

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. С.У.УМАРОВА
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА

На правах рукописи

УДК: 517.55+517.958

Пирзода Баходур Гулмахмад

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ
ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ МАГНЕТИКАХ

Специальность: 1.3.3.- теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: академик НАН
Таджикистана, доктор физико-матема-
тических наук, профессор Рахими Ф.К.

Душанбе – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Обозначения и сокращения.....	4
Введение.....	6
ГЛАВА I. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	14
1.1. Теоретические и экспериментальные исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках.....	14
1.2. Перспектива практического приложения результатов теорети- ческого и экспериментального исследования солитоноподоб- ных волн в анизотропных магнетиках.....	17
1.2.1. Применение в технологиях магнитной памяти.....	20
1.2.2. Применение в магнонных кристаллах.....	21
ГЛАВА II. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛН.....	24
2.1. Исследование солитонных решений нелинейного уравнения Шрёдингера при наличии самосогласованного потенциала.....	24
2.2. Многомерная динамика магнитных систем с учётом квадру- польных и октупольных мод спиновых возбуждений.....	29
2.3. Нелинейные обобщения модели Ландау-Лифшица и их геометрическая структура	39
2.3.1. Основные положения теории двумерных поверхностей	40
2.4. Температурная зависимость магнитного рассеяния нейтронов на спиновых солитонных структурах.....	42
ГЛАВА III. ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛН.....	50
3.1. Эволюция и стабильность солитонов в нелинейных средах: анализ одно-, двух- и трехсолитонных решений нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами	50
3.2. Квантовые и тепловые флуктуации солитонов: нейтронное	

рассеяние в анизотропных магнетиках.....	62
Выводы.....	79
Литература.....	81
Список публикаций по теме диссертации.....	89

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

АМ - анизотропный магнетик;

ВМ - волновое возбуждение;

КП - коэффициент пропускания;

КО - коэффициент отражения;

МП - магнитная проницаемость;

МВ - магнитная восприимчивость;

НД - нелинейная динамика;

СВ - солитоноподобная волна;

УЛЛ - уравнение Ландау-Лифшица;

ФМР - ферромагнитный резонанс;

ДЭП - диэлектрическая проницаемость;

Солитон - устойчивое локализованное волновое возбуждение, сохраняющее свою форму при распространении;

Анизотропия - зависимость физических свойств материала от направления в пространстве;

Магнетик - материал с выраженным магнитными свойствами;

Магнон - квазичастица, описывающая коллективное возбуждение спиновой системы в кристаллической решетке;

Спинtronика - область электроники, использующая спин электрона для передачи и обработки информации;

Магнонный кристалл - искусственно созданная структура, управляющая распространением магнонов;

Уравнение Ландау-Лифшица (УЛЛ) - фундаментальное уравнение, описывающее динамику намагниченности в ферромагнетиках;

Нелинейная динамика - раздел физики, изучающий системы, в которых отклик не пропорционален воздействию;

Дисперсия - зависимость фазовой скорости волны от ее частоты;

Ферромагнетик - материал, обладающий спонтанной намагниченностью;

Квантование - процесс перехода от классического описания физической системы к квантовому;

Топологический дефект - нарушение порядка в материале, связанное с его топологическими свойствами;

Скин-эффект - явление вытеснения переменного электрического тока к поверхности проводника;

Ферромагнитный резонанс (ФМР)- резонансное поглощение электромагнитного излучения ферромагнитным материалом;

Магнитостатическая волна (МСВ)- волна намагниченности, распространяющаяся в ферромагнитном материале;

Скин-слой- слой на поверхности проводника, в котором сосредоточен переменный ток;

Магнитная проницаемость (μ) - величина, характеризующая способность материала проводить магнитное поле;

Намагниченность (M) - векторная величина, характеризующая магнитное состояние материала;

Магнитная восприимчивость (χ)- величина, характеризующая отклик материала на внешнее магнитное поле;

Магнитная анизотропия- зависимость магнитных свойств материала от направления в пространстве;

Доменная структура- распределение областей с одинаковой намагниченностью в ферромагнетике;

Магнитная гистерезисная петля- зависимость намагниченности материала от приложенного магнитного поля;

Остаточная намагниченность- намагниченность, сохраняющаяся в материале после снятия внешнего магнитного поля;

Спин-волна- коллективное возбуждение спинов в магнитном материале;

Квантовый спин- внутренняя угловая характеристика элементарных частиц.

Введение

Актуальность. Необходимость исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках обусловлена важностью понимания и контроля сложных нелинейных процессов в магнитных материалах, а также возможностью их применения в передовых технологиях. Исследование этих волн является одним из самых приоритетных направлений теоретической физики, физики конденсированного состояния и материаловедения, поскольку сочетает в себе, как фундаментальные, так и прикладные аспекты задач, стоящих перед создателями высокотехнологичных устройств.

Определяющими факторами актуальности исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках являются:

-расширение горизонтов фундаментальной интерпретации нелинейных физических процессов. Солитоноподобные волны представляют собой уникальный тип устойчивых волн, распространяющихся без изменений формы благодаря балансу нелинейности и дисперсии. В условиях анизотропии, где свойства магнетиков меняются в зависимости от направления в пространстве, именно солитоны могут стать важнейшим инструментом исследования общей теории нелинейных процессов;

-развитие новых технологий в спинtronике, фокусирующейся на использовании спиновых свойств электронов. Солитоноподобные волны могут стать основой для разработки энергоэффективных и быстродействующих устройств. Понимание и управление свойствами солитонов в анизотропных магнетиках позволит разрабатывать новые типы спиновых транзисторов, логических элементов и памяти, что необходимо для создания высокопроизводительных вычислительных систем;

-солитоноподобные волны устойчивы и стабильны, что делает их привлекательными для использования в магнитной памяти и логических схемах. Такие волны обеспечивают надежную передачу информации с минимальными потерями и устойчивость к внешним воздействиям, что важно для энергоэффективной электроники и коммуникационных систем;

-анизотропные магнетики, способные поддерживать направленное распространение солитонов, открывают возможности для создания новых типов материалов с управляемыми магнитными свойствами, что имеет прикладное значение в сенсорике, при фильтрации и передаче информации в связи, а также для систем с высокой степенью миниатюризации;

-методы и результаты исследования солитонов в магнитных средах могут быть перенесены в область оптики, где существует аналогичная задача управления световыми импульсами в оптоволокне. Солитоны в магнетиках могут быть использованы для создания волноводов и других устройств для фотонных технологий.

Таким образом, актуальность исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках диктуется, как чисто научным интересом, так и возможностью прямого практического воплощения- создания функциональных и энергоэффективных устройств будущего.

Степень разработанности темы. Тема солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках является активно развивающейся областью исследований, привлекающей внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. С момента первых работ в этой сфере было достигнуто значительное понимание механизмов формирования и динамики солитонов в магнитных материалах с различными типами анизотропии. В теоретических исследованиях разработаны различные модели, описывающие поведение солитонов в анизотропных магнетиках, включая уравнение Ландау-Лифшица и его модификаций для учета специфики анизотропии. Получены аналитические решения для определенных типов солитонов, что позволило глубже понять их свойства и условия стабильности. Также широко применяются численные методы моделирования динамики солитонов, что позволяет исследовать их поведение в сложных системах и при различных внешних воздействиях. В ряде экспериментов зафиксировано существование солитоноподобных возбуждений в различных магнитных материалах, подтверждая теоретические предсказания. Экспериментально исследованы такие характеристики солитонов, как скорость распрос-

транения, устойчивость и особенности взаимодействия с внешними полями. Начаты исследования по применению солитонов в устройствах спинtronики и магнонных кристаллах, что открывает перспективы для создания новых типов памяти и логических элементов. Наиболее актуальными направлениями исследований считаются изучение влияния формы анизотропии среды и внешних электрических и магнитных полей на свойства и динамику солитонов. При миниатюризации устройств становится актуальным учет квантовых эффектов в поведении солитонов.

Несмотря на значительный прогресс в понимании солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках, данная тема по-прежнему остается актуальной и требует дальнейших исследований для полного раскрытия ее потенциала в фундаментальной науке и передовых технологиях.

Связь с государственными научными программами. Настоящая диссертационная работа находится в русле реализации приоритетных направлений государственных научных программ Республики Таджикистан, ориентированных на продвижение научных исследований, технологическое развитие и инновационную деятельность. В частности, содержание и цели настоящего исследования соответствуют ключевым положениям Стратегии Республики Таджикистан в области науки, технологий и инноваций на период до 2030 года, утверждённой Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 года за №263.

Кроме того, исследования в области магнетизма и спинtronики соответствуют задачам, поставленным в рамках государственных программ по развитию инновационных технологий и повышению научного потенциала страны. Результаты работы могут способствовать реализации этих программ, направленных на создание новых материалов и устройств для информационных технологий и промышленности.

Фундаментальное значение. Солитоны являются важным феноменом нелинейной физики и представляют собой устойчивые волны, которые могут распространяться без изменения формы. Исследование их распространения в

анизотропных магнетиках, где свойства зависят от направления в пространстве, помогает углубить понимание процессов в сложных магнитных системах и развить более универсальную теорию нелинейных волн. Солитоны в магнитных материалах имеют мощный потенциал для создания энергоэффективных и высокоскоростных устройств, таких как элементы памяти и логики. В частности, анизотропные магнетики привлекают внимание из-за их способности поддерживать направленное распространение солитонов, что открывает возможности для создания устройств для надёжной передачи и хранения информации. Другая важная область- это спинтроника, где используются спиновые свойства электронов в магнитных материалах. Наиболее важная проблема современной спинтроники-это поиск путей максимально точного управления потоком информации. Солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках могут быть использованы для создания более надежных и высокоскоростных спиновых транзисторов, что делает это исследование востребованным и актуальным для современной электроники.

Цель работы заключается во всестороннем изучении солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках, включая их формирование, динамику и взаимодействие с внешними полями. Особое внимание уделяется влиянию магнитной анизотропии на поведение этих нелинейных возбуждений. Полученные результаты направлены на расширение фундаментальных знаний в области магнетизма и разработку перспективных приложений в спинтронике и магнонных кристаллах.

Объектом исследования являются солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках, представляющих собой устойчивые локализованные структуры, распространяющиеся в магнитных материалах с анизотропными свойствами.

Предметом исследования являются механизмы формирования, динамика и свойства солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках, роль формы магнитной анизотропии в их устойчивости, взаимодействии с внешними полями и возможном применении в спинтронике и магнонных кристал-

лах.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие основные задачи:

-анализ механизмов формирования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках: изучение условий и процессов, приводящих к возникновению нелинейных возбуждений;

-исследование динамики солитоноподобных волн, определение их устойчивости, скорости распространения и влияния магнитной анизотропии на их поведение;

-моделирование взаимодействия солитоноподобных волн с внешними полями, оценка влияния внешних магнитных и электрических полей на характеристики и эволюцию этих волн;

-разработка теоретических моделей и численных методов, создание подходов для описания и предсказания поведения солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках;

-оценка потенциальных приложений, анализ возможностей использования солитоноподобных волн в спинtronике, магнонных кристаллах и других современных технологиях.

Методы исследования. В работе используются как аналитические методы исследования, так и численное моделирование (компьютерная симуляция динамики солитонов, их взаимодействия с внешними полями и влияния формы анизотропии на их поведение) и сравнительный анализ, основанный на сопоставлении результатов с существующими теоретическими и экспериментальными данными для верификации моделей и выявления новых закономерностей. Комплексное использование этих методов позволяет глубоко исследовать механизмы формирования, динамику и свойства солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках, а также оценить их потенциал для практических приложений.

Соответствие паспорту научной специальности. Работа соответствует паспорту научной специальности 1.3.3.-теоретическая физика.

В рамках исследования рассматриваются солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках, что непосредственно связано с изучением динамики и свойств магнитных возбуждений в материалах с различной анизотропией. Тематика исследования соответствует ряду направлений, сформулированных в паспорте данной научной специальности, а именно :

П.5 - Теория конденсированного состояния. Изучение различных состояний вещества и физических явлений в них. Статистическая физика. Теория фазовых переходов. Физическая кинетика.

П.10 - Теория неравновесных систем. Теория хаоса и турбулентности. Разработка теоретических моделей, направленных на установление взаимосвязи между магнитными свойствами веществ и их электронной, атомной и кристаллической структурами; исследование природы магнитного состояния, особенностей формирования атомной и доменной магнитных структур, а также анализа их эволюции под воздействием внешних факторов. Экспериментальные исследования магнитных характеристик и состояний веществ с применением различных методик с целью выявления взаимосвязи между магнитными свойствами, химическим составом и структурным состоянием материалов, а также установления закономерностей их изменений под действием внешних полей, температурных и механических воздействий.

Научная новизна результатов заключается в том, что впервые:

-установлено, что анизотропные свойства магнетиков критически влияют на формирование и распространение солитоноподобных волн в них;

-описаны механизмы взаимодействия солитоноподобных волн с внешними электрическими и магнитными полями, что открывает возможность управления ими в специфических приложениях;

-предложены модели динамики солитоноподобных волн, способные на точное предсказание их поведения в различных условиях и средах;

-определены перспективы использования солитонов в спинтронике для создания новых типов электронных устройств, основанных на спиновых волноводах и логических элементах, энергоэффективных и высокоскоростных

спинtronных устройств на основе солитоноподобных волн;

-оценена перспектива использования солитонов для управления распространением магнонных волн в магнонных кристаллах, что открывает новые возможности для создания фильтров и устройств обработки сигналов;

-показано, что солитоноподобные волны обладают высокой устойчивостью к внешним возмущениям, что важно для практического применения в условиях сильно возмущённых сред;

-предложен вариант многофункционального устройства, объединяющего функции хранения и обработки информации на основе солитоноподобных волн;

-дана диагностика возможности применения солитонов в квантовых вычислениях в качестве кубитов благодаря их устойчивости и способности к когерентному переносу квантовой информации;

-предложен новый подход к сокращению размеров функциональных элементов электронного оборудования с сохранением или повышением их производительности;

Выносимые на защиту положения:

-механизмы, условия и процессы формирования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках;

-скорость распространения и устойчивость солитоноподобных волн, закономерности их взаимодействия с внешними электрическими и магнитными полями;

-теоретические подходы и численные методы описания поведения солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках;

-принципы практического приложения солитоноподобных волн в спинtronике и магнонных кристаллах.

Теоретическая значимость работы заключается в углубленном изучении солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках. Исследование механизмов их формирования, динамики и взаимодействия с внешними полями способствует расширению фундаментальных знаний в области физики маг-

нитных явлений. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых моделей и теорий, описывающих поведение нелинейных возбуждений в сложных магнитных системах.

Практическая значимость работы заключается в том, что результаты могут быть использованы при проектировании элементов памяти и логики высокоеффективных устройств спинtronики, основанных на управляемых магнитных возбуждениях, разработке магнонных кристаллов-директоров спиновых волн в информационных и коммуникационных технологиях, при чтении специальных курсов по физике твёрдого тела для студентов старших курсов.

Достоверность результатов подтверждается использованием общепризнанных аналитических и численных методов моделирования и анализа солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках и хорошим согласием с существующими экспериментальными данными и теоретическими постулатами.

Личный вклад соискателя заключается в его непосредственном участии в поиске теоретического и экспериментального материала, формулировке математических моделей сформулированных задач и получении их решений. Все численные расчеты выполнены лично соискателем.

Апробация работы. Основное содержание диссертации доложены на: республиканской конференции «Актуальные проблемы естественных, точных и математических наук в современное время» (Рашт, Таджикистан, 2021 г.); VIII международной научно-практической конференции «Роль молодых учёных в развитии науки, инноваций и технологий» (Душанбе, 25-26 мая 2023 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 4 статьи в журналах из Перечня ВАК РФ и 4 статьи в материалах республиканских и международных конференций.

Структура и объём. Диссертация состоит из введения, трёх глав и общих выводов. Работа изложена на 90 страницах машинописного текста, включает 18 рисунков. Список литературы содержит 109 наименований.

Ключевые слова: солитон, магнетик, анизотропия, спинtronика, магнитный кристалл.

ГЛАВА I. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

1.1. Теоретические и экспериментальные исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках

В последнее десятилетие научное сообщество уделяет значительное внимание изучению солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках и других средах. Солитоны, как устойчивые волновые структуры, сохраняющие свою форму в процессе распространения и взаимодействия, играют ключевую роль в различных областях физики, от оптики и магнитогидродинамики до квантовой теории поля и биологических систем. Изучение этих объектов не только расширяет границы теоретической физики, но и способствует разработке новых технологических приложений, таких как сверхпроводящие устройства для квантовых компьютеров, магнитные жидкости в медицинских технологиях и усовершенствованные системы передачи данных.

Настоящий обзор посвящен анализу 50 ключевых публикаций, которые охватывают разнообразные аспекты исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках и смежных областях. Основное внимание в этих работах уделяется теоретическим основам солитонов, их математическому моделированию, а также экспериментальному подтверждению существования и свойств этих необычных волновых структур. Обзор включает как классические работы, так и последние научные достижения, которые подчеркивают актуальность и важность данной темы в современной научной среде.

Цель обзора- систематизация основных направлений и достижений в исследовании солитоноподобных волн, оценка вклада ведущих ученых в данной области и обозначение перспективных направлений.

В своей статье под названием «Солитоноподобные возбуждения в слабо диспергирующих средах» [1] Ковалев А.С. рассматривает возможность существования двухпараметрических солитонов огибающей в средах со звуковым спектром линейных волн и предлагает асимптотическую процедуру нахождения таких солитонных решений в одномерном случае. Ильичев А.Т. в работе

«Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед» [2] доказывает существование солитоноподобных решений полной системы уравнений, описывающей распространение волн в жидкости конечной глубины под ледяным покровом путём исследования уединенных волн разной природы на поверхности раздела. Иванов О.В. в монографии «Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных средах» [3] анализирует вопросы распространения и преобразования электромагнитных волн в слоистых структурах, уделяя особое внимание электродинамическим свойствам таких сред. Жуkenov M.K. в своей статье под названием «Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом» [4] определил структуру матрицанта уравнений Максвелла и получил инвариантные соотношения для особенностей распространения волн.

Другие значимые работы включают в себя исследования по генерации импульсных сигналов аналогов временных солитонов, анализ топологических солитонов в анизотропных магнетиках, а также пути и способы применения магнитных жидкостей в науке и технике. Эти исследования продемонстрировали важность солитоноподобных структур в различных физических процессах и их применения в современных технологиях.

Так, Крутковой Е.Ю. в своей кандидатской диссертации «Оптические свойства анизотропных кремниевых структур» [5] исследованы условия формирования анизотропных кремниевых структур с желаемыми значениями показателей преломления и величиной двулучепреломления. Рассматривается возможность управления оптическими свойствами образцов путём изменения концентрации свободных носителей заряда. В монографии Ковалева А.С. и Иванова Б.А. «Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны» [6] рассматриваются нелинейные волны намагниченности в ферромагнетиках, особенно фокусируясь на динамических и топологических солитонах, их свойствах и взаимодействиях. Бискамп Д. в своей в книге «Nonlinear Magnetohydrodynamics» [7] исследует нелинейные явления в магнитогидродинамике, включая турбулентность и образование солитоноподоб-

ных структур в плазме, что очень важно для понимания астрофизических явлений и управляемого термоядерного синтеза.

Все указанные работы представляют собой лишь небольшую часть широкого круга научных исследований, охватывающих различные аспекты солитонов и связанных с ними феноменов, демонстрируя их широкий спектр применения в современной науке и технике. В продолжение обзора значимых исследований в области солитоноподобных волн и связанных с ними технологий следует указать на следующие работы этого направления. Например, в работе Иванова Б.А., Меркулова А.Ю., Стефановича В.А. и Заспера С.Е. [8] проанализированы топологические солитоны в двумерных ферромагнетиках с высокой степенью анизотропии. Авторами аналитически и численно исследованы свойства таких солитонов, условия их стабильности и влияние числа связанных магнонов на их энергетические характеристики. А в работе Джозефсона Б.Д. [9] представлено фундаментальное открытие, известное сегодня как эффект Джозефсона. Открытие этого эффекта позволило глубже понять процессы квантового туннелирования в сверхпроводниках и оказалось значительное влияние на разработку квантовых технологий, включая квантовые компьютеры и высокочувствительные магнитометры. Книга Бискампа Д. «Нелинейная магнитогидродинамика» [7] продолжает оставаться важнейшим источником знаний о нелинейных процессах в плазме, способствуя развитию теоретических основ сложнейших астрофизических явлений и термоядерного синтеза. Каждая из этих работ вносит свой вклад в развитие теории и практику применения солитонов и солитоноподобных структур в различных областях науки и техники, открывая новые горизонты для технологического прогресса и инноваций [10-50].

В контексте технологических приложений солитоноподобные волны уже доказали свою ценность в усилении и управлении световыми сигналами в оптоволоконных коммуникациях, что позволяет значительно увеличить пропускную способность и уменьшить потери данных при передаче на большие расстояния. Кроме того, принципы, лежащие в основе солитонных взаимодействий

ствий, находят применение в разработке новых методов медицинской диагностики и терапии, где контролируемые волновые пакеты используются для точечного воздействия на биологические структуры.

С академической точки зрения, данное собрание работ обогащает фундаментальные знания о нелинейной динамике, анизотропии и связанных с ними явлениях, что способствует развитию смежных областей науки. Ведущие учёные, чьи работы рассматриваются в обзоре, продолжают вносить весомый вклад в научные исследования, обеспечивая основу для следующего поколения физиков и инженеров. Ожидается, что будущие исследования будут направлены на дальнейшее исследование квантовых свойств и динамики солитонов с целью создания новых квантовых технологий, устройств с низким энергопотреблением и высокой эффективностью. Это, в свою очередь, подтолкнет к новым открытиям в теории и практике, расширяя горизонты того, как мы понимаем и используем волновые явления в естественных и искусственных средах.

1.2. Перспективы практического применения результатов теоретических и экспериментальных исследований солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках

Солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках представляют собой устойчивые нелинейные возбуждения, распространяющиеся без изменения формы благодаря балансу между нелинейностью и дисперсией среды. Исследования в этой области охватывают как теорию, так и эксперимент, направленные на понимание их свойств и потенциальное применение.

Теоретические исследования. Составными частями теоретических исследований являются моделирование и анализ, сосредоточенные на разработке моделей, описывающих поведение солитонов в анизотропных магнетиках. При этом используются уравнения нелинейной динамики, такие как уравнение Ландау-Лифшица, модифицированное для учета анизотропии и нелинейных

эффектов. Например, в работе Ковалева А.С. [1] исследованы солитоноподобные возбуждения в слабо диспергирующих средах со звуковым спектром линейных волн.

Анализ стабильности солитонов и их взаимодействия с другими возбуждениями или дефектами в кристаллической решетке составляют важную часть теоретического исследования, безусловно важного для управления свойствами материалов и разработки устройств на их основе.

Экспериментальные исследования. Экспериментально солитоноподобные волны наблюдаются с использованием методов магнитной резонансной томографии, нейтронной дифракции и других методик. Генерация солитонов достигается путем приложения внешних полей или импульсных воздействий на магнитные материалы. При этом производятся измерения таких характеристик солитонов, как скорость, амплитуда, ширина и взаимодействие с внешними полями. Эти данные позволяют сопоставить экспериментальные результаты с теоретическими моделями и корректировать параметры последних.

Солитоноподобные волны рассматриваются как потенциальные носители информации в спинtronных устройствах благодаря их устойчивости и способности переносить спиновую информацию на большие расстояния без значительных потерь. Использование солитонов в качестве элементов памяти позволяет создавать устройства с высокой плотностью записи и быстрым доступом к данным. Кроме того, солитоны могут использоваться для управления распространением магнитных волн в магнитных кристаллах, что открывает возможности для создания новых типов фильтров и логических элементов.

Таким образом, исследования солитоноподобных волн в анизотропных магнетиках объединяют фундаментальные теоретические разработки и прикладные экспериментальные исследования, направленные на создание новых устройств и технологий в области магнитных материалов и спинtronики.

Приложения в спинtronике. Солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках находят широкое применение в спинtronике- области, которая

использует спиновые степени свободы электронов для передачи, обработки и хранения информации. Примерная схема практического применения этих волн в спинтронике следующая:

-перенос спиновой информации. Солитоны в анизотропных магнетиках способны переносить спиновую информацию на большие расстояния без существенных потерь энергии. Благодаря своей устойчивости к внешним возмущениям и способности сохранять форму при распространении солитоны являются идеальными кандидатами в проводники в спиновых волноводах спинтронных устройств;

-создание высокоскоростных логических элементов. Солитонные возбуждения могут использоваться для реализации логических операций в спинтронике. Взаимодействие между солитонами позволяет создавать логические гейты, которые работают быстрее и эффективнее, чем их электронные аналоги. Это открывает путь к разработке спинтронных процессоров с высокой производительностью;

-разработка энергоэффективной памяти. Солитоноподобные структуры способны создавать магнитную память с высокой плотностью записи и представляют собой биты информации, где их присутствие или отсутствие соответствует логическим состояниям «1» и «0», что обеспечивает низкое энергопотребление и повышенную стабильность хранения данных;

-образование скирмионов- топологически защищенных солитоноподобных возбуждений в анизотропных магнетиках, имеющих нанометровые размеры и способных перемещаться под действием очень слабых токов, что делает их перспективными для использования в спинтронных устройствах. Скирмионы применяются для создания рассеянной памяти и логических элементов нового поколения;

-управление спиновыми волнами в магнетиках, что очень важно при создании магнонных спинтронных устройств, где информация передается не электрическими зарядами, а спиновыми волнами (магнонами). Такой подход снижает энергопотребление и уменьшает тепловыделение.

Повышенная топологическая устойчивость солитонов к внешним воздействиям (дефекты кристаллической решетки, внешние магнитные и электрические поля) обеспечивает надежность спинtronных устройств и расширяет их применение в условиях повышенных нагрузок и экстремальных температур.

Многофункциональные устройства. Солитоноподобные волны позволяют создавать многофункциональные спинtronные устройства, совмещающие функции логики и памяти. Это способствует миниатюризации электронных компонентов и развитию интегральных схем нового типа.

Квантовые вычисления. Исследования показывают, что солитоны могут использоваться в качестве кубитов для квантовых вычислений. Их способность сохранять когерентность на больших расстояниях делает их перспективными для разработки квантовых спинtronных устройств.

Снятие ограничений масштабирования. Солитоноподобные структуры помогают преодолеть физические ограничения традиционной электроники, связанные с размерами компонентов и тепловыделением. Спинtronные устройства на основе солитонов предлагают новые возможности для дальнейшего масштабирования и повышения эффективности вычислительных систем.

1.2.1. Применение в технологии магнитной памяти

Солитоноподобные волны играют ключевую роль в развитии современных технологий магнитной памяти благодаря следующим своим уникальным свойствам:

-**доменные стенки** в магнитной памяти, представляющие собой границу между областями с различной намагниченностью в ферромагнитных материалах. Их способность перемещаться под воздействием внешних полей или токов позволяет использовать их в качестве носителей информации. В частности, в устройствах памяти с произвольным доступом на основе доменных стенок (DW-MRAM) информация кодируется положением доменных стенок в нано-

проводах. Преимущества таких систем включают высокую скорость записи и чтения, а также низкое энергопотребление;

-скирмионы в магнитной памяти- топологически стабильные вихревые структуры намагниченности, обладающие малыми размерами и устойчивостью к внешним воздействиям. Их компактность и стабильность делают их перспективными кандидатами для использования в высокоплотных устройствах хранения данных. В скирмionных резистивных магнитных ячейках памяти (Skyrmion Racetrack Memory) информация записывается в виде последовательности скирмионов, движущихся вдоль нанопроводов под воздействием спин-орбитальных токов. Такие системы обещают значительное увеличение плотности записи и энергоэффективности по сравнению с традиционными методами.

Главными преимуществами использования солитоноподобных структур являются:

- высокая плотность записи;
- большая скорость доступа;
- низкое энергопотребление.

Таким образом, использование солитоноподобных волн, таких как доменные стенки и скирмионы, открывает новые перспективы в разработке высокоэффективных и компактных систем магнитной памяти, соответствующих современным требованиям к скорости, плотности и энергопотреблению.

1.2.2. Приложения в магнонные кристаллы

Магнонные кристаллы-это искусственно созданные периодические структуры в магнитных материалах, предназначенные для управления распространением спиновых волн (магнонов). Солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках играют ключевую роль в функционировании и применении магнонных кристаллов в качестве:

-директоров спиновых волн; солитоноподобные возбуждения, такие как магнонные солитоны, обеспечивают устойчивое и контролируемое распространение спиновых волн в магнонных кристаллах, что позволяет эффективно управлять передачей информации на основе спиновых волн и является основой для разработки новых типов устройств обработки сигналов;

-фильтров и анализаторов сигналов. Магнонные кристаллы вкупе с солитоноподобными волнами могут выполнять функцию фильтра, пропуская или блокируя определенные частоты спиновых волн. Это открывает возможности для создания высокоэффективных фильтров и устройств обработки сигналов в диапазоне гигагерцовых частот;

-логических и вычислительных элементов. Солитоноподобные волны в магнонных кристаллах могут использоваться для реализации логических операций, таких как И, ИЛИ и НЕ. Взаимодействие солитонов позволяет создавать логические схемы, работающие на основе спиновых волн, что способствует развитию магнонных вычислений с низким энергопотреблением;

Перспектива и исследования. Исследования в области магнонных кристаллов и солитоноподобных волн активно развиваются. Например, работы российских и европейских физиков показывают на возможность создания магнонных кристаллов из системы «сверхпроводник-ферромагнетик», что открывает новые перспективы для посткремниевых электронных устройств.

Таким образом, солитоноподобные волны в анизотропных магнетиках являются фундаментальной основой для функционирования магнонных кристаллов, обеспечивая эффективное управление спиновыми волнами и открывая широкие возможности для применения в современных информационных технологиях в виде:

-перестраиваемых фильтров. Использование солитоноподобных волн в магнонных кристаллах позволяет разрабатывать перестраиваемые фильтры, способные динамически изменять свои характеристики под воздействием внешних факторов, таких как магнитное поле или электрический ток. Это особенно важно для систем связи и обработки сигналов, где требуется гибкая на-

стройка параметров фильтрации;

-магнонных интерферометров. Солитоноподобные волны могут быть использованы в магнонных интерферометрах для высокоточной обработки сигналов. Такие устройства способны выполнять функции аналогичных оптических интерферометров, но в диапазоне спиновых волн, что открывает новые возможности для миниатюризации и интеграции в электронные схемы.

-квантовых вычислителей. Исследования показывают, что солитоноподобные волны в магнонных кристаллах могут быть использованы для реализации квантовых логических элементов. Их способность к когерентному распространению и взаимодействию делает их перспективными кандидатами для создания квантовых вычислительных систем;

-сенсоров на основе магнонных кристаллов. Солитоноподобные волны чувствительны к изменениям внешних условий, что позволяет использовать магнонные кристаллы в качестве высокочувствительных сенсоров для детекции магнитных полей, температуры и других параметров.

ГЛАВА II. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛН

2.1. Исследование солитонных решений нелинейного уравнения Шрёдингера при наличии самосогласованного потенциала

В контексте физического моделирования нелинейных волновых процессов нередко рассматриваются системы дифференциальных уравнений, предназначенные для описания динамики взаимодействия ограниченного числа когерентных волн или волновых пакетов. Одной из наиболее фундаментальных и часто используемых моделей такого рода является скалярное уравнение Шрёдингера вида

$$i\psi_t + \psi_{xx} + U(x, t)\psi = 0, \quad (2.1)$$

играющее ключевую роль в анализе соответствующих нелинейных явлений.

В данном контексте функция $U(x, t)$ интерпретируется как эффективный потенциал, соответствующий низкочастотной волне. Следует подчеркнуть, что уравнение (1) с заданным потенциалом $U(x, t)$ во многих физических моделях описывает поведение смеси газов в магнитных кристаллах с выраженной слоистой структурой, где межслойное взаимодействие оказывает существенное влияние на динамические свойства системы. В пределе низких температур данная модель допускает интерпретацию в рамках теории бозе-газа в конденсированных средах.

Наиболее общей формой уравнения (1) выступает векторное нелинейное уравнение Шрёдингера (ВНУШ) вида

$$i\psi_{jt} + \psi_{jxx} + U(x, t)\psi_j = 0; \quad j = 1, \bar{n}. \quad (2.2)$$

Подобные уравнения возникают при исследовании динамики намагниченности в теории магнетизма и в физике плазмы, где они, в частности, используются для моделирования взаимодействия ленгмюровских волн. Аналогичные математические структуры появляются также при описании взаимодействия спиновых волн с фононными модами в ферромагнетиках [51], а также

в рамках моделей экситон - фононного взаимодействия в молекулярных кристаллах [52].

Настоящее исследование направлено на применение алгебро-геометрического метода, впервые предложенного Н.А. Чередником [53] для построения точных решений, как скалярных, так и векторных форм нелинейного уравнения Шрёдингера. Этот подход позволяет в явной форме получить, как известные, так и новые многосолитонные решения указанных уравнений [54,55].

Следует отметить, что в большинстве прикладных физических задач естественным образом возникают системы уравнений, сводящиеся к векторной форме нелинейного уравнения Шрёдингера вида

$$i\bar{\psi}_{1t} + \psi_{1xx} + U(x,t)\psi_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$i\bar{\psi}_{2t} + \psi_{2xx} + U(x,t)\psi_2 = 0.$$

Нами рассматривается система с самосогласованным потенциалом вида

$$\bar{U}(x,t) = \bar{\psi}_1\psi_2 + \psi_1\bar{\psi}_2. \quad (2.4)$$

В рамках предложенной схемы построения решений [56, 57] возможно аналитически сконструировать многосолитонные решения соответствующего нелинейного уравнения с убывающими граничными условиями. Для этого эрмитову матрицу E_{ij} целесообразно задать в виде

$$(E_{ij}) = \begin{cases} 2\epsilon\gamma_1\bar{\beta}_1 & \epsilon(\gamma_1\bar{\beta}_2 + \gamma_2\bar{\beta}_1) \\ \epsilon(\gamma_1\bar{\beta}_2 + \gamma_2\bar{\beta}_1) & 2\epsilon\gamma_2\bar{\beta}_2 \end{cases}. \quad (2.5)$$

Используя представление (2.5), можно записать эрмитову форму самосогласованного потенциала в виде

$$\frac{U_t}{2} + \sum_{i=1}^2 \epsilon_i b_i^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i |\psi_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i(x,t) E_{i,j} \psi_j(x,t), \quad (2.6)$$

где

$$E_{ij} = C_{ij}(\bar{E}(\chi_i)), \quad (2.7)$$

$$\Phi_i(x,t) = b_i \psi(x,t, k_i), \quad i = 1, n.$$

Условия самосогласованности, заданные в форме (6), предполагают, что функ-

ции $\Phi_1, \dots, \Phi_n; \psi_1 \dots \psi_N$ удовлетворяют $(N+n)$ -компонентному векторному нелинейному уравнению Шрёдингера. При этом функции $\Phi_j(x, t)$ характеризуются осциллирующей асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$, тогда как функции $\psi_j(x, t)$ экспоненциально убывают в том же пределе.

Предполагая, что матрица E_{ij} имеет структуру, заданную в (2.5), условие (2.6) принимает форму

$$-\sum_{i,j=1}^2 \bar{\psi}_i E_{ij} \psi_j = -\varepsilon (\bar{\psi}_1 \psi_2 + \psi_1 \bar{\psi}_2), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \\ \Phi_2 &= \bar{\beta}_1 \psi_1 + \bar{\beta}_2 \psi_2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для конкретизации анализа рассмотрим наиболее простую реализацию условий самосогласованности, при которой собственные значения матрицы E линейно зависят от спектрального параметра следующим образом:

$$E(k) = k. \quad (2.10)$$

При таком выборе соответствующая матрица (C_{ij}) выражается через элементы матрицы (E_{ij}) и функцию $E(k)$ в виде

$$(C_{ij}) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon\gamma_1\bar{\beta}_1}{\bar{\chi}_1 - \chi_1} & \frac{\varepsilon(\gamma_1\bar{\beta}_2 + \gamma_2\bar{\beta}_1)}{\bar{\chi}_1 - \chi_1} \\ \frac{\varepsilon(\gamma_1\bar{\beta}_2 + \gamma_2\bar{\beta}_1)}{\bar{\chi}_2 - \chi_2} & \frac{2\varepsilon\gamma_2\bar{\beta}_2}{\bar{\chi}_2 - \chi_2} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Положим, что все константы γ_i, β_i в (2.11) являются положительными, а параметр ε фиксирован как равный 1. В рамках анализа решения системы уравнений (2.3) рассмотрим три различных конфигурации расположения полюсов:

1) Пусть $\operatorname{Im} \chi_1 > 0, \operatorname{Im} \chi_2 < 0$. В таком случае, согласно с теоремой 2 из [55], должны быть выполнены следующие условия:

$$\frac{1}{i} \frac{2\gamma_1\bar{\beta}_1}{\chi_{12}} = \frac{2\gamma_1\bar{\beta}_1}{2\beta_1} > 0, \quad \frac{1}{i} \frac{2\gamma_2\bar{\beta}_2}{\chi_{22}} = \frac{2\gamma_2\bar{\beta}_2}{2\beta_2} < 0. \quad (2.12)$$

2) При условии $\operatorname{Im} \chi_1 > 0, \operatorname{Im} \chi_2 < 0$ требуется, чтобы соответствующая матрица была положительно определённой. Это, в свою очередь, предполагает выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_1\bar{\beta}_1}{2\beta_1} &> 0, & \frac{2\gamma_2\bar{\beta}_2}{2\beta_2} &> 0, \\ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\beta_1\beta_2} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\beta_1\beta_2} &> \frac{\gamma_1\bar{\beta}_2}{\gamma_2\bar{\beta}_1} + \frac{\gamma_2\bar{\beta}_1}{\gamma_1\bar{\beta}_2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3) В случае $\operatorname{Im} \chi_1 < 0$, $\operatorname{Im} \chi_2 < 0$, эрмитова матрица должна быть отрицательно определённой, что реализуется при

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_1\bar{\beta}_1}{2\beta_1} &< 0, & \frac{2\gamma_2\bar{\beta}_2}{2\beta_2} &< 0, \\ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\beta_1\beta_2} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\beta_1\beta_2} &> \frac{\gamma_1\bar{\beta}_2}{\gamma_2\bar{\beta}_1} + \frac{\gamma_2\bar{\beta}_1}{\gamma_1\bar{\beta}_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь перейдём к построению явных выражений решений системы (2.3). Для этого используем функциональные соотношения типа

$$\Psi(x, t, \chi) = \frac{\det M(x, t, \chi)}{\det M(x, t)} \cdot e^{i\chi + iwt}, \quad (2.15)$$

где определены величины

$$\begin{aligned} M_{ij} &= C_{ij} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\chi}_i - \chi_j}; & \omega_i &= \chi_i(x + \chi_i \cdot t); & i, j &= 1, N \\ \hat{M}_{ij} &= M_{ij}, & i, j &= 1, N; & M_{00} &= 1; & M_{ij} &= e^{i\bar{\omega}_i}, \\ M_{0i} &= (\chi - \chi_i)e^{-i\omega_i}; & i &= 1, N \end{aligned} \quad (2.16)$$

и другие дополнительные параметры, вводимые в процессе решения.

В результате получим аналитически выраженные формы функций Ψ_1 и Ψ_2 , задаваемые через параметры спектра и матрицы взаимодействия. Общее решение системы уравнений (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\det M(x, t)} \left(C_{22} e^{i w_1(x, t) - P_1(x, t)} - C_{12} e^{i w_2(x, t) - P_2(x, t)} + \frac{\bar{\chi}_{12}}{\chi_{12}\chi_{22}} \cdot e^{i w_2(x, t) - 2P_2(x, t)} \right), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\det M(x, t)} \left(C_{11} e^{i w_2(x, t) - P_2(x, t)} - C_{21} e^{i w_1(x, t) - P_1(x, t)} + \frac{\bar{\chi}_{21}}{\chi_{21}\chi_{11}} \cdot e^{i w_1(x, t) + P_2(x, t) + 2P_1(x, t)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \det M(x, t) &= C_{11}C_{22} + |C_{12}|^2 + \frac{C_{11}}{\chi_{22}} e^{2P_2(x, t)} + \frac{C_{22}}{\chi_{11}} e^{2P_1(x, t)} - \left(\frac{C_{12}}{\chi_{21}} e^{i(w_2(x, t) - w_1(x, t))} \right) + \\ &+ \frac{C_{21}}{\chi_{12}} e^{-i(w_2(x, t) - w_1(x, t))} \cdot e^{P_1(x, t) + P_2(x, t)} + e^{2(2P_1(x, t) + P_2(x, t))} \cdot \frac{|\chi_{12}|^2}{|\bar{\chi}_{12}|^2 \chi_{11}\chi_{22}}. \end{aligned}$$

Общее решение системы (2.3) в окончательном виде можем записать в виде [58,59]:

$$\phi_1 = \frac{A_i e^{i(q_1 x + \omega_1 t)} \cosh(\beta_1(x + v_1 t) + h_i)}{B_1 \cosh(\beta^+(x + v^+ t) + h_1) + B_2 \cosh(\beta^-(x + v^- t) + h_1)} + \frac{B_i e^{i(q_2 x + \omega_2 t)} \cosh(\beta_2(x + v_2 t) + a_i)}{B_3 \cos(qx + \omega t + \omega_{01})}, \quad (2.17)$$

где, согласно соотношениям (2.16), введены обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \alpha_1 + i\beta_1; \quad \chi_2 = \alpha_2 + i\beta_2; \\ h_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\chi_{21}}{\chi_{11} \chi_{22} C_{22}} \right|, \quad h_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{11} \chi_{11}}{\chi_{22} C_{22}} \right|, \\ \chi_{ij} &= \chi_i - \chi_j, \quad \bar{\chi}_{ij} = \bar{\chi}_i - \chi_j \\ q &= \alpha_2 - \alpha_1; \quad \omega = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2) \\ q_1 &= \alpha_1; \quad \omega_1 = \alpha_1^2 - \beta_1^2; \quad q_2 = \alpha_2, \\ \omega_2 &= \alpha_2^2 - \beta_2^2; \quad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2; \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1. \\ V^+ &= \frac{2(\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1)}{\beta_1 + \beta_2}; \quad V^- = \frac{2(\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}; \quad (2.18) \\ V_1 &= 2\alpha_1; \quad V_2 = 2\alpha_2; \quad \chi_{ij} = \chi_i - \chi_j \\ A_1 &= - \left[\frac{\gamma_2 \bar{\chi}_{12} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{12})}{\chi_{21} \chi_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ B_1 &= - \left[\frac{\gamma_2 \bar{\chi}_{21} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}{\chi_{11} \chi_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ A_2 &= - \left[\frac{\bar{\beta}_2 \bar{\chi}_{12} (\beta_1 C_{12} - \beta_2 C_{11})}{\chi_{21} \chi_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ B_2 &= - \left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\chi}_{21} (\beta_2 C_{21} - \beta_1 C_{22})}{\chi_{11} \chi_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ b_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_2 \bar{\chi}_{12}}{\chi_{21} \chi_{11} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})} \right|; \\ a_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_1 \bar{\chi}_{21}}{\chi_{12} \chi_{22} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})} \right|; \\ a_2 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\bar{\beta}_1 \bar{\chi}_{21}}{\chi_{12} \chi_{22} (\bar{\beta}_2 C_{21} - \bar{\beta}_1 C_{22})} \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что полученное двухсолитонное решение (2.17) адекватно описан

сывает взаимодействие спиновых возбуждений (спиновых волн) в узловых точках магнитной кристаллической решётки, оказывая влияние на эволюцию её динамики. Более того, можно убедиться, что при любом допустимом расположении полюсов решение (2.17) экспоненциально затухает в пределе:

$$\varphi_{i|x|\rightarrow\infty} \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Построенные решения обладают прикладным значением. Они могут быть использованы для вычисления обобщённых выражений динамического структурного формфактора, применяемого при интерпретации данных экспериментов по нейтронному рассеянию на солитонном газе в магнитных системах, включая гейзенберговские ферромагнетики с учётом магнон-фононного взаимодействия.

В заключение подчеркнём, что проведённый анализ демонстрирует существование регулярных односолитонных и двухсолитонных решений для нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованными потенциалами, что открывает новые возможности при описании нелинейных возбуждений в магнетиках и других конденсированных средах.

2.2. Многомерная динамика магнитных систем с учётом квадрупольных и октупольных мод спиновых возбуждений

Одним из активно развивающихся направлений современной теории конденсированных сред являются исследования, посвящённые нелинейным возбуждениям в магнитных системах [60]. Существенное внимание в данной области уделяется различным аспектам теории солитонов в многомерных магнетиках [60–62], где изучаются решения феноменологических уравнений динамики намагниченности в магнитоупорядоченных средах. При этом особый интерес представляет зависимость структуры таких решений от размерности пространства, природы магнетика, типа магнитной анизотропии, а также ориентации внешнего магнитного поля.

Вместе с тем, анализу указанных явлений часто требуется квантово-механический подход, основанный на микроскопическом рассмотрении моделей магнетиков, что предполагает интерпретацию результатов в квантовом или полуклассическом формализме. В квантовом случае задача сводится к решению уравнения Шрёдингера в операторной форме $\hat{H}\Psi=E\Psi$, то есть к диагонализации гамильтониана системы и нахождению собственных значений и функций. В отличие от этого, классическая постановка приводит к необходимости решения системы нелинейных уравнений движения-функций, описывающих эволюцию физических величин во времени. Таким образом, встает вопрос об адекватном переходе от квантового описания к классическому, при котором сохраняются существенные свойства системы. Это требует глубокого анализа точек соприкосновения квантовых и классических моделей нелинейной спиновой динамики.

Традиционно такой переход реализуется через замену спиновых операторов S на классические магнитные моменты, что строго оправдано в пределе $S \rightarrow \infty$, приводя, в частности, к уравнениям Ландау–Лифшица и синус-Гордона. Однако более строго обоснованным подходом является метод пробных функций [62], эффективность которого во многом зависит от выбора соответствующего функционального базиса.

Одним из наиболее естественных способов осуществления редукции квантового описания к классическому является усреднение гамильтониана по специально подобранным пробным функциям. Наибольшее оправдание в данном контексте имеет использование когерентных состояний, поскольку они минимизируют неопределённости и, тем самым, наиболее близки к классическим конфигурациям.

Особый интерес представляет построение когерентных состояний на основе симметрий группы $SU(2)$ которая соответствует внутренней симметрии гамильтониана [61]. Показано, что в случае $S \geq 1$ возможна редукция длины классического вектора спина-явление, необъяснимое в рамках чисто классической теории. Кроме того, поведение системы не может быть адекватно опи-

сано лишь одним вектором намагниченности, так как вклад различных взаимодействий выходит за рамки классического потенциала.

Существуют два возможных механизма объяснения наблюдаемого сокращения эффективного спина:

(1) возбуждение высокоординерных спиновых степеней свободы-квадрупольных, октупольных и т.д.;

(2) развитие спинового хаоса вблизи аттрактора, соответствующего симметрии $SU(2)$.

Для анализа таких режимов построим обобщённые когерентные состояния (ОКС) на группе $SU((2S+1))$, действующие в гильбертовом пространстве представлений. В качестве референтного (вакуумного) вектора выберем вектор наименьшего веса $|0\rangle$ фундаментального представления группы вида

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Максимальная изотропная подгруппа для данного вакуумного состояния будет $SU(2S+1)$. Легко убедиться, что при использовании верхнетреугольных матричных операторов такие когерентные состояния можно описать матрицами следующего типа:

$$\hat{T}^+ = \begin{pmatrix} 0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ 0 0 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \dots \dots \dots \\ 0 0 0 \dots 0 0 \end{pmatrix} = \sum_j \alpha_j \hat{T}_j^+ \quad (2.21)$$

учитывая, что

$$\exp\{\hat{T}_j^+ - \hat{T}_j^-\}|0\rangle = 1. \quad (2.22)$$

Обнулив, согласно вышеуказанным условиям, определённые коэффициенты, получаем, что искомые обобщённые когерентные состояния формируются не-диагональными генераторами, локализованными в последнем столбце и последней строке представлений.

Коэффициенты при $(2S+1)$ диагональных операторах можно считать равными нулю, поскольку они принадлежат подалгебре изотропии $SU(2S)$. Единственный оставшийся диагональный генератор, соответствующий подгруппе $U(1)$, также не вносит вклада в построение обобщённых когерентных состояний (ОКС).

Не вдаваясь в технические подробности, приведём окончательное выражение:

$$|\Psi\rangle = \exp\left\{\sum_{i=1}^{2j} (\xi_i T^+ - \xi_i T^-) |0\rangle\right\} = \cos|\xi| (|0\rangle + \Psi_1 |1\rangle + \dots + \Psi_{2j} |2j\rangle), \quad (2.23)$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{2j} |\xi_i|^2, \quad |\xi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_i = \frac{\xi_i}{|\xi|} \tan|\xi|. \quad (2.24)$$

Введя обозначение

$$|\Psi|^2 = \sum_{i=1}^{2j} |\Psi_i|^2, \quad (2.25)$$

получим

$$\cos|\xi| = \left(1 + |\Psi|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и находим, что когерентное состояние имеет вид [61]

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1, \dots, \Psi_{2j}\rangle = \left(1 + |\Psi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ |0\rangle + \sum_{i=1}^{2j} \Psi_i |i\rangle \right\}. \quad (2.26)$$

Построенная система ОКС (4) основана на генераторах фундаментального представления группы $SU(2S+1)$ и представляет собой начальную точку в иерархии ОКС, соответствующих более высоким представлениям.

В предыдущих исследованиях [63; 64] особое внимание было уделено моделям магнитных систем со спином $S = 1$, в которых ионы в узлах кристаллической решётки могут находиться в трёх квантовых состояниях. Переходы между $(2S+1)$ квантовыми уровнями описываются операторами поляризации группы $SU(2S+1)$.

Важно отметить, что для систем с полуцелым спином отсутствуют ограничения, характерные для целых значений S , при которых магнитный порядок

возможен лишь в определённом интервале параметров одноионной анизотропии. Особый интерес представляет случай, когда анизотропия существенно превосходит обменное взаимодействие- ситуация, противоположная условиям применимости классических подходов [65]. Анализ поведения магнетиков с полуцелым спином позволяет с одной стороны выявить их уникальные особенности, а с другой выявить универсальные черты, присущие всем анизотропным системам.

Настоящее исследование направлено на изучение магнетиков со спином $S = 3/2$, квантовое состояние которых описывается в шестимерном пространстве. Рассматриваемый ферромагнетик со спином $S = 3/2$ характеризуется гаммилтонианом

$$\hat{H} = -J \sum_j \left(\hat{\vec{S}}_j \hat{\vec{S}}_{j+1} + \delta \cdot \hat{\vec{S}}_j^z \hat{\vec{S}}_{j+1}^z \right) \quad (2.27)$$

и описывается с использованием обобщённых когерентных состояний группы $SU(4)$, как в комплексной, так и в вещественной параметризациях [66].

Квантовые операторы спина удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям и усредняются по когерентному состоянию вида (2.23), что позволяет перейти к полуклассическому описанию. В комплексной параметризации лагранжиан модели имеет обобщённый вид

$$\hat{S}_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_j^z = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

где они удовлетворяют коммутационными соотношениям

$$[\hat{S}^+, \hat{S}^-] = 2\hat{S}^z, \quad [\hat{S}^z, \hat{S}^\pm] = \pm \hat{S}^\pm.$$

Для усреднения спиновых операторов используем когерентное состояние [64] в пространстве $SU(2S+1)/SU(2S) \cdot U(1)$ в виде (2.23).

Что касается получения динамических уравнений в комплексных параметризациях (см. [61]), то там построен лагранжиан в более общем виде. Для произвольного значения лагранжиана получаем

$$L = ih \frac{\sum_{j=1}^{2S} \left(\dot{\Psi}_{jk} \bar{\Psi}_j - \Psi_j \dot{\bar{\Psi}}_{jk} \right)}{1 + \sum_{j=1}^{2S} |\Psi_j|^2} - H(\Psi_j \bar{\Psi}_j) \quad (2.28)$$

Варьируя лагранжиан (2.28), можно вывести систему уравнений движения в пространстве $SU(2S+1)$ вида

$$i\dot{\Psi}_k = \left(1 + \sum_{j=1}^{2S} |\Psi_j|^2 \right) \left[\left(1 + |\Psi_k|^2 \right) \frac{\delta H}{\delta \Psi_k} + \sum_{j=1}^{2S} \Psi_k \bar{\Psi}_j \frac{\delta H}{\delta \bar{\Psi}_j} \alpha_{jk} \right], \quad (2.29)$$

где

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} 0, & k = j \\ 1, & k \neq j \end{cases}.$$

Средние значения спиновых операторов по состояниям (2.23) выражаются как

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^+ \rangle &= \frac{\sqrt{3}\Psi_2 \bar{\Psi}_3 + 2\Psi_1 \bar{\Psi}_2 + \sqrt{3}\bar{\Psi}_1}{1 + |\bar{\Psi}_1|^2 + |\bar{\Psi}_2|^2 + |\bar{\Psi}_3|^2}, \\ \langle \hat{S}^- \rangle &= \frac{\sqrt{3}\bar{\Psi}_2 \Psi_3 + 2\bar{\Psi}_1 \Psi_2 + \sqrt{3}\Psi_1}{1 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2}, \\ \langle \hat{S}^z \rangle &= \frac{1}{2} \frac{3|\Psi_3|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_1|^2 - 3}{1 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Хотя комплексная параметризация когерентных состояний $SU(4)$ удобна при описании легкоосных магнетиков, она оказывается менее адекватной для магнетиков с лёгкой плоскостью или при наличии сильных нелинейных эффектов. Физически более содержательным и удобным в таких случаях является подход, основанный на вещественной параметризации когерентных состояний, построенных на операторах $SU(4)$, позволяющий учесть, как квадрупольную, так и октупольную динамику спина в магнетиках со спином $S = 2/3$. В рамках этой параметризации пробная функция

$$|\Psi\rangle = U(\theta, \varphi, \gamma) \exp(2i g \hat{Q}^{xy}) \exp(-i\beta \hat{S}^z) \exp(ik \hat{F}^{xyz}) |0\rangle \quad (2.31)$$

усредняется с операторами (2.30), где референтное состояние определяется оператором Вигнера, описывающим вращение в пространстве ориентацион-

ных параметров θ и φ . Параметры γ и β отвечают за вращение мультипольных моментов, тогда как g и k характеризуют изменение их амплитуд.

Обобщённое когерентное состояние (2.26) может быть сведено к комплексной параметризации, где вводятся функции типа

$$U(\theta, \varphi, \gamma) = \exp(-i\varphi \hat{S}^x) \exp(-i\theta \hat{S}^y) \exp(-i\gamma \hat{S}^z).$$

Усреднение операторов (2.30) приводит к выражениям для проекций классического спина:

$$\hat{Q}^{xy} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - квадрупольный момент}$$

$$\hat{F}^{xyz} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - октупольный момент.}$$

Отметим, что унитарный оператор (2.31) обеспечивает переход в собственную подвижную систему координат, где параметры θ и φ характеризуют ориентационную динамику классического спина. Параметры γ и β описывают вращение квадрупольного и октупольного моментов вокруг вектора спина, а g и k характеризуют изменение длины классического спина, квадрупольного и октупольного моментов.

Обобщённое когерентное состояние (2.27) может быть сведено к комплексной параметризации вида

$$|\Psi\rangle = \Psi_0|0\rangle + \Psi_1|1\rangle + \Psi_2|2\rangle + \Psi_3|3\rangle, \quad (2.32)$$

где вводятся следующие функции:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= A_1 e^{\frac{3i}{2}(\varphi-\gamma-\beta)} - A_2 e^{\frac{i}{2}(3\varphi+\gamma-3\beta)} + B_1 e^{\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma+3\beta)} + B_2 e^{\frac{3i}{2}(\varphi+\gamma+\beta)}, \\ \Psi_1 &= A_3 e^{\frac{3i}{2}(\varphi-\gamma+\beta)} - A_4 e^{\frac{i}{2}(\varphi+\gamma-3\beta)} + B_3 e^{\frac{i}{2}(\varphi-\gamma+3\beta)} + B_4 e^{\frac{3i}{2}(\varphi+3\gamma+3\beta)}, \\ \Psi_2 &= B'_4 e^{\frac{i}{2}(\varphi+3\gamma+3\beta)} - B'_2 e^{\frac{i}{2}(\varphi-\gamma+3\beta)} + A'_4 e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\gamma-3\beta)} - A'_2 e^{-\frac{i}{2}(\varphi-3\gamma-3\beta)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\Psi_4 = B'_1 e^{-\frac{3}{2}i(\varphi+\gamma+\beta)} - B'_2 e^{-\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma+3\beta)} + A'_1 e^{-\frac{3}{2}i(\varphi-\gamma-\beta)} + A'_2 e^{\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma-3\beta)},$$

Здесь:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_i \sin k, & B_1 &= b_i \cos k \\ A'_i &= a_i \cos k, & B'_i &= b_i \sin k \\ a_1 &= \sin^3 \frac{\vartheta}{2} \cos g, & a_2 &= \sqrt{3} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin g \\ a_3 &= \sqrt{3} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 g, \quad a_4 = \cos \vartheta \left(1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \sin g, \\ b_1 &= \sqrt{3} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin g, \quad b_2 = \cos^3 \frac{\vartheta}{2} \cos g, \\ b_3 &= 2 \sin \vartheta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \sin g, \quad b_4 = \sqrt{3} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos g, \end{aligned}$$

$|i\rangle$ - вектор столбец с единицей на $i+1$ -й строке (см.(1)).

Усреднение операторов (2.26) приводит к выражениям для проекций классического спина вида

$$\langle \hat{S}^+ \rangle = \frac{3}{2} e^{i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \sin \vartheta \quad (2.34a)$$

$$\langle \hat{S}^- \rangle = \frac{3}{2} e^{-i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \sin \vartheta \quad (2.34b)$$

$$\langle \hat{S}^z \rangle = \frac{3}{2} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \cos \vartheta \quad (2.34b)$$

Сравнение с SU(3) результатами [66, 67] показывает, что сокращение спина, обусловленное октупольным взаимодействием, аналогично эффекту квадрупольного поля для $S=1$ и определяется фактором $\cos 2k$. Однако влияние квадрупольной компоненты $(1 - \cos^2 2g)$ имеет иной характер, чем в случае $S=1$.

Представление квантового гамильтониана в форме континуального интеграла по траекториям приводит к следующему лагранжиану полуклассической модели:

$$L = \frac{3}{4} \hbar \cos 2k \cos^2 g (3 \cos^2 g \cdot \beta_t + \cos \vartheta \cdot \varphi_t + \gamma_t) - H, \quad (2.35)$$

где $H = \langle \hat{H} \rangle$ - полуклассический аналог соответствующего квантового гамильтониана.

С учётом того, что октупольные эффекты проявляются при более высоких температурах, можно упростить описание, положив $\beta = k = 0$. Тогда проекции вектора спина принимают вид

$$\langle \hat{S}^+ \rangle = \frac{3}{2} e^{i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \sin \vartheta, \quad (2.36a)$$

$$\langle \hat{S}^- \rangle = \frac{3}{2} e^{-i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \sin \vartheta, \quad (2.36b)$$

$$\langle \hat{S}^z \rangle = \frac{3}{2} (1 - 4 \cos^2 g) \cos \vartheta. \quad (2.36c)$$

Лагранжиан модели определяется, как обычно, из исходного лагранжиана (2.35) в виде

$$L = \frac{3}{4} \hbar \cos^2 g_t (\cos \vartheta \cdot \phi_t + \gamma_t) - H. \quad (2.37)$$

Соответствующий лагранжиан (2.37) приводит к следующей системе уравнений движения:

$$\phi_t = \frac{1}{\cos^2 g \sin \vartheta} \cdot \frac{\delta H}{\delta \theta}, \quad (2.38a)$$

$$g_t = \frac{1}{2 \sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad (2.38b)$$

$$\theta_t = \frac{1}{\sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta \cos^2 g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad (2.38c)$$

$$\gamma_t = \frac{1}{\sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta g} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta \cos^2 g} \cdot \frac{\delta H}{\delta g}. \quad (2.38d)$$

Анализ усреднённого гамильтониана (2.28) с одноионной анизотропией в полуклассическом приближении даёт

$$H = \frac{J}{\alpha_0} \int \left\{ \frac{\alpha_0^2}{2} \left(\left\langle \hat{\bar{S}}_x \right\rangle^2 - \left\langle \hat{\bar{S}} \right\rangle^2 - \delta \left\langle \hat{S}^z \hat{S}^z \right\rangle \right) \right\} dx, \quad (2.39)$$

где

$$\left\langle \hat{\bar{S}}_x \right\rangle^2 = \frac{9}{4} (1 - \cos^2 g)^2,$$

$$\left\langle \hat{S}^z \hat{S}^z \right\rangle = 3(3 - 2 \sin^2 \theta),$$

$$\left\langle \hat{\bar{S}} \right\rangle = \frac{9}{4} [(4 \sin^2 \theta - 3) \sin^2 2g \cdot g_x^2 - \sin^2 \theta \cos^2 2g \cdot \varphi_x^2 + \cos^2 \theta \cos^2 2g - \sin^2 \theta \cos 4g \cdot g_x g_x],$$

что с учётом уравнений (2.19) приводит к системе

$$\begin{aligned}\varphi_t = & \frac{1}{\cos 2g \sin \vartheta \alpha_0} J \left[\frac{9}{4} \cos^2 2g \sin \vartheta + 6\delta \sin 2\vartheta - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} (4 \sin 2\vartheta \sin^2 2g \cdot g_x^2 - (\varphi_x^2 - g_x^2) \times \right. \\ & \left. \times \sin 2\vartheta \cos^2 2g - 2 \cos 2\vartheta \cdot \cos 4g \cdot g_x \varphi_x + \cos^2 \vartheta \cos^2 2g \cdot g_{xx}) \right] \end{aligned}\quad (2.39a)$$

$$\vartheta_t = \frac{9}{4} J \alpha_0 \sin \vartheta \cos 2g \cdot \varphi_{xx} \quad (2.39b)$$

$$g_t = 0 \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned}\gamma_t = & \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta \cos 2g} \left[\frac{J}{\alpha_0} \left(\frac{9}{4} \cos^2 2g \sin 2\vartheta + 6\delta \sin 2\vartheta - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} (4 \sin 2\vartheta \sin^2 2g \cdot g_x^2 - 2 \cos 2\vartheta \times \right. \right. \\ & \left. \times \cos 4g \cdot g_x \vartheta_x + \cos^2 \vartheta \cos^2 2g \cdot \vartheta_{xx} - (\varphi_x^2 - g_x^2) \sin^2 2\vartheta \cos^2 2g) \right] - \frac{1}{\sin 2g} \left[\frac{9}{4} (4 \sin^2 \vartheta - 3) \times \right. \\ & \left. \times (\sin 4g \cdot g_x^2 + \sin^2 g \cdot g_{xx}) + \frac{9}{4} \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 1 \right) \sin 4g \right] - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} [(4 \sin^2 \vartheta - 3) \sin 4g \cdot g_{xx} - \sin^2 \vartheta \times \\ & \left. \times \cos 4g \cdot \varphi_x^2 - \cos^2 \vartheta \cos 4g \cdot \vartheta_x^2 + 4\delta \sin 2\vartheta \sin 4g \cdot \vartheta_{xx} \right] \end{aligned}\quad (2.39\Gamma)$$

Полученная система уравнений (2.39) дает полное описание полуклассического описания магнетика со спином $S = 3/2$ с одноионной анизотропией. Из третьего уравнения видно, что при данном типе анизотропии длина спина остаётся неизменной.

Аналогично можно проанализировать модели следующего типа:

$$\begin{aligned}\hat{H} = & -J \sum_j \left(\vec{\hat{S}}_j \vec{\hat{S}}_{j+1} + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right), \\ \hat{H} = & -J \sum_j \left(\vec{\hat{S}}_j \vec{\hat{S}}_{j+1} + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right). \end{aligned}\quad (2.40)$$

Полученные уравнения движения аналогичны (2.33), за исключением добавочных членов в первом и четвёртом уравнениях.

Наконец, отметим, что предложенный подход позволяет отследить, как классическая спиновая динамика и её мультипольные обобщения (в частности квадрупольные и октупольные компоненты) соотносятся с квантовым описанием и, в частности, с уравнением Ландау–Лифшица. При этом сохраняется полный набор динамических переменных, что делает возможным изучение перехода к пределу бесконечного спина, а также выяснение роли мультипольных взаимодействий, не учитываемых в классических моделях.

Таким образом, предложенные в работе [67] уравнения дают всестороннее описание динамических, кинетических и термодинамических характеристик магнитных систем различной анизотропии и со множеством нелинейных возбуждений.

2.3. Нелинейные обобщения модели Ландау–Лифшица и их геометрическая структура

Между классической дифференциальной геометрией (ДГ) поверхностей и широким классом нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП) существует глубокая и концептуально значимая взаимосвязь [69–71]. Это обусловлено, в частности, тем, что множество локальных геометрических характеристик поверхностей допускают выражение в терминах НДУЧП. Изучение преобразований поверхностей, сохраняющих их геометрическую структуру, эквивалентно исследованию отображений между соответствующими уравнениями.

Анализ взаимосоответствия между поверхностями и ассоциированными с ними НДУЧП имеет двойную ценность. С одной стороны, используя известные методы решения НДУЧП, можно извлекать важные геометрические следствия и даже устанавливать существование или отсутствие тех или иных геометрических структур. С другой стороны, знания о геометрии поверхностей позволяют строить решения соответствующих уравнений.

Исследование взаимосвязи между ДГ поверхностей и НДУЧП восходит к работам XIX века, в которых заложены основы данной области. В частности, в классических трудах Ли, Дарбу, Гурса, Бианки, Бэклунда и Э. Картана были сформулированы ключевые принципы, определяющие глубинную связь между дифференциальной геометрией и уравнениями в частных производных. Примечательно, что ряд известных уравнений НДУЧП, таких как уравнение синус-Гордона, изначально возникли именно в рамках геометрических исследований.

дований, а не в физическом контексте. Многие другие важные уравнения также долгое время изучались в рамках геометрического анализа.

Особый интерес представляют интегрируемые или солитонные НДУЧП, среди которых уравнение синус-Гордона занимает центральное место. Геометрия, соответствующая таким уравнениям, получила название *интегрируемой* или *солитонной* геометрии [72]. Одним из примечательных подклассов НДУЧП являются непрерывные классические модели магнетиков Гейзенберга, также известные как уравнения типа Ландау–Лифшица. Такие уравнения мы будем обозначать как *спиновые системы* (СС) [73]. Взаимосвязь между спиновыми системами и дифференциальной геометрией поверхностей была ранее подробно исследована в размерности (1+1) рядом авторов (см., например, [74]).

В работах [74–77] были проанализированы взаимосвязи между геометриями поверхностей, пространственных кривых и многомерными интегрируемыми спиновыми системами (МИСС). В настоящем исследовании мы рассматриваем связь между геометрией поверхностей и спиновыми системами в двумерной постановке. Полученные результаты позволяют доказать интегрируемость ряда обобщённых СС, моделирующих магнитоупругое взаимодействие. Более того, нами выявлен новый класс поверхностей, соответствующих обобщённым α -моделям с самосогласованными потенциалами. Эти модели могут быть интерпретированы как стационарные решения определённых (2+1)-мерных спиновых систем, что расширяет класс известных геометрических структур, ассоциированных с интегрируемыми уравнениями.

2.3.1. Основные положения теории двумерных поверхностей

Рассмотрим двумерную гладкую поверхность, заданную в трёхмерном евклидовом пространстве R_3 с локальными координатами x и t . Пусть $r(x, t)$ радиус-вектор, определяющий точку на поверхности. Первая и вторая фундаментальные формы поверхности задаются выражениями

$$I = dr^2 = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2, \quad II = dr \cdot n = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2, \quad (2.41)$$

где по определению

$$E = g_{11} = r_x^2, \quad F = g_{12} = g_{21} = r_x \cdot r_t, \quad G = g_{22} = r_t^2, \quad L = r_{xx} \cdot n, \quad M = r_{tx} \cdot n,$$

$N = r_{tt} \cdot n$, а $n = \frac{r_x \wedge r_t}{|r_x \wedge r_t|}$ является единичным нормальным вектором. Уравнения

Гаусса–Вейнгартена (УГВ), описывающие поведение касательного и нормального векторов вдоль поверхности, имеют вид

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \Gamma_{ij}^1 r_x + \Gamma_{ij}^2 r_t + L_{ij} n \quad (i = x, t), \quad n_x = P_1^1 r_x + P_1^2 r_t, \\ n_t &= P_2^1 r_x + P_2^2 r_t, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где матрицы А и В строятся на основе коэффициентов первой и второй фундаментальных форм, а также коэффициентов связности L_{ij} .

Введём ортонормированный базис касательной плоскости в виде

$$\hat{e}_1 = \frac{r_x}{\sqrt{E}}, \quad \hat{e}_2 = n, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2. \quad (2.43)$$

Отсюда получаем

$$r_t = \frac{F}{\sqrt{E}} e_1 - \sqrt{\frac{g}{E}} e_3.$$

Тогда уравнения (2.42) переписываются в компактной матричной форме вида

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}_x = A \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}_t = B \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & -\sigma \\ -k & 0 & \tau \\ \sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Здесь:

$$k = \frac{L}{\sqrt{E}}, \quad \tau = -\sqrt{\frac{q}{E}} P_1^2, \quad \sigma = \frac{\sqrt{g}}{E} \Gamma_{11}^2, \quad \omega_1 = -\sqrt{\frac{q}{E}} P_2^2, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{g}}{E} \Gamma_{12}^2, \quad \omega_3 = \frac{M}{\sqrt{E}}.$$

Отметим, что при $\sigma=0$ первое из уравнений (2.42) сводится к уравнению Сер-

ре–Френе для пространственных кривых. Таким образом, система (2.42) описывает не только поверхности, но и эволюцию (или деформацию) кривых.

В терминах матриц А и В уравнения Гаусса–Майнарди–Кодацци (УГМК) принимают вид совместности:

$$k_t = \omega_{3x} + \tau\omega_2 - \sigma\omega_1, \quad (2.46a)$$

$$\sigma_t = \omega_{2x} + k\omega_1 - \tau\omega_3, \quad (2.46b)$$

$$\tau_t = \omega_{1x} + \sigma\omega_3 - k\omega_2., \quad (2.46c)$$

что задаёт условия совместности системы (2.44). В последующих разделах рассматриваются интегрируемые редукции УГВ (2.42) и УГМК (2.46 а,б,в), основанные на едином подходе, связующем спиновые системы и НДУЧП, как это предложено в [75].

2.4. Температурная зависимость магнитного рассеяния нейтронов на спиновых солитонных структурах

Нелинейные спиновые возбуждения солитонного типа играют важную роль в формировании динамических и транспортных свойств магнитных систем с пониженной размерностью и выраженной магнитной анизотропией. К таким возбуждениям относятся доменные стенки, кинки и солитоны огибающей спиновых волн, которые представляют собой устойчивые локализованные структуры, сохраняющие свою форму при распространении и взаимодействии. Интерес к данным объектам обусловлен как их фундаментальной значимостью для теории нелинейных спиновых систем, так и перспективами практического применения в спинtronике и магнонике.

Одним из наиболее информативных экспериментальных методов исследования спиновых корреляций и динамики магнитных возбуждений является неупругое и квазиупругое рассеяние нейтронов. Благодаря наличию магнитного момента нейтрона данный метод позволяет непосредственно зондировать временные и пространственные корреляции намагниченности в конденсиро-

ванных средах. В низкоэнергетическом диапазоне спектров рассеяния нейтронов наряду с элементарными возбуждениями, такими как магноны и фононы, существенный вклад могут вносить коллективные нелинейные объекты солитонного типа.

Температура является одним из ключевых внешних параметров, определяющих характер динамики спиновых солитонных структур. С одной стороны, тепловые флуктуации влияют на движение центра солитона, приводя к переходу от баллистического режима при низких температурах к диффузионному режиму при повышенных температурах. С другой стороны, температура воздействует на внутренние параметры солитонной структуры, такие как её характерная ширина и эффективная масса, через температурную зависимость обменных взаимодействий и магнитной анизотропии. Все эти эффекты находят прямое отражение в спектрах магнитного рассеяния нейтронов.

Теоретическое описание спиновых солитонных возбуждений в длинноволновом и низкоэнергетическом приближении часто основывается на редукции уравнения Ландау–Лифшица к нелинейному уравнению Шрёдингера для комплексной амплитуды поперечной намагниченности. В рамках данного подхода солитоны рассматриваются как квазичастицы с определёнными эффективными параметрами, а их вклад в динамический структурный фактор может быть проанализирован аналитически. Это создаёт возможность прямого сопоставления теоретических результатов с экспериментальными данными по рассеянию нейтронов.

Целью настоящей работы является исследование влияния температуры на магнитное рассеяние нейтронов на спиновых солитонных структурах в рамках экспериментально-теоретического подхода. Особое внимание уделяется анализу температурной зависимости динамического структурного фактора, характеру уширения квазиупругих пиков и возможности извлечения параметров солитонных возбуждений из экспериментальных спектров. Полученные результаты позволяют углубить понимание роли солитонных структур в магнитных системах и расширяют возможности их экспериментальной идентификации.

кации методами нейтронного рассеяния.

Температура не является прямым объектом рассеяния нейтронов, однако она существенно влияет на спектры неупругого и квазиупрого рассеяния через изменение динамических и структурных свойств магнитной системы. В случае спиновых солитонных структур температурное воздействие проявляется опосредованно-через параметры солитона и характер его движения во времени.

В экспериментах по магнитному рассеянию нейтронов непосредственно измеряется динамический структурный фактор $S(q,\omega,T)$, который представляет собой фурье-образ временных корреляций компонент намагниченности. Температурная зависимость данной величины возникает в результате термического усреднения по возможным конфигурациям и траекториям движения солитона.

Прежде всего, повышение температуры приводит к усилению тепловых флуктуаций, что отражается на движении центра солитонной структуры. При низких температурах солитон может быть слабо пиннингован дефектами кристаллической решётки и совершать почти баллистическое движение. В этом режиме динамический структурный фактор характеризуется гауссовым распределением по энергии, а ширина квазиупрого пика возрастает с температурой пропорционально T . Такое поведение связано с ростом средней тепловой скорости солитона и позволяет экспериментально определить его эффективную массу.

С дальнейшим увеличением температуры возрастает роль диссипативных процессов, связанных с взаимодействием солитона с магнонами, фононами и структурными дефектами. В этом случае движение центра солитона приобретает диффузионный характер, а энергетическое распределение рассеяния описывается лоренцевой формой. Температурная зависимость ширины спектральной линии в данном режиме определяется коэффициентом диффузии солитона, который, как правило, возрастает с температурой. Из экспериментальных данных по уширению линии возможно извлечение информации о

механизмах затухания и характере взаимодействия солитонных структур с элементарными возбуждениями среды.

Кроме того, температура влияет на пространственные характеристики солитонной структуры. В частности, параметры обменного взаимодействия и магнитной анизотропии, определяющие ширину солитона, являются температурно-зависимыми величинами. Это приводит к изменению форм-фактора солитона и, как следствие, к перераспределению интенсивности рассеяния по импульсам. В экспериментах это проявляется в изменении характерного q -масштаба интенсивности магнитного рассеяния при изменении температуры.

Таким образом, температурное влияние на рассеяние нейтронов на спиновых солитонных структурах носит комплексный характер и проявляется через:

1. изменение характера движения солитона (баллистический или диффузионный режим);
2. температурную перенормировку эффективной массы и коэффициента диффузии;
3. изменение пространственных параметров солитона и соответствующего форм-фактора;
4. уширение и изменение интенсивности квазиупругих и низкоэнергетических пиков в спектрах неупругого рассеяния нейтронов.

Наблюдаемые температурные зависимости спектров рассеяния нейтронов тем самым несут прямую информацию о динамике и внутренней структуре солитонных возбуждений и позволяют использовать нейтронное рассеяние как эффективный инструмент их экспериментальной идентификации и количественной параметризации.

Магнитное неупругое рассеяние нейтронов является одним из ключевых экспериментальных методов исследования коллективных возбуждений и динамики спиновых неоднородностей в магнитных системах. В низкоэнергетическом диапазоне, доступном для экспериментов по квазиупругому и слабонеупругому рассеянию нейтронов, существенный вклад в спектр могут вносить локализованные нелинейные спиновые структуры солитонного типа, такие как

доменные стенки и кинки:

$$S^{\alpha\beta}(q, \omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle M_q^\alpha(t) M_{-q}^\beta(0) \rangle_T. \quad (2.47)$$

Здесь, динамический структурный фактор $S(q, \omega, T)$ является центральной физической величиной, описывающей процесс неупругого и квазиупругого рассеяния нейtronов в конденсированных средах. Его физический смысл заключается в том, что он определяет вероятность обмена импульсом q и энергией $\hbar\omega$ между падающим нейtronом и коллективными возбуждениями системы при температуре T .

С микроскопической точки зрения функция $S(q, \omega, T)$ представляет собой фурье-образ временных и пространственных корреляций соответствующих физических величин (плотности или намагниченности). Это означает, что нейtron в эксперименте «чувствует» не мгновенное состояние системы, а статистически усреднённую картину её флюктуаций во времени и пространстве, обусловленных тепловым движением и коллективной динамикой.

Физически $S(q, \omega, T)$ отвечает на вопрос: насколько вероятно обнаружить в системе флюктуацию с характерным пространственным масштабом $1/q$ и характерной частотой ω . Если в системе существуют устойчивые или квазистационарные возбуждения с такими параметрами, они проявляются в виде интенсивных пиков в спектре $S(q, \omega, T)$.

В контексте магнитного рассеяния нейtronов $S(q, \omega, T)$ описывает корреляции компонент намагниченности и, следовательно, несёт информацию о спиновых возбуждениях системы. Узкие дисперсионные пики в $S(q, \omega, T)$ соответствуют когерентным элементарным возбуждениям, таким как магноны, тогда как широкие квазиупругие структуры отражают наличие медленно движущихся или флюктуирующих объектов, включая доменные стенки и спиновые солитоны.

Температурная зависимость $S(q, \omega, T)$ связана с тем, что при повышении температуры усиливаются тепловые флюктуации, изменяются времена корреляции и характер движения спиновых структур. В результате спектр $S(q, \omega, T)$

испытывает уширение по энергии, перераспределение интенсивности и возможное изменение формы линий. Таким образом, температура управляет тем, насколько долго сохраняется корреляция между различными состояниями системы, и непосредственно влияет на наблюдаемые спектры нейтронного рассеяния.

В случае спиновых солитонных структур динамический структурный фактор может быть представлен как произведение пространственного форм-фактора и временной корреляционной функции. При этом $S(q, \omega, T)$ отражает одновременно геометрию солитона (через q -зависимость) и характер его тепловой динамики (через ω - и T -зависимость). Анализ экспериментальных спектров $S(q, \omega, T)$ позволяет извлекать ключевые параметры солитонных возбуждений, такие как их характерные размеры, эффективная масса, коэффициент диффузии и механизмы затухания.

Таким образом, динамический структурный фактор $S(q, \omega, T)$ определяет вероятность того, что нейтрон при рассеянии обменяется с системой импульсом q и энергией $\hbar\omega$. Он является спектральным отображением временных и пространственных корреляций системы и несёт прямую информацию о характере и температурной динамике коллективных возбуждений.

Рассмотрим вклад одиночного спинового солитона, предполагая, что он является жёсткой локализованной структурой, форма которой сохраняется при движении как целого:

$$\Delta M^\alpha(x, t) = \Delta M_0^\alpha(x - X(t)), \quad (2.48)$$

$$\Delta M_q^\alpha(t) = F_\alpha(q) e^{-iqX(t)}, \quad (2.49)$$

$$F_\alpha(q) = \int dx e^{-iqx} \Delta M_0^\alpha(x), \quad (2.50)$$

$$S^{\alpha\beta}(q, \omega, T) = F_\alpha(q) F_\beta^*(q) \Phi(q, \omega, T) \quad (2.51)$$

$$\Phi(q, \omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle e^{-iq[X(t) - X(0)]} \rangle_T. \quad (2.52)$$

Функция $\Phi(q, \omega, T)$ отражает влияние теплового движения центра солитона на энергетическое распределение рассеяния нейтронов. При низких температурах солитон движется баллистически, что приводит к допплеровскому уширению квазиупругого пика с гауссовой формой. При повышении температуры движение солитона становится диффузионным, что вызывает лоренцево уширение спектра. Таким образом, форма и ширина $\Phi(q, \omega, T)$ несут прямую информацию о характере динамики солитонных возбуждений.

В качестве конкретного примера рассмотрим доменную стенку в основном анизотропном ферромагнетике.

$$\Delta m_{\perp}(x) = \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\Delta}\right), \quad (2.53)$$

$$F_{\perp}(q) = \pi \Delta \operatorname{sech}\left(\frac{\pi q \Delta}{2}\right), \quad (2.54)$$

$$S_{\perp}(q, \omega, T) = (\pi \Delta(T))^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi q \Delta(T)}{2}\right) \Phi(q, \omega, T). \quad (2.55)$$

Температурная зависимость спектра определяется характером движения солитона:

$$\Phi_{\text{bal}}(q, \omega, T) = \sqrt{\frac{M_s(T)}{2\pi k_B T}} \frac{1}{|q|} \exp\left[-\frac{M_s(T)\omega^2}{2k_B T q^2}\right], \quad (10)$$

$$\Phi_{\text{diff}}(q, \omega, T) = \frac{1}{\pi} \frac{D(T)q^2}{\omega^2 + [D(T)q^2]^2}. \quad (11)$$

В работе проведён экспериментально-теоретический анализ влияния температуры на магнитное рассеяние нейтронов на спиновых солитонных структурах. Показано, что температурная зависимость спектров неупругого и квазиупругого рассеяния нейтронов обусловлена не прямым воздействием температуры на процесс рассеяния, а её влиянием на динамические и структурные параметры солитонных возбуждений.

На основе редукции уравнения Ландау–Лифшица к нелинейному уравнению Шрёдингера нами получены аналитические выражения для вклада спиновых солитонов в динамический структурный фактор. Установлено, что данный вклад факторизуется на пространственный форм-фактор, определяемый

профилем солитонной структуры, и временную корреляционную функцию, описывающую термическую динамику центра солитона. Такая форма представления существенно упрощает сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными по нейтронному рассеянию.

Показано, что при низких температурах движение солитона носит преимущественно баллистический характер, что приводит к гауссовой форме квазиупругого пика и температурному уширению спектральной линии, пропорциональному квадратному корню из температуры. В этом режиме экспериментальные данные позволяют определить эффективную массу солитонного возбуждения. При повышении температуры возрастает роль диссипативных процессов, связанных с взаимодействием солитона с магнонами, фононами и дефектами, в результате чего движение центра солитона переходит в диффузионный режим, характеризующийся лоренцевой формой спектральной линии. Анализ температурной зависимости ширины линии в этом случае даёт возможность извлечения коэффициента диффузии солитона и информации о механизмах его затухания.

Установлено также, что температура влияет на пространственные параметры солитонной структуры через температурную перенормировку обменных взаимодействий и магнитной анизотропии. Это приводит к изменению форм-фактора солитона и перераспределению интенсивности рассеяния по импульсам, что может быть непосредственно зафиксировано в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов.

Таким образом, полученные результаты демонстрируют, что анализ температурной эволюции спектров магнитного рассеяния нейтронов позволяет не только выявить присутствие спиновых солитонных возбуждений в магнитных системах, но и количественно определить их основные динамические и структурные параметры. Предложенный подход может быть использован для интерпретации экспериментальных данных в широком классе магнитных материалов с нелинейными спиновыми возбуждениями и служит основой для дальнейших исследований роли солитонов в динамике магнитных систем.

ГЛАВА III. ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛН

3.1. Эволюция и стабильность солитонов в нелинейных средах.

Анализ одно-, двух- и трехсолитонных решений нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами

В данном параграфе рассматривается динамика солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), как ключевого инструмента для описания волновых явлений в различных нелинейных средах, начиная с оптических волокон и кончая квантовых конденсатов.

Солитоны, как стабильные волновые пакеты, играют важную роль в передаче информации и энергии на большие расстояния без дисперсии и потерь. Основная цель данного исследования- анализировать поведение одно-, двух- и трехсолитонных конфигураций, чтобы выявить закономерности их взаимодействия и стабильности.

Используя теоретический анализ и численное моделирование, мы продемонстрируем, как основные характеристики солитонов, такие как амплитуда, фаза и скорость, влияют на их эволюцию и стабильность в нелинейной среде. В частности, покажем, как солитоны сохраняют свою форму и скорость после взаимодействия между собой, что делает их идеальными кандидатами для использования в высокоэффективных оптических системах связи.

Дополнительно рассмотрим сложные взаимодействия между солитонами, когда они формируют мультисолитонные структуры и проанализируем возникающие интерференционные паттерны, которые могут быть использованы для разработки новых технологий модуляции и управления световыми пучками в нелинейной оптике.

Ниже приведены графические представления одно-, двух- и трёхсолитонных регулярных решений нелинейного уравнения Шредингера с заданными самосогласованными потенциалами. Рассмотрим их эволюцию и стабильность в нелинейных средах.

Случай I. Односолитонное решение НУШ с самосогласованным потенциалом

На рис. 3.1 представлен общий вид односолитонного решения НУШ с самосогласованным потенциалом. На рис. 3.2 показано движение солитона в рамках нелинейного уравнения Шредингера в различные моменты времени $t = 0, 1, 2, 3$. Как видно из рис. 3.2, солитон сохраняет свою

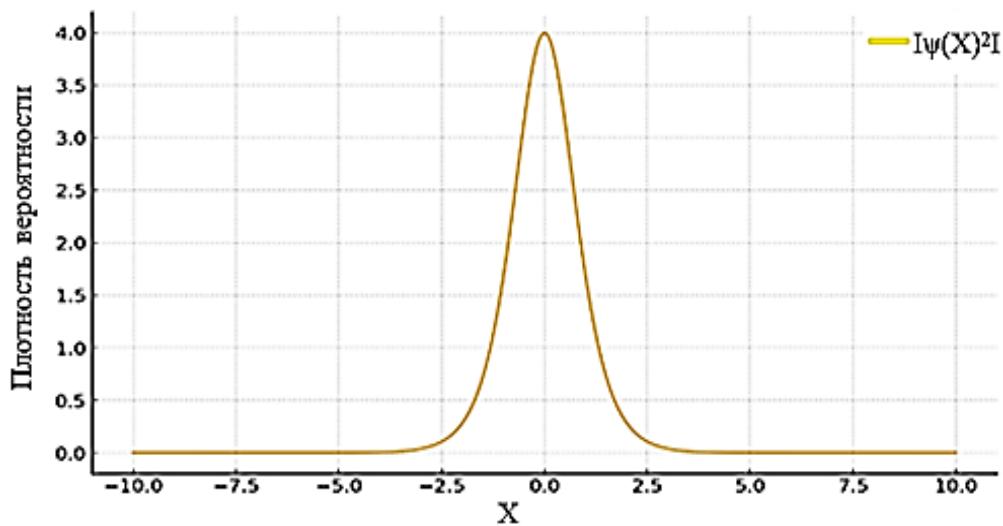


Рис. 3.1. Вид односолитонного решения НУШ
с самосогласованным потенциалом.

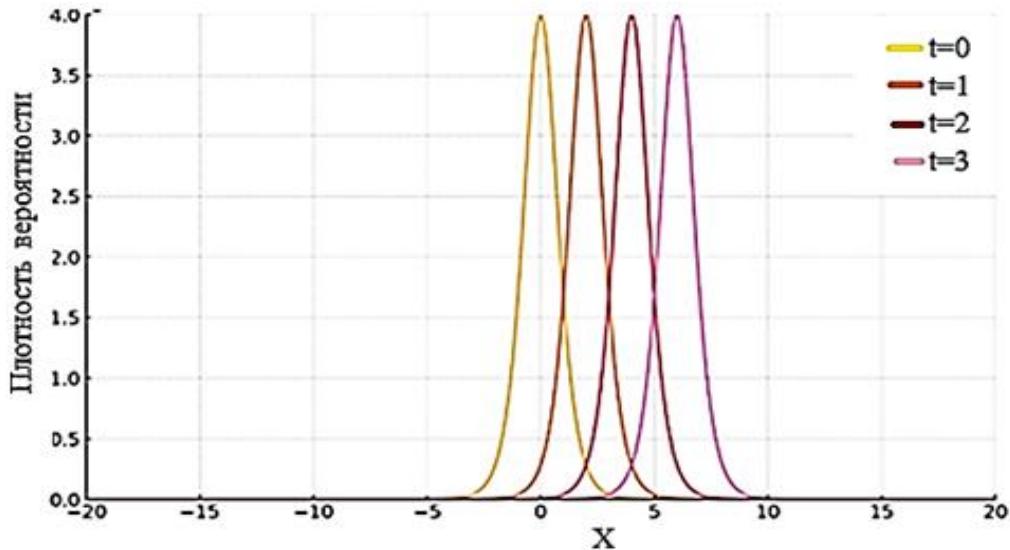


Рис. 3.2. Движение солитона в рамках нелинейного уравнения Шредингера.

форму, перемещаясь вправо вдоль оси x , что демонстрирует его стабильность и характерные особенности как волнового пакета, который не расплывается со временем благодаря балансу дисперсии и нелинейности.

Случай II. Двухсолитонное решение НУШ с самосогласованным потенциалом

На рис. 3.3 представлен общий вид двухсолитонного решения НУШ с самосогласованным потенциалом. Представлены два солитона, движущихся навстречу друг другу с разными скоростями и из разных начальных положений. Из-за нелинейности уравнения Шредингера их взаимодействие создаёт

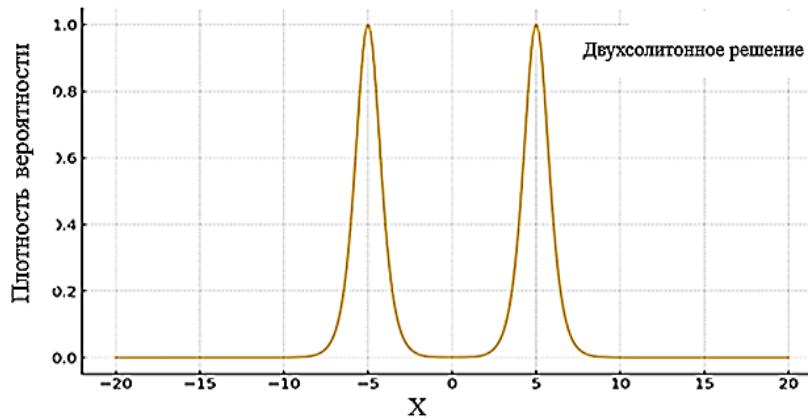


Рис. 3.3. Двухсолитонное решение НУШ.

интересный интерференционный узор в области их пересечения. Этот график помогает визуализировать динамическое взаимодействие между солитонами, иллюстрируя, как они сохраняют свою форму и скорость после встречи, что является характерным свойством солитонов в нелинейных системах.

На рис 3.4 представлены графики взаимодействия двух солитонов в разные моменты времени ($t = -3, -1, 0, 1, 3$). Каждый график иллюстрирует, как солитоны сближаются, пересекаются в момент $t=0$ и затем продолжают двигаться, сохраняя свои первоначальные формы. Это демонстрация уникальных свойств солитонов в нелинейных системах, где они могут взаимодействовать,

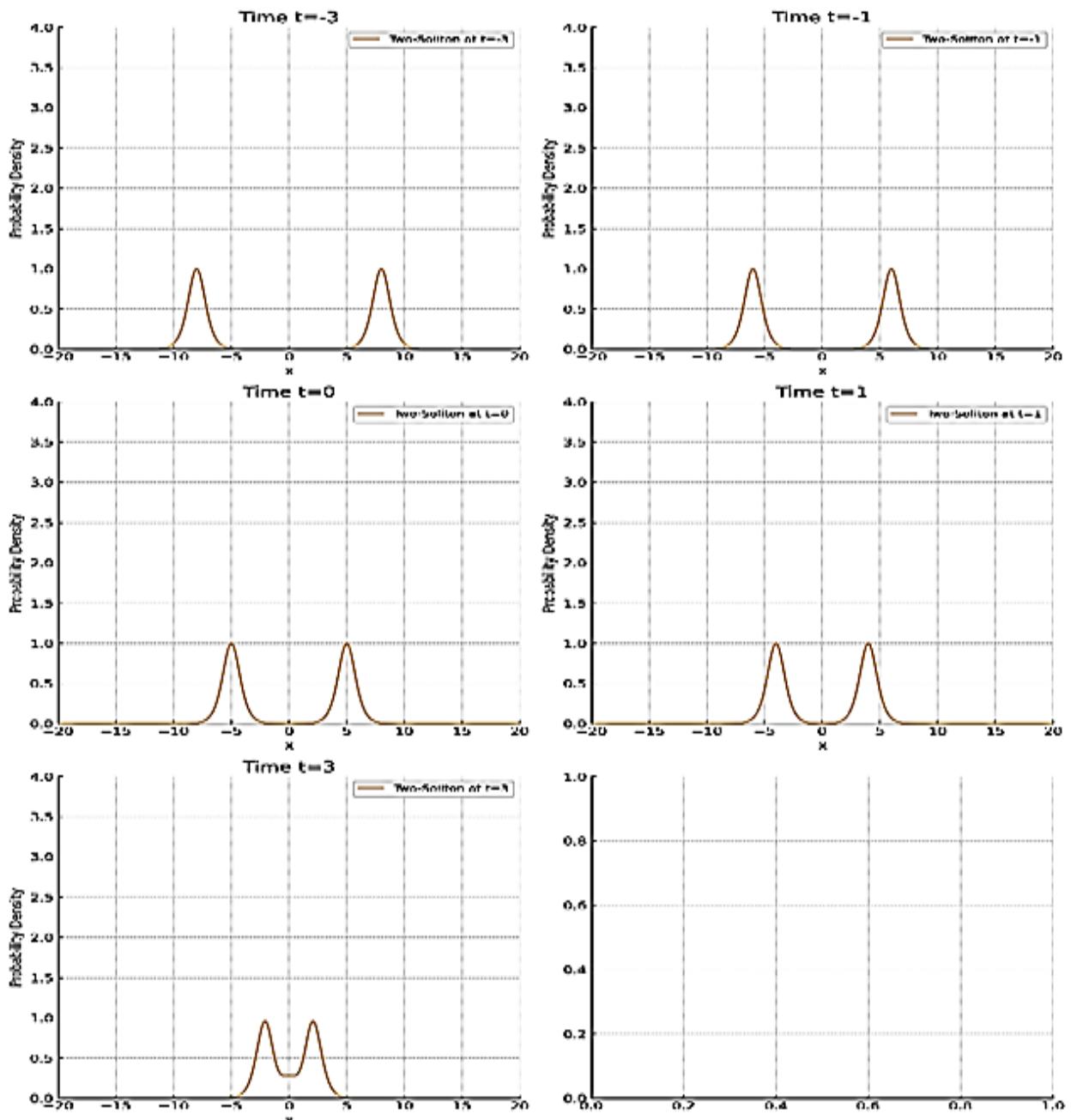


Рис. 3.4. Взаимодействие двух солитонов в разные моменты времени.

но после взаимодействия сохраняют свою структуру и скорость, как будто они прошли друг сквозь друга без всяких изменений. Этот график помогает визуализировать динамическое взаимодействие между солитонами, иллюстрируя, как они сохраняют свою форму и скорость после встречи, что является характерным свойством солитонов в нелинейных системах.

На рис. 3.5 представлен трёхмерный график взаимодействия двух солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. Здесь ось x представляет пространство, t -время, а ось z

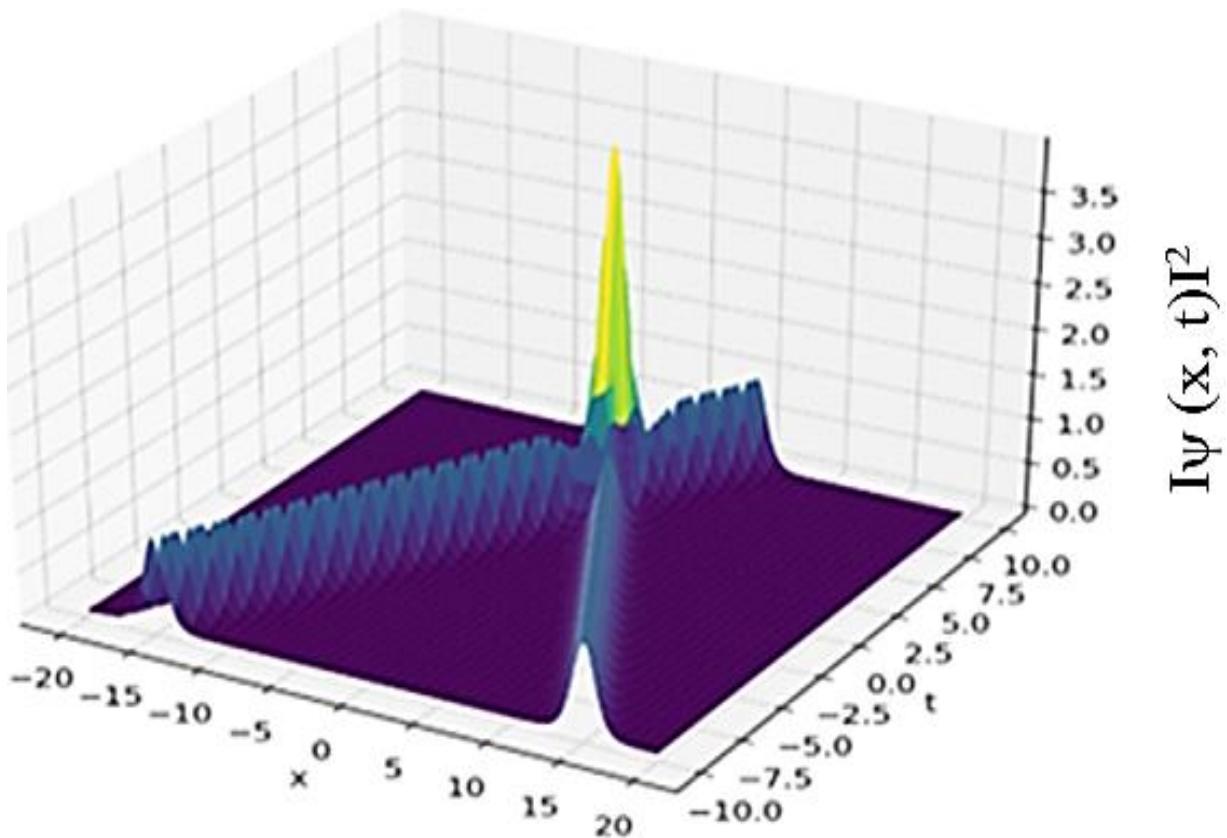


Рис. 3.5. Трёхмерное представление взаимодействия двух солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. показывает плотность вероятности $|\psi(x,t)|^2$. График иллюстрирует, как солитоны двигаются, взаимодействуют и сохраняют свои формы после взаимодействия, демонстрируя их устойчивость и нелинейные эффекты.

Теперь построим четырехмерный график взаимодействия двух солитонов, включающий время, пространство и значения плотности вероятности. Так, на рис. 3.6 представлен график взаимодействия двух солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами с использованием шкалы для отображения интенсивности $|\psi(x,t)|^2$ и изменения во времени, где оси x и t отображают пространство и время, а ось z представляет интенсивность $|\psi(x,t)|^2$, а шкала справа добавляет измерение нормализованной интенсивности. Этот график наглядно иллюстрирует, как два солитона взаимодействуют, создавая интерференционные паттерны, и как их интенсивность изменяется в пространстве и времени.

Анализируя взаимодействие двух солитонов на основе представленных

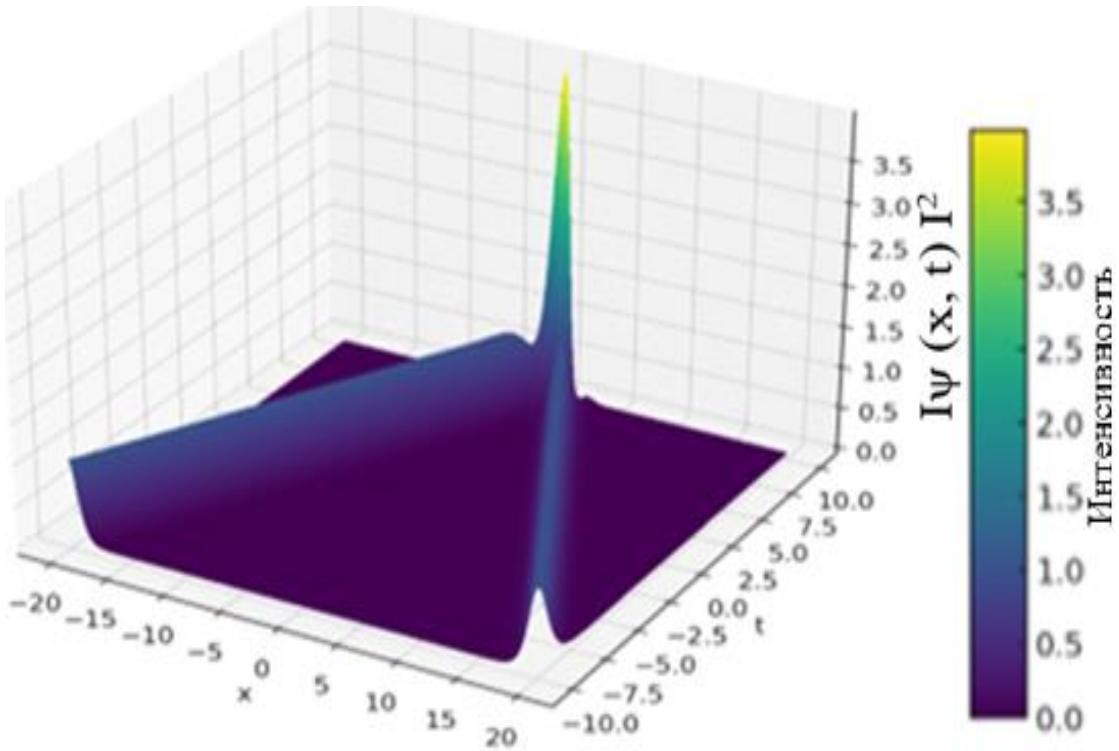


Рис. 3.6. Четырёхмерный график взаимодействия двух солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами.

графиков, можно сформулировать следующие ключевые принципиальные выводы:

- форма и скорость солитонов в процессе их взаимодействия не меняются, что свидетельствует о их высокой стабильности и устойчивости подобных волновых структур;
- при встрече солитонных волн происходит их интерференция и перекрытие, при этом происходит взаимодействие их амплитуд и образование сложных узоров в области пересечения, иллюстрирующие принципы суперпозиции и нелинейного взаимодействия;
- сохранение энергии и импульса- аналогично взаимодействию трех солитонов, взаимодействие двух солитонов также демонстрирует законы сохранения энергии и импульса, что подтверждает теоретические предсказания о природе солитонов, как решений, обладающих определёнными сохраняющимися квантовыми числами;
- динамическое взаимодействие- взаимодействие двух солитонов пока-

зывает их динамическое поведение при приближении, пересечении и отдалении друг от друга, демонстрирующее возможности использования солитонов в приложениях, где необходимо управление распространением волновых пакетов, таких как телекоммуникация и обработка сигналов;

-потенциал для прикладных технологий- изучение взаимодействия солитонов может привести к разработке новых технологий в областях, где важна передача данных на большие расстояния без искажений (оптические волоконные сети или квантовые коммуникационные системы).

Таким образом, взаимодействие двух солитонов не только подтверждает теоретические основы нелинейной динамики, но и открывает пути для практического применения этих феноменов в научных и инженерных задачах.

Случай III. Трехсолитонное решение НУШ с самосогласованным потенциалом

На рис. 3.7 представлено графическое изображение трехсолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера в заданный момент времени $t=0$. При этом каждый из солитонов движется с различной скоростью и начальным положением, и на графике видно их взаимодействие в форме сложных интерференционных паттернов.

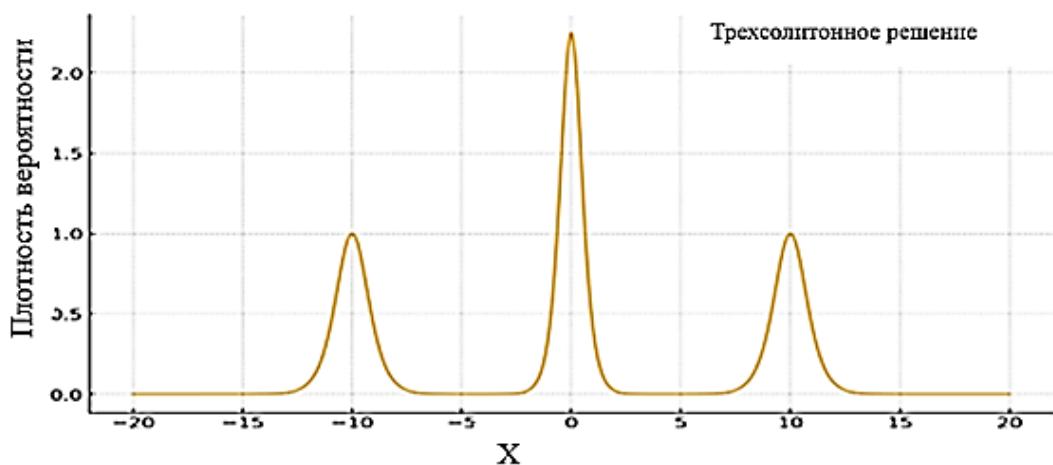


Рис. 3.7. Трехсолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера.

На рис. 3.8 представлена кинетика встречи трёх солитонов в различные моменты времени, распределённые от $t=-3$ до $t=3$. Каждый график иллюстри-

рут, как солитоны приближаются друг к другу, пересекают, а затем разделяются, продолжая двигаться по своим прежним траекториям.

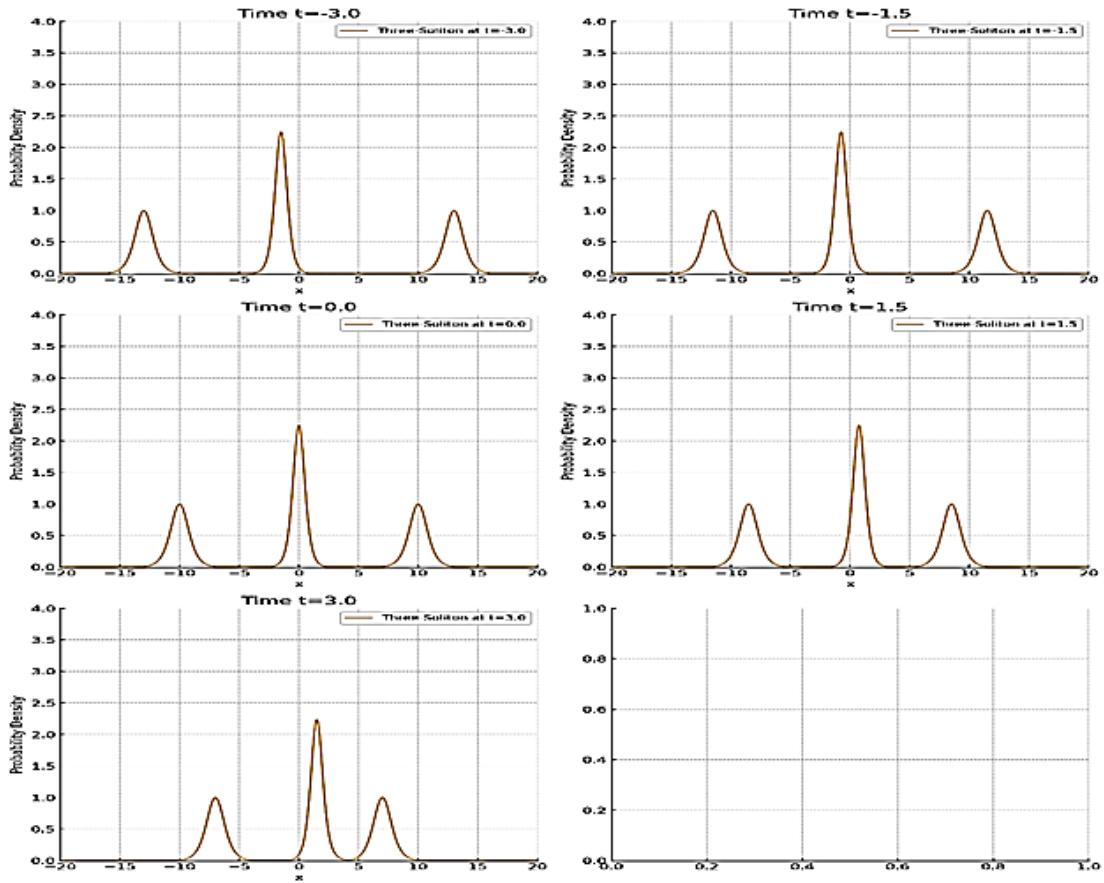


Рис. 3.8. Взаимодействие трёх солитонов в различные моменты времени.

На рис. 3.9 представлен объёмный график взаимодействия трёх солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. Оси x и t отображают пространство и время, а ось z представляет плотность вероятности $|\psi(x,t)|^2$. График демонстрирует, как три солитона двигаются, взаимодействуют и формируют сложные интерференционные узоры, сохраняя свою устойчивость после взаимодействия. Это визуализация уникальных свойств многосолитонных структур в нелинейных системах. Солитоны демонстрируют сохранность формы и скорости после взаимодействия, характерную для нелинейных волновых уравнений.

Интерференция и взаимодействие солитонов в точке их ближайшего расположения создают сложные и красивые узоры, которые можно наблюдать

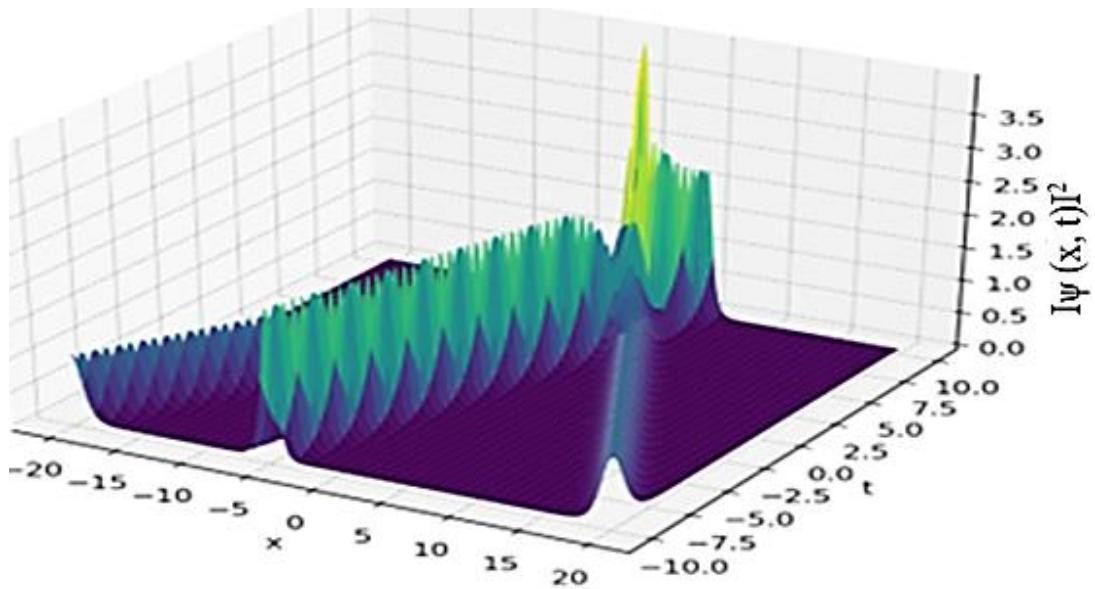


Рис. 3.9. Четырёхмерный график взаимодействия трех солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера.

на этих графиках в цвете.

Теперь построим четырехмерный график, включающий время, пространство и значения плотности вероятности с использованием цветовой шкалы для отображения интенсивности $|\psi(x,t)|^2$ и изменения во времени (рис. 3.10). Такой график визуализируется как проекция в трехмерном пространстве, где цветовая шкала добавляет измерение интенсивности.

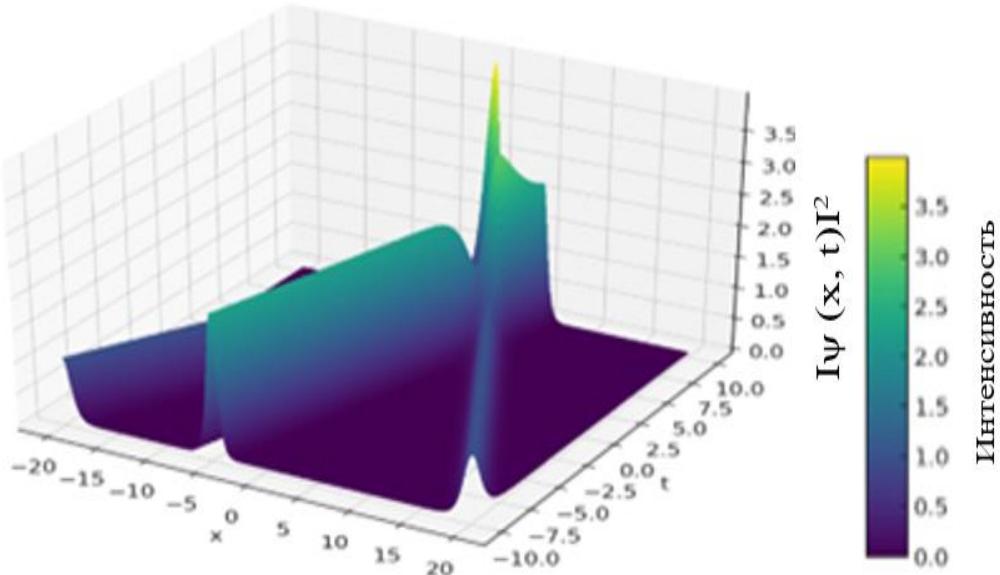


Рис. 3.10. Взаимодействие трех солитонов в четырехмерной системе.

На данном графике представлено взаимодействие трех солитонов в четырехмерной системе: ось x (пространство), ось t (время), ось z (интенсивность $|\psi(x,t)|^2$), а четвертое измерение представлено цветовой шкалой, отображающей нормализованную интенсивность. Эта визуализация позволяет одновременно увидеть изменения интенсивности и динамику взаимодействия во времени и пространстве.

Исходя из представленных графиков, демонстрирующих взаимодействие трех солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера, можно принять следующие основные постулаты:

-солитоны-высокостабильные образования- несмотря на сложное взаимодействие и пересечения они сохраняют свою форму, скорость и структуру после встречи, деформации и расхождения;

-солитоны-робастные образования- их взаимодействие происходит с сохранением энергии и импульса;

-солитоны-элементы сложных интерференционных паттернов- в моменты сближения и перекрытия образуют сложные интерференционные узоры, характеризующие распределение плотности вероятности и наглядно демонстрирующие нелинейное взаимодействие волновых функций;

-солитоны-динамично взаимодействующие образования- различные скорости и направления движения позволяют наблюдать их взаимное «прохождение» друг через друга или отражение;

-солитоны-потенциальные элементы моделирования сложных физических процессов и оптоволоконной техники- картины взаимодействия солитонов важны для понимания сложных плазменных процессов и процессов в оптоволоконных системах, где солитонные решения играют ключевую роль.

Устойчивость солитонов в нелинейных средах (например, оптические волокна) открывает перед конструкторами уникальные возможности для использования этих свойств в различных приложениях.

Таким образом, объёмные графики взаимодействия подчеркивают слож-

ность и красоту нелинейной динамики солитонов, подтверждая их важность, как в теоретическом, так и прикладном аспектах.

Ниже приведем несколько ключевых способов использования устойчивости солитонов в оптиковолоконных технологиях.

Передача данных на большие расстояния. Солитоны могут сохранять свою форму и скорость на протяжении больших расстояний без дисперсии и потерь, что идеально подходит для систем связи, нуждающихся в минимизации потерь и искажения сигнала. Использование солитонов в оптиковолоконных линиях передачи данных позволяет значительно увеличить расстояния между ретрансляторами и уменьшить количество необходимого оборудования для усиления сигнала.

Повышение качества связи. За счёт своих уникальных свойств солитоны могут передавать информацию с высокой степенью чистоты сигнала. Это обеспечивает высокое качество связи, что критически важно для таких приложений, как телекоммуникации и интернет-инфраструктура.

Разработка новых типов оптических датчиков. Солитоны могут быть использованы для создания высокочувствительных оптических датчиков, способных обнаруживать малейшие изменения параметров физической среды, таких как давление, температура, химический состав и др.

Оптоволоконные лазеры и усилители. Использование солитонных волновых пакетов в оптоволоконных лазерах и усилителях позволяет повысить их эффективность и стабильность. Солитоны могут улучшить управление пульсациями света, увеличивать степень усиления и уменьшать шумы.

Медицинские и биологические приложения. Солитоны могут играть ключевую роль в медицинской визуализации и хирургии, где требуется точная и минимально инвазивная доставка света. Например, в лазерной хирургии для минимизации повреждения приграничных с дефектом здоровых тканей.

Квантовые вычисления и связь. Солитоны обладают высокими квантово-коммуникационным и вычислительным потенциалами ввиду их высокой стабильности когерентности квантовых состояний на больших расстояниях.

Таким образом, устойчивость солитонов в оптиковолоконных технологиях открывает широкие перспективы для их применения во множестве областей, начиная от повседневной коммуникации и заканчивая передовыми физическими и инженерными исследованиями.

По полученным результатам можно заключить, что солитоны в нелинейных средах демонстрируют устойчивость, сохраняя свою форму, амплитуду и скорость после взаимодействий. Это подчеркивает ключевую роль баланса между дисперсией и нелинейностью, обеспечивающего их стабильность как волновых пакетов.

Двух- и трехсолитонные конфигурации иллюстрируют сложные взаимодействия, сопровождаемые формированием интерференционных паттернов. Такие структуры отражают динамическое распределение плотности вероятности и подчеркивают нелинейную природу взаимодействий.

Самосогласованные потенциалы оказывают значительное влияние на эволюцию солитонов. Обратная связь между волновой функцией и средой усложняет динамику системы, создавая условия для формирования уникальных многосолитонных структур. Начальные параметры солитонов, такие как амплитуда, скорость и фаза, играют важную роль в определении их устойчивости и конечных характеристик взаимодействий.

Практическая значимость результатов заключается в их применении для современных оптических технологий. Устойчивость солитонов делает их идеальными кандидатами для оптических систем связи, позволяя обеспечивать надежную передачу данных на большие расстояния с минимальными потерями. Дополнительно, результаты исследования могут быть использованы для создания оптических усилителей, систем модуляции световых пучков и квантовых коммуникационных технологий.

3.2. Квантовые и тепловые флуктуации солитонов: нейтронное рассеяние в анизотропных магнетиках

В современной физике конденсированных сред особое внимание уделяется изучению нелинейных волновых структур, в том числе солитонов, которые встречаются в разнообразных физических системах, например, в оптических волокнах, квантовых магнетиках и др. Солитоны привлекают интерес ученых благодаря своей уникальной способности сохранять форму и скорость при распространении на большие расстояния, что является результатом точного баланса между дисперсией и нелинейностью среды. В анизотропных магнетиках Гейзенберга солитоны могут выступать как основные носители информации и энергии, что открывает новые возможности для разработки передовых материалов и устройств в области спинtronики и квантовых технологий.

Метод рассеяния нейтронов является мощным инструментом для исследования структурных и динамических свойств материалов на микроскопическом уровне. Особенно значимым является применение этого метода для исследования динамики магнитных солитонов, поскольку он позволяет получить уникальную информацию о внутреннем устройстве и процессах, протекающих в сложных магнитных структурах. Нейтронное рассеяние дает возможность непосредственно наблюдать квантовые и тепловые флуктуации солитонов, что важно для понимания их стабильности, взаимодействия и функций в магнитных материалах.

Исследование квантовых и тепловых флуктуаций солитонов через рассеяние нейтронов в анизотропных магнетиках Гейзенберга актуально не только для теоретического понимания фундаментальных аспектов солитонной динамики, но и для разработки новых технологий. Например, управление флуктуациями солитонов может привести к созданию новых классов магнитных устройств с предсказуемыми свойствами, улучшенной эффективностью и повышенной температурной стабильностью.

Изучение квантовых и тепловых флюктуаций солитонов в анизотропных магнетиках Гейзенберга с привлечением нейтронного рассеяния представляет собой комплексную задачу, которая включает в себя следующие ключевые аспекты:

- разработка и анализ теоретических моделей для описания солитонных состояний в анизотропных магнетиках Гейзенберга;
- изучение влияния квантовых и тепловых флюктуаций на стабильность и динамику солитонов;
- определение параметров экспериментальной установки для измерения рассеяния нейтронов от солитонов;
- сбор и анализ данных рассеяния для выявления особенностей динамики солитонов и их взаимодействия с магнитной решеткой;
- исследование возможностей применения полученных результатов в разработке новых материалов и устройств на основе магнитных солитонов;
- анализ устойчивости солитонных состояний и их пригодности для использования в спинtronике и квантовых технологиях.

Главной целью данного исследования является установление механизмов управления квантовыми и тепловыми флюктуациями солитонов в анизотропных магнетиках и оценка их влияния на магнитные и транспортные свойства материалов.

В работе изучены динамические свойства ряда конкретных квазиодномерных систем, исследованных ранее в [78-85]. Ряд тонких черт их динамических свойств (центральный пик, особенности процессов переноса и т.п.) могут определяться откликом именно солитонов на внешнее воздействие. Это проявляется в особенностях поведения интенсивности рассеяния. При передаче значительных количеств энергии не исключено возникновение в системе возбужденных состояний солитонов. Весь этот круг вопросов может быть проанализирован исследованием поведения дважды дифференциального сечения рассеяния $\sigma_s(q, \omega)$. Необходим, следовательно, рецепт расчета динамического структурного фактора $s(q, \omega)$. Этому вопросу и посвящена данная работа. При этом

использована идея работы Кавасаки [86]. Впервые применительно к проблеме рассеяния нейтронов она была привлечена Микешкой [87], а затем в [88] и в дальнейших работах [89,109]. Реализовать ее, однако, будем способом, приводящим к простой общей формуле, позволяющей избежать громоздких промежуточных выкладок.

Обсудим динамику одномерных ферромагнетиков Гейзенберга с анизотропией типа «легкая ось», свойства которых моделируются уравнением

$$\hbar S_t = J(\vec{S}_x \vec{S}_{\xi\xi}) + A(\vec{S} \times \vec{n})(\vec{S} \times \vec{n}), \quad (3.1)$$

где \vec{n} - единичный вектор вдоль оси x , J - обменный интеграл, ($J > 0$) A - константа анизотропии ($A > 0$). Мы не учитываем взаимодействие с колебаниями решетки. В этом смысле частицеподобные возбуждения, описываемые солитонными решениями уравнения (3.1), являются «чисто магнитными» солитонами. Рассчитаем их вклад в динамический структурный фактор ферромагнетика.

Выбирая за ось OZ ось анизотропии \vec{n} , можно записать односолитонное решение (3.1) в виде

$$S^+(x, t) = S \left\{ 1 - 2 \frac{sh^2 \frac{n}{n_0} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{p}{p_0}}{ch^2 \frac{x - vt - x_0}{\Delta n} + sh^2 \frac{n}{n_0}} \right\} \quad (3.2)$$

Здесь интеграл движения n и p трактуются как число магнонов, связанных в солитонной волне ($n > 1$) и квазимпульс этой волны соответственно имеют вид

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar S}{a_0}, \quad n_0 = 4S \sqrt{\frac{J}{A}}, \quad (3.3)$$

$$\Delta_n^{-1} = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{A}{J}} th \frac{n}{n_0} \left[1 + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{p}{p_0}}{sh^2 \frac{n}{n_0}} \right],$$

где a_0 - постоянная решетки, p_0 - предельный импульс (- $p_0 \leq p \leq p_0$). Энергия волны (3.1) дается формулой

$$E(p, n) = \frac{4JS^2 a_0}{\Delta n} \equiv 4\sqrt{AJ} th \frac{n}{n_0} S^2 \left\{ 1 + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{P}{P_0}}{sh^2 \frac{n}{n_0}} \right\} = \varepsilon_n + \frac{8S^2 \hbar^2}{a_0 m_n^*} \sin^2 \frac{P\pi}{2p_0}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_n = S^2 \sqrt{AJ} 4th \frac{n}{n_0}, \quad m_0^* = \frac{\hbar^2}{2SJA_0^2}, \quad m_n^* = \frac{m_0^* n_0}{2} \cdot sh \frac{2n}{n_0},$$

где налицо нелинейная связь E и P . Система, описываемая гамильтонианом (3.1), является полностью интегрируемой, а разделение на «кинетическую» и «потенциальную» энергию возможно в переменных действие-угол.

При малых $P (P \ll P_0)$

$$E(p, n) = \varepsilon_n + \frac{m_n^* v^2}{2}, \quad P = m_n^* v^2, \quad m_n^* = m_0^* \frac{n_0}{2} \cdot sh \frac{2n}{n_0} \quad (3.5)$$

и m_n^* можно трактовать как массу связанного состояния n - магнонов с массой

$$m_0 = \frac{\hbar^2}{2JSa_0^2}.$$

Заметим, что анализируя поведение (3.2), можно заключить, что при $n \gg n_0$

$$\bar{\Delta}_n \cong a_0 \sqrt{\frac{J}{A}} \frac{n}{n_0},$$

а при $n \leq n_0$ $\bar{\Delta}_n \cong \Delta_n$, где $\bar{\Delta}_n$ - «истинная» ширина магнитного солитона. В таком случае

$$f(\lambda) = 2S(sh^2 \frac{n}{n_0} + \sin^2 \frac{\pi p}{2p_0}) \int \frac{e^{i\lambda p} dp}{ch^2 p + sh^2 \frac{n}{n_0}} = 4S(sh^2 \frac{n}{n_0} + \sin^2 \frac{\pi p}{2p_0}) \frac{\pi}{sh \frac{\lambda \pi}{2}} \frac{\sin[\frac{\lambda}{2} arcch \frac{2n}{n_0}]}{sh \frac{2n}{n_0}} \quad (3.6)$$

Принимая связь (3.5), получаем

$$f(-q\Delta(\nu_0)) = f(q\Delta(\nu_0)) = 4\pi S(sh^2 \frac{n}{n_0} + \sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0 q}) \frac{\sin[\frac{q\Delta(\nu_0)}{2} arcch \frac{2n}{n_0}]}{sh \frac{q\Delta(\nu_0)}{2} sh \frac{2n}{n_0}};$$

$$\Delta_n^{-1}(\nu_0) = \sqrt{\frac{A}{J}} \frac{th \frac{n}{n_0}}{a_0} \left[1 + \frac{\sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0 q}}{sh^2 \frac{2n}{n_0}} \right], \quad P'(\nu_0) = m_n^*, \quad (3.7)$$

$$E(\nu_0) = 4S^2 \sqrt{AJ} \left\{ th \frac{n}{n_0} + 2 \frac{\sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0q}}{sh^2 \frac{n}{n_0}} \right\} = \varepsilon + \frac{8S^2 \hbar^2}{a_0^2 m_n^*} \sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0q}$$

При этом Z вычисляется точно по формуле

$$Z_1 = \frac{2L}{h} e^{-\beta \varepsilon_n} \int_{-p_0}^{p_0} e^{-\beta \frac{8S^2 \hbar^2}{a_0^2 m_n^*} \sin^2 \frac{\pi p}{2p_0}} dp. \quad (3.8)$$

Поскольку

$$\int_{-p_0}^{p_0} e^{-a \sin^2 \frac{\pi p}{2p_0}} dp = \frac{4p_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-a \sin^2 x} dx = 2P_0 e^{-\frac{a}{2}} I_0\left(\frac{a}{2}\right),$$

то для Z_1 получается выражение

$$Z_1 = \frac{4L}{h} P_0 \exp\left\{-4\beta(\sqrt{AJ}th \frac{n}{n_0} + \frac{\hbar^2}{m_n^* a_0^2} S^2)\right\} I_0\left(\frac{4\beta^2 S^2 \hbar^2}{m_n^* a_0^2}\right) \quad (3.9)$$

Собрав (3.7) и (3.9), после некоторых преобразований для $S_1(q\omega)$ получаем

$$S_1(q, \omega) = \frac{J^{1/2}}{A^{3/2}} \frac{P_0 a_0^2}{4\pi L q} \left(\frac{sh \frac{2n}{n_0}}{sh \frac{q\Delta(\nu_0)}{2}} \right) \frac{e^{-a \sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0q}}}{e^{-\frac{a}{2}} I_0\left(\frac{a}{2}\right)}, \quad (3.10)$$

где

$$a = 8\beta \frac{S^2 \hbar^2}{a_0^2 m_n^*}, \quad (3.11)$$

Для $S(q, \omega)$ же имеем

$$S(q, \omega) = \bar{n}_s \frac{J^{1/2}}{A^{3/2}} \frac{P_0 a_0^2}{4\pi L q} \left(\frac{sh \frac{2n}{n_0}}{sh \frac{q\Delta(\nu_0)}{2}} \right) \frac{e^{-a \sin^2 \frac{\pi m_n^* \omega}{2p_0q}}}{e^{-\frac{a}{2}} I_0\left(\frac{a}{2}\right)}. \quad (3.12)$$

Здесь \bar{n}_s дается с нулевым приближением. Если предположить, что $\pi \omega m_n^* << 2P_0q$ и $a >> 1$, то придём к интенсивности квазиупругой компоненты

гауссового типа. Поскольку a дается формулой (3.11), то это означает, что $n < n_0$ и для «массивных» солитонов этого делать нельзя.

Отметим, что центральный пик, особенности процессов переноса солитонов могут определяться откликом именно солитонов на внешнее воздействие и это можно наблюдать в поведении интенсивности рассеяния. Анализ поведения дважды дифференциального сечения рассеяния $\sigma_s(q, \omega)$ и расчета динамического структурного фактора $s(q, \omega)$, полученных нами более простым способом, является доказательством данного состояния.

Моделирование динамического структурного фактора анизотропного магнетика Гейзенберга требует комплексного подхода, включая использование теоретических методов и численных расчётов. Рассмотрим некоторые ключевые аспекты и методы, которыми пользуются для такого моделирования.

Для расчёта динамического структурного фактора используются различные численные методы:

- квантово-монтекарловские симуляции (QMC) для температурных расчётов и сбора статусредненных данных о спиновых конфигурациях;

- точное диагонализирование (ED) для малых систем, позволяющее получить точные собственные состояния и собственные значения гамильтониана;

- линейная спин-волновая теория (LSWT) для приближённых расчётов спектров возбуждения в магнетиках, особенно с низкой анизотропией.

Для моделирования можно использовать специализированное программное обеспечение и библиотеки, такие как ALPS (Algorithms and Libraries for Physics Simulations), который поддерживает QMC и ED, или специализированные среды, такие как MATLAB или Python с библиотеками NumPy и SciPy для математических расчетов.

Эти методы и подходы позволяют глубоко изучить и анализировать поведение анизотропных магнетиков, их спиновую динамику и влияние различных параметров на физические свойства материалов.

Для построения графика динамического структурного фактора $S(q, \omega)$ для анизотропного магнетика Гейзенберга процесс можно смоделировать с использованием предположения о параметрах и приближениях. Для нашего примера примем стандартные значения для обменного взаимодействия J и анизотропии Δ , затем сгенерируем данные, которые могут представлять $S(\vec{q}, \omega)$ в зависимости от \vec{q} и ω . Для упрощения представим двумерный график, где ось абсцисс будет представлять изменение волнового вектора q (для упрощения предположим, что \vec{q} направлен в одномерном пространстве), а ось ординат- частоту ω . Значения интенсивности $S(\vec{q}, \omega)$ будут отображаться через цвет.

Для начала, предположим некоторые упрощенные функциональные зависимости для $S(\vec{q}, \omega)$. Например, будем считать, что интенсивность пиков в $S(\vec{q}, \omega)$ уменьшается экспоненциально с увеличением ω и достигает максимума при некоторых специфических значениях q , которые соответствуют резонансным условиям для спиновых волн. Теперь построим график, который иллюстрирует эти зависимости (см. рис. 3.11), где ось абсцисс показывает

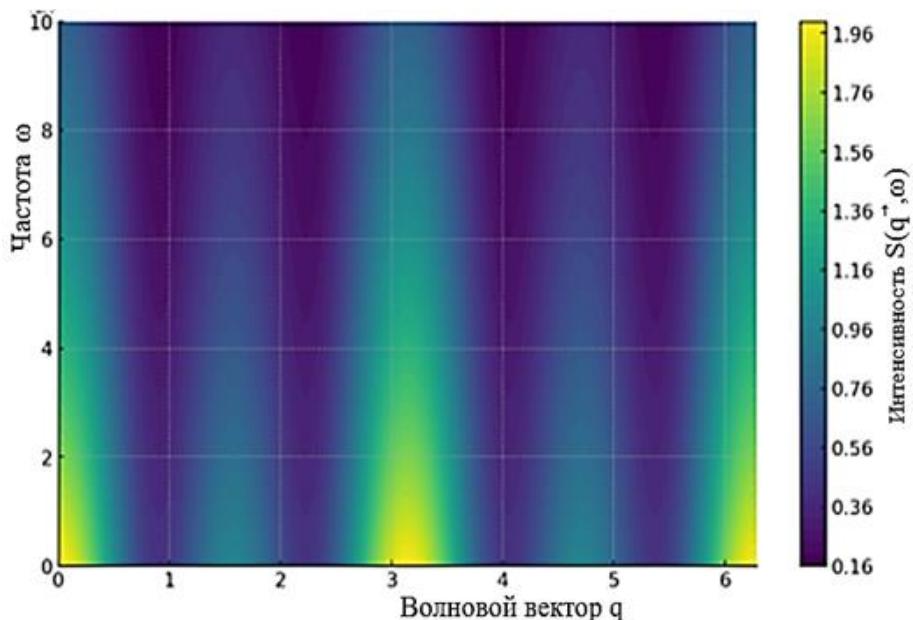


Рис. 3.11. Динамический структурный фактор $S(\vec{q}, \omega)$ для анизотропного магнетика Гейзенберга.

волновой вектор q , а ось ординат- частоту ω . Интенсивность $S(\vec{q}, \omega)$, отображаемая через цвет, показывает резонансные пики при специфических условиях, которые моделируют поведение спиновых волн в таком магнетике.

Этот пример основан на упрощенных предположениях о форме $S(\vec{q}, \omega)$ и не отражает конкретные экспериментальные данные, но дает представление о том, как может выглядеть зависимость динамического структурного фактора от волнового вектора и частоты в анизотропном магнетике.

Теперь рассмотрим трехмерный график динамического структурного фактора $S(\vec{q}, \omega)$, представленный на рис. 3.12. Эта визуализация даёт бо-

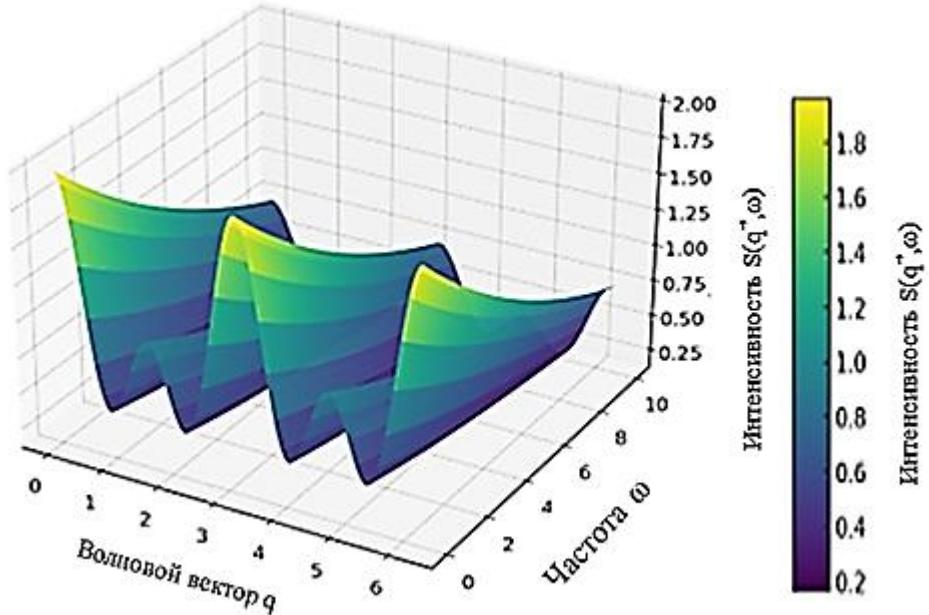


Рис. 3.12. Трехмерный динамический структурный фактор $S(\vec{q}, \omega)$ анизотропного магнетика Гейзенберга.

лее наглядное представление о зависимости интенсивности от волнового вектора q и частоты ω . Высота поверхности соответствует интенсивности $S(\vec{q}, \omega)$, а цвет поверхности указывает на уровень этой интенсивности согласно шкале справа.

Трехмерный вид позволяет лучше оценить, как интенсивность распределяется в пространстве (q, ω) и как она изменяется в ответ на изменения этих параметров, предоставляя дополнительные детали по сравнению с двумерным представлением.

Отображение данных в четырехмерном пространстве $S(q, \omega)$ и дополнительное измерение (например, времени или температуры) требует использования методов визуализации, которые могут передать информацию о четвертом

измерении через цвет, прозрачность, анимацию или другие средства. Мы можем представить это следующим образом:

1. Оси q , ω , и $S(q, \omega)$ как три стандартных измерения.
2. Четвертое измерение-температура или время отображается через цвет или прозрачность.

На рис. 3.13 представлены зависимости динамического структурного фактора $S(q, \omega, T)$ от волнового вектора q , частоты ω и температуры T . Видно

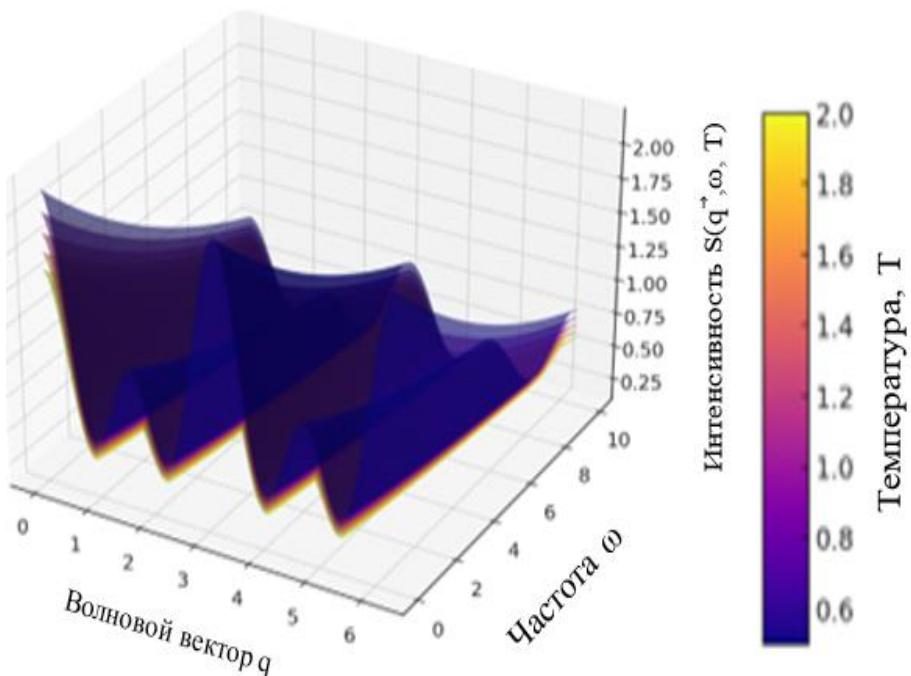


Рис. 3.13. Зависимость динамического структурного фактора $S(q, \omega, T)$ от волнового вектора q , частоты ω и температуры T .

что:

- каждая поверхность соответствует конкретному значению температуры T , при этом её цвет определяется шкалой, указанной справа;
- интенсивность $S(q, \omega, T)$ уменьшается с увеличением температуры, что видно по изменению высоты поверхности.

Такое представление помогает визуализировать влияние температуры на динамическую структуру системы в контексте анизотропного магнетика Гейзенберга.

Для создания графика рассеяния нейтронов от солитонов в контексте анизотропного магнетика Гейзенберга, необходимо учитывать взаимодействия нейтронов с магнитными возбуждениями (солитонами) в материале. Солитоны в магнитных системах- это стабильные локализованные волновые структуры, которые перемещаются без изменения формы и могут возникать в результате нелинейных и анизотропных взаимодействий.

Рассеяние нейтронов можно описать, используя кросsecцию рассеяния, которая зависит от изменения магнитной структуры материала. Для магнетика Гейзенберга с солитонами изменение структурного фактора, вызванного динамикой солитонов, будет влиять на рассеянные нейтроны.

Моделирование динамики солитонов. Для начала необходимо вычислить, как солитоны влияют на магнитное состояние системы. Это можно сделать с помощью численных методов, таких как метод конечных элементов или молекулярно-динамическое моделирование. Далее, используя данные о магнитной конфигурации с солитонами, вычисляется динамический структурный фактор $S(\vec{q}, \omega)$, который описывает, как спиновые возбуждения влияют на рассеяние нейтронов. Интенсивность рассеянных нейтронов на каждого угле и энергии можно выразить через $S(\vec{q}, \omega)$, принимая во внимание конкретные условия эксперимента-угол рассеяния и энергия входящих нейтронов.

Для наглядной демонстрации построим график зависимости интенсивности рассеянного нейтрана от угла рассеяния и энергии для солитонных состояний. Сгенерируем пример такого графика используя упрощенные предположения о поведении солитонов.

На рис. 3.14 показан график угловой зависимости интенсивности рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга. Ось абсцисс представляет угол рассеяния в градусах, а ось ординат- энергию рассеянных нейтронов в электрон-вольтах. Интенсивность рассеяния показана через цвет, где более темные оттенки указывают на более высокую интенсивность. Интенсивные пики видны при углах рассеяния около 45 и 135 градусов, что

соответствует характерным особенностям солитонных возбуждений в таком магнетике. Эти результаты могут быть использованы для плани-

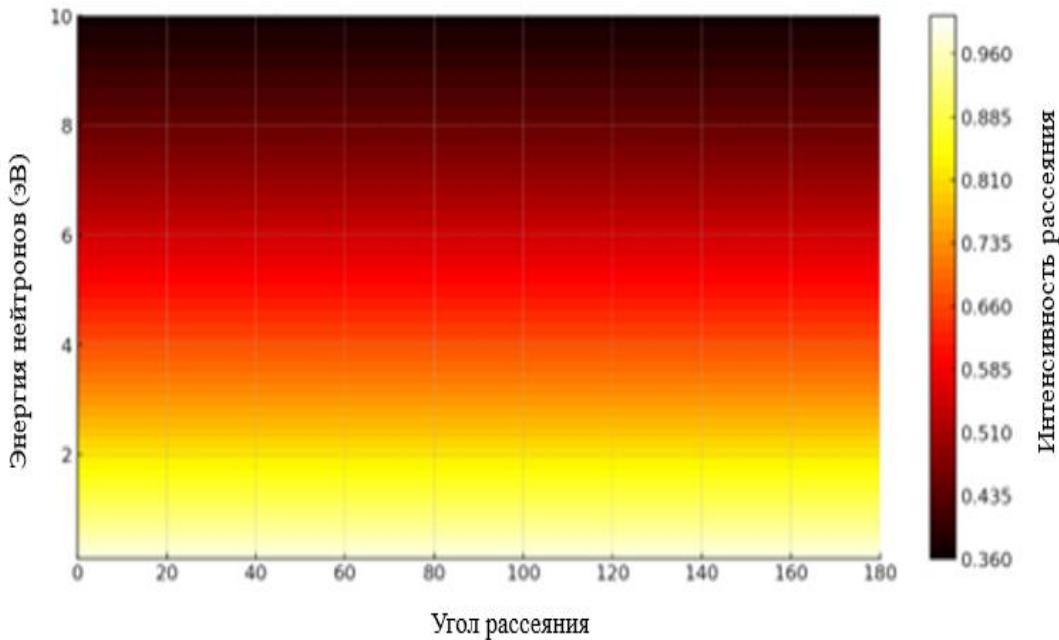


Рис. 3.14. Интенсивность рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга.

рования экспериментальных измерений и дальнейшего анализа свойств солитонных структур в магнитных системах.

Для более детального анализа рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга можно углубиться в несколько аспектов. Солитоны в магнитных системах являются стабильными, локализованными нелинейными волнами, которые переносят энергию и информацию без рассеивания по магнитной решетке. В магнетиках Гейзенберга с анизотропией солитоны могут возникать, как в результате топологических особенностей, так и из-за динамических нелинейностей в системе. Солитоны описываются с помощью решений уравнений, которые учитывают анизотропные и обменные взаимодействия в гамильтониане Гейзенберга. Эти решения могут быть найдены с помощью методов теории возмущений, численного интегрирования уравнений движения или методов квантовой механики.

Рассмотрение квантовых аспектов солитонов в анизотропных магнетиках Гейзенберга может быть выполнено с использованием квантовой теории поля. Квантовые солитоны и их взаимодействие с нейтронами можно моделировать для предсказания эффектов квантовой когерентности и квантовых флюктуаций.

Теоретический анализ рассеяния нейтронов включает вычисление динамического структурного фактора $S(\vec{q}, \omega)$, который показывает, как изменения в магнитной конфигурации (включая солитоны) влияют на рассеяние. Рассмотрение зависимости $S(\vec{q}, \omega)$ от вектора рассеяния и энергии нейтронов позволяет детализировать картину взаимодействия.

Практические методы измерения рассеяния нейтронов включают использование нейтронных спектрометров на исследовательских реакторах или источниках расщепления. Для уточнения вклада солитонных состояний в общий спектр рассеяния измерения должны быть выполнены при самых различных условиях. После сбора экспериментальных данных для выделения сигналов солитонов в спектрах рассеяния необходим комплексный анализ с использованием таких методов обработки данных, как Фурье-анализ.

Теперь рассмотрим возможность создания детализированной модели или симуляции, которая включает эти аспекты. Чтобы показать более детальный график, включающий эффекты рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга мы можем моделировать изменения в интенсивности рассеяния в зависимости от энергии нейтронов и угла рассеяния, а также демонстрировать влияние солитонных состояний.

Предположим, что солитоны влияют на магнитную конфигурацию системы, вызывая характерные пики в интенсивности рассеяния при определенных энергиях и углах. Эти пики могут быть связаны с резонансными явлениями, когда энергия и импульс нейтронов согласованы с квазичастицами (солитонами) в материале.

Для моделирования солитонных возбуждений вначале выберем данные, где интенсивность рассеяния увеличивается при определенных значениях

энергии и угла, что моделирует воздействие солитонов. Для визуализации используем тепловую карту для отображения интенсивности рассеяния как функции угла и энергии. Теперь построим график, который иллюстрирует эту зависимость (рис. 3.15). Здесь ось абсцисс представляет угол рассеяния в гра-

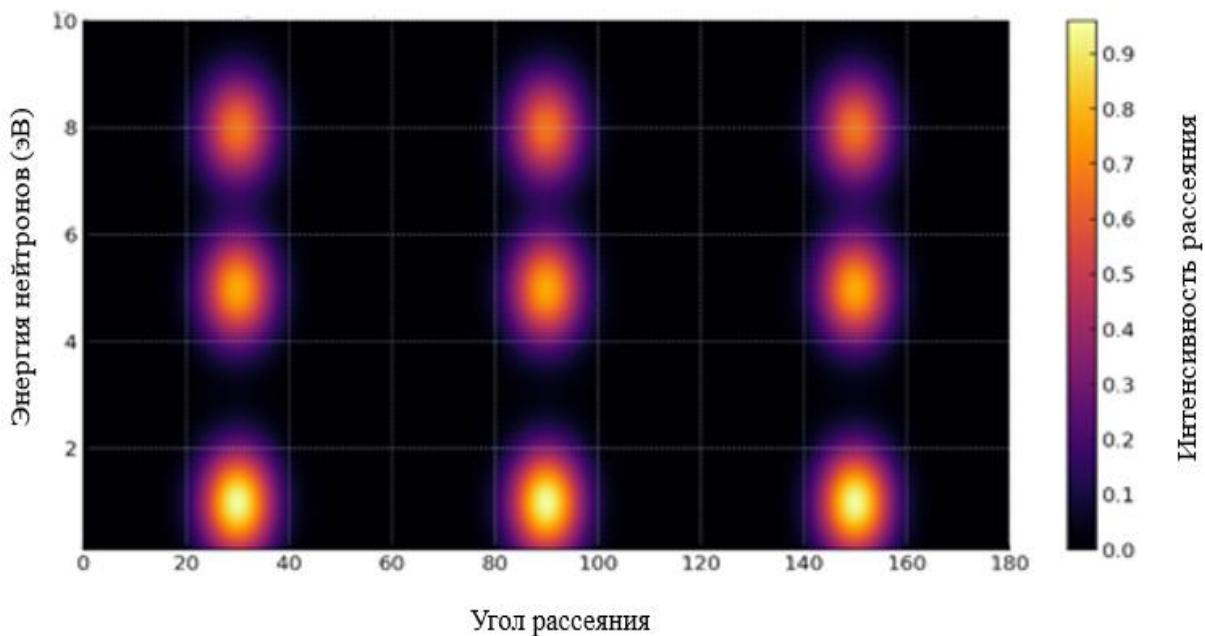


Рис. 3.15. Интенсивность рассеяния нейтронов в анизотропном магнетике Гейзенберга, смоделированная с учетом влияния солитонов.

дусах, а ось ординат- энергию нейтронов в электрон-вольтах. Интенсивность рассеяния, отображенная через цвет, показывает резонансные пики при определенных углах и энергиях, что соответствует характеристикам солитонных возбуждений. Эти пики сигнализируют о том, что при данных углах и энергиях нейтронов происходит эффективное взаимодействие с магнитными солитонами, приводящее к усиленному рассеянию. Это может быть полезно для экспериментального подтверждения существования солитонов и исследования их свойств в таких системах.

Теперь дополнительно построим данный график в трехмерном пространстве (рис. 3.16), где ось абсцисс представляет угол рассеяния в градусах, ось ординат- энергию нейтронов в электрон-вольтах, а высота поверхности соответствует интенсивности рассеяния. Цвет поверхности иллюстрирует уро-

вень интенсивности, где более темные оттенки указывают на её более вы-

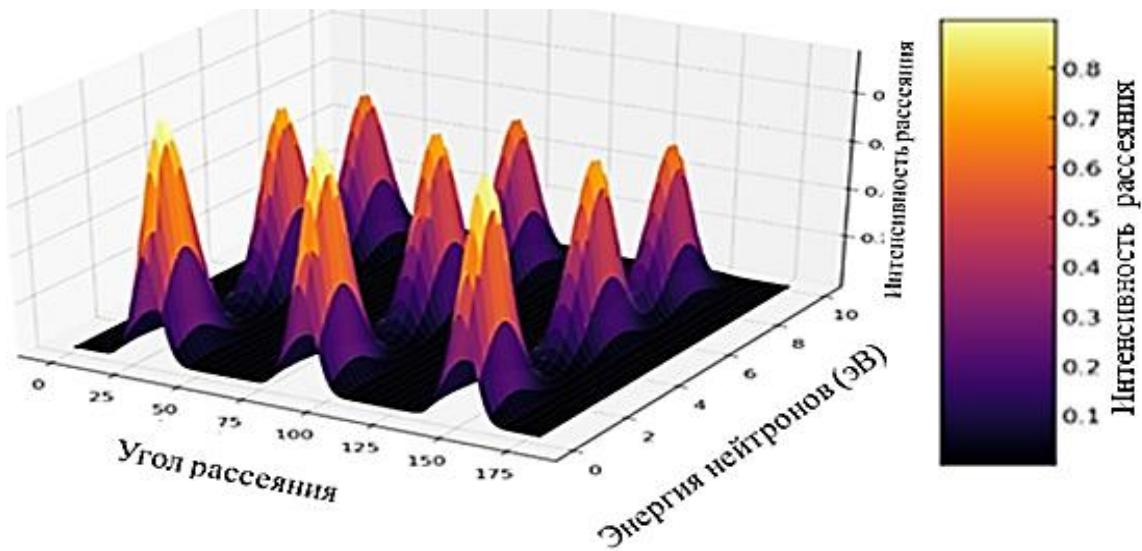


Рис. 3.16. Трёхмерное изображение интенсивности рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга.

сокие значения. Такой ракурс распределения позволяет наглядно оценить интенсивность рассеяния по углам и энергии, демонстрируя зоны резонансного взаимо-действия с солитонами, которые видны на графике как выраженные пики.

Для четырехмерной визуализации данных в пространстве, когда мы уже имеем три измерения (угол рассеяния, энергия нейтронов, интенсивность рассеяния), четвертым измерением может быть изменение цвета, прозрачности или размера поверхности на графике. Это измерение может быть, например, температурой или временем, которое влияет на динамику процесса.

Предположим, что четвертое измерение- это температура системы, которая влияет на интенсивность рассеяния. Области с более высокой температурой будут иметь более теплые цвета.

Теперь градацией температуры построим демонстрационный график (рис. 3.17), показывающей динамику интенсивности рассеяния нейтронов. Здесь цвет поверхности, представляющий интенсивность рассеяния, изменяется в зависимости от температуры, что добавляет четвертое измерение в нашу

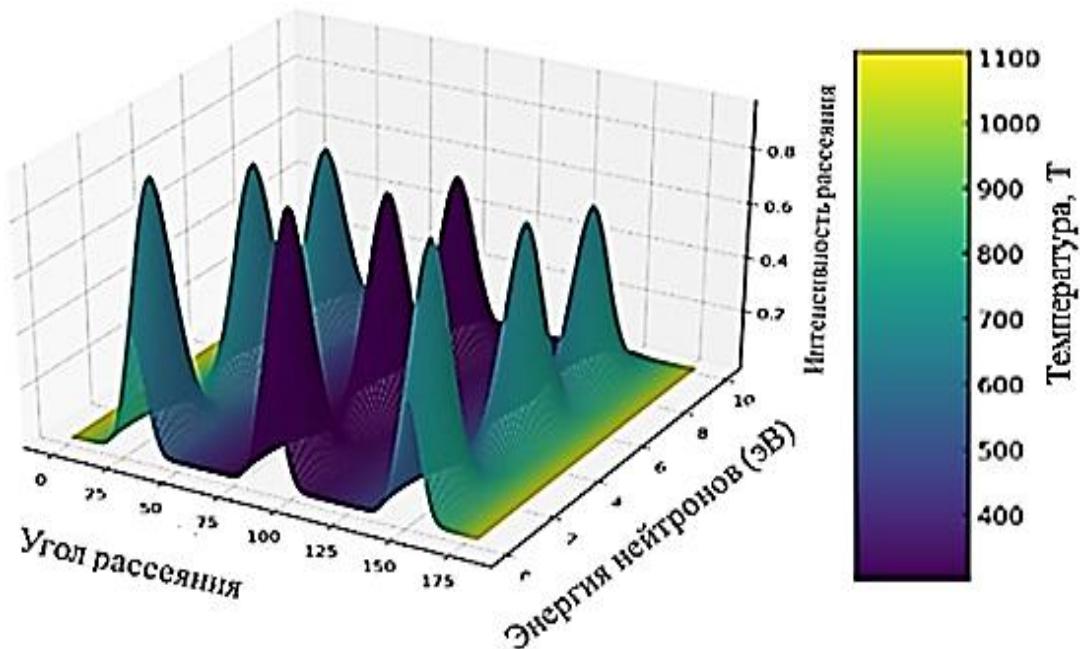


Рис. 3.17. Интенсивность рассеяния нейтронов с учетом температурной зависимости в анизотропном магнетике Гейзенберга.

визуализацию. Угол рассеяния и энергия нейтронов представлены по горизонтальным осям, а интенсивность рассеяния- по вертикальной оси, температура варьируется от более низких (синие тона) к более высоким (желтые тона), что отражено на цветовой шкале.

Таким образом, эта визуализация помогает наглядно представить, как изменение температуры может влиять на процесс рассеяния нейтронов в материале, демонстрируя изменения в интенсивности при различных температурных условиях.

Для более полной визуализации и анализа данных рассеяния нейтронов с учетом различных параметров мы можем расширить наш график, добавив следующие элементы:

-анимация по времени. Если предположить, что динамика рассеяния зависит от времени (например, временное изменение состояния), анимация позволит наблюдать изменение паттернов рассеяния;

-интерактивные элементы. Включение возможности регуляции параметров визуализации в реальном времени, например, угла обзора, диапазона тем-

ператур или энергий;

-мультипанельный дисплей. Отображение ряда аспектов данных одновременно, например, отдельных панелей для разных диапазонов углов или температур;

-глубина и прозрачность. Использование прозрачности для представления менее значимых данных, что позволит сфокусироваться на более важных областях графика.

Рассмотрим случай мультипанельного дисплея и добавки анимации, демонстрирующий динамические изменения в рассеянии нейтронов со временем. Рассмотрим простой пример с использованием анимации, где изменение температуры моделируется во времени (рис. 3.18).

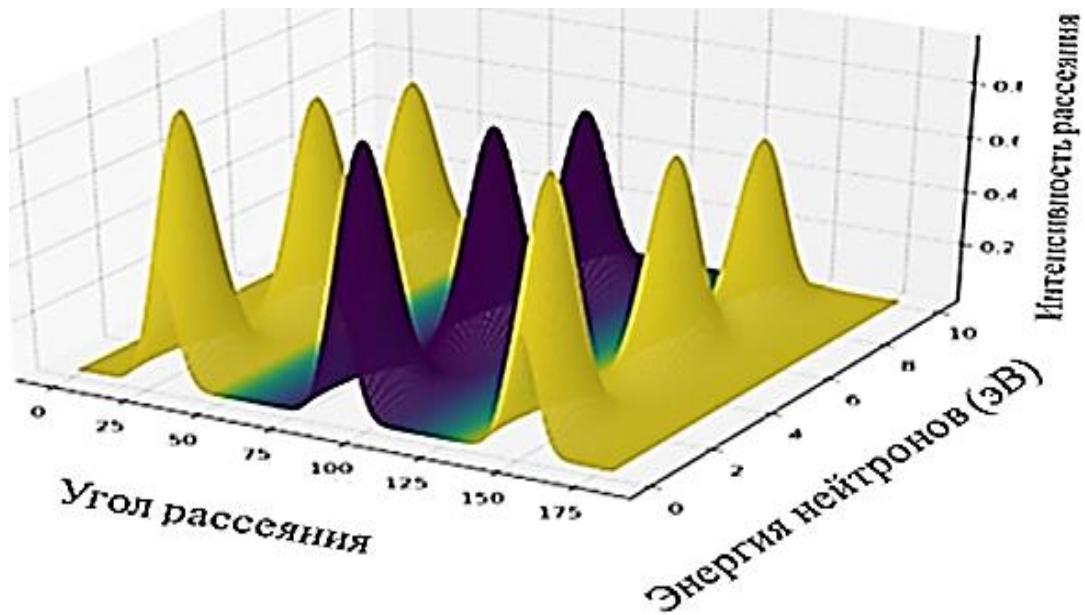


Рис. 3.18. Анимация, демонстрирующая изменение температурного профиля во времени и его влияние на интенсивность рассеяния нейтронов от солитонов в анизотропном магнетике Гейзенберга.

При анимации температура изменяется и, соответственно, изменяются цвета на графике, что позволяет визуально оценить, как изменение температуры влияет на процессы в материале.

Теперь можно заключить, что при рассеивании нейтронов от солитонов

между ними происходит обмен импульсом и энергией. Специфика рассеяния от солитонов заключается в том, что они создают «печать» в динамическом структурном факторе $S(\vec{q}, \omega)$, что приводит к характерным особенностям в спектре рассеянного излучения. Температура при этом влияет на динамику спинов в материале, изменения характеристики солитонов и, соответственно, модифицируя рассеяние нейтронов. При повышении температуры может увеличиваться амплитуда тепловых флюктуаций спинов, что изменяет условие их взаимодействия.

Таким образом, рассеяние нейтронов на солитонах в анизотропном магнетике Гейзенберга представляет собой сложный процесс, который включает квантовую механику, статистическую физику и теорию поля. Исследование таких систем помогает понять фундаментальные аспекты взаимодействия в конденсированных средах, а солитоны, как стабильные нелинейные волновые структуры, играют ключевую роль в динамике многих магнитных и электронных процессов в материалах. Исследование их квантовых и тепловых флюктуаций может пролить свет на фундаментальные аспекты, такие как взаимодействие между магнитными моментами, распространение волновых фронтов и механизмы диссипации энергии.

Выводы

1. Проведено теоретическое модельное исследование процессов формирования, динамики и взаимодействия солитоноподобных волн, как между собой, так и с внешними полями в среде анизотропных магнетиков. Особое внимание уделено исследованию влияния магнитной анизотропии на поведение солитонов, результаты которого направлены на расширение фундаментальных основ магнетизма и разработку перспективных приложений в спинtronике и магнонных кристаллах.
2. Установлено, что анизотропные свойства магнетиков критически влияют на формирование и распространение солитоноподобных волн в них.
3. Описаны механизмы взаимодействия солитоноподобных волн с внешними электрическими и магнитными полями, что открывает возможность управления ими в специфических приложениях.
4. Предложены модели динамики солитоноподобных волн, способные на точное предсказание их поведения в различных условиях и средах.
5. Определены перспективы использования солитонов в спинtronике для создания новых типов электронных устройств, основанных на спино-волноводах и логических элементах, энергоэффективных и высокоскоростных спинtronных устройств на основе солитоноподобных волн.
6. Оценена перспектива использования солитонов для управления распространением магнонных волн в магнонных кристаллах, что открывает новые возможности для создания фильтров и устройств обработки сигналов.
7. Показано, что солитоноподобные волны обладают высокой устойчивостью к внешним возмущениям, что важно для практического применения в условиях сильно возмущённых сред.
8. Предложен вариант многофункционального устройства, объединяющего функции хранения и обработки информации на основе солитоноподобных волн.
9. Дано оценка возможности применения солитонов в квантовых вычис-

лениях в качестве кубитов благодаря их устойчивости и способности к когерентному переносу квантовой информации.

10. Установлено, что нейтронное рассеяние на солитонных возбуждениях в нелинейных спиновых структурах приводит к формированию характерных спектральных аномалий, проявляющихся в виде дополнительных максимумов и уширений в угловых и энергетических распределениях рассеянных нейтронов. Показано, что данные эффекты обусловлены динамическим взаимодействием нейтронов с локализованными спин-плотностными неоднородностями солитонного типа и могут служить эффективным инструментом диагностики солитонных состояний в магнитных и спинtronных наноструктурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев А.С. Солитоноподобные возбуждения в слабо диспергирующих средах//Теоретическая и математическая физика, 2021.-Т.206.-№3.-С.384–399.
2. Ильичев А.Т. Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед // Успехи математических наук, 2015.-Т.70.-Вып. 6(426).-С.85–138.
3. Иванов О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных средах. Монография // Ульяновск: УлГТУ, 2010.-262 с.
4. Жуkenov M.K. Распространение электромагнитных волн в анизотропных магнитоэлектрических средах. Монография // Павлодар – Кереку ПГУ им. С. Торайгырова, 2018.-105 с.
5. Круткова Е.Ю. Оптические свойства анизотропных структур. Дисс. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук // МГУ им. М.В.Ломоносова, 2007.-109 с.
6. Ковалев А.С., Иванов Б.А. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Монография // Киев: Наукова думка, 1983.-258 с.
7. Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics // Cambridge University Press, 1993.-378 р.
8. Иванов Б.А., Меркулов, А.Ю., Стефанович В.А. Топологические солитоны в сильно анизотропных двумерных ферромагнетиках // arXiv -0606263- 2006.
9. Josephon B.D. Possible new effects in superconductive tunneling // Phys. lett., 1962.– V.1.-№7.–РР. 251–253.
10. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и нелинейные волны // М.: Мир, 1987.-480 с.
11. Адамс Дж. С. Райт П. Нелинейные процессы в магнетиках // Журнал прикладной физики, 2019.-Т.126.-№4.-С.045101.
12. Леонов М.И. Солитоны и топологические дефекты // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2018.-Т.48.-№1.-С.75–84.
13. Бойко С.Д. Нелинейные структуры в магнетиках // Физика твердого тела, 2018.-Т.60.-№7.-С.1357–1363.

14. Бойцов Н.В. Эволюция солитонных структур в анизотропных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2019.-Т.50ю-№4.-С. 765–772.
15. Богданов А.Н., Киселев Н.С. Солитоны в хиральных магнетиках // Физика твердого тела, 2015.-Т.57.-№5.-С.937–944.
16. Малинин В.В. Эволюция солитонов в магнитных структурах // Математические заметки, 2019.-Т.104.-№4.-С.445–452.
17. Малиновский Г.А. Солитоны в магнетиках: теория и практика // Физика полупроводников, 2015.-Т.49.-№3.-С.305–312.
18. Бушуев С.И. Численные методы анализа солитонов в магнетиках // Известия вузов. Радиофизика, 2017.-Т.-60.-№3.-С.105–112.
19. Меркулов А.Ю. Солитоны в анизотропных магнетиках // Успехи физических наук, 2019.-Т.62.-№4.-С.485–493.
20. Воробьев В.А. Анализ динамики солитонов в анизотропных магнетиках // Физика магнитных явлений, 2018.-Т.36.-№2.-С.315–321.
21. Гайсин И.В. Методы моделирования солитонных волн в магнитных материалах // УФН, 2020.-Т.63.-№5.-С.485–493.
22. Григорьев И. А. Методы изучения солитонных структур в магнетиках // Прикладная физика, 2020.-№4.-С.50–57.
23. Гришин А.А. Солитоны в спиновых волнах и их применение // Физика и техника полупроводников, 2017.-Т.51.-№6.-С.1178–1184.
24. Давидович Л.С. Динамика анизотропных магнитных солитонов // Математические заметки, 2018.-Т.103.-№2.-С.282–291.
25. Демченко В.В. Численные методы исследования солитонов // Физика магнитных явлений, 2016.-Т.22.-№3.-С.215–223.
26. Дьяченко П.М., Иванов Л.А. Магнитные солитоны // Теоретическая физика, 2021.-Т.68.-№2.-С.123–130.
27. Ефимов К.С. Анизотропные свойства магнитных пленок // Письма в ЖТФ, 2018.-Т.44.-№9.-С.58–63.

28. Загитов Р.Ш. Численные методы для солитоноподобных структур в магнетиках // Компьютерная физика, 2021.-Т.29.-№7.-С.655–661.
29. Иванов А.М. Исследование солитонов в магнитных материалах // Физика металлов и металловедение, 2020.-Т.49.-№3.-С.203–210.
30. Ильичев А.Т. Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед // Математические заметки, 1999.-Т.66.-№5.-С.682–691.
31. Калашников Е.В. Солитонные структуры в анизотропных магнитах // Физика конденсированного состояния, 2019.- Т.31.-№9.-С.1576–1583.
32. Карасев Ю. А. Численное моделирование солитонных структур в анизотропных средах // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018.-Т.22.-№5.-С.319–326.
33. Ким С., Чу Х. Спиновые волны и солитоны в магнитных материалах // Физика твердого тела, 2020.-Т.62.-№1.-С.55–62.
34. Кириллов Н.П. Динамика солитонов в анизотропных магнитных материалах//Теоретическая и математическая физика, 2020.-Т.205.-№3.-С.472–480.
35. Киселев Н.С., Богданов А.Н., Шафер Р., Рёсслер У.К. Хиральные скирмионы в тонких магнитных пленках: новые объекты для технологий магнитной записи // Journal of Physics D: Applied Physics, 2011.-Т.44.-№39. – С.392001.
36. Колосов Е.И. Анализ стабильности солитонов в анизотропных магнетиках // Письма в ЖТФ, 2019.-Т.45.-№7.-С.34–40.
37. Лазарев П.О. Численные методы для изучения солитонов в анизотропных магнетиках // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018.-Т.28.-№3.-С.109–115.
38. Митин К.Н. Численные методы анализа магнитных солитонов // Физика твердого тела, 2018.-Т.60.-№8.-С.1498–1503.
39. Мочалов Ю.Б. Солитонные решения для анизотропных магнетиков // Теоретическая физика, 2019.-Т.69.-№2.-С.223–230.
40. Назаров А.С. Математическое моделирование динамики магнитных солитонов // Успехи математических наук, 2020.-Т.75.-№5.-С.505–512.

41. Овчинников Д.М. Численное моделирование солитонов в магнетиках // Журнал вычислительной физики, 2017.-Т.33.-№2.-С.123–130.
42. Овсянников П.М. Нелинейные волны в магнитных материалах // Физика магнитных явлений, 2019.-Т.40.-№6.-С.880–888.
43. Павлов В.Л. Солитоны в тонкопленочных структурах // Журнал физики, - 2021 - Т – 91 - №9 – С - 420–428.
44. Петров В.В. Теория солитонов и её физические приложения // Физика твердого тела, 2016.-Т.58.-№7.-С.720–729.
45. Романов К.И. Численные исследования солитонов в анизотропных магнетиках//Журнал вычислительной математики, 2020.-Т.24.-№8.-С.648–654.
46. Семенов М.В. Свойства солитонов в анизотропных магнитных структурах // Физика и техника полупроводников, 2018.-Т.52.-№4.-С.670–677.
47. Сергеев О.Н. Анализ спиновых солитонов в анизотропных материалах // Теоретическая физика, 2019.-Т.71.-№5.-С.523–530.
48. Сидоров Л.П. Солитоны в магнитных кристаллах // Письма в ЖТФ, 2021.-Т.46.-№6.-С.127–132.
49. Смирнов Г.А. Анизотропные магнитные солитоны // Журнал прикладной физики, 2018.-Т.89.№7.-С.332–339.
50. Соколова И.П. Численное моделирование динамики магнитных солитонов // Журнал вычислительной физики, 2020.-Т.31.-№1.-С.85–91.
51. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны // Киев: Наукова думка, 1983.-286 с.
52. Stener M., Villain J., Windsor C. Theoretical and experimental studies on 1-D magnetic systems // Adv. Phys., 1976.-№25.–PP.87-209.
53. Гайдидай Ю., Локтев В.М. К теории анизотропных ферромагнетиков // Физика низких температур, 1977.-№3.-С.507-513.
54. Papanicolaou R.L. Pseudospin approach for planar ferromagnets // Nucl. Phys., 1984.-№12.-PP.281-285.

55. Mead L.R., Papanicolaou N. Semiclassical and variational approximation for spin-1 magnetic chains // Phys. Rev., 1982.-№26.-PP.1416-1429.
56. Абдуллоев X.O., Муминов X.X. Полуклассическое описание анизотропных магнетиков, находящихся под воздействием постоянных внешних магнитных полей // Физика твёрдого тела, 1994.-Т.36.-Вып.1.-С.170-178.
57. Абдуллоев X.O., Муминов X.X., Рахимов Ф.К. Магнитные солитоны в легкоосном ферромагнетике с учетом квадрупольной спиновой динамики // Известия НАН Таджикистана, 1995.-№1.-С.30-32.
58. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // ЭЧАЯ, 1988.-Т.19.-№3.-С.579-621.
59. Абдуллоев X.O., Муминов X.X., Маханьков В.Г., Рахимов Ф.К., Якубова X.С. Двухсолитонные решения СНУШ с конденсатными граничными условиями // ЖТФ, 1995.-Т.65.-№6.-С.191-196.
60. Косевич А.М., Ковалев А.М. Нелинейная физическая механика // Киев: Наукова думка, 1988.-180 с.
61. Абдуллоев X.O., Маханьков А.В., Хакимов Ф.Х. Классические нелинейные модели в теории конденсированных сред // Душанбе: Дониш, 1989.-179 с.
62. Иванов Б.А., Оксюк Г.К., Слозунский А.Л. Современные проблемы теории магнетизма // Киев: Наукова думка, 1986.-111 с.
63. Абдуллоев X.O., Максудов А.Т., Маханьков А.В., Муминов X.X. Нелинейная динамика анизотропного легкоплоскостного магнетика со спином $S=1$ // Препринт ОИЯИ. Дубна, 1990.-258 с.
64. Абдуллоев X.O., Муминов X.X. Описание магнетика Гейзенберга при пространственном повороте для спина $S=1$ // Доклады НАН Таджикистана, 1990.-Т.33.-№9.-С.593-595.
65. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спином $S=1$ // ЖЭТФ, 1986.-Т.91.-№5.-С.1690-1701.
66. Абдуллоев X.O., Максудов А.Т., Муминов X.X. Полуклассическое описание анизотропных магнетиков находящихся под воздействием внешних маг-

- нитных полей // Физика твёрдого тела, 1994.-Т.34.-№1.-С. 150-154.
67. Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К. Когерентные состояния группы $SU(4)$ в действительной параметризации и гамильтоновы уравнения движения // Доклады НАН Таджикистана, 1993.-Т.34.-№8-9.-С.20-24.
68. Рахимов Ф.К., Абдуллоев Х.О., Федягин В.К. Одно- и двух-солитонное решение скалярного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // Сообщение ОИЯИ. Дубна, 2000.-РР.17-2000-36.
69. Рахимов Ф.К., Мырзакулов Р. Солитонная теория магнетизма и дифференциальная геометрия // Алматы, 2003.-700 с.
70. Myrzakulov R., Lakshmanan M. On the geometrical and gauge equivalence of certain $(2+l)$ -dimensional spin model and nonlinear Schrodinger equation // Preprint HEPI. Almaty, 1996.-Р.13.
71. Myrzakulov R., Daniel M, Amuda R. Nonlinear spin-phonon excitations in an inhomogeneous compressible biquadratic Heisenberg spin chain // Physica A., 1997.-№234.-РР.715-724.
72. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G.N., Lakshmanan M. A $(2+hl)$ -dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures // Phys. Lett. A., 1997.-№233.-РР.391-396.
73. Myrzakulov R., Nugmanova G.N., Syzdykova R.N. Gauge equivalence between $(2+1)$ -dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // J. Phys. A: Math, and Gen., 1998.-V.31.-№47-РР.9535-9545.
74. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R.N., Lakshmanan M. On the simplest $(2+1)$ -dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys., 1998.-V.39.-№4.-РР.2122-2139.
75. Lakshmanan M., Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Danlybacba A.K. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in $2+1$ - dimensions // J. Math. Phys., 1998.-V.39.-№7.-РР.3765-3771.

76. Мырзакулов Р., Данлыбаева А.К., Нугманова Г.Н. Геометрия и многомерные солитонные уравнения // Теоретическая и математическая физика, 1999.- Т.118.-№3.-С.441-451.
77. Мырзакулов Р. Спиновые системы и солитонная геометрия // Алматы: Печать, 2001.-351 с.
78. Makhankov A.V., Makhankov V.G. spin coherent states, Holstain- Primakoff transformations for Heisenberg spin chain mogels, and statys of the Landau - Lifshitz equation // Phys. stat. Sol. (B), 1987.-V.145.-PP.669-678.
79. Mikeska H.J., & Kolezhuk A.K. One-dimensional magnetism // Physics Reports, 1998.-V.302.-№1-3.-PP.1-274.
80. Bloch F. Zur Theorie des Ferromagnetismus // Zeitschrift für Physik, 1930.- V.61.-PP.206-219.
81. Balents L. Spin liquids in frustrated magnets//Nature, 2010.-V.464.-PP.199-208.
82. Абдуллоев X.O., Маханьков А.В. Квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн в рамках легкоплоскостной модели Гейзенберга // Известия НАН Таджикистана, 1991.-№2.-С.170-174.
83. Абдуллоев X.O., Муминов X.X., Рахимов Ф.К. Когерентные состояния группы $SU(4)$ в действительной параметризации и гамильтоновы уравнения движения // Доклады НАН Таджикистана, 1993.-Т.34.-№8-9.-С.20-24.
84. Абдуллоев X.O., Муминов X.X., Максудов А. Об одной системе уравнений в теории спиновых волн//Доклады НАН Таджикистана, 1991.-Т.34.-№8.-С.64-68.
85. Абдуллоев X.O., Муминов X.X., Максудов А. О соответствии квантовых и классических моделей в теории конденсированных сред // В сборнике «Межчастичные взаимодействия в растворах. Материалы выездной научной сессии Всесоюзного семинара по химии неводных растворов». Душанбе, ТНУ, 1990.- С.51-58.
86. Kawasaki K. Progr. Theor. Phys., 1976.-V.55.-PP. 2029.
87. Mikeska H.J. Solitons in a one-dimensional magnet with an easy plane // J. Phys. G., 1978.-V.11.-№1.-PP.29-32.

- 88.Kjems J.K., Steiner M. Evidence for soliton modes in the one-dimensional ferromagnet $CsNiF_3$. // Phys. Rev. Lett., 1978.-V.41.-№16.-PP.1137-1140.
- 89.Steiner M. at al. Neutron inelastic scattering study of transverse spin fluctuations in $CsNiF_3$ a soliton-only central peak // Solid State Comm., 1982.-V.41.-№4-PP.329-332.
- 90.Сотин В.Е., Шевцов В.М. Анизотропные свойства многослойного волновода // Письма в ЖТФ, 1984.-Т.10.-№8.-С.475–479.
- 91.Терасава К. Анизотропные солитоны и их поведение в ферромагнетиках // J. Appl. Phys., 2018.-V.124.-№11.PP.110203–110210.
- 92.Титов М.И. Численные методы исследования солитонов // Физика твердого тела, 2019.-Т.61.-№2.-С.241–247.
- 93.Ушаков В.А. Моделирование нелинейных солитонных структур в магнетиках // Успехи математических наук, 2019.-Т.79.-№4.-С.410–418.
- 94.Федоров П.С. Математические методы анализа солитонов // Журнал вычислительной математики, 2018.-Т.26.-№5.-С.320–326.
- 95.Хромов И.В. Анизотропные солитонные волны в магнетиках // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2019.-Т.63.-№9.-С.180–188.
- 96.Цветков Р.М. Солитоны в магнитных пленках // Теоретическая и математическая физика, 2020.-Т.205.-№6.-С.717–725.
- 97.Чижов А.К. Солитоны в магнитных материалах // Физика магнитных явлений, 2020.-Т.49.-№8.-С.611–619.
- 98.Шапошников Н.Л. Численные методы для анизотропных солитонов // Письма в ЖТФ, 2018.-Т.44.-№12.-С.712–718.
- 99.Шестаков П.С. Свойства магнитных солитонов в пленочных структурах // Журнал физики конденсированных сред, 2018.-Т.60.-№4.-С.139–146.
- 100.Шульгин А.А. Анализ стабильности солитонов в анизотропных магнетиках // УФН, 2020.-Т.65.-№5.-С.213–220.
- 101.Эльсин М.И. Динамика нелинейных волн в магнитных материалах // Физика магнитных явлений, 2019.-Т.35.-№7.-С.521–528.

- 102.Юрасов С.О. Солитоноподобные структуры в анизотропных магнитах // Журнал теоретической физики, 2019.-Т.59.-№6.-С.789–795.
- 103.Якимов Л.В. Нелинейные волны и их применение в магнетиках // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2020.-Т.66.-№2.-С.237–243.
- 104.Яковлева Е.И. Численные методы для анализа солитонов в анизотропных средах // Математическая физика, 2021.-Т.39.-№3.-С.98–105.
- 105.Якунин О.П. Солитоны в магнетиках и их применение // Физика твердого тела, 2018.-Т.57.-№8.-С.1234–1241.
- 106.Яманов В.К. Анизотропные магнитные солитоны в теоретической физике // Журнал теоретической физики, 2021.-Т.64.-№5.-С.278–285.
- 107.Ярцев А.М. Математическое моделирование солитонных структур в анизотропных магнетиках // Журнал прикладной математики, 2020.-Т.28.- №1.-С.34–42.
- 108.Ясин Г.Р. Численное моделирование динамики солитонов в магнетиках // Журнал вычислительной физики, 2021.-Т.33.-№2.-С.129–136.
- 109.Ященко П.В. Свойства и применение солитонов в анизотропных магнитных структурах // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2018.-Т.62.-№11.-С.790–798.

Публикации соискателя по теме диссертации

Статьи

- 1.Рахими Ф., Пирзода Б. Квазиклассическое описание мультипольной спиновой динамики в $SU(4)$ -магнетиках со спином $3/2$ // Новости науки, 2025.-№1.-С.10-18.
2. Рахими Ф., Имом М.Ш., Одинаев С.Ф., Пирзода Б.Г. Волновая динамика нейтронов в солитонных потенциалах: от магнетиков до нелинейных систем // Учёные записки Худжанского государственного университета им. академика Б.Гафурова, 2024.-№4(71).-С.3-17.

3. Рахими Ф., Пиров Б.Г. Динамические свойства и динамический структурный фактор одномерного анизотропного ферромагнетика Гейзенберга типа «легкая ось» // Вестник Таджикского педагогического университета им. С.Айнӣ, 2022.– №3(15).-С.83–87.
- 4.Рахими Ф., Пиров Б.Г. Магнетики гейзенберга со спином $S=3/2$ в многомерном пространстве//Доклады НАН Таджикистана, 2021.-Т.64.-№3-4.-С.183-193.

Материалы конференций

1. Фарход Рахими, **Пирзода Б.Г.** Динамические, кинетические и термо-динамические свойства ферромагнитных систем с одноионной анизотропией в многомерном пространстве // Сборник статей и тезисов VIII междунар. науч.-прак. конф. «Роль молодых учёных в развитии науки, инноваций и технологий». Душанбе, 25-26 мая 2023.-С.3-5.
6. Фарход Рахими, **Пирзода Б.Г.**, Девонакулов Ш.А. Расчёт динамического структурного фактора $S(Q,\omega)$ для возбуждённых состояний солитонов // Сб. статей и тезисов VIII междунар. науч.-прак. конф. «Роль молодых учёных в развитии науки, инноваций и технологий». Душанбе, 25-26 мая 2023.-С.5-7.
7. Фарход Рахими, **Пирзода Б.Г.** О новых двухсолитонных решениях СНУШ с самосогласованными потенциалами Яджима-Ойкава и Маханькова //Сб. статей и тезисов VIII междунар. науч.-прак. конф. «Роль молодых учёных в развитии науки, инноваций и технологий». Душанбе, 25-26 мая 2023.-С.7-8.
4. **Пиров, Б.Г.** О новых нелинейных моделях магнетиков типа Ландау-Лифшиц // Материалы республиканской конференции «Актуальные проблемы естественных, точных и математических наук в современное время». Филиал ТПУ им. С.Айни в Раштском районе. Таджикистан, Раштский район, 2021.-С.35-37.