим значением коэффициента теплопроводности нержавеющей стали по сравнению с кварцевого стекла.

### 3.4. Вклад поглощения подложки на формирование основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов

Линейная теория генерации фотоакустического (ФА) сигнала двух- и многослойными образцами была развита в [128, 138], которая является обобщением известной теории Розенцвайга – Гершо для многослойных систем [21]. Обобщение результатов [128,138] для случая, когда однослойный

образец является прозрачным, а подложка поглощающей, проведено в [84]. В [130,131] нами была разработана линейная теория генерации ФА-отклика в двухслойных образцах на поглощающей подложке. Известно, что температурные зависимости теплофизических и оптических параметров образцов и подложки приводят к формированию нелинейного составляющего ФА-отклика, который состоит из набора гармоник [139]. Оказалось, что лишь первые две из них являются основными.

Целью настоящего раздела работы является развитие теории возбуждения основной гармоники нелинейного ФА-сигнала двухслойными твердотельными образцами, находящимися на поглощающей подложке. Температурное поле для подобных систем теоретически было изучено в [133] и описано в предыдущем разделе.

Исходим из следующей системы уравнений для величины колебания температуры на основной гармонике для всех слоев  $\Phi_{1M}(t, x)$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ng}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Ng}}{\partial t} = -(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(t, x)], \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1NS(1)}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(1)}}{\partial t} - (\delta_{2S(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(x, t)) - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 e^{\beta_1 x}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \times, \quad (3.4.2)$$

$$\times \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} \Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(0, t)]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1NS(2)}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(2)}}{\partial t} - (\delta_{2S(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(x, t)) - \quad (3.4.3)$$

$$- \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} \beta_2 e^{\beta_2(x+l_1)} e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}} \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} W_{01} + \Phi_{LS(2)}(-l_1, t)]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Nb}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Nb}}{\partial t} = -(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(t, x)] - \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}}{2\kappa_b^{(0)}} \times. \quad (3.4.4)$$

$$\times \delta_{3b} [e^{i\omega t} W_{02} + \Phi_{Lb}(-l_1, -l_2, t)]$$

В разделе 3.1 нами получены следующие выражения для  $\Phi_{Lg}(x, t)$ ,  $\Phi_{LS(1)}(x, t)$ ,  $\Phi_{LS(2)}(x, t)$  и  $\Phi_{Lb}(x, t)$ :

$$\Phi_{Lg}(x, \omega) = \Theta_L e^{-\sigma_{1g} x}, \Theta_L = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3, E_1 = \frac{\eta_1 \beta_{1S(1)}}{2\kappa_1 (\sigma_{1S(1)}^2 - \beta_{1S(1)}^2)}, \eta_1 = I_0 A_{S(1)},$$

$$\Phi_{Ls(1)}(x, \omega) = \gamma_1 e^{\sigma_{1S(1)}x} + \gamma_2 e^{-\sigma_{1S(1)}x} + E_1 e^{\beta_{1S(1)}x}, E_2 = \frac{\eta_2 \beta_{1S(2)}}{2\kappa_2(\sigma_{1S(2)}^2 - \beta_{1S(2)}^2)}, \eta_2 = I_0(1 - R_{s(1)})A_{s(2)} e^{-\beta_{1S(1)}l_1},$$

$$\Phi_{Ls(2)}(x, \omega) = G_1 e^{\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} + G_2 e^{-\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} + E_2 e^{\beta_{1S(2)}(x+l_1)}, \eta_b = I_0(1 - R_{s(1)})(1 - R_{s(2)})A_{s(3)} e^{-\beta_{1S(1)}l_1} e^{-\beta_{1S(2)}l_2},$$

$$\Phi_{Lb}(x, \omega) = R_1 e^{\sigma_b(x+l_1+l_2)} + E_b e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}, E_b = \frac{\eta_b \beta_b}{2\kappa_b(\sigma_b^2 - \beta_b^2)}.$$

Здесь использованы обозначения  $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i$ ,  $\sigma_i = (1+i)a_i$ ,  $a_i = 1/\mu_i$ ,

$\mu_i = (2\chi_i / \omega)^{1/2}$  – длина тепловой диффузии,  $\gamma_1 = \Delta_1 / \Delta$ ,  $\gamma_2 = \Delta_2 / \Delta$ ,

$$\Theta_1 = \frac{E_1 \{ N_1(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + N_2(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2} - 2e^{-\beta_{1S(1)}l_1} N_3 \}}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}},$$

$$\Theta_2 = \frac{2sE_2[(r_2+1)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + (r_2-1)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2} - 2e^{-\beta_{1S(2)}l_2}(r_2-b)]}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}},$$

$$\Theta_3 = \frac{2sbE_b(r_b-1)}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}},$$

$$\Delta = -\{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}\},$$

$$\Delta_1 = -E_1\{[r_1(s-1)(1-b)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (s+1)(1+b)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}e^{\sigma_{1S(2)}l_2}] + [(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}]\} + E_2s\{[(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}] - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)}l_2}\} + 2E_bbs(r_b-1),$$

$$\Delta_2 = E_1\{[r_1(s+1)(1-b)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (s-1)(1+b)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}e^{\sigma_{1S(2)}l_2}] - [(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}]\} + E_2s\{[(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}] - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)}l_2}\} + 2E_bbs(r_b-1),$$

$$\gamma_1 = \frac{E_1N_5 - E_2s[N_4 - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)}l_2}] - 2E_bbs(r_b-1)b}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}},$$

$$\gamma_2 = \frac{E_1N_6 - E_2s[N_4 - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)}l_2}] - 2E_bbs(r_b-1)b}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}},$$

$$N_1 = [(r_1+1)(1+s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + (r_1-1)(1-s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}], \quad N_2 = [(r_1+1)(1-s)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + (r_1-1)(1+s)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}],$$

$$N_3 = [(r_1+s)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + (r_1-s)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}], \quad N_4 = [(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}],$$

$$N_5 = [r_1(s-1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + (s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - [r_1(s+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2},$$

$$N_6 = [r_1(s+1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} - (s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}](b-1)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [r_1(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)}l_2},$$

$$R_1 = G_1 e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + G_2 e^{\sigma_{1S(2)}l_2} + E_2 e^{-\beta_{1S(2)}l_2} - E_b, \quad s = \frac{k_{S(2)}\sigma_{1S(2)}}{k_{S(1)}\sigma_{1S(1)}}, \quad b = \frac{k_b\sigma_b}{k_{S(2)}\sigma_{1S(2)}}, \quad r_1 = \frac{\beta_{1S(1)}}{\sigma_{1S(1)}}, \quad r_2 = \frac{\beta_{1S(2)}}{\sigma_{1S(2)}}, \quad r_b = \frac{\beta_b}{\sigma_b},$$

$$G_1 = \{\gamma_1(s+1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + \gamma_2(s-1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + E_1(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1} - E_2s(1+r_2)\}(2s)^{-1},$$

$$G_2 = \{\gamma_1(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + \gamma_2(s+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + E_1(s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)}l_1} - E_2s(1-r_2)\}(2s)^{-1},$$

$$W_L = 0,5\Theta_L[(1+g)e^{\sigma_s l} + (1-g)e^{-\sigma_s l}] - 0,5E_s[(r_s-1)e^{\sigma_s l} - (r_s+1)e^{-\sigma_s l}] - E_s e^{-\beta_s l} + E_b.$$



Очевидно, что для решения системы из четырех дифференциальных уравнений второго порядка необходимо иметь восемь граничных условий. К этим условиям относятся условие отсутствия нагрева торцов подложки и газового слоя, а также непрерывность температур и потоков тепла на границах между слоями, что имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{1Ns(1)}(t,0) &= \Phi_{1Ng}(t,0), & \Phi_{1Nb}(t,-l_1-l_2) &= \Phi_{1Ns(2)}(t,-l_1-l_2), & \Phi_{1Ns(1)}(t,-l_1) &= \Phi_{1Ns(2)}(t,-l_1), \\ \left. \frac{\partial \Psi_{1g}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1s}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=0}, & \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns(1)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1} &= \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_s^{(1)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns(2)}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1}, \\ \Phi_{1Nb}(t,-l_1-l_2-l_b) &= \Phi_{1Ng}(t,l_g) = 0, & \left. \frac{\partial \Psi_{1Nb}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_1+l_2)} &= \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1Ns}(t,x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_1+l_2)}. \end{aligned}$$

Примем во внимание, что  $\Phi_L(t,x) = \Phi_L(\omega,x) \exp(i\omega t)$ ,  $\Phi_{1Ni}(t,x) = \Phi_{1Ni}(\omega,x) \exp(i\omega t)$ . Тогда, используя обозначение  $g_{0i}(x) = \delta_{2i} T_{0i}(x)$ , для функции  $\Psi_{li}(\omega,x) = \Phi_{1Ni}(\omega,x) + g_{0i}(x) \Phi_{Li}(\omega,x)$  из (3.4.1)–(3.4.4) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \Psi_{li}}{dx^2} - \sigma_{li}^2 \Psi_{li} = \sigma_{li}^2 (\delta_i - \delta_{2i}) \delta_{2i}^{-1} g_{0i}(x) \Phi_{Li}(\omega,x), \quad (i = g, s(1), s(2), b). \quad (3.4.5)$$

Запишем уравнение (3.4.5) для соответствующих слоев следующим образом:

$$\frac{d^2 \Psi_{1N(g)}}{dx^2} - \sigma_{1(g)}^2 \Psi_{1N(g)} = \sigma_{1(g)}^2 (\delta_g - \delta_{2g}) T_{0(g)}(x) \Phi_{L(g)}(\omega,x), \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1Ns(1)}}{dx^2} - \sigma_{1s(1)}^2 \Psi_{1Ns(1)} &= \\ &= \sigma_{1s(1)}^2 (\delta_{s(1)} - \delta_{2s(1)}) T_{0s(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(\omega,x) - B_1 [\Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(\omega,0)] e^{\beta_1 x} \end{aligned}, \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1Ns(2)}}{dx^2} - \sigma_{1s(2)}^2 \Psi_{1Ns(2)} &= \\ &= \sigma_{1s(2)}^2 (\delta_{s(2)} - \delta_{2s(2)}) T_{0s(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(\omega,x) - B_2 [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega,-l_1)] e^{\beta_2(x+l_1)} \end{aligned}, \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1N(b)}}{dx^2} - \sigma_{1(b)}^2 \Psi_{1N(b)} &= \sigma_{1(b)}^2 (\delta_b - \delta_{2b}) T_{0(b)}(x) \Phi_{L(b)}(\omega,x) - \\ &- B_3 [W_{02} + \Phi_{Lb}(-l_1-l_2, \omega)] e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} \end{aligned}, \quad (3.4.9)$$

$$\text{где } B_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 \delta_{3S(1)}}{2k_{S(1)}^{(0)}}, \quad B_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2 \delta_{3S(2)} e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}}, \quad B_3 = \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} \delta_{3b} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)}}{2k_b^{(0)}}, \quad \sigma_{1(i)} = \left( \frac{i\omega}{\chi_i^{(0)}} \right)^{1/2}.$$

Реализуя метод вариации постоянных, получим решение системы уравнений (3.4.6)–(3.4.9) в виде

$$\Psi_{1Ng} = \Theta_{1Ng} e^{-\sigma_{1g}x} + R_{1g} S_{1g}(x) e^{\sigma_{1g}x} - R_{1g} S_{2g}(x) e^{-\sigma_{1g}x}, \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1NS(1)} = & U_{N1} e^{\sigma_{1S(1)}x} + V_{N1} e^{-\sigma_{1S(1)}x} + \\ & + [R_{S(1)} S_{1S(1)}(x) - \Omega_{1S(1)}(x)] e^{\sigma_{1S(1)}x} - [R_{S(1)} S_{2S(1)}(x) - \Omega_{2S(1)}(x)] e^{-\sigma_{1S(1)}x}, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1NS(2)} = & U_{N2} e^{\sigma_{1S(1)}(x+l_1)} + V_{N2} e^{-\sigma_{1S(1)}(x+l_1)} + \\ & + [R_{S(2)} S_{1S(2)}(x) - \Omega_{1S(2)}(x)] e^{\sigma_{1S(1)}(x+l_1)} - [R_{S(2)} S_{2S(2)}(x) - \Omega_{2S(2)}(x)] e^{-\sigma_{1S(1)}(x+l_1)}, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$\Psi_{1Nb} = W_{1Nb} e^{\sigma_{1b}(x+l_1+l_2)} + [R_{1b} S_{1b}(x) - M_{1b}(x)] e^{\sigma_{1b}(x+l_1+l_2)} - [R_{1b} S_{2b}(x) - M_{2b}(x)] e^{-\sigma_{1b}(x+l_1+l_2)}. \quad (3.4.13)$$

Виды функций  $S_{1g}(x)$ ,  $S_{2g}(x)$ ,  $S_{1S(1)}(x)$ ,  $S_{2S(1)}(x)$ ,  $S_{1S(2)}(x)$ ,  $S_{2S(2)}(x)$ ,  $S_{1b}(x)$ ,  $S_{2b}(x)$ ,  $\Omega_{1S(1)}(x)$ ,  $\Omega_{2S(1)}(x)$ ,  $\Omega_{1S(2)}(x)$ ,  $\Omega_{2S(2)}(x)$  определяются следующими выражениями:  $R_{1i} = 0,5\delta_{2i}^{-1}\sigma_{1i}(\delta_i - \delta_{2i})$ ,

$$S_{1g}(x) = \int g_{0g}(x) \Phi_{Lg}(\omega, x) e^{-\sigma_g x} dx, \quad S_{2g}(x) = \int g_{0g}(x) \Phi_{Lg}(\omega, x) e^{\sigma_g x} dx,$$

$$S_{1S(1)}(x) = \int g_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(\omega, x) e^{-\sigma_{1S(1)}x} dx, \quad S_{2S(1)}(x) = \int g_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(\omega, x) e^{\sigma_{1S(1)}x} dx,$$

$$S_{1S(2)}(x) = \int g_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(\omega, x) e^{-\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} dx, \quad S_{2S(2)}(x) = \int g_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(\omega, x) e^{\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} dx,$$

$$S_{1b}(x) = \int g_{0b}(x) \Phi_{Lb}(\omega, x) e^{-\sigma_b(x+l_1+l_2)} dx, \quad S_{2b}(x) = \int g_{0b}(x) \Phi_{Lb}(\omega, x) e^{\sigma_b(x+l_1+l_2)} dx,$$

$$\Omega_{1S(1)}(x) = 0,5B_1\sigma_{1S(1)}^{-1} \int e^{(\beta_1 - \sigma_{1S(1)})x} [\Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(\omega, 0)] dx, \quad \Omega_{2S(1)}(x) = 0,5B_1\sigma_{1S(1)}^{-1} \int e^{(\beta_1 + \sigma_{1S(1)})x} [\Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(\omega, 0)] dx,$$

$$\Omega_{1S(2)}(x) = 0,5B_2\sigma_{1S(2)}^{-1} \int e^{(\beta_2 - \sigma_{1S(2)})(x+l_1)} [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1)] dx, \quad \Omega_{2S(2)}(x) = 0,5B_2\sigma_{1S(2)}^{-1} \int e^{(\beta_2 + \sigma_{1S(2)})(x+l_1)} [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1)] dx,$$

$$M_{1b}(x) = 0,5B_3\sigma_b^{-1} \int e^{(\beta_b - \sigma_b)(x+l_1+l_2)} [W_{02} + \Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2)] dx, \quad M_{2b}(x) = 0,5B_3\sigma_b^{-1} \int e^{(\beta_b + \sigma_b)(x+l_1+l_2)} [W_{02} + \Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2)] dx.$$

Подставляя функцию  $\Phi_{Li}(x)$  в выше приведенные интегралы  $\Omega_{ij}(x)$ , а также все функции  $S_{ij}(x)$  и, выполнив интегрирование, будем иметь

$$S_{1g}(x) \approx \frac{\Theta_L}{2\sigma_g} \left[ 1 - \sqrt{1+b_g} + \frac{b_g}{2l_g \sqrt{1+b_g}} \left( x + \frac{1}{2\sigma_g} \right) \right] \exp(-2\sigma_g x),$$

$$S_{2g}(x) = -\left[ \frac{2l_g}{3b_g} (1+b_g^{3/2}) \left[ \sqrt{\left( 1 - \frac{b_g x}{(1+b_g)l} \right)^3} - 1 \right] + x \right] \Theta_L,$$

$$\begin{aligned}
S_{1s(1)}(x) &= U_{L1} \left\{ D_2^{1/2} \left[ x + \frac{1}{4} \frac{D_3}{D_2} \frac{x^2}{l_1} - \frac{D_1 e^{\beta_1 x}}{2D_2 \beta_1} \right] - x \right\} + \frac{V_{L1}}{2\sigma_{1s(1)}} \left\{ 1 - D_2^{1/2} - \frac{D_3}{2D_2^{1/2} l_1} \left( x + \frac{1}{2\sigma_{1s(1)}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_1 \sigma_{1s(1)} e^{\beta_1 x}}{D_2^{1/2} (\beta_1 - 2\sigma_s)} \right\} e^{-2\sigma_{1s(1)} x} - \frac{E_1}{\beta_1 - \sigma_{1s(1)}} \left\{ D_2^{1/2} - 1 + \frac{D_3}{2D_2^{1/2} l_1} \left( x - \frac{1}{\beta_1 - \sigma_{1s(1)}} \right) - \frac{D_1 (\beta_1 - \sigma_{1s(1)}) e^{\beta_1 x}}{2D_2^{1/2} (2\beta_1 - \sigma_{1s(1)})} \right\} e^{(\beta_1 - \sigma_{1s(1)}) x}, \\
S_{2s(2)}(x) &= \frac{U_{L2}}{2\sigma_{1s(2)}} \left\{ D_{22}^{1/2} - 1 + \frac{D_{32}}{2l_2 D_{22}^{1/2}} \left( x + l_1 - \frac{1}{2\sigma_{1s(2)}} \right) - \frac{D_{12} \sigma_{1s(2)}}{D_{22}^{1/2}} \frac{e^{\beta_2 (x+l_1)}}{\beta_2 + 2\sigma_{1s(2)}} \right\} e^{2\sigma_{1s(2)} (x+l_1)} + V_{L2} \left\{ D_{22}^{1/2} \left[ x + \frac{1}{4} \frac{D_{32}}{D_{22}} \frac{x(0.5x+l_1)}{l_2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{D_{12}}{2\beta_2 D_{22}} e^{\beta_2 (x+l_1)} \right] - x \right\} - \frac{E_2}{\beta_2 + \sigma_{1s(2)}} \left\{ D_{22}^{1/2} - 1 + \frac{D_{32}}{2D_{22}^{1/2} l_2} \left( x + l_1 - \frac{1}{\beta_2 + \sigma_{1s(2)}} \right) - \frac{D_{12} (\beta_2 + \sigma_{1s(2)}) e^{\beta_2 (x+l_1)}}{2D_{22}^{1/2} (2\beta_2 + \sigma_{1s(2)})} \right\} e^{(\beta_2 + \sigma_{1s(2)}) (x+l_1)}, \\
S_{2b}(x) &= \frac{R_1}{2\sigma_b} \left[ \left( \frac{a_b + b_b}{2} \right) \left( \frac{l_1 + l_2 + l_b}{l_b} \right) + \delta_{2b} F_3 E_{0b} \right] e^{2\sigma_b (x+l_1+l_2)} + \frac{E_b}{(\sigma_b + \beta_b)} \left[ \left( \frac{a_b + b_b}{2} \right) \left( \frac{l_1 + l_2 + l_b}{l_b} \right) + \delta_{2b} F_3 E_{0b} \right] e^{(\sigma_b + \beta_b) (x+l_1+l_2)} \\
&\quad - \frac{R_1 \delta_{2b} F_3}{(2\sigma_b + \beta_b)} e^{(2\sigma_b + \beta_b) (x+l_1+l_2)} + \frac{E_b \delta_{2b} F_3}{(\sigma_b + 2\beta_b)} e^{(2\beta_b + \sigma_b) (x+l_1+l_2)}, \\
\Omega_{1s(1)}(x) &= \frac{B_1 [\Theta_0 + (\gamma_1 + \gamma_2 + E_1)]}{\sigma_{1s(1)} (\beta_1 - \sigma_{1s(1)})} e^{(\beta_1 - \sigma_{1s(1)}) x}, \quad \Omega_{2s(1)}(x) = \frac{B_1 [\Theta_0 + (\gamma_1 + \gamma_2 + E_1)]}{\sigma_{1s(1)} (\beta_1 + \sigma_{1s(1)})} e^{(\beta_1 + \sigma_{1s(1)}) x}, \\
\Omega_{1s(2)}(x) &= \frac{B_2 [W_{01} + (G_1 + G_2 + E_2)]}{\sigma_{1s(2)} (\beta_2 - \sigma_{1s(2)})} e^{(\beta_2 - \sigma_{1s(2)}) (x+l_1)}, \quad \Omega_{2s(2)}(x) = \frac{B_2 [W_{01} + (G_1 + G_2 + E_2)]}{\sigma_{1s(2)} (\beta_2 + \sigma_{1s(2)})} e^{(\beta_2 + \sigma_{1s(2)}) (x+l_1)}, \\
M_{1b}(x) &= \frac{B_3 [W_{02} + (R_1 + E_b)]}{\sigma_b (\beta_2 - \sigma_b)} e^{(\beta_b - \sigma_b) (x+l_1+l_2)}, \quad M_{2b}(x) = \frac{B_3 [W_{02} + (R_1 + E_b)]}{\sigma_b (\beta_2 + \sigma_b)} e^{(\beta_b + \sigma_b) (x+l_1+l_2)}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
E_{01} &= \exp(-l_1 \beta_1), \quad E_{02} = \exp(-l_2 \beta_2), \quad E_{0b} = \exp(-l_b \beta_b), \quad b_g = \delta_{2g} \Theta_0 (2 + \delta_{2g} \Theta_0), \\
b_{sb} &= \delta_{2s} W_{01} (2 + \delta_{2s(1)} W_{01}), \quad b_{sc} = 2\delta_{2s(2)} (W_{01} + 0.5\delta_{2s(2)} W_{01}^2), \quad b_{ss} = 2\delta_{2s(2)} (W_{02} + 0.5\delta_{2s(2)} W_{02}^2), \\
a_1 &= 1 - 2\delta_{2s(2)} F_2 (E_{02} - \frac{l_1 + l_2}{l_1}) \frac{l_1}{l_2}, \quad a_2 = 2\delta_{2s(2)} F_2 (1 - E_{02}) \frac{l_1}{l_2}, \quad D_1 = \delta_{2s} A I_0 / \beta \kappa_s^{(0)}, \\
D_2 &= 1 + b_s + D_1, \quad D_3 = b_s - b_{sb} + D_1 (1 - E_{01}), \quad D_{12} = 2\delta_{2s(2)} F_2, \quad b_s = \delta_{2s(1)} \Theta_0 (2 + \delta_{2s(1)} \Theta_0), \quad D_{22} = a_1 - \frac{l_1}{l_2} a_2 + b_{sc}, \\
D_{32} &= a_2 + b_{sc} - b_{ss}, \quad b_b = 2\delta_{2b} (W_{02} + 0.5\delta_{2b} W_{02}^2), \quad a_b = 2\delta_{2b} F_3 (1 - E_{0b}), \quad D_b = 1 + a_b + b_b, \\
F_2 &= \frac{I_0 A_{s(2)}^{(0)} (1 + W_{01} \delta_{3s(2)}) (1 - R_{s(1)})^{(0)} E_{01}}{2k_{s(2)}^{(0)} \beta_2}, \quad F_3 = \frac{I_0 A_b^{(0)} (1 + W_{02} \delta_{3b}) (1 - R_{s(1)}) (1 - R_{s(2)})^{(0)} E_{01} E_{02}}{2k_b^{(0)} \beta_b}.
\end{aligned}$$

Граничные условия непрерывности температур и потоков тепла на границах между слоями и торцах позволяет получить следующую систему алгебраических уравнений для нахождения комплексных амплитуд  $\Theta_{1Ng}$ ,  $W_{1Nb}$ ,  $U_{N1}$ ,  $V_{N1}$ ,  $U_{N2}$  и  $V_{N2}$  :

$$\Theta_{1Ng} + R_{1g}[S_{1g}(0) - S_{2g}(0)] = U_{N1} + V_{N1} + R_{S(1)}[S_{1S(1)}(0) - S_{2S(1)}(0)] + \Omega_{2S(1)}(0) - \Omega_{1S(1)}(0) - g_{0S(1)}(0)\Phi_{LS(1)}(\omega, 0) + g_{0g}(0)\Phi_{Lg}(\omega, 0), \quad (3.4.14)$$

$$U_{N1}e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + V_{N1}e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + [R_{S(1)}S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1)]e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} - [R_{S(1)}S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1)]e^{\sigma_{1S(1)}l_1} = U_{N2} + V_{N2} + [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1)] - [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1)] - g_{0S(2)}(-l_1)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) + g_{0S(1)}(-l_1)\Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1), \quad (3.4.15)$$

$$U_{N2}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + V_{N2}e^{\sigma_{1S(2)}l_2} + [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - g_{0S(2)}(-l_1 - l_2)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) - [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{\sigma_{1S(2)}l_2} + g_{0b}(-l_1 - l_2)\Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2) = W_{1Nb} + [R_{1b}S_{1b}(-l_1 - l_2) - M_{1b}(-l_1 - l_2)] - [R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2) - M_{2b}(-l_1 - l_2)] \quad (3.4.16)$$

$$g\{R_{1g}[S_{1g}(0) + S_{2g}(0)] - \Theta_{1Ng}\} = U_{N1} - V_{N1} + R_{S(1)}[S_{1S(1)}(0) + S_{2S(1)}(0)] - \Omega_{1S(1)}(0) - \Omega_{2S(1)}(0), \quad (3.4.17)$$

$$s\{U_{N1}e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} - V_{N1}e^{\sigma_{1S(1)}l_1} + [R_{S(1)}S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1)]e^{-\sigma_{1S(1)}l_1} + [R_{S(1)}S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1)]e^{\sigma_{1S(1)}l_1}\} = U_{N2} - V_{N2} + [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1)] + [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1)] \quad (3.4.18)$$

$$U_{N2}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - V_{N2}e^{\sigma_{1S(2)}l_2} + [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{\sigma_{1S(2)}l_2} = b\{W_{1Nb} + [R_{1b}S_{1b}(-l_1 - l_2) - M_{1b}(-l_1 - l_2)] - [R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2) - M_{2b}(-l_1 - l_2)]\} \quad (3.4.19)$$

Решая совместно уравнения (3.4.14) и (3.4.19), будем иметь

$$2V_{N1} = \Theta_{1Ng}(1 + g) + R_{1g}[S_{1g}(0)(1 - g) - S_{2g}(0)(1 + g)] + 2[R_{S(1)}S_{2S(1)}(0) - \Omega_{2S(1)}(0)] + [g_{0S(1)}(0)\Phi_{LS(1)}(\omega, 0) - g_{0g}(0)\Phi_{Lg}(\omega, 0)] \quad (3.4.20)$$

$$2U_{N1} = \Theta_{1Ng}(1 - g) + R_{1g}[S_{1g}(0)(1 + g) - S_{2g}(0)(1 - g)] - 2[R_{S(1)}S_{1S(1)}(0) - \Omega_{1S(1)}(0)] + [g_{0S(1)}(0)\Phi_{LS(1)}(\omega, 0) - g_{0g}(0)\Phi_{Lg}(\omega, 0)] \quad (3.4.21)$$

$$2U_{N2} = U_{N1}e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}(1 + s) + V_{N1}e^{\sigma_{1S(1)}l_1}(1 - s) + [R_{S(1)}S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1)]e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}(1 + s) - [R_{S(1)}S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1)]e^{\sigma_{1S(1)}l_1}(1 - s) - 2[R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1)] + g_{0S(2)}(-l_1)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) - g_{0S(1)}(-l_1)\Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1) \quad (3.4.22)$$

$$2V_{N2} = U_{N1}e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}(1 - s) + V_{N1}e^{\sigma_{1S(1)}l_1}(1 + s) + [R_{S(1)}S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1)]e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}(1 - s) - [R_{S(1)}S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1)]e^{\sigma_{1S(1)}l_1}(1 + s) + 2[R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1)] + g_{0S(2)}(-l_1)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) - g_{0S(1)}(-l_1)\Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1) \quad (3.4.23)$$

$$W_{1Nb} = U_{N2}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} + V_{N2}e^{\sigma_{1S(2)}l_2} + [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{-\sigma_{1S(2)}l_2} - [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2)]e^{\sigma_{1S(2)}l_2} - g_{0S(2)}(-l_1 - l_2)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) + g_{0b}(-l_1 - l_2)\Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2) - [R_{1b}S_{1b}(-l_1 - l_2) - M_{1b}(-l_1 - l_2)] - [R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2) - M_{2b}(-l_1 - l_2)] \quad (3.4.24)$$

Подставляя выражения (3.4.20) в (3.4.24), получим уравнение

$$\begin{aligned}
& U_{N_2} e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) - V_{N_2} e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) + [R_{S(2)} S_{1S(2)} (-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)} (-l_1 - l_2)] e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) + \\
& + [R_{S(2)} S_{2S(2)} (-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)} (-l_1 - l_2)] e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) - 2b [R_{1b} S_{2b} (-l_1 - l_2) - M_{2b} (-l_1 - l_2)] \quad (3.4.25) \\
& + b [g_{0S(2)} (-l_1 - l_2) \Phi_{LS(2)} (\omega, -l_1 - l_2) - g_{0b} (-l_1 - l_2) \Phi_{Lb} (\omega, -l_1 - l_2)] = 0
\end{aligned}$$

Принимая во внимание выражения для  $U_{N_1}$  и  $V_{N_1}$ , из (3.4.22), (3.4.23) и (3.4.25) получим алгебраическое уравнение для  $\Theta_{1Ng}$ , решение которого имеет вид

$$\begin{aligned}
\Theta_{1Ng} = & R_{1g} [S_{2g}(0) - S_{1g}(0)] - [g_{0S(1)}(0) \Phi_{LS(1)}(\omega, 0) - g_{0g}(0) \Phi_{Lg}(\omega, 0)] + \frac{2\Xi_1}{\Xi} \{ [R_{S(1)} S_{1S(1)}(0) - \Omega_{1S(1)}(0)] - \\
& - [R_{S(1)} S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1)] \} - \frac{2\Xi_2}{\Xi} \{ [R_{S(1)} S_{2S(1)}(0) - \Omega_{2S(1)}(0)] - [R_{S(1)} S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1)] \} + \\
& - \frac{2\Xi_3}{\Xi} [g_{0S(2)}(-l_1) \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) - g_{0S(1)}(-l_1) \Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1)] + \frac{4\Xi_4}{\Xi} \{ [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1)] - \\
& - [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2)] \} + \frac{4\Xi_5}{\Xi} \{ [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1)] - [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2)] \} + \\
& + 8b \Xi^{-1} [R_{1b} S_{2b}(-l_1 - l_2) - M_{2b}(-l_1 - l_2)] - 4b [g_{0S(2)}(-l_1 - l_2) \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) - g_{0b}(-l_1 - l_2) \Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2)] \Xi^{-1}
\end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
\Xi &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) [e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} (1+s) + e^{\sigma_{1S(1)l_1}} (1-s)] - e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) [e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} (1-s) + e^{\sigma_{1S(1)l_1}} (1+s)], \\
\Xi_1 &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} (1+s) - e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} (1-s), \quad \Xi_3 = e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) - e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) \\
\Xi_2 &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b) e^{\sigma_{1S(1)l_1}} (1-s) - e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b) e^{\sigma_{1S(1)l_1}} (1+s), \quad \Xi_5 = e^{\sigma_{1S(2)l_2}} (1+b), \quad \Xi_4 = e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} (1-b).
\end{aligned}$$

Выражение (3.4.26) позволяет написать выражение для акустического колебания температуры в газовом слое при произвольных значениях  $\sigma_{1S(1)l_1}$  и  $\sigma_{1S(2)l_2}$  вида

$$\Phi_{1Ng}(\omega, x) = [\Theta_{1N} - R_{1g} S_{2g}(x) - \Theta_L g_{0g}(x)] \exp(-\sigma_g x) + R_{1g} S_{1g}(x) \exp(\sigma_g x). \quad (3.4.27)$$

Детектируемый ФА-сигнал определяется интегрированием величины

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi l_g}{T_{00} l_g} \bar{\Phi}_{1Ng}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00} l_g} \int_0^{2\pi l_g} \Phi_{1Ng}(\omega, x) dx. \quad (3.4.28)$$

Таким образом, получено решение сформулированной задачи в общем виде, что позволит подробно рассматривать простые случаи, реализующиеся в эксперименте. Допустим, что оба слоя образца являются прозрачными, а подложка поглощающей, и тогда  $\beta_{1S(1)} = \beta_{1S(2)} = 0$ . В этом случае источником генерации основной гармоники тепловых колебаний становится поверхность подложки, контактирующая с поверхностью второго слоя образца. Между

тем, в этом случае генерация линейного и нелинейного ФА-сигналов возможна лишь для термически тонких образцов. Предположим, что эти условия имеют место, т.е. справедливы оценки  $l_1 \ll \mu_{s1}$ ,  $l_2 \ll \mu_{s2}$ ,  $\exp(\pm\sigma_{1S(1)}l_1) \approx 1$ ,  $\exp(\pm\sigma_{1S(2)}l_2) \approx 1$ . Тогда имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Xi &\approx -4b, \Xi_1 = 2(s-b), \Xi_2 = 2(s+b), \Xi_3 = 0, \Xi_4 = (1-b), \Xi_5 = (1+b), E_1 = E_2 = 0, \Theta_1 = \Theta_2 = 0, \\ \Theta_3 &= 0,5E_b(r_b - 1), N_1 = 2(r_1 + s), N_2 = 2(r_1 - s), N_3 = 2(r_1 - sb), N_4 = 2(r_2 - b), \\ N_5 &= 2sb(r_1 + 1), N_6 = 2sb(r_1 - 1), S_{2g}(0) \approx 0, g_{0S(2)}(-l_1) = \delta_{2S(2)}W_{01}, g_{0S(1)}(-l_1) = \delta_{2S(1)}W_{01}, \\ \Omega_{1S(1)}(x) &= \Omega_{2S(1)}(x) = 0, \Omega_{2S(1)}(x) = \Omega_{2S(2)}(x) = 0, g_{0S(1)}(0) = \Theta_0\delta_{2s}, g_{0g}(0) = \Theta_0\delta_{2g}, g_{0S(2)}(-l_1 - l_2) = \delta_{2S(2)}W_{02}, \\ g_{0b}(-l_1 - l_2) &= W_{02}\delta_{2b}S_{1g}(0) \approx -(\Theta_0\Theta_L\delta_{2g})(2\sigma_g)^{-1}, S_{1S(1)}(0) \approx -0.5\Theta_0V_L\delta_{2S(1)}\sigma_{1S(1)}^{-1}, S_{2S(1)}(0) \approx 0.5\Theta_0U_L\delta_{2S(1)}\sigma_{1S(1)}^{-1}, \\ S_{1S(1)}(-l_1) &\approx -0.5\Theta_0V_L\delta_{2S(1)}\sigma_{1S(1)}^{-1}, S_{2S(1)}(-l_1) \approx 0.5\Theta_0U_L\delta_{2S(1)}\sigma_{1S(1)}^{-1}, S_{1S(2)}(-l_1) \approx -0.5W_{01}V_L\delta_{2S(2)}\sigma_{1S(2)}^{-1}, \\ S_{2S(2)}(-l_2) &\approx 0.5W_{01}U_L\delta_{2S(2)}\sigma_{1S(2)}^{-1}, S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) \approx 0.5U_2W_{01}\sigma_{1S(2)}^{-1}\delta_{2S(2)}, S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) \approx -0.5V_2W_{01}\sigma_{1S(2)}^{-1}\delta_{2S(2)}, \\ \Phi_{LS(1)}(-l_1) &= \Phi_{LS(2)}(-l_1) = \Phi_{LS(2)}(-l_1 - l_2) = \Phi_b(-l_1 - l_2) = \Theta_L, \Phi_{LS(1)}(0) = \Phi_{Lg}(0) = \Theta_L, g_{0b}(-l_1 - l_2) = \delta_{2(b)}W_{02}, \\ \delta_{2S(2)}W_{02}\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) - \delta_{2b}W_{02}\Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2) &= E_bW_{02}(r_b - 1)(\delta_{2s(2)} - \delta_{2b}), \Theta_L = E_b(r_b - 1), W_L = \Theta_L + E_b, \\ U_L &= 0.5E_b(r_b - 1), V_L = 0.5E_b(r_b - 1), R_1 = (r_b - 2)E_b, G_1 = G_2 = 0.5E_b(r_b - 1), \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5E_b(r_b - 1), \\ S_{2b}(-l_1 - l_2) &= \frac{R_1}{2\sigma_b} \left[ \left( \frac{a_b + b_b}{2} \right) + \delta_{2b}F_3E_{0b} \right] + \frac{E_b}{(\sigma_b + \beta_b)} \left[ \left( \frac{a_b + b_b}{2} \right) + \delta_{2b}F_3E_{0b} \right] - \frac{R_1\delta_{2b}F_3}{(2\sigma_b + \beta_b)} + \frac{E_b\delta_{2b}F_3}{(\sigma_b + 2\beta_b)}, \\ M_{2b}(-l_1 - l_2) &= \frac{B_3[W_{02} + (R_1 + E_b)]}{\sigma_b(\beta_b + \sigma_b)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти равенства и выполняя необходимые вычисления, будем иметь

$$\Theta_{1Ng} = \Theta_L \{ \Theta_0 0.25(\delta_g - \delta_{2g}) - \Theta_0(\delta_{2s} - \delta_{2g}) - 2[R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2) - M_{2b}(-l_1 - l_2)] + W_{02}(\delta_{2s} - \delta_b) \} \quad (3.4.29)$$

Выполнив интегрирование выражения (3.4.28), с учетом равенства (3.4.29) для искомой величины получим

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00}l_g\sigma_g} \left[ \Theta_{1Ng} + R_{1g}\tilde{S}_{1g}(0) - g_{0g}(0)\Theta_L \right].$$

Тогда, принимая во внимание равенство  $R_{1g}S_{1g}(0) - g_{0g}(0)\Theta_L = -0.25\Theta_L(3\delta_{2g} + \delta_g)\Theta_0$ , будем иметь

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00}l_g\sigma_g} \Theta_L \{ 2[M_{2b}(-l_1 - l_2) - R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2)] - \Theta_0\delta_{2s} + W_{02}(\delta_{2s} - \delta_b) \}. \quad (3.4.30)$$

Выражение (3.4.30) является решением сформулированной задачи. Ввиду сложности этого выражения будем рассматривать те случаи, которые имеют место в эксперименте. Очевидно, что для рассматриваемого случая подложка характеризуется длинами пробега фотона  $\mu_{\beta b} = \beta_b^{-1}$  и длиной тепловой диффузии  $\mu_b$ . Ниже рассмотрим два существенно различных случая.

1. Пусть длина пробега фотона в подложке гораздо больше длины тепловой диффузии, тогда

$$|r_b| \approx \frac{\mu_b}{\mu_{b\beta}} \ll 1, \quad S_{2b}(-l_1 - l_2) = 0, \quad \Theta_L = -E_b, \quad M_{2b}(-l_1 - l_2) = E_b \delta_{3b} W_{02}, \quad E_b = \frac{\eta_b \beta_b}{2\kappa_b \sigma_b^2},$$

$$\Theta_{1Ng} = \Theta_L \{ \Theta_0 0.25(\delta_g - \delta_{2s}) - \Theta_0(\delta_{2s} - \delta_{2g}) + W_{02}(\delta_{2s(2)} - \delta_{2b}) \}$$

и выполняя необходимые вычисления в (3.4.30), получим следующее выражение для описания основной гармоники нелинейного ФА-сигнала:

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{2T_{00} l_g \sigma_g} \frac{\eta_b \beta_b}{\kappa_b \sigma_b^2} [\Theta_0(\delta_{2s(1)} - 2\delta_{2g}) + W_{02}(\delta_{2s(2)} - \delta_b)]. \quad (3.4.31)$$

Принимая во внимание равенства  $\sigma_g = (1+i)(\omega/2\chi_g)^{1/2}$ ,  $\sigma_b = (1+i)(\omega/2\chi_b)^{1/2}$ ,

из (3.4.31) следует, что  $\delta p_{1N}(\omega) \sim \omega^{-3/2}$  и  $\sim \beta_b$ .

2. В обратном случае, то есть когда  $|r_b| \gg 1$ , имеют место равенства

$$S_{2b}(-l_1 - l_2) = \frac{\Theta_L}{2\sigma_b} \delta_{2b} W_{02}, \quad \Theta_L = 0.5E_b r_b, \quad E_b = -\frac{\eta_b}{2\kappa_b \beta_b}, \quad M_{2b}(-l_1 - l_2) = -2\delta_{3b} \Theta_L W_{02}.$$

Принимая во внимание эти равенства и пренебрегая слагаемыми  $\sim \delta^2$ , из (3.4.28) будем иметь

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{2T_{00} l_g \sigma_g} \frac{\eta_b}{\kappa_b \sigma_b} [\Theta_0 \delta_{2g} - W_{02}(\delta_{2s(2)} - \delta_b - 4\delta_{3b})]. \quad (3.4.32)$$

Из (3.4.32) следует, что для этого случая частотная зависимость амплитуды нелинейного ФА-сигнала на основной гармонике подчиняется закону  $\delta p_{1N}(\omega) \sim \omega^{-1}$ .

Таким образом, в рамках этого раздела работы теоретически найдено общее выражение для вклада поглощающей подложки на параметры основной гармоники нелинейного ФА-сигнала двухслойных образцов. Более кон-

кретно и достаточно подробно изучен случай прозрачных и термически тонких слоев образца. Очевидно, что обработка результатов эксперимента согласно выражениям (3.4.31) и (3.4.32) позволит определить величины  $\beta_b$ , а также термические коэффициенты теплофизических величин обоих слоев образца и подложки.

### 3.5. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов

Будем исходить из системы взаимосвязанных уравнений для второй гармоники колебания температуры газового слоя, двухслойного образца и поглощающей подложки [133]:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Ng}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ng}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})[\Phi_{Lg}^2(t,x)] \quad (3.5.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2NS(1)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2NS(1)}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2S(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})\Phi_{LS(1)}^2(x,t) - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 e^{\beta_1 x}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \delta_{3(1)} \Phi_{LS(1)}(0,t) e^{i\omega t} \quad (3.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2NS(2)}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2NS(2)}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2S(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})\Phi_{LS(2)}^2(x,t) - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1-R_{S(1)}) \beta_2 e^{\beta_2 l_1} e^{\beta_2 (x+l_1)}}{2k_{S(2)}^{(0)}} \times \quad (3.5.3)$$

$$\times e^{i\omega t} \delta_{3(2)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, t)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Nb}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Nb}}{\partial t} - 0.5(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})[\Phi_{Lb}^2(t,x)] - \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} e^{\beta_b (x+l_1+l_2)} e^{i\omega t}}{2\kappa_b^{(0)}} \times \quad (3.5.4)$$

$$\times \delta_{3b} \Phi_{Lb}(-l_1 - l_2, t)$$

где  $I_1 = I_0(1-R_{s1})\exp(-\beta_1 l_1)$ ,  $I_2 = I_0(1-R_{s2})\exp(-\beta_2 l_2)$ , а  $A_i$ ,  $R_i$ ,  $\beta_i$  -поглощательная способность, коэффициенты отражения и поглощения соответствующих слоев. Выражения для  $\Phi_{Lg}(x,t)$ ,  $\Phi_{LS(1)}(x,t)$ ,  $\Phi_{LS(2)}(x,t)$  и  $\Phi_{Lb}(x,t)$  получены в [129,130] и имеют следующий вид:

$$\Phi_{Lg}(x,\omega) = \Theta_L e^{-\sigma_{1g} x}, \Theta_L = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3, E_1 = \frac{\eta_1 \beta_{1S(1)}}{2\kappa_1(\sigma_{1S(1)}^2 - \beta_{1S(1)}^2)}, \eta_1 = I_0 A_{s(1)},$$

$$\Phi_{LS(1)}(x,\omega) = \gamma_1 e^{\sigma_{1S(1)} x} + \gamma_2 e^{-\sigma_{1S(1)} x} + E_1 e^{\beta_{1S(1)} x}, E_2 = \frac{\eta_2 \beta_{1S(2)}}{2\kappa_2(\sigma_{1S(2)}^2 - \beta_{1S(2)}^2)}, \eta_2 = I_0(1-R_{s(1)}) A_{s(2)} e^{-\beta_{1S(1)} l_1},$$



$$\Phi_{Ls(2)}(x, \omega) = G_1 e^{\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} + G_2 e^{-\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} + E_2 e^{\beta_{1S(2)}(x+l_1)}, \eta_b = I_0(1-R_{s(1)})(1-R_{s(2)})A_{(3)} e^{-\beta_{1S(1)l_1}} e^{-\beta_{1S(2)l_2}},$$

$$\Phi_{Lb}(x, \omega) = R_1 e^{\sigma_b(x+l_1+l_2)} + E_b e^{\beta_b(l_1+l_2+x)}, \quad E_b = \frac{\eta_b \beta_b}{2\kappa_b(\sigma_b^2 - \beta_b^2)}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i$ ,  $\sigma_i = (1+i)a_i$ ,  $a_i = 1/\mu_i$ ,

$\mu_i = (2\chi_i / \omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии,  $\gamma_1 = \Delta_1 / \Delta$ ,  $\gamma_2 = \Delta_2 / \Delta$ ,

$$\Theta_1 = \frac{E_1 \{ N_1(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + N_2(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}} - 2e^{-\beta_{1S(1)l_1}} N_3 \}}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}},$$

$$\Theta_2 = \frac{2sE_2[(r_2+1)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + (r_2-1)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}} - 2e^{-\beta_{1S(2)l_2}}(r_2-b)]}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}},$$

$$\Theta_3 = \frac{2sbE_b(r_b-1)}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}},$$

$$\Delta = -\{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}\},$$

$$\Delta_1 = -E_1 \{ [r_1(s-1)(1-b)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (s+1)(1+b)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} e^{\sigma_{1S(2)l_2}} ] + [(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}} ] \} + E_2 s \{ [(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}] - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)l_2}} \} + 2E_b b s (r_b-1),$$

$$\Delta_2 = E_1 \{ [r_1(s+1)(1-b)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (s-1)(1+b)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} e^{\sigma_{1S(2)l_2}} ] - [(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}} ] \} + E_2 s \{ [(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}] - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)l_2}} \} + 2E_b b s (r_b-1),$$

$$\gamma_1 = \frac{E_1 N_5 - E_2 s [N_4 - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)l_2}}] - 2E_b s (r_b-1)b}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}},$$

$$\gamma_2 = \frac{E_1 N_6 - E_2 s [N_4 - 2(r_2-b)e^{-\beta_{1S(2)l_2}}] - 2E_b s (r_b-1)b}{[(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} - (1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}},$$

$$N_1 = [(r_1+1)(1+s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + (r_1-1)(1-s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}}], \quad N_2 = [(r_1+1)(1-s)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + (r_1-1)(1+s)e^{\sigma_{1S(1)l_1}}],$$

$$N_3 = [(r_1+s)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + (r_1-s)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}], \quad N_4 = [(1+r_2)(1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - (1-r_2)(1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}}],$$

$$N_5 = [r_1(s-1)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + (s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}](1-b)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - [r_1(s+1)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}},$$

$$N_6 = [r_1(s+1)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} - (s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}](b-1)e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + [r_1(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} - (s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}}](1+b)e^{\sigma_{1S(2)l_2}},$$

$$R_1 = G_1 e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + G_2 e^{\sigma_{1S(2)l_2}} + E_2 e^{-\beta_{1S(2)l_2}} - E_b, \quad s = \frac{k_{S(2)}\sigma_{1S(2)}}{k_{S(1)}\sigma_{1S(1)}}, \quad b = \frac{k_b\sigma_b}{k_{S(2)}\sigma_{1S(2)}}, \quad r_1 = \frac{\beta_{1S(1)}}{\sigma_{1S(1)}}, \quad r_2 = \frac{\beta_{1S(2)}}{\sigma_{1S(2)}}, \quad r_b = \frac{\beta_b}{\sigma_b},$$

$$G_1 = \{ \gamma_1(s+1)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + \gamma_2(s-1)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + E_1(s+r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}} - E_2 s(1+r_2) \} (2s)^{-1},$$

$$G_2 = \{ \gamma_1(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + \gamma_2(s+1)e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + E_1(s-r_1)e^{-\beta_{1S(1)l_1}} - E_2 s(1-r_2) \} (2s)^{-1}.$$

Принимая во внимание, что  $\Phi_L(t, x) = \Phi_L(\omega, x) \exp(i\omega t)$ ,  $\Phi_L^2 \approx \Phi_L^2(\omega, x) \exp(i2\omega t)$ ,

положим  $\Phi_{1N_i}(t, x) = \Phi_{1N_i}(\omega, x) \exp(i\omega t)$ ,  $\Psi_{2i}(t, x) = \Psi_{2i}(\omega, x) \exp(i2\omega t)$ . Тогда для функции

$\Psi_{2i}(t, \omega) = \Phi_{2Ni}(\omega, x) + 0,5\delta_{2i}\Phi_{Li}^2(\omega, x)$  из (3.5.1)-(3.5.4) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2\Psi_{2Ng}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2\Psi_{2g} = \frac{(\delta_g - \delta_{2g})}{2}\sigma_{2g}^2\Phi_{Lg}^2(\omega, x), \quad (3.5.5)$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2Ns(1)}}{\partial x^2} - \sigma_{2S(1)}^2\Psi_{2S(1)} = \frac{\sigma_{2S(1)}^2(\delta_{1S(1)} - \delta_{2S(1)})\Phi_{LS(1)}^2(x, \omega)}{2} - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 \delta_{3S(1)} e^{\beta_1 x} \Phi_{LS(1)}(0, \omega)}{2k_{S(1)}^{(0)}}, \quad (3.5.6)$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2Ns(2)}}{\partial x^2} - \sigma_{2S(2)}^2\Psi_{2S(2)} = \frac{\sigma_{2S(2)}^2(\delta_{1S(2)} - \delta_{2S(2)})\Phi_{LS(2)}^2(x, \omega)}{2} - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}) \delta_{3S(2)} \beta_2 e^{-\beta_1 l_1}}{2k_{S(2)}^{(0)}} e^{\beta_2(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega). \quad (3.5.7)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2Nb}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2\Psi_{2b} = \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2}\sigma_{2b}^2\Phi_{Lb}^2(\omega, x) - \frac{\beta_b I_2 A_b^{(0)} \delta_{3b}}{2\kappa_b^{(0)}} e^{\beta_b(x+l_1+l_2)} \Phi_{Lb}(-l_1, -l_2, \omega). \quad (3.5.8)$$

Граничные условия для  $\Phi_{2Ni}(x, t)$ , и  $\Psi_{2i}(\omega, x) = \Phi_{2Ni}(\omega, x) + 0,5\delta_{2i}\Phi_{Li}^2(\omega, x)$  имеют вид

$$\Phi_{2Nb}(t, -l_1 - l_2 - l_b) = \Phi_{2Ng}(t, l_g) = 0, \quad \Phi_{2Ns(1)}(t, 0) = \Phi_{2Ng}(t, 0), \Phi_{2Nb}(t, -l_1 - l_2) = \Phi_{2Ns(2)}(t, -l_1 - l_2),$$

$$\left\{ \frac{\partial\Psi_{2Ng}(t, x)}{\partial x} \right\}_{x=0} = \frac{\kappa_{s(1)}^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \left. \frac{\partial\Psi_{2Ns}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial\Psi_{2Nb}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1-l_2} = \frac{\kappa_{s(2)}^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \left. \frac{\partial\Psi_{2Ns}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1-l_2},$$

$$\left. \frac{\partial\Psi_{2Ns(1)}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1} = \frac{\kappa_{s(2)}^{(0)}}{\kappa_{s(1)}^{(0)}} \left. \frac{\partial\Psi_{2Ns(2)}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l_1}, \quad \Phi_{2Ns(1)}(t, -l_1) = \Phi_{2Ns(2)}(t, -l_2).$$

Решение уравнений (3.5.5)-(3.5.8) можно представить в виде

$$\Psi_{2Ng}(\omega, x) = \Theta_{2Ng} e^{-\sigma_{2g}x} + e^{\sigma_{2g}x} W_{1g}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2g}x} W_{2g}(\omega, x), \quad (3.5.9)$$

$$\Psi_{2Ns(1)} = \alpha_{1N(1)} e^{\sigma_{2S(1)}x} + \alpha_{2N(1)} e^{-\sigma_{2S(1)}x} + [W_{1S(1)}(\omega, x) - Q_{1S(1)}(\omega, x)] e^{\sigma_{2S(1)}x} - [W_{2S(1)}(\omega, x) - Q_{2S(1)}(\omega, x)] e^{-\sigma_{2S(1)}x}, \quad (3.5.10)$$

$$\Psi_{2Ns(2)} = \alpha_{1N(2)} e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_1)} + \alpha_{2N(2)} e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_1)} + [W_{1S(2)}(\omega, x) - Q_{1S(2)}(\omega, x)] e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_1)} - [W_{2S(2)}(\omega, x) - Q_{2S(2)}(\omega, x)] e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_1)}, \quad (3.5.11)$$

$$\Psi_{2Nb}(\omega, x) = W_{2Nb} e^{+\sigma_{2b}(x+l_1+l_2)} + [W_{1b}(\omega, x) - M_{3b}(\omega, x)] e^{\sigma_{2b}(x+l_1+l_2)} - [W_{2b}(\omega, x) - M_{4b}(\omega, x)] e^{-\sigma_{2b}(x+l_1+l_2)}. \quad (3.5.12)$$

Здесь использованы обозначения

$$W_{1g}(\omega, x) = R_{2g} \int e^{-\sigma_{2g}x} \Phi_{Lg}^2(\omega, x) dx, \quad W_{2g}(\omega, x) = R_{2g} \int e^{\sigma_{2g}x} \Phi_{Lg}^2(\omega, x) dx, \quad R_{2i} = 0,25(\delta_i - \delta_{2i})\sigma_{2i},$$

$$W_{1b}(\omega, x) = R_{2b} \int e^{-\sigma_{2b}(x+l_1+l_2)} \Phi_{Lb}^2(\omega, x) dx, \quad W_{2b}(\omega, x) = R_{2b} \int e^{\sigma_{2b}(x+l_1+l_2)} \Phi_{Lb}^2(\omega, x) dx,$$

$$W_{1S(1)}(\omega, x) = R_{2S(1)} \int e^{-\sigma_{2S(1)}x} \Phi_{LS(1)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{2S(2)}(\omega, x) = R_{2S(2)} \int e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}^2(x, \omega) dx$$

$$W_{1S(2)}(\omega, x) = R_{1S(2)} \int e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{2S(1)}(\omega, x) = R_{2S(1)} \int e^{\sigma_{2S(1)}x} \Phi_{LS(1)}^2(x, \omega) dx$$

$$Q_{1S(1)}(\omega, x) = \frac{B_1}{2\sigma_{2S(1)}} \int e^{(\beta_1 - \sigma_{2S(1)})x} \Phi_{LS(1)}(0, \omega) dx, \quad Q_{2S(1)}(\omega, x) = \frac{B_1}{2\sigma_{2S(1)}} \int e^{(\beta_1 + \sigma_{2S(1)})x} \Phi_{LS(1)}(0, \omega) dx$$

$$Q_{1S(2)}(\omega, x) = \frac{B_2}{2\sigma_{2S(2)}} \int e^{(\beta_2 - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega) dx, \quad Q_{2S(2)}(\omega, x) = \frac{B_2}{2\sigma_{2S(2)}} \int e^{(\beta_2 + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)} \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega) dx,$$

$$M_{3b}(x, \omega) = 0,5B_b\sigma_{2b}^{-1} \int \Phi_{Lb}(\omega, -l_1, -l_2) e^{(\beta_b - \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} dx, \quad M_{4b}(x, \omega) = 0,5B_b\sigma_{2b}^{-1} \int \Phi_{Lb}(\omega, -l_1, -l_2) e^{(\beta_b + \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} dx$$

$$B_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 \delta_{3S(1)}}{2k_{S(1)}^{(0)}}, \quad B_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} \delta_{3S(2)} \beta_2 e^{-\beta_1 l_{S(1)}}}{2k_{S(2)}^{(0)}}, \quad B_b = 0,5A_b^{(0)} \beta_b I_2 \delta_{3b} (k_b^{(0)})^{-1},$$

Используя вид функции  $\Phi_{Li}(\omega, x)$ , вычислим вышеприведённые интегралы и будем иметь

$$W_{1g}(\omega, x) = -\frac{R_{2g} \Theta_L^2}{\sigma_{2g} + 2\sigma_{1g}} e^{-(\sigma_{2g} + 2\sigma_{1g})x}, \quad W_{2g}(\omega, x) = \frac{R_{2g} \Theta_L^2}{\sigma_{2g} - 2\sigma_{1g}} e^{(\sigma_{2g} - 2\sigma_{1g})x},$$

$$W_{1b}(\omega, x) = R_{2b} \left[ \frac{R_1^2}{2\sigma_b - \sigma_{2b}} e^{(2\sigma_b - \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} + \frac{2R_1 E_b e^{(\beta_b + \sigma_b - \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)}}{\beta_b + \sigma_b - \sigma_{2b}} + \frac{E_b^2}{2\beta_b - \sigma_{2b}} e^{(2\beta_b - \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} \right],$$

$$W_{2b}(\omega, x) = R_{2b} \left[ \frac{R_1^2}{2\sigma_b + \sigma_{2b}} e^{(2\sigma_b + \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} + \frac{2R_1 E_b e^{(\beta_b + \sigma_b + \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)}}{\beta_b + \sigma_b + \sigma_{2b}} + \frac{E_b^2}{2\beta_b + \sigma_{2b}} e^{(2\beta_b + \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)} \right],$$

$$W_{1S(1)}(\omega, x) = R_{2S(1)} \left[ \frac{\gamma_1^2 e^{(2\sigma_{1S(1)} - \sigma_{2S(1)})x}}{2\sigma_{1S(1)} - \sigma_{2S(1)}} - \frac{\gamma_2^2 e^{-(2\sigma_{1S(1)} + \sigma_{2S(1)})x}}{2\sigma_{1S(1)} + \sigma_{2S(1)}} + \frac{E_1^2 e^{(2\beta_1 - \sigma_{2S(1)})x}}{2\beta_1 - \sigma_{2S(1)}} - \frac{2e^{-\sigma_{2S(1)}x} \gamma_1 \gamma_2}{\sigma_{2S(1)}} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma_1 E_1 e^{(\beta_1 - \sigma_{2S(1)} + \sigma_{1S(1)})x}}{\beta_1 - \sigma_{2S(1)} + \sigma_{1S(1)}} + \frac{2\gamma_2 E_1 e^{(\beta_1 - \sigma_{2S(1)} - \sigma_{1S(1)})x}}{\beta_1 - \sigma_{2S(1)} - \sigma_{1S(1)}} \right],$$

$$W_{2S(1)}(\omega, x) = R_{2S(1)} \left[ \frac{\gamma_1^2 e^{(2\sigma_{1S(1)} + \sigma_{2S(1)})x}}{2\sigma_{1S(1)} + \sigma_{2S(1)}} - \frac{\gamma_2^2 e^{-(2\sigma_{1S(1)} - \sigma_{2S(1)})x}}{2\sigma_{1S(1)} - \sigma_{2S(1)}} + \frac{E_1^2 e^{(2\beta_1 + \sigma_{2S(1)})x}}{2\beta_1 + \sigma_{2S(1)}} + \frac{2e^{\sigma_{2S(1)}x} \gamma_1 \gamma_2}{\sigma_{2S(1)}} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma_1 E_1 e^{(\beta_1 + \sigma_{2S(1)} + \sigma_{1S(1)})x}}{\beta_1 + \sigma_{2S(1)} + \sigma_{1S(1)}} + \frac{2\gamma_2 E_1 e^{(\beta_1 + \sigma_{2S(1)} - \sigma_{1S(1)})x}}{\beta_1 + \sigma_{2S(1)} - \sigma_{1S(1)}} \right],$$

$$\begin{aligned}
W_{1S(2)}(\omega, x) &= R_{2S(2)} \left[ \frac{G_1^2 e^{(2\sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)}} - \frac{G_2^2 e^{-(2\sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)}} + \frac{E_2^2 e^{(2\beta_2 - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\beta_2 - \sigma_{2S(2)}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2G_1 G_2 e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_1)}}{\sigma_{2S(2)}} + \frac{2G_1 E_2 e^{(\beta_2 + \sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{\beta_2 + \sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)}} + \frac{2G_2 E_2 e^{(\beta_2 - \sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{\beta_2 - \sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)}} \right], \\
W_{2S(2)}(\omega, x) &= R_{2S(2)} \left[ \frac{G_1^2 e^{(2\sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)}} - \frac{G_2^2 e^{-(2\sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\sigma_{1S(2)} - \sigma_{2S(2)}} + \frac{E_2^2 e^{(2\beta_2 + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{2\beta_2 + \sigma_{2S(2)}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2G_1 G_2 e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_1)}}{\sigma_{2S(2)}} + \frac{2G_1 E_2 e^{(\beta_2 + \sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{\beta_2 + \sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)}} + \frac{2G_2 E_2 e^{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}}{\beta_2 - \sigma_{1S(2)} + \sigma_{2S(2)}} \right], \\
Q_{1S(1)}(\omega, x) &= \frac{B_1[\gamma_1 + \gamma_2 + E_1]}{2\sigma_{2S(1)}(\beta_1 - \sigma_{2S(1)})} e^{(\beta_1 - \sigma_{2S(1)})x}, \quad Q_{1S(2)}(\omega, x) = \frac{B_2 \Phi_{LS(2)}(-l_{S(1)}, \omega)}{2\sigma_{2S(2)}(\beta_2 - \sigma_{2S(2)})} e^{(\beta_2 - \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}, \\
Q_{2S(1)}(\omega, x) &= \frac{B_1[\gamma_1 + \gamma_2 + E_1]}{2\sigma_{2S(1)}(\beta_1 + \sigma_{2S(1)})} e^{(\beta_1 + \sigma_{2S(1)})x}, \quad Q_{2S(2)}(\omega, x) = \frac{B_2 \Phi_{LS(2)}(-l_{S(1)}, \omega)}{2\sigma_{2S(2)}(\beta_2 + \sigma_{2S(2)})} e^{(\beta_2 + \sigma_{2S(2)})(x+l_1)}, \\
M_{3b}(x, \omega) &= \frac{0.5B_b[R_1 + E_b]}{\sigma_{2b}\sigma_b(\beta_b - \sigma_{2b})} e^{(\beta_b - \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)}, \quad M_{4b}(x, \omega) = \frac{0.5B_b[R_1 + E_b]}{\sigma_{2b}\sigma_b(\beta_b + \sigma_{2b})} e^{(\beta_b + \sigma_{2b})(x+l_1+l_2)}
\end{aligned}$$

Вышеуказанные граничные условия совместно с выражениями (3.5.9)-(3.5.12) позволяют получить следующую систему из шести алгебраических уравнений для определения амплитуд  $\Theta_{2Ng}, \alpha_{1N(1)}, \alpha_{2N(1)}, \alpha_{1N(2)}, \alpha_{2N(2)}, W_{2Nb}$ :

$$\begin{aligned}
\Theta_{2Ng} + W_{1g}(\omega, 0) - W_{2g}(\omega, 0) - 0.5\delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega, 0) &= \alpha_{1N1} + \alpha_{2N1} + [W_{1s1}(\omega, 0) - Q_{1s1}(\omega, 0)] \\
- [W_{2s1}(\omega, 0) - Q_{2s1}(\omega, 0)] - 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega, 0) &= 0, \quad (3.5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1N1}e^{-\sigma_{2s1}l} + \alpha_{2N1}e^{\sigma_{2s1}l} + e^{-\sigma_{2s1}l}[W_{1s1}(\omega, -l_1) - Q_{1s1}(\omega, -l_1)] - e^{\sigma_{2s1}l}[W_{2s1}(\omega, -l_1) - Q_{2s1}(\omega, -l_1)] - \\
- 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega, 0) &= \alpha_{1N2} + \alpha_{2N2} + [W_{1s2}(\omega, -l_1) - Q_{1s2}(\omega, -l_1)] - [W_{2s2}(\omega, -l_1) - Q_{2s2}(\omega, -l_1)] - 0.5\delta_{2s2}\Phi_{Ls2}^2(\omega, 0), \quad (3.5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1N2}e^{-\sigma_{2s1}l} + \alpha_{2N2}e^{\sigma_{2s1}l} + e^{-\sigma_{2s1}l}[W_{1s2}(\omega, -l_1 - l_2) - Q_{1s2}(\omega, -l_1 - l_2)] - e^{\sigma_{2s1}l}[W_{2s2}(\omega, -l_1 - l_2) - Q_{2s2}(\omega, -l_1 - l_2)] - \\
- 0.5\delta_{2s2}\Phi_{Ls2}^2(\omega, -l_1 - l_2) &= W_{2Nb} + [W_{1b}(\omega, -l_1 - l_2) - N_{3b}(\omega, -l_1 - l_2)] - [W_{2b}(\omega, -l_1 - l_2) - N_{4b}(\omega, -l_1 - l_2)] - \\
- 0.5\delta_{2b}\Phi_{Lb}^2(\omega, -l_1 - l_2) &= 0, \quad (3.5.15)
\end{aligned}$$

$$g[W_{1g}(\omega, 0) + W_{2g}(\omega, 0) - \Theta_{2Ng}] = \alpha_{1N1} - V_{2N1} + [W_{1s1}(\omega, 0) - Q_{1s1}(\omega, 0)] + [W_{2s1}(\omega, 0) - Q_{2s2}(\omega, 0)], \quad (3.5.16)$$

$$\begin{aligned}
s\{\alpha_{1N1}e^{-\sigma_{2s1}l} - \alpha_{2N1}e^{\sigma_{2s1}l} + e^{-\sigma_{2s1}l}[W_{1s1}(\omega, -l_1) - Q_{1s1}(\omega, -l_1)] + e^{\sigma_{2s1}l}[W_{2s1}(\omega, -l_1) - Q_{2s1}(\omega, -l_1)]\} = \\
= \alpha_{1N2} - \alpha_{2N2} + [W_{1s2}(\omega, -l_1) - Q_{1s2}(\omega, -l_1)] + [W_{2s2}(\omega, -l_1) - Q_{2s2}(\omega, -l_1)] \quad (3.5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b\{W_{2Nb} + [W_{1b}(\omega, -l_1 - l_2) - N_{3b}(\omega, -l_1 - l_2)] + [W_{2b}(\omega, -l_1 - l_2) - N_{4b}(\omega, -l_1 - l_2)]\} = \\
= \alpha_{1N1}e^{-\sigma_{2s1}l} + \alpha_{2N2}e^{\sigma_{2s1}l} + e^{-\sigma_{2s1}l}[W_{1s2}(\omega, -l_1 - l_2) - Q_{1s2}(\omega, -l_1 - l_2)] + e^{\sigma_{2s1}l}[W_{2s2}(\omega, -l_1 - l_2) - Q_{2s2}(\omega, -l_1 - l_2)] \quad (3.5.18)
\end{aligned}$$

Из (3.3.3)-(3.3.7) будем иметь следующие уравнения

$$\alpha_{1N1} = 0.5\{\Theta_{2Ng}(1-g) + W_{1g}(\omega,0)(1+g) - W_{2g}(\omega,0)(1-g) - 2[W_{1s1}(\omega,0) - Q_{1s1}(\omega,0)] + 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega,0) - 0.5\delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega,0)\}, \quad (3.5.19)$$

$$\alpha_{2N1} = 0.5\{\Theta_{2Ng}(1+g) + W_{1g}(\omega,0)(1-g) - W_{2g}(\omega,0)(1+g) + 2[W_{2s1}(\omega,0) - Q_{2s1}(\omega,0)] + 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega,0) - 0.5\delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega,0)\}, \quad (3.5.20)$$

$$\alpha_{1N2} = 0.5\{\alpha_{1N1}(1+s)e^{-\sigma_{2s}l} - \alpha_{2N1}(1-s)e^{\sigma_{2s}l} + e^{-\sigma_{2s}l}[W_{1s1}(\omega,-l_1) - Q_{1s1}(\omega,-l_1)](1+s) + e^{\sigma_{2s}l}[W_{2s1}(\omega,-l_1) - Q_{2s1}(\omega,-l_1)](1-s) - 2[W_{1s2}(\omega,-l_1) - Q_{1s2}(\omega,-l_1)] - 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega,0) + 0.5\delta_{2s2}\Phi_{Ls2}^2(\omega,0)\}, \quad (3.5.21)$$

$$\alpha_{2N2} = 0.5\{\alpha_{1N1}(1-s)e^{-\sigma_{2s}l} - \alpha_{2N1}(1+s)e^{\sigma_{2s}l} + e^{-\sigma_{2s}l}[W_{1s1}(\omega,-l_1) - Q_{1s1}(\omega,-l_1)](1-s) + e^{\sigma_{2s}l}[W_{2s1}(\omega,-l_1) - Q_{2s1}(\omega,-l_1)](1+s) + 2[W_{2s2}(\omega,-l_1) - Q_{2s2}(\omega,-l_1)] - 0.5\delta_{2s1}\Phi_{Ls1}^2(\omega,0) + 0.5\delta_{2s2}\Phi_{Ls2}^2(\omega,0)\}, \quad (3.5.22)$$

$$W_{2Nb} = b^{-1}\{\alpha_{1N2}e^{-\sigma_{2s}l} + \alpha_{2N2}e^{\sigma_{2s}l} + e^{-\sigma_{2s}l}[W_{1s2}(\omega,-l_1-l_2) - Q_{1s2}(\omega,-l_1-l_2)] + e^{\sigma_{2s}l}[W_{2s2}(\omega,-l_1-l_2) - Q_{2s2}(\omega,-l_1-l_2)] - [W_{1b}(\omega,-l_1-l_2) - N_{3b}(\omega,-l_1-l_2)] - [W_{2b}(\omega,-l_1-l_2) - N_{4b}(\omega,-l_1-l_2)]\}, \quad (3.5.23)$$

решение которых позволит получить для величины  $\Theta_{2Ng}$  выражение

$$\begin{aligned} \Theta_{2Ng} = & W_{2g}(\omega,0) - W_{1g}(\omega,0) - 0.5[\delta_{2S(1)}\Phi_{LS(1)}^2(\omega,0) - \delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega,0)] + 2\Delta_{1(2)}\{W_{1S(1)}(\omega,0) - \\ & - Q_{1S(1)}(\omega,0) - W_{1S(1)}(\omega,-l_1) + Q_{1S(1)}(\omega,-l_1)\}\Delta_{0(2)}^{-1} + 2\Delta_{2(2)}\Delta_{0(2)}^{-1}\{W_{2S(1)}(\omega,-l_1) - Q_{2S(1)}(\omega,-l_1) - \\ & - W_{2S(1)}(\omega,0) + Q_{2S(1)}(\omega,0)\} + [\delta_{2S(1)}\Phi_{LS(1)}^2(\omega,-l_1) - \delta_{2S(2)}\Phi_{LS(2)}^2(\omega,-l_1)]\Delta_{3(2)}\Delta_{0(2)}^{-1} + \\ & + 4\Delta_{4(2)}\Delta_{0(2)}^{-1}\{[W_{1S(2)}(\omega,-l_1) - Q_{1S(2)}(\omega,-l_1)] - W_{1S(2)}(\omega,-l_1-l_2) + Q_{1S(2)}(\omega,-l_1-l_2)\} - \\ & - 4\Delta_{5(2)}\Delta_{0(2)}^{-1}\{[W_{2S(2)}(\omega,-l_1) - Q_{2S(2)}(\omega,-l_1)] - W_{2S(2)}(\omega,-l_1-l_2) + Q_{2S(2)}(\omega,-l_1-l_2)\} - \\ & - \Delta_{0(2)}^{-1}2b\{4[W_{2b}(\omega,-l_1-l_2) - M_{4b}(\omega,-l_1-l_2)] - [\delta_{2S(2)}\Phi_{LS(2)}^2(\omega,-l_1-l_2) - \\ & - \delta_{2b}\Phi_{Lb}^2(\omega,-l_1-l_2)]\}, \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta_{0(2)} = e^{-\sigma_{2S(2)l/2}(b-1)}[(1+s)e^{-\sigma_{2S(1)l}} + (1-s)e^{\sigma_{2S(1)l}}] + e^{\sigma_{2S(2)l/2}(b+1)}[(1-s)e^{-\sigma_{2S(1)l}} + (1+s)e^{\sigma_{2S(1)l}}],$$

$$\Delta_{1(2)} = e^{-\sigma_{2S(2)l/2}(b-1)}e^{-\sigma_{2S(1)l}(1+s)} + e^{\sigma_{2S(2)l/2}(b+1)}e^{-\sigma_{2S(1)l}(1-s)}, \quad \Delta_{4(2)} = e^{-\sigma_{2S(2)l/2}(b-1)},$$

$$\Delta_{2(2)} = e^{-\sigma_{2S(2)l/2}(b-1)}e^{\sigma_{2S(1)l}(1-s)} + e^{\sigma_{2S(2)l/2}(b+1)}e^{\sigma_{2S(1)l}(1+s)}, \quad \Delta_{5(2)} = e^{\sigma_{2S(2)l/2}(b+1)},$$

$$\Delta_{3(2)} = e^{-\sigma_{2S(2)l/2}(b-1)} + e^{\sigma_{2S(2)l/2}(b+1)}.$$

Для рассматриваемого случая нелинейные составляющие колебания температуры на удвоенной частоте  $\Phi_{2Ng}(\omega, x)$  определяются выражением

$$\Phi_{2Ng}(\omega, x) = \Theta_{2Ng}e^{-\sigma_{2g}x} + e^{\sigma_{2g}x}W_{1g}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2g}x}W_{2g}(\omega, x) - 0.5\delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega, x). \quad (3.5.25)$$

Тогда нелинейный ФА-сигнал, регистрируемый микрофоном через буферный газ, будет определяться выражением

$$\delta p_2(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi\mu_{2g}}{T_{00}l_g} \overline{\Phi}_{2N}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00}l_g} \int_0^{2\pi\mu_{2g}} \Phi_{2N}(\omega, x) dx. \quad (3.5.26)$$

Выражения (3.5.25) и (3.5.26) являются общим решением рассматриваемой задачи и нетрудно заметить ее достаточно сложный вид. В этой связи в дальнейшем будем рассматривать наиболее простые случаи.

Предположим, что оба слоя образца являются прозрачными и  $\beta_{1S(1)} = \beta_{1S(2)} = 0$ . Очевидно, что в этом случае лишь поверхность подложки, контактирующей с поверхностью второго слоя образца, становится источником генерации второй гармоники тепловых колебаний. С другой стороны, известно, что для подобных случаев генерация линейного и нелинейного ФА-сигналов возможна лишь для термически тонких образцов для обоих мод колебания температуры. Считаем, что оба слоя образца соответствуют этим требованиям. Тогда справедливы оценки  $l_1 \ll \mu_s, l_1 \ll \mu_{s2}, \exp(\pm\sigma_{1S(1)}l_1) \approx 1,$

$$\exp(\pm\sigma_{1S(2)}l_2) \approx 1 \quad \text{и} \quad \Delta \approx 4b, \Delta_{0(2)} \approx 4bs, \Delta_{1(2)} = 2(b-s), \Delta_{2(2)} = 2(b+s), \Delta_{3(2)} = 2b, \Delta_{4(2)} = 2(b-1),$$

$$\Delta_{5(2)} = 2(b+1), E_1 = E_2 = 0, \Theta_1 = \Theta_2 = 0, \Theta_3 = 0,5E_b(r_b - 1), N_1 = 2(r_1 + s), N_2 = 2(r_1 - s),$$

$$N_3 = 2(r_1 - sb), N_4 = 2(r_2 - b), N_5 = 2sb(r_1 + 1), N_6 = 2sb(r_1 - 1), R_1 = (r_b - 2)E_b,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5E_b(r_b - 1), G_1 = G_2 = 0,5E_b(r_b - 1), W_{2g}(\omega, 0) - W_{1g}(\omega, 0) = (\delta_{2g} - \delta_g)E_b^2(r_b - 1)^2 / 8,$$

$$\delta_{2S(1)}\Phi_{1S(1)}^2(\omega, 0) - \delta_{2g}\Phi_{1g}^2(\omega, 0) = E_b^2(r_b - 1)^2(\delta_{2S(1)} - 0,25\delta_{2g}), W_{1S(1)}(\omega, 0) = W_{1S(1)}(\omega, -l_1) = 0,$$

$$Q_{1S(1)}(\omega, 0) = Q_{1S(1)}(\omega, -l_1) = 0, Q_{2S(1)}(\omega, 0) = Q_{2S(1)}(\omega, -l_1) = 0, W_{2S(1)}(\omega, 0) = W_{2S(1)}(\omega, -l_1) = 0,$$

$$\delta_{2S(1)}\Phi_{1S(1)}^2(\omega, -l_1) - \delta_{2S(2)}\Phi_{1S(2)}^2(\omega, -l_1) = E_b^2(r_b - 1)^2(\delta_{2S(1)} - \delta_{2S(2)}), W_{1S(2)}(\omega, -l_1) = W_{1S(2)}(\omega, -l_1 - l_2) = 0,$$

$$Q_{2S(2)}(\omega, -l_1) = Q_{2S(2)}(\omega, -l_1 - l_2) = 0, Q_{1S(2)}(\omega, -l_1) = Q_{1S(2)}(\omega, -l_1 - l_2) = 0,$$

$$W_{2S(2)}(\omega, -l_1) = W_{2S(2)}(\omega, -l_1 - l_2) = 0, \delta_{2S(2)}\Phi_{1S(2)}^2(\omega, -l_1 - l_2) - \delta_{2b}\Phi_{1b}^2(\omega, -l_1 - l_2) = E_b^2(r_b - 1)^2(\delta_{2S(2)} - \delta_{2b}),$$

$$M_{4b}(\omega, -l_1, -l_2) = \frac{E_b B_b(r_b - 1)}{2\sigma_{2b}(\beta_b + \sigma_{2b})}, W_{2b}(\omega, -l_1 - l_2) = 0,25(\delta_b - \delta_{2b})E_b^2 \left[ \frac{(r_b - 2)^2 \sigma_{2b}}{2\sigma_b + \sigma_{2b}} + \frac{2(r_b - 2)\sigma_{2b}}{\beta_b + \sigma_b + \sigma_{2b}} + \frac{\sigma_{2b}}{2\beta_b + \sigma_{2b}} \right].$$

Подставляя эти выражения в (3.5.13) и выполняя необходимые вычисления, будем иметь:

$$\Theta_{2Ng} = \frac{E_b^2(r_b - 1)^2}{8} (2\delta_{2g} - \delta_g - 4\delta_{2b}) - \frac{E_b^2(\delta_b - \delta_{2b})}{2} \left[ \frac{(r_b - 2)^2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}(r_b - 2)}{1 + \sqrt{2}r_b} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}r_b} \right] - \frac{E_b B_b(r_b - 1)}{\sigma_{2b}\sigma_b(\sqrt{2} + r_b)}. \quad (3.5.27)$$

Подставляя выражение (3.5.27) в (3.5.26), и выполнив интегрирование для второй гармоники нелинейного ФА-сигнала, получим выражение

$$\delta p_2(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_{00} l_g \sigma_{2g}} \left\{ \frac{E_b^2 (r_b - 1)^2 (2\delta_{2g} - \delta_g - 4\delta_{2b})}{8} - \frac{E_b^2 (\delta_b - \delta_{2b})}{2} \left[ \frac{(r_b - 2)^2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}(r_b - 2)}{1 + \sqrt{2}r_b} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}r_b} \right] - \frac{E_b B_b (r_b - 1)}{\sigma_{2b} \sigma_b (\sqrt{2} + r_b)} - \frac{E_b^2 (r_b - 1)^2 \sqrt{2}}{32} (3\delta_{2g} - \delta_g) \right\}. \quad (3.5.28)$$

Выражение (3.5.28) является решением сформулированной задачи и, как нетрудно заметить, оно является достаточно сложным. Очевидно, что поглощающая подложка характеризуется двумя характерными длинами:

$\mu_{\beta b} = \beta_b^{-1}$ -длиной пробега фотона и  $\mu_b$ -длиной тепловой диффузии, соответственно. В зависимости от соотношения между  $\mu_{\beta b}$  и  $\mu_b$  в эксперименте могут иметь место две существенно различные ситуации. Подробно рассмотрим эти случаи.

1. Предположим, что  $\mu_{\beta b}$  - длина пробега фотона значительно больше  $\mu_b$  - длины тепловой диффузии, тогда  $|r_b| \ll 1$  и из (3.5.28) получим выражение

$$\delta p_{2N}(2\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 \eta_b^2 \beta_b^2 \mu_{2g} \mu_b^4 e^{i \frac{3\pi}{4}}}{32 \sqrt{2} T_{00} l_g (\kappa_b^{(0)})^2} K_{2(1)}, \quad (3.5.29)$$

где величина

$$K_{2(1)} = \frac{1}{16} [\delta_{2g} (8 - 3\sqrt{2}) - \delta_g (4 - \sqrt{2})] + 3\delta_b - 4\delta_{2b} + \delta_{3b}.$$

является нелинейным коэффициентом, который определяется посредством комбинации термических коэффициентов теплофизических параметров газа и подложки, а также поглощательной способности подложки. Из (3.5.29) обнаруживается, что в этом случае уменьшение амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты подчиняется закону  $\propto \omega^{-5/2}$ , а её увеличение с ростом оптического коэффициента поглощения закону  $\propto \beta_b^2$ .

2. Пусть  $\mu_{\beta b}$  - длина пробега фотона гораздо меньше  $\mu_b$  - длины тепловой диффузии, тогда  $|r_b| \gg 1$  и из (3.5.28) получим

$$\delta p_{2N}(2\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 \eta_b^2 \mu_{2g} \mu_b^2 e^{-i \frac{3\pi}{4}}}{32 \sqrt{2} T_{00} l_g (\kappa_b^{(0)})^2} K_{2(2)}, \quad (3.5.30)$$

$$K_{2(2)} = 0,25[\delta_{2g}(8-3\sqrt{2}) + \delta_g(\sqrt{2}+1)] + \frac{4\delta_{3b}}{\sqrt{2}} - \frac{2(\delta_b + \sqrt{2}\delta_{2b})}{1+\sqrt{2}}.$$

Из (3.5.30) следует, что в этом случае амплитуда нелинейного ФА-сигнала не зависит от величины  $\beta_b$ , а её спад с ростом частоты происходит по закону  $\propto \omega^{-3/2}$ .

Подводя итоги настоящей главы, можно заключить, что в рамках настоящей работы предложена теория генерации ВГ нелинейного ФА-сигнала двухслойными твердотельными образцами с поглощающей подложки. Получены простые выражения для параметров возбуждаемой второй гармоники ФА-сигнала, когда оба слоя образца являются прозрачными и термически тонкими. Обнаружено уменьшение амплитуды этого сигнала с ростом частоты модуляции, когда длина пробега фотона меньше длины тепловой диффузии в подложке и наоборот. Из (3.5.30) следует, что измерения амплитуды второй гармоники ФА-сигнала позволяет определить температурные коэффициенты теплофизических и оптических величин, а также значение оптического коэффициента поглощения подложки.



## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Разработана теория генерации ФА-сигнала в одно- и двухслойных твёрдых системах для случаев, когда подложка, наряду с образцом, является поглощающей. Получено общее выражение для комплексной амплитуды колебания температуры в буферном газе. Выявлено, что вклад от поглощающей подложки в генерируемый ФА-сигнал имеет место лишь для термических тонких слабопоглощающих образцов. Найдено выражение, описывающее особенности генерируемого ФА-сигнала, для наиболее интересных случаев.
2. Исходя из системы нелинейных уравнений теплопроводности для газового слоя, образца и подложки предложена математическая модель теории генерации нелинейного ФА-отклика для случая, когда подложка, наряду с образцом, является поглощающей. Подробно исследованы особенности формирования температурного поля в ФА-камере.
3. Предложена теория генерации основной гармоники нелинейного ФА-сигнала для случаев, когда подложка, наряду с образцом, является поглощающей. Получено общее выражение для комплексной амплитуды колебания температуры в буферном газе. Детально исследован случай, когда образец является термически тонким и прозрачным. Получены выражения, описывающие особенности генерируемого нелинейного ФА-сигнала на частоте модуляции.
4. Разработана теория возбуждения второй гармоники нелинейного ФА-сигнала однослойным образцом, когда подложка, также как и образец, является поглощающей. Получено искомое выражение для колебания температуры в буферном газе. Достаточно подробно изучен случай, когда образец является прозрачным и термически тонким. Выявлены закономерности спада амплитуды возбуждаемого нелинейного ФА-сигнала от частоты модуляции и оптического коэффициента поглощения.
5. Исходя из системы нелинейных уравнений теплопроводности для газового слоя, обоих слоев образца и поглощающей подложки предложена математическая модель теоретического описания нелинейного фотоакустического от-

клика двухслойных образцов на поглощающей подложке. Получены выражения, описывающие пространственное распределение температуры во всех трех слоях ФА-камеры, а также системы дифференциальных уравнений для первых двух гармоник нелинейного ФА-сигнала.

6. Предложена теория генерации основной гармоник нелинейного ФА-сигнала двух слойными твердотельными образцами, когда подложка, также как оба слоя образца, является поглощающей. Решением граничной задачи получено необходимое выражение для амплитуды основной гармоник колебания температуры в буферном газе, посредством которого и определено колебание давления в газовом слое на этой частоте. Детально рассмотрен случай, когда оба слоя образца являются прозрачными и термически тонкими. Для интересных случаев, имеющих место в эксперименте, найдены зависимости амплитуды этой гармоник нелинейного ФА-сигнала от частоты модуляции и оптического коэффициента поглощения.

7. Предложена теория генерации второй гармоник нелинейного ФА-сигнала двухслойными твердотельными образцами, когда подложка, также как оба слоя образца, является поглощающей. Получено необходимое выражение для амплитуды второй гармоник колебания температуры в буферном газе. Детально рассмотрен случай, когда оба слоя образца являются прозрачными и термически тонкими. Найдены особенности зависимости амплитуды этой гармоник нелинейного ФА-сигнала от частоты модуляции и оптического коэффициента поглощения.

## Список литературы

1. Rosencwaig A. Photoacoustic spectroscopy // In: Annu. Rev. Biophys. Bioeng. –1980. – V.9. – pp.31-54.
2. Лямшев Л.М. Оптоакустические источники звука // Успехи физических наук. –1981. –Т.135 – .Вып.4. – с.637-669.
3. Винокуров С.А. Оптико-акустический эффект и температуропроводность твёрдых тел // Инженерно-физический журнал. – 1983. – Т.44–.№1–. с.60-66.
4. Tam A.C. Applications of photoacoustic sensing techniques // Rev. Mod. Phys. – 1986. – V.58. – №2. – pp.381-431.
5. Алимарин И.П. Оптико-акустическая спектрометрия конденсированных сред и ее аналитическое использование // Журнал аналитической химии. – 1987. – Т.42. – №1. –с.5-28.
6. Sigrist M.W. Laser generation of acoustic waves in liquids and gases // J. Appl. Phys., 1986.-V.60.-№7.-pp.83-122.
7. Vargas H. Photoacoustic and Related photothermal techniques // Phys. Rep. – 1988. – V.161. – №2. – pp.43-101.
8. Егерев С.В., Лямшев Л.М., Пученков О.В. Лазерная динамическая оптоакустическая диагностика конденсированных сред // Успехи физических наук. – 1990. – Т.160. – №9. – с.111-154.
9. Patel C.K.N., Tam A.C. Pulsed optoacoustic spectroscopy of condensed matter // Rev. Mod. Phys. – 1981. – V.53. – №3. – pp.517-553.
10. Schaber F.A., Nunes R.M., Barroso M.,Serpa C., Arnaut L. Analytical solution for time-resolved photoacoustic calorimetry data and applications to two typical photoreactions // Photochem. Photobiol. Sci. – 2010. – V.9. – №6. – pp.812-822.
11. Егерев С.В., Симановский Я.О. Оптоакустика неоднородных медицинских сред: конкуренция механизмов и перспективы применения // Акустический журнал. – 2022. – Т.68. – №1. – с.96-116.
12. Gao R., Xu Z., Ren Y., Song L., Liu C. Nonlinear mechanism in photo-

- acoustic - powerful tools in photoacoustic imaging // *Photoacoustics*. – 2021. – V.22. – pp.100-243.
13. Салихов Т.Х. Тепловая нелинейность в оптоакустике // *Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. Наук*. – 2011. – №4(145). – С.76-85; –2012.-№1(146). – С.40-51; – 2012. – №2(147). – с.29- 40.
14. Wetsel G.C. Jr., McDonald F.A. Theory of photothermal and photoacoustic effects in condensed matter // In: *Physical Acoustics*. – V.18. – Ed. by W.P.Mason, R.N.Thurston. San Diego. California: Academic Press., – 1988. – pp.167-277.
15. Hutchins D.A. Ultrasonic generation by pulsed lasers D.A. Hutchins // In: *Physical Acoustics*. V.18. Ed. by W.P. Mason, R.N. Thurston. New York: Academic Press. – 1988. – 21-123 p.
16. Hess P., Bailey R. T. Photoacoustic, photothermal and photochemical processes in gases. *Topics in Current Physics* // Berlin: Springer-Verlag. – 1989.–V.46. – 252 p.
17. Лямшев Л.М. Лазерное термооптическое возбуждение звука // М.: Наука. – 1989. – 237 с.
18. Гусев В.Э., Карабутов А.А. Лазерная оптоакустика // М.: Наука.– 1991.– 304 с.
19. Mandelis A. Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology // New York: Elsevier. – 1992. – V.1. – pp.542.
20. Bialkowski S.E., Astrath N.G., Proskurnin M.A. Photothermal Spectroscopy Methods Hoboken // NJ: John Wiley & Sons. – 2019. – 485 p.
21. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids // *J. Appl. Phys.* – 1976. – V.47. – №1. – pp.64-69.
22. McDonald F.A. Generalized theory of the photoacoustic effect/ F.A. Mc Donald, G.C. Wetsel // *J. Appl. Phys.* –1978. –V. 48. –№4. – pp.2313-2322.

23. Гуревич С.Б., Муратиков К.Л. К вопросу об образовании сигнала в фотоакустических камерах для исследования твёрдых объектов // Журнал технической физики. – 1985. – Т.55. – №7. – с.1357-1361.
24. Бурмистрова Л.В., Карабутов А.А., Руденко О.В., Черепецкая Е.Б. О влиянии тепловой нелинейности на термооптическую генерацию звука // Акустический журнал. – 1979. – Т.25. – с.616-620.
25. Дунина Т.А., Егерев С.В., Лямшев Л.М. и др. К нелинейной теории теплового механизма генерации звука лазерным излучением // Акустический журнал. – 1979. – Т.25. – №4. – с.622-625.
26. Лямшев Л.М. Оптическая генерация звука. Нелинейные эффекты (обзор) // Акустический журнал. – 1981. – Т.27. – №5. – с.641-668.
27. Дунина Т.А., Наугольных К.А. Особенности нелинейного фотоакустического эффекта в воде при температурах, близких к точке её максимальной плотности // Письма в Журнал технической физики. – 1983. – Т.9. – №7. – с.410-414.
28. Rajakarunanayake Y.N. Nonlinear photothermal imaging // Appl. Phys. Lett. – 1986. – V.48. – №3. – pp.218-220.
29. Wetsel G.C., Spicer J.B.Jr. Nonlinear effects in photothermal-optical-beam-deflection imaging // Can. J. Phys. – 1986. – V.64. – №9. – pp.1269-1275.
30. Витшас А.Ф. Нелинейные эффекты при оптической генерации звука в жидкости // Акустический журнал. – 1988. – Т.34. – №3. – с.437-444.
31. Doka O. A., Miklos A. Lorincz Resolution of nonlinear thermal wave microscopes // Appl. Phys. – 1989. – V.48. – №5. – pp.415-417.
32. Карабутов А.А. Влияние тепловой нелинейности на величину сигнала в фотоакустической ячейке // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1993. – №4-5. – с.271-276.
33. Gusev V. Theory of second harmonic thermal-wave generation: one dimensional geometry // Int. J. Thermophys. – 1993. – V.14. – № 2. – pp.321-337.
34. Wang C. Nonlinear photothermal radiometrical material inspection technique // J. Appl. Phys. – 1993. – V.49. – № 9. – pp.5713-5717.

35. Gusev V.E. Theory of strong photothermal nonlinearity from sub-surface non-stationary (“breathing”) cracks in solids // *Appl. Phys.* – 1993. – V.57. – pp.229- 233.
36. Gusev V., Mandelis A., Bleiss R. Non-linear photothermal response of thin solid films and coatings // *Mater. Sci. Eng.* – 1994. – V.26. – № 2-3. – pp.111–119.
37. Peralta S.B., Al-Khafaji H.H., Williams A.W. Thermal wave imaging using harmonic detection of the photoac. signal // *Nondestr. Test. Eval.* – 1991. – V.6. – pp. 17 – 23.
38. Искандаров З.Б., Мадвалиев У., Карабутов А.А., Шарифов Д.М. Тепловая нелинейность в фотоакустической спектроскопии конденсированных сред // *Доклады АН Республики Таджикистан.* – 1995. – Т.38. – № 7–8. – с.51-54.
39. Mandelis A. Nonlinear fundamental photothermal response in three dimensional geometry. Theoretical model / A. Mandelis, A.Salnick, J.Opsal, A.Rosenswaig // *J.Appl. Phys.* – 1999. – V.85. – pp.1811-1821.
40. Salnick A. Nonlinear fundamental photothermal response: experimental results for tungsten // *Solid Stat. Com.* – 2000. – V.114. – № 1. – pp.133-136.
41. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Влияние тепловой нелинейности на тепловое поле в фотоакустической камере // *Доклады АН Республики Таджикистан.* – 2002. – Т.45. – № 9. – с.41-46.
42. Островская Г.В. Эффективность преобразования световой энергии в акустическую при воздействии импульсного лазерного излучения с жидкой средой. 1. Расчет эффективности преобразования при оптоакустическом взаимодействии // *Журнал Технической Физики .* – 2002. – Т.72. – № 10. – с.95-102.
43. Островская Г.В. Эффективность преобразования световой энергии в акустическую при взаимодействии импульсного лазерного излучения с жидкой средой. 2. Измерение эффективности преобразования при оптоакустическом взаимодействии методом голографической интерферометрии // *Журнал Технической Физики* – 2002. – Т.72 – № 12. – с.64-71.

44. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Нелинейный фотоакустический отклик в сильнопоглощающих твёрдых телах. Теоретическое описание // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2002. – Т.45. – № 10. – с.116 – 122.
45. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Нелинейный фотоакустический отклик в сильнопоглощающих твердых телах. Возбуждение второй гармоники // Доклады АН Республики Таджикистан, 2003. – Т.46. – №9. – с.47-51.
46. Мадвалиев У., Салихов Т.Х. Влияние температурной зависимости оптических величин на параметры второй гармоники фотоакустического сигнала // Доклады АН Республики Таджикистан, 2004. – Т.47.– № 9-10. – с.39-45.
47. Мадвалиев У., Салихов Т.Х. Нелинейный фотоакустический отклик в сильнопоглощающих твердых телах. Учет температурной зависимости оптических величин // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2004. – Т.47. – № 9–10. – с.31-38.
48. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Тепловая нелинейность в фотоакустической камере // Журнал Технической Физики . – 2004. – Т.74. – № 2. – с.17-23.
49. Иньков В.Н., Черепецкая Е.Б., Шкуратник В.Л. и др. Использование эффекта тепловой нелинейности при лазерном возбуждении ультразвуковых сигналов в геоматериалах //Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т.46. – №2. – с.179-186.
50. Иньков В.Н., Черепецкая Е.Б., Шкуратник В.Л. и др. Исследование механико – акустической нелинейности трещиноватых пород методом лазерно – ультразвуковой спектроскопии // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т.46. – № 3. – с.174-180.
51. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М., Хан Н.А. Нелинейный фотоакустический отклик непрозрачных сред при газомикрофонной реги-

- страции сигнала // Журнал Прикладной Спектроскопии . – 2006. – Т.73. – № 2. – с.170-176.
52. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Влияние тепловой нелинейности сильно поглощающих сред на параметры фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. Основная и вторая гармоники // Журнал Технической Физики. – 2006. – Т.76. – № 6. – 87-97с.
53. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш., .Влияние тепловой нелинейности подложки на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика непрозрачных сред // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2007. – Т. 50. – № 7. – 592-597с.
54. Салихов Т.Х., Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш., . Вклад температурной зависимости теплофизических параметров подложки на параметры второй гармоники фотоакустического сигнала непрозрачных сред // Доклады АН Республики Таджикистан .– 2008.– Т. 51.–№ 8.– 588-593.с
55. Салихов Т.Х., Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш., Численный анализ амплитуды второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала термически тонких непрозрачных сред // Доклады АН Республики Таджикистан . – 2008. – Т. 51. – № 9. – 653-658с.
56. Gregoire G. Nonlinear photothermal and photoacoustic processes for crack detection // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2008. – V.153. – 313-315p.
57. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Влияние температурной зависимости оптических и теплофизических величин на температурное поле двухслойных образцов с поверхностным поглощением первого слоя в фотоакустической камере // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2010. – Т.53. – №11. – с.839-845.
58. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Математическая модель описания нелинейного ФА- отклика в двухслойных образцах с поверхностным поглощением первого слоя // Вестник Таджикского национального университета. – 2011. – № 6(70). – с. 21-26.



59. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации основной гармоники нелинейного ФА-сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем // Доклады АН Республики Таджикистан . – 2012. – Т.55. – № 2. – с.132-140.
60. Салихов Т.Х. , Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем // Доклады АН Республики Таджикистан . – 2011. – Т.54. – № 9. – с.737-745.
61. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Влияние температурной зависимости оптических и теплофизических параметров на температурное поле двухслойных образцов с поверхностным поглощением второго слоя в фотоакустической камере // Вестник Таджикского национального университета. – 2011. – № 4(68). – с.7-12.
62. Салихов Т.Х. Т., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с поверхностным поглощением второго слоя: I. Основная гармоника // Вестник Таджикского национального университета. – 2012. – № 1/1. – с.69-77.
63. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с поверхностным поглощением второго слоя: II. Вторая гармоника // Вестник Таджикского национального университета. – 2012. – № 1/2(81). – с.94-103.
64. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с объёмным поглощением обоих слоев: I. математическая модель задачи // Вестник Таджикского национального университета. – 2013. – № 1/1(102). – с.98-102.
65. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П., Хакимов Ф.Х., Рахимов Ф.К. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с объёмным поглощением обоих слоев: II. Температурное поле // Вестник Таджикского национального университета. – 2013. – № 1/1(102). – с.83-89.

66. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных полупрозрачных образцов // Доклады АН Республики Таджикистан . – 2012. – Т.55. – № 12. – с.965-974.
67. Салихов Т.Х. , Ходжаев Ю.П., Рахмонов Р.К. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными непрозрачными образцами // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – №1/4(153). – с.174-180.
68. Oshurko V.B. Laser Photoacoustic Detection of Oil Hydrocarbons in Water Emulsions // Laser Physics. – 2001. – V.11 – № 4. – pp. 31-37.
69. Ошурко В.Б. Визуализация тепловых полей в нелинейной фотоакустике // Письма в журнал технической физики . – 2006. – Т.32.вып.16 – С. 1-9.
70. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных твердотельных образцов: I. математическая модель проблемы // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – № 1/3(134). – с.66-70.
71. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фото-акустического сигнала оптически неоднородными твердыми телами // Доклады АН Республики Таджикистан . – 2015. – Т.58 – №9. – с.804-812.
72. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных твердотельных образцов: II. стационарное температурное поле // Вестник Таджикского национального университета. – №1/1(192). – 2016. – с.154-159.
73. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Особенности возбуждения основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика в оптически неоднородных твердотельных образцах // Известия АН Республики Таджикистан. серия физ.мат., хим.-геол.-тех. наук. – 2017. – № 1(166). – с. 58-69.

74. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных двухслойных систем: I. Математическая модель проблемы // Вестник Таджикского национального университета . – №1/2(196). – 2016. – с.114-118
75. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с первым оптически неоднородным и вторым непрозрачным слоями: I. математическая модель проблемы // Вестник Таджикского национального университета . – №1/4(216). – 2016. – с.66-71.
76. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Особенности возбуждения второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика в оптически неоднородных двухслойных образцах // Известия АН Республики Таджикистан , серия физ.мат., хим.-геол.-тех. наук. – 2016. – № 4(165). – с.42-53.
77. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с первым оптически неоднородным и вторым непрозрачным слоями: II. стационарное температурное поле // Вестник Таджикского национального университета . Серия естественных наук. –2017. – №2. – с.117-123.
78. Салихов Т.Х. Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных двухслойных систем: II. Стационарное температурное поле // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. – №4. – с.115-121.
79. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Особенности возбуждения основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика в оптически неоднородных двух-слойных образцах // Известия АН Республики Таджикистан, серия физ.мат., хим.-геол.-тех. наук. – 2017. – № 2(16). – с.74-87.
80. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Влияние температурной зависимости теплопроводности и степени черноты на температурное поле

в фотоакустической камере с двухслойными пластинами. Теплофизика и аэромеханика. – 2018. – Т.25. – № 6.

81. Салихов Т.Х., Рахими Ф., Махмалатиф А., Шарифов Д.М. Вклад температурной зависимости оптического коэффициента поглощения образца на формирование теплового поля в фотоакустической камере. Теплофизика и аэромеханика. – 2019. – Т.26. – № 6. – с.963-968.
82. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Влияние теплофизических и свойств подложки на характеристики нелинейного фотоакустического сигнала непрозрачных сред. Журнал Прикладной Спектроскопии. – 2019. – Т.86. – № 6. – с.908-916
83. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. К теории генерации нелинейного фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. Журнал Технической Физики. – 2021. – Т.91. Вып.11. – с.1608-1618
84. Barros W.L., Faria R.M. Photoacoustic procedure for measuring thermal parameters of transparent solids //Appl. Phys.Lett.–1995. – v67.-№26.-3892-3894.
85. Шарифов Д. М. Тепловая нелинейность при газомикрофонной регистрации фотоакустического сигнала в сильнопоглощающих средах // диссертация. –2003. – Душанбе. – с.119
86. Мадвалиев У. Разработка новых методов фотоакустической спектроскопии конденсированных сред // диссертация. – 2007. – Душанбе-Москва – с.302.
87. Туйчиев Х. Ш. Тепловая нелинейность в низкочастотной фотоакустической спектроскопии // диссертация. – 2011. Душанбе. – с.132.
88. Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных твердотельных систем// диссертация. – 2014. – Душанбе. – с.132.
89. Алишери М. Нелинейный фотоакустический отклик одно- и двухслойных оптически неоднородных твердотельных систем // диссертация. – 2018. – Душанбе. – с.111.

90. Митюрин Г.С., Стародубцев Е.Г. Фотоакустическая спектроскопия конденсированных сред, испытывающих фазовый переход // Инженерно-физический журнал – 1997. – Т.70. – № 1. – с.153-155.
91. Nibu A. Laser induced photoacoustic technique for the detection of phase transition in liquid crystals // Nondesructive testing and evaluation. – 2001. – Vol.17. –pp.315-324.
92. Lakshminarayana S. Accurate Method for the Determination of Phase Transitions in Liquid Crystals with Photoacoustic Technique // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 2009. – Vol. 511. – pp. 50-58.
93. Pérez-Pacheco A. Phase transition of TiO<sub>2</sub> thin films detected by the pulsed laser photoacoustic technique // Appl. Phys . Lett. – 2011. –1 02. – 699-704p.
94. Żurawska A. Photoacoustic detection of phase transitions // Physics and chemistry of solid state. – 2006. – V. 7. – №1. – pp.21-24.
95. Mejía-Urriarte E.V. Phase transition of polycrystalline BaTiO<sub>3</sub> at high-pressure detected by a pulse photoacoustic technique // Meas. Sci. Technol. – 2006. – Vol.17. – pp.1319-1323.
96. Somasundaram T. Photoacoustic investigation of phase transitions in solids // J. Phys. C: Solid State Phys.-1986. – Vol 19. – pp.2137-2151.
97. Mityurich G. S., Starodubtsev E.G. Photoacoustic spectroscopy of media with a phase transition condensed // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 1997 V. 70. №1. – pp.157-160.
98. Lutzweiler C., Razansky. Optoacoustic imaging and tomography: reconstruction approaches and outstanding challenges in image performance and quantification // Sensors. – 2013. – Vol.13 – pp.7345-7384.
99. Wang L. V. Photoacoustic tomography: in vivo imaging from organelles to organs // Science. – 335. – 2012. – pp.1458-1462.
100. Beard P. Biomedical photoacoustic imaging // Interface Focus, vol.1. – 2011 – pp.602-631.
101. Mallidi S. Photoacoustic imaging in cancer detection, diagnosis, and treatment guidance // Trends Biotechnol. –2011. –V.29. pp.213–221.

102. Ntziachristos V. Going deeper than microscopy: the optical imaging frontier in biology. // Nat. Methods. – 2010 – V. 7. – pp. 603-614.
103. Srinivasan S. Interpreting hemoglobin and water concentration, oxygen saturation, and scattering measured in vivo by near-infrared breast tomography // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2003 – V. 100. – pp.12349-12354.
104. Cerussi A., Berger J., Bevilacqua F.E. Sources of absorption and scattering contrast for near-infrared optical mammography // Acad. Radiol. – 2001. – V.8. – P.211–218.
105. Kruger R. A., Kuzmiak C. M., Lam R. B. Dedicated 3D photoacoustic breast imaging // Med. Phys., – 2013. – v. 40. – pp.113-120.
106. Yao Y. Sensitivity of photoacoustic microscopy. J.Photoacoustics // J.Photoacoustics. – 2014. – v. 2. – pp.87-101.
107. Jathoul A. P., Laufer O. Ogunlade deep in vivo photoacoustic imaging of mammalian tissues using a tyrosinase-based genetic reporter // Nat. Photonics. – 2015. – v. 9. – pp.239-246.
108. Jaeger M. Clutter elimination for deep clinical optoacoustic imaging using localized vibration tagging (LOVIT) // J.Photoacoustics. – 2013. – v.1. – P.19-29.
109. Deán-Ben X. L. Adding fifth dimension to optoacoustic imaging: volumetric time-resolved spectrally-enriched tomography // Light Sci.Appl.–2014.–v.3.– 137p.
110. Petrova I. Y. Noninvasive monitoring of cerebral blood oxygenation in ovine superior sagittal sinus with novel multi-wavelength optoacoustic system // Opt. Express. – 2009 – v.17. – pp.7285-7294.
111. Ntziachristos, V. Razansky D. Molecular imaging by means of multispectral optoacoustic tomography (MSOT) // Chem. Rev.– 2010.–v.110.–pp.2783-2794.
112. Ford S. J. Structural and functional analysis of intact hair follicles and pilosebaceous units by volumetric multispectral optoacoustic tomograph // J. Invest. Dermatol. – 2016. – v.136. – pp.753-761.

113. Zhenhui Z. Subdiffraction-limited second harmonic photoacoustic microscopy based on nonlinear thermal diffusion // *Optics Letters*. – 2018 – Vol. 43. – №10. – с.2336-2339.
114. Yujiao Shi., Zhenhui. Z Nonlinear photoacoustic imaging dedicated to thermalnonlinearity characterization // *Chinese Optics Letters*. –V.19.–№ 7. –2021. – pp. 071702 (1-5).
115. Григорьева И.С. Физические величины. Справ. Под. Ред. // М.: Энергоатомиздат. – 1991. – с.1232.
116. Nag P.K. Heat transfer. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited // New Delhi. – 2002. – pp. 729.
117. Петров В.А. Радиационные характеристики кварцевых стёкол // – Теплофизика высоких температур. – 1975. – Т.13. – №2. – pp.335-345.
118. Sala A. Radiant properties of materials // Poland. Warsaw, Elsevier. – 1986. – pp. 478.
119. Лингарт Ю.К. Оптические свойств лейко сапфира при высоких температурах. II. Состав монокристалла в области непрозрачности и свойства расплава // Теплофизика высоких температур .–1982.–Т. 20. – с.1085-1092.
120. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Ходжаев Ю.П. К теории генерации фотоакустического сигнала твердотельными образцами // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2018. т.60. – №11-12. – с.410- 417.
121. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Ходжаев Ю.П. Вклад оптического поглощения подложки на параметры фотоакустического сигнала твердых тел. Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященный международному десятилетию действия « Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы», « Году развития туризма и народных ремесел», «140-ой годовщине со дня рождения Героя Таджикистана С. Ай-

ни» и « 70-ой годовщине со дня создания Таджикского национального университета»// ТНУ, апрель. – 2018. С.639-640.

122. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика: математическая модель и температурное поле // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018. – № 2. – с.44-51.
123. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н. Математическая модель теоретического описания нелинейного фотоакустического отклика в фотоакустической камере с поглощающей подложкой. Материалы международной научно-практической конференции «Образование и наука в XXI веке: современные тенденции и перспективы», посвященной 70-ой годовщине со дня образования Таджикского национального университета» ( 1-2 ноября 2018,ТНУ), – с.87-89.
124. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. Вклад поглощения подложки на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – № 1-2, с.62-70.
125. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А.. К «К теории генерации основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала», Материалы Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников Таджикского национального университета, посвященной « Годам развития села, туризма и народных ремесёл(2019-2021гг.)» и 2400-летию Миробиды Сайидо Насафи» (20-27 апреля 2019 года). – Душанбе – 2019. – с. 368-369;
126. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжахонов И.Т.. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – № 11-12, с.658-665.
127. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. К теории генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала образца на по-



глошающей подложке. Материалы IV-международной конференции: «Вопросы физической и координационной химии», посвященной памяти докторов химических наук, профессоров Якубова Х.М. и Юсуфова З.Н. –Душанбе.–Таджикского национального университета, 2019.– с.339-340.

128. Fujii Y., Akihiro Moritani and Junkichi Nakai Photoacoustic Spectroscopy Theory for Multi-Layered Samples and Interference Effect // Jpn. J. Appl. Phys. – 1981. – V.20. – №2. – pp.361-367.
129. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Ходжаев Ю.П., Тошходжаев Х.А. Теории генерации фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами // Вестник Таджикского национального университета . Серия естественных наук. – 2018. – №1. – с.137-141.
130. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. Генерация фотоакустического сигнала двухслойными прозрачными образцами с поглощающей подложкой // Письма в журнал технической физики., – 2019. – Т.45. – вып.9. – с.30-31.
131. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на характеристики фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами. Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной физики» ( посвящённой 80-летию профессора Б.Н. Нарзиева) 18-го апреля 2018. – с.138-140.
132. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Ходжахонов И.Т., Рахмонов Р.К. Теория генерации фотоакустического сигнала двухслойными прозрачными образцами. Материал VI-ой международной конференции «Современные проблемы физики» (28-31 июня 2018, посвященный 110-летию академика С.У. Умарова и 90-летию академика А.А. Адхамова). – с.186-188.
133. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического

го отклика двухслойных образцов: математическая модель и температурное поле // Вестник Таджикского национального университета . Серия естественных наук. 2019, №4, с.67-73.

134. Солихов Т. Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А, Ходжаев Ю.П. Математический модель теории нелинейного фотоакустического отклика в двухслойных образцах на поглощающей подложки. Маводҳои конференсияи ҷумҳуриявӣ илмию назариявӣ ҳайати устодон ва кормандони ДМТ бахшида ба «5500-солагии Саразмибостонӣ», «700-солагии шоири барҷастаи тоҷик Камоли Хучандӣ» ва «Бистсолаи омӯзиш ва рушдифанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф (солҳои 2020-2040)», 2020. – с.413-414
135. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. // Вклад поглощения подложки на формирование основной гармоник нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – №3. – с.169-181.
136. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоник нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2020. – Т.63. – №3-4. – с.206-215.
137. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоник нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов. VII-ая международная конференция «Современные проблемы физики» (Физико-технический институт им. С.У. Умарова НАНТ, 9-10 октября 2020).
138. Masahiko M. Theory and Experiments on the Photoacoustic Effect in Double-Layer Solid // Jpn. J. of Applied Physics. – V.20. -№ 5. – 1981. – pp. 835-842.

139. Салихов Т.Х. Тепловая нелинейность в оптоакустике (обзор). Ч III. Тепловая нелинейность в фотоакустике твердых тел // Известия АН Республики Таджикистан . Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2012, – №2(147), – с.51-63.