МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Кадамшоев Ноибшо Улфатшоевич

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор физико-
математических наук, профессор
М.Ш. Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2023

Оглавление

Введение **3**

Глава I. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана **9**

§ 1.1. Предварительные факты, вспомогательные утверждения и история вопроса о неравенстве Джексона-Стечкина 9

§ 1.2. Неравенство типа Джексона-Стечкина в B_2, содержащее характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$ 19

§ 1.3. Неравенство типа Джексона-Стечкина для совместного полиномиального приближения функций $f \in B_2^{(r)}$ 25

§ 1.4. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина посредством усреднённого значения характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$ . . 31

§ 1.5. О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана посредством модулей непрерывности 35

Глава II. Решение некоторых экстремальных задач для классов функций **43**

§ 2.1. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций . 43

2.1.1. Поперечники класса $W^{(r)}B_2$ 44

2.1.2. Точные значения n-поперечников классов функций $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\,(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$ 47

2.1.3. Точные значения n-поперечников классов функций $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\,(r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \leq \infty)$ в пространстве B_2 . . . 50

2.1.4. Точные значения n-поперечников класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$. 53

§ 2.2. Решение экстремальной задачи (1.3.1) для некоторых классов функций 57

§ 2.3. Решение экстремальной задачи (1.3.1) для классов функций $\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$ и $\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, h)$ 64

Список литературы **70**

Введение

Актуальность темы исследования. Теория аппроксимации функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа и имеет важные приложения в прикладных вопросах математики. Особое место в этой теории занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций.

Следует отметить, что экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций изучались, например, в известных работах К.И.Бабенко [4], В.М.Тихомирова [30, 31], J.T.Scheick [52], В.И.Белого [6], М.З.Двейрина [13–15], S.D.Fisher и C.A.Micchelli [48], и нашли дальнейшие развитие в работах Л.В.Тайкова [28, 29], А.Пинкуса [50], Ю.А.Фаркова [32], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [3], С.Б.Вакарчука [8], М.Ш.Шабозова с учениками [37, 43, 45, 46] и многих других.

В этой работе, продолжая исследования указанных авторов, решены различные экстремальные задачи в пространстве Бергмана B_2. В экстремальных задачах теории приближения функций как в действительной, так и в комплексной областях одной из важных является задача отыскании точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина в любом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или её некоторую производную. Следует отметить, что по решению сформулированной задачи наиболее существенные результаты получены для классов периодических функций. Обстоятельный обзор полученных в периодическом случае результатов приведен, например, в работах В.И.Иванова [17], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [11], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [47] и монографии Н.П.Корнейчука [20] и других. Что касается изучения аналогичной задачи в комплексной области, то укажем на недавно опубликованные работы В.А.Абилова с соавторами [1] и М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова[39, 41]. Здесь продолжено исследование указанных авторов через характеристику гладкости функции, введенной К.В.Руновским [22]. Исследованы неравенства типа Джексона-Стечкина для совместного приближения функций и её последовательных производных комплексными полиномами и их соответствующими производными для класса функций $B_2^{(r)}$, а также точные неравенства типа Джексона-Стечкина для совместного приближения посредством усреднённого значения характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$. В обоих случаях указан явный вид точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения. Аналогичные результаты получены для наилучших совместных приближений функций через усредненное значение модулей непрерывности первого порядка r-х производных функций. Указанные результаты изложены в первой главе диссертационной работы. Исходя из полученных в первой главе результатов, во второй главе работы найдены точные значения различных n-поперечников и найдены верхних грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2022 гг. по теме «Приближения аналитических функций комплексными полиномами».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные значения константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;
- найти точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найти точные верхние грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций в B_2.

Основные методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы теории аппроксимации и методы решения экстремальных задач вариационного содержания теории аналитических функций, а именно, метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;

- найдено точное значение n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найдены точные верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения некоторых классов функций в B_2.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о неравенствах типа Джексона-Стечкина для наилучшего полиномиального приближения комплексной функции в пространстве Бергмана B_2;
- теоремы о неравенствах типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения комплексных функций и их последовательных производных в пространстве B_2;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- теоремы о верхних гранях наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика».

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались

- на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2018-2023 гг.);
- на международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- на международной научной конференции "Теория приближения и её применение" (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- на республиканской научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- на международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, 4 – в трудах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, библиографического списка, содержащего 60 наименований, занимает

77 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья-на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Глава I. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана

В этой главе найден ряд точных неравенств между наилучшими среднеквадратическими полиномиальными приближениями $E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f)_{B_2}$ аналитических в единичном круге функций $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и характеристикой гладкости $\Lambda_m(f,t) := \Lambda_m(f,t)_{B_2}$, введенной К.В.Руновским [22], свойства которой подробно изучены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [11]. Автором найдена точная константа в неравенстве типа Джексона-Стечкина между величиной $E_{n-1}(f)$ и характеристикой гладкости $\Lambda_m(f^{(r)},t)$ функций $f \in B_2^{(r)}$, а также найдено значение верхней грани наилучшего совместного полиномиального приближения, характеризующееся как через $\Lambda_m(f^{(r)},t)$, так и через модуль непрерывности первого порядка r-й производной $f^{(r)} \in B_2$.

Результаты приведенной в этой главе опубликованы в работах [53, 54].

§ 1.1. Предварительные факты, вспомогательные утверждения и история вопроса о неравенстве Джексона-Стечкина

В экстремальных задачах теории приближения функций как в действительной, так и в комплексной областях одной из наиболее важных является задача отыскании точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или её некоторую производную. Следует отметить, что по решению сформулированной задачи наиболее существенные результаты получены для классов периодических функций, а потому приведём краткий обзор того, что в этом направлении достигнуто в тригонометрической аппроксимации (см., например, [11, 17, 20, 47], где приведён обстоятельный обзор истории вопроса).

С этой целью приведём стандартные обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных, целых неотрицательных и действительных чисел, $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ – одномерный тор, $L_p(\mathbb{T})$ $(0 < p < \infty)$ – пространство действительных 2π-периодических измеримых по Лебегу функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p};$$

$L_\infty(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_\infty = \max\left\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}\right\};$$

$$\mathcal{T}_{2n-1} :=$$
$$:= \left\{T_{n-1} : T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right), \alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}\right\}$$

– подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$;

$$E_{n-1}(f)_p := \inf\left\{\left\|f - T_{n-1}\right\|_p : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\},\ 0 < p \le \infty,\ n \in \mathbb{N}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ элементами $\mathcal{T}_{2n-1}$;

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x+kh),\ k \in \mathbb{N}$$

– разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h;

$$\omega_m(f,\delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_p : |h| \le \delta\}$$

– модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$; далее c – абсолютная постоянная, $c_{p,k}$ – положительная постоянная, зависящая от указанных параметров.

В 1911 г. Д. Джексоном [49] было доказано, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_\infty \le c\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\infty .$$

Неравенства такого типа принято называть неравенствами Джексона. В 1937 г. Е. Кваде [51] распространил неравенство Джексона на пространство $L_p(\mathbb{T})$, доказав, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_p \le c\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p, \ 1 \le p < \infty.$$

Аналогичное неравенство для модуля непрерывности второго порядка опубликовал в 1947 г. Н.И. Ахиезер [2]. Для модулей непрерывности произвольного порядка в равномерной метрике С.Б. Стечкин [24] получил обобщение неравенство Джексона, но его рассуждения также справедливы и для пространства $L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p < \infty$, поэтому сформулируем утверждение в общем виде: для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty,\ k \ge 3$ выполняется неравенство

$$E_n(f)_p \le c_m \omega_m\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p .$$

Последние неравенства с модулем непрерывности произвольного порядка принято называть неравенствами Джексона-Стечкина. Отметим, что С.Б. Стечкин [24], также, интересовался зависимостью этой константы от порядка модуля непрерывности. В пространстве $L_p(\mathbb{T}),\ 0<p<1$ неравенства Джексона-Стечкина были получены В.И. Ивановым [17] (случай $m=1$) и Э.А. Стороженко, В.Г. Кротовым и П. Освальдом [25, 26] в общем случае. Подробный обзор как точных, так и порядковых констант Джексона-Стечкина в пространствах $L_p(\mathbb{T})$ $0<p\le\infty$, приведен В.И. Ивановым в обзорном статье [16].

Сформулируем общую задачу отыскания точного значения констант в неравенстве Джексона-Стечкина. Пусть X — пространство $C(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{T})$, $(1\le p<\infty)$, а $X^{(r)}$ – $C^{(r)}(\mathbb{T})$ или $L_p^{(r)}$ $(X^0=X)$, то есть $X^{(r)}$ – множество r-х 2π-периодических интегралов от $f\in X$. Требуется в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_X\le\frac{\chi_r}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\gamma\pi}{n}\right)_X,\ \gamma\in(0,2]$$

указать наименьшую из возможных констант χ_r. Очевидно, что наименьшая (наилучшая) константа может зависеть как от пространства X, так и от чисел $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$. Поэтому обозначим ее через $\chi_{n,m,r}(X,\gamma)$. Задача состоит в отыскании констант

$$\chi_{n,m,r}(X,\gamma)=\sup\left\{\frac{n^rE_{n-1}(f)_X}{\omega_m(f^{(r)},\gamma\pi/n)}:f\in X^r,\ f\neq const\right\},$$

где X есть $C(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{T})$ $(1\le p<\infty),\ \gamma\in(0,2)$.

В 1962 г. Н.П. Корнейчук [18] доказал, что

$$1-1/(2n)<\chi_{n,1,0}(C,\pi)<1$$

и на тех же идеях доказал более общий результат в работе [19]:

$$\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\le\chi_{n,1,0}\left(C,\frac{\pi}{k}\right)\le\frac{k+1}{2},\ n,k\in\mathbb{N}.$$

В 1967 г. Н.И. Черных [33] получил следующие результаты:

$$\chi_{n,1,0}\,(L_2, \pi/n) = 1/\sqrt{2},\ n \in \mathbb{N};$$

$$\chi_{n,m,0}\,(L_2, 2\pi/n) = (C_{2m}^m)^{-1/2},\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m.$$

В 1973 г. А.А. Лигун [21] доказал, что для нечетных $r = 2j - 1,\ j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\chi_{n,1,2j-1}\,(C, \pi/n) = \chi_{n,1,2j-1}(L, \pi/n) = \mathscr{K}_r/2,\ n, j \in \mathbb{N},$$

где

$$\mathscr{K}_r := \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}},\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Постоянные $\mathscr{K}_r$ известны в математической литературе как константы Фавара-Ахиезера-Крейна (см., например, [20, с. 106]). Нетрудно подсчитать, что

$$\mathscr{K}_0 = 1, \quad \mathscr{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathscr{K}_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad \mathscr{K}_3 = \frac{\pi^3}{24}, \cdots$$

причем между этими константами выполняются неравенства

$$1 = \mathscr{K}_0 < \mathscr{K}_2 < \cdots < \frac{4}{\pi} < \cdots < \mathscr{K}_3 < \mathscr{K}_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Что же касается пространства $L_p(\mathbb{T})$, то известен следующий результат:

$$\chi_{n,1,0}(L_p, \delta) = 2^{(1-p)/p},\ \delta \geq \theta\pi/n,\ \theta \geq 1,8.$$

В этом равенстве соответствующую оценку сверху установил Н.И.Черных [34], а оценку снизу – В.И. Бердышев [5]; получена также оценка снизу при $1 \leq p < \infty$:

$$\chi_{n,1,0}(L_p, \delta) \geq \max\{2^{(1-p)/p}, 2^{-1/p}\},\ n \in \mathbb{N},\ \delta > 0.$$

Точные константы в неравенствах Джексона и Джексона-Стечкина в различных пространствах функций изучались многими математиками. Краткое описание некоторых результатов и дополнительные библиографические сведения содержатся в работах [10, 11, 44, 47].

Представляет большой интерес получить точные неравенства типа Джексона-Стечкина в комплексной области. В данной работе рассматривается задача среднеквадратичного полиномиального приближения функций комплексного переменного, аналитических в единичном круге

$$U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\},$$

принадлежащих пространству Бергмана $B_2 := B_2(U)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Отметим, что различные аспекты теории аппроксимации функций $f \in B_2$ приведены в монографии [23, гл. III, с. 196-278]. В [1, 39–41] изучается задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего среднеквадратичного приближения функций $f \in B_2$ и обобщённого модуля непрерывности высшего порядка. В работе продолжим исследования в этом направлении, пользуясь характеристикой гладкости функций, введенной в работе К.В. Руновского [22], более подробно изученной С.Б. Вакарчуком и В.И. Забутной [11], М. Ш. Шабозовым [36].

Переходим к изложению некоторых фактов, нужных нам в дальнейшем. Запишем норму (1.1.1) в более удобном нам виде

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt\right)^{1/2}. \tag{1.1.2}$$

Символом

$$\triangle_h^m(f;\rho,u,h) := \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f\left(\rho e^{i(\tau+kh)}\right)$$

обозначим конечную разность m-го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t в точке τ с шагом h, а через

$$\|\triangle_h^m(f)\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|\triangle_h^m(f;\rho,u,h)\right|^2\rho d\rho du\right)^{1/2} \tag{1.1.3}$$

обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in B_2$.

Обычный модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f,t) := \sup\left\{\|\triangle_h^m(f)\| : |h| \le t\right\}. \tag{1.1.4}$$

Следуя [11, 22], под усреднённой характеристикой гладкости функции $f \in B_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f,t) := \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\|\triangle_h^m(f)\|^2dh\right)^{1/2}. \tag{1.1.5}$$

Из (1.1.4) и (1.1.5) следует, что при любом $t > 0$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f,t) \le \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^2(f,h)dh\right)^{1/2} \le \omega_m(f,t). \tag{1.1.6}$$

Отметим, что для периодических функций $f \in L_2[0,2\pi]$ ряд свойств характеристик гладкости (1.1.5) доказан в [11].

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических полиномов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C}, \ |a_n| \neq 0.$$

Величину

$$E_n(f) := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf\left\{\|f - p_n\| : p_n \in \mathcal{P}_n\right\} \tag{1.1.7}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратичным приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$.

Для любых $r \in \mathbb{N}$ через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ обозначим производную r-го порядка функции $f \in B_2$. Так как функция $f \in B_2$ аналитична в U, то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \tag{1.1.8}$$

следует, что [7]

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \tag{1.1.9}$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = (k!)/(k-r)!, \ k \geq r, \ k \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+,$$

$\alpha_{k,0} = 1$, $\alpha_{k,1} = k$, $c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f. Всюду далее

$$B_2^{(r)} := \left\{f \in B_2 : \|f^{(r)}\| < \infty\right\}, r \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Пользуясь равенством (1.1.9), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\triangle_h^m(f^{(r)}; \rho, u, h) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^{k-r} e^{i(k-r)u} \left(1 - e^{i(k-r)h}\right)^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, имеем

$$\|\triangle_h^m(f^{(r)})\|^2 = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot \left|1 - e^{i(k-r)h}\right|^{2m} =$$

$$= 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \left(1 - \cos(k-r)h\right)^m. \qquad (1.1.10)$$

Хорошо известно [23, с.203], что для произвольной функции $f \in B_2$ выполняется соотношение

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{p-1}\right\} =$$

$$= \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.11)$$

где

$$T_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частная сумма n-го порядка ряда Маклорена (1.1.8).

Имеет место следующая

Лемма 1.1.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-r-1}(f^{(r)})} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \qquad (1.1.12)$$

Доказательство. Прежде всего из равенства (1.1.9) следует, что

$$T_{n-1}^{(\mu)}(f, z) = \sum_{k=\mu}^{n-1} c_k(f) \alpha_{k,\mu} z^{k-\mu} = T_{n-\mu-1}(f^{(\mu)}, z), \quad \mu = 1, 2, \ldots, r,$$

а потому имеем

$$f^{(r)}(z) - T_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) \alpha_{k,r} z^{k-r},$$

откуда сразу вытекает равенство

$$E^2_{n-r-1}(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,r} \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1.13}$$

Теперь, учитывая последнее равенство, запишем

$$E^2_{n-1}(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha^2_{k,r}} \cdot \alpha^2_{k,r} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \tag{1.1.14}$$

Так как при всех $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, выполнено равенство

$$\max_{k \geq n > r} \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha^2_{k,r}} = \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2_{n,r}},$$

то из (1.1.14) следует, что

$$E^2_{n-1}(f) \leq \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2_{k,r}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,r} \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} =$$

$$= \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2_{n,r}} \cdot E^2_{n-r-1}(f^{(r)}). \tag{1.1.15}$$

Из неравенства (1.1.15) сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-r-1}(f^{(r)})} \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.1.16}$$

Так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, в силу (1.1.11) и (1.1.13)

$$E_{n-1}(f_0) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad E_{n-r-1}(f_0^{(r)}) = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}, \tag{1.1.17}$$

то для величины, стоящей в левой части неравенства (1.1.16), имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-r-1}(f^{(r)})} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.1.18}$$

Требуемое равенство (1.1.12) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.1.16) и оценки снизу (1.1.18), чем и завершаем доказательство леммы 1.1.1.

§ 1.2. Неравенство типа Джексона-Стечкина в B_2, содержащее характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$

В экстремальных задачах теории приближения функций одной из наиболее важных является задача нахождения точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Выше отмечалось, что под неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или её производной заданного порядка. В нашем случае в качестве характеристики гладкости функции $f \in B_2^{(r)}$ выступает $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$.

Введём обозначение

$$J_{\nu,m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos \nu\tau)^m d\tau \right\}^{1/2}, \ t > 0. \tag{1.2.1}$$

Легко проверить, что для любых $\nu, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$

$$J_{\nu,m}(t) = J_{1,m}(\nu t). \tag{1.2.2}$$

Учитывая равенства (1.1.10), (1.2.1) и (1.2.2), для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$, величину (1.1.5) запишем в виде

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m (f^{(r)}) \right\|^2 dh =$$

$$= 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k - r + 1} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \big(1 - \cos(k-r)h\big) \right)^m dh =$$

$$= 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k - r + 1} J_{k-r,m}(t) =$$

$$= 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} J_{1,m}\big((k-r)t\big). \qquad (1.2.3)$$

Кроме того, непосредственными вычислениями легко убедимся, что для величины совместного приближения $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ функции $f \in B_2$ и ее последовательных производных $f^{(s)} \in B_2$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ имеет место равенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - T_{n-s-1}(f^{(s)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} \right\}^{1/2}. \qquad (1.2.4)$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ *и* $t \in (0, 2\pi/(n-r)]$. *Тогда для произвольной функции* $f \in B_2^{(r)}$ *справедливо неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Lambda_m(f^{(r)}, t)}{J_{1,m}((n-r)t)}. \qquad (1.2.5)$$

Неравенство (1.2.5) точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(r)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Из равенства (1.2.3) для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих ограничение $k \geq n > r$, имеем

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} J_{1,m}^2((k-r)t). \qquad (1.2.6)$$

Так как при любом $x \geq n > r$ производная

$$\frac{d}{dx}\Big(J_{1,m}^2\big((x-r)h\big)\Big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-r)h} \int_0^{(x-r)h} (1-\cos t)^m dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{(x-r)^2 h} \int\limits_0^{(x-r)h} (1-\cos t)^m dt + \frac{h}{\big((x-r)h\big)} \cdot \big(1-\cos(x-r)h\big)^m =$$

$$= \frac{1}{(x-r)h} \left\{ (1-\cos(x-r)h)^m h - \frac{1}{x-r} \int\limits_0^{(x-r)h} (1-\cos t)^m dt \right\} >$$

$$> \frac{1}{(x-r)} \big\{ (1-\cos(x-r)h)^m - (1-\cos(x-r)h)^m \big\} = 0,$$

то мы имеем

$$\min_{k \geq n} J_{1,m}^2((k-r)h) = J_{1,m}^2((n-r)h), \tag{1.2.7}$$

а потому из (1.2.6) следует, что

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) \geq 2^m J_{1,m}^2((n-r)t) \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} =$$

$$= 2^m J_{1,m}^2((n-r)t) \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)}),$$

или, что то же,

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2} J_{1,m}((n-r)t) \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}). \tag{1.2.8}$$

Из леммы 1.1.1 вытекает, что для любой функции $f \in B_2^{(r)}$

$$E_{n-r-1}(f^{(r)}) \geq \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot \alpha_{n,r} \, E_{n-1}(f),$$

пользуясь которой из (1.2.8) получаем

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2} J_{1,m}((n-r)t) \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot \alpha_{n,r} \, E_{n-1}(f).$$

Отсюда следует неравенство (1.2.5). Докажем точность неравенства (1.2.5). С этой целью снова введём в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой, кроме равенств (1.1.17), также верно равенство

$$\Lambda_m(f_0^{(r)}, t) = 2^m \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} \cdot J_{1,m}((n-r)t). \tag{1.2.9}$$

Пользуясь первым из равенств (1.1.17) и (1.2.9) получаем

$$E_{n-1}(f_0) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Lambda_m(f_0^{(r)}, t)}{J_{1,m}((n-r)t)},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Из теоремы 1.2.1 вытекает следующее

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)}, t)} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}\big((n-r)t\big)}. \tag{1.2.10}$$

В частности, из (1.2.10) *при* $t = \pi/(n-r)$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *получаем значение точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина* (1.2.5) *для функций* $f \in B_2^{(r)}$:

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \, E_{n-1}(f)}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/(n-r)\big)} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(\pi)} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}, \tag{1.2.11}$$

где

$$C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{2^m \cdot (2m-1)!!}{m!}.$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.2.5) получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части (1.2.10):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \, E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)}, t)} \le$$

$$\leq \frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}\big((n-r)t\big)}, \tag{1.2.12}$$

а используя равенства (1.1.17) и (1.2.9), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot \alpha_{n,r}\, E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)},t)} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot \alpha_{n,r}\, E_{n-1}(f_0)}{\Lambda_m(f_0^{(r)},t)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot \alpha_{n,r}/\sqrt{n+1}}{2^{m/2}\cdot \alpha_{n,r}\cdot 1/\sqrt{n-r+1}\, J_{1,m}((n-r)t)} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}\big((n-r)t\big)}. \tag{1.2.13}$$

Требуемое равенства (1.2.10) следует из сопоставления неравенств (1.2.12) и (1.2.13).

Учитывая формулу [12, с. 39, формула 1.320:1]

$$\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^{2m} = 2^m(1-\cos u) = C_{2m}^m - 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m-k}\cos ku$$

и равенство (1.2.1), получаем

$$2^{m/2}J_{1,m}(\pi) = \left\{\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos u)^m du\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\sin(u/2))^{2m} du\right\}^{1/2} = \sqrt{C_{2m}^m},$$

откуда и вытекает равенство (1.2.11). Следствие 1.2.1 доказано.

Замечание 1.2.1. При $m=1$ из равенство (1.2.10) получаем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_1\big(f^{(r)},t/(n-r)\big)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}t)}},\tag{1.2.14}$$

где

$$\operatorname{sinc}u:=\left\{\frac{\sin u}{u},\ \text{если } u\neq 0;\ 1,\text{если } u=0\right\}.$$

В частности, из (1.2.14) при $t=\pi$ имеем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_1\big(f^{(r)},\pi/(n-r)\big)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\tag{1.2.15}$$

В самом деле, при $m=1$, вычисляя функцию $J_{1,1}((n-r)t)$ по формулам (1.2.1), получаем

$$J_{1,1}\big((n-r)t\big)=\left\{\frac{1}{(n-r)t}\int\limits_0^{(n-r)t}(1-\cos h)dh\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\left(1-\frac{\sin(n-r)t}{(n-r)t}\right)\right\}^{1/2}=\big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{1/2},$$

откуда и следует равенство (1.2.14).

Равенство (1.2.15) вытекает из того факта, что при $t=\pi$ из (1.2.14) имеем

$$\sqrt{2}\cdot J_{1,1}(\pi)=\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}\pi)}=\sqrt{2}.$$

Отметим, что (1.2.15) является аналогом результата Н.И. Черных [34], доказанного для модуля непрерывности первого порядка в теории среднеквадратического наилучшего приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

§ 1.3. Неравенство типа Джексона-Стечкина для совместного полиномиального приближения функций $f \in B_2^{(r)}$

В этом параграфе найдено точное значение величины наилучшего совместного полиномиального приближения функций $f \in B_2^{(r)}$ посредством характеристикой гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$ и вычислена точная константа в неравенстве типа Джексона-Стечкина для совместного приближения функций и её последовательных производных заданного порядка.

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ r \geq 2)$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(1 \leq s \leq r-1)$ также принадлежат пространству B_2 [9], то определённый интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ на некотором классе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \in B_2^{(r)}$ при $n > r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, то есть, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}. \tag{1.3.1}$$

Условимся, что всюду далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ предполагаем, что $f \neq \mathcal{P}_r$, где $\mathcal{P}_r$ — множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше r. Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, при условии $n > r \geq s$ справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\, E_{n-r-1}(f^{(r)}), \tag{1.3.2}$$

причём существует функция из $B_2^{(r)}$, для которой (1.3.2) обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, учитывая, что при любых $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих ограничению $k \geq n > r \geq s$, справедливо равенство

$$\max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} = \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1},$$

из соотношения

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1},$$

получаем

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \leq$$

$$\leq \max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)}),$$

и неравенство (1.3.2) доказано.

Докажем точность (1.3.2) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой при всех $s = 0, 1, 2, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$

$$f_0^{(s)}(z) = \alpha_{n,s} z^{n-s}, \quad E_{n-s-1}(f_0^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}. \tag{1.3.3}$$

Пользуясь вторым из равенств (1.3.3), запишем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f_0^{(r)}),$$

откуда и следует точность неравенства (1.3.2).

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})}{E_{n-r-1}(f^{(r)})}=\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1.3.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 2\pi/(n-r)]$. Тогда для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{\Lambda_m(f^{(r)},t)}{J_{1,m}((n-r)t)}. \tag{1.3.4}$$

Неравенство (1.3.4) точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Ранее для теоремы 1.2.1 мы доказали, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m^2(f^{(r)},t) \geq 2^m J_{1,m}^2((n-r)t)\cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)}). \tag{1.3.5}$$

Оценим величину $E_{n-r-1}(f^{(r)})$ снизу посредством величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ ($s = 0, 1, \ldots, r-1$). Имеем

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\cdot\alpha_{k,s}^2\cdot\frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} \geq$$

$$\geq \min_{k\geq n}\left\{\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\right\}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} =$$

$$= \min_{k\geq n}\left\{\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\right\}\cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)}). \tag{1.3.6}$$

Докажем, что в предположении $k \geq n > r \geq s$

$$\min_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \right\} = \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1}. \tag{1.3.7}$$

Рассмотрим функцию натурального аргумента

$$y(k) = \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1}$$

и докажем, что $y(k)$ при $k \geq n > r \geq s$ является возрастающей. В самом деле, при сделанных предположениях имеем

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) =$$

$$= k(k-1)\cdots(k-s+1)(k-s)\cdots((k-s)-(r-s)+1) =$$

$$= \alpha_{k,s} \cdot \alpha_{k-s,r-s},$$

пользуясь которой представим $y(k)$ в виде

$$y(k) := \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} = \alpha_{k-s,r-s}^2 \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} =$$

$$= [(k-s)(k-s-1)\cdots((k-s)-(r-s)+1)]^2 \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} =$$

$$= [(k-s)(k-s-1)\cdots((k-s)-(r-s)+2)]^2 \times$$

$$\times (k-s+1)(k-r+1). \tag{1.3.8}$$

Из (1.3.8) сразу следует, что $y(k)$ является строго возрастающей при $k \geq n > r \geq s$ функция, а значит, имеет место равенство (1.3.7). Теперь из (1.3.5)-(1.3.7) получаем

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) \geq 2^m \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1} \cdot J_{1,m}^2((n-r)t) \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)}). \tag{1.3.9}$$

Требуемое неравенство (1.3.4) вытекает из (1.3.9).

Остаётся доказать точность (1.3.4). Для ранее рассмотренной нами функций $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой при всех $s = 1, 2, \ldots, r$ производная s-го порядка $f_0^{(s)}(z) = \alpha_{n,s} z^{n-s}$, кроме (1.1.17) и (1.2.9) также имеет место формула

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}. \tag{1.3.10}$$

Теперь учитывая равенства (1.2.9) и (1.3.10), запишем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot J_{1,m}^{-1}((n-r)t)\Lambda_m(f_0^{(r)}, t), \tag{1.3.11}$$

откуда и следует точность неравенства (1.3.4), и тем самым теорема 1.3.2 доказана.

Из доказанной теоремы 1.3.2 вытекает

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/(n-r))} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{1.3.12}$$

В частности, при $t = \pi$ из (1.3.12) следует, что для точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина совместного приближения функций $f \in B_2^{(r)}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, \pi/(n-r))} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}. \tag{1.3.13}$$

Доказательство. Так как неравенство (1.3.4) имеет место для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то из него получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.3.12):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/(n-r))} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{1.3.14}$$

С другой стороны, учитывая равенства (1.3.11), получаем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/(n-r))} \ge$$

$$\ge \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\Lambda_m(f_0^{(r)}, t/(n-r))} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{1.3.15}$$

Требуемое равенство (1.3.12) получаем из сопоставления оценки сверху (1.3.14) и оценки снизу (1.3.15). Равенство (1.3.13) является результатом соотношения $2^{m/2} J_{1,m}(\pi) = \sqrt{C_{2m}^m}$, чем и завершаем доказательство следствия 1.3.2.

§ 1.4. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина посредством усреднённого значения характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \geq s,\ 0 < p \leq \infty,\ h \in (0, 2\pi/(n-r)]$, $\varphi(t)$ *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m/2}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.4.1)$$

Доказательство. Отметим, что в соотношении (1.4.1) для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Lambda_m \varphi^{1/p}\|_p$ в знаменателе левой части равенства определён соотношением

$$\|\Lambda_m \varphi^{1/p}\|_p \ := \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \max\left\{\Lambda_m(f^{(r)}, t)_2, t \in (0, h]\right\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом функционал $\|\Lambda_m \varphi^{1/p}\|_p$ при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Докажем теперь равенство (1.4.1). С этой целью неравенство (1.3.9) запишем в виде

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\times$$

$$\times E_{n-s-1}(f^{(s)}) J_{1,m}\big((n-r)h\big). \qquad (1.4.2)$$

Возведём обе части неравенства (1.4.2) в степень p $(0 < p \leq \infty)$, умножим на весовую функцию $\varphi(t)$ и проинтегрируем по отрезке $[0, h]$ $(0 < h \leq 2\pi/(n-r)$, $n > r)$, затем извлекая корень степени $1/p$ от вновь полученного неравенства, в итоге будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}}\, E_{n-s-1}(f^{(s)}) \left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.4.1):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.4.3)$$

Для получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, использованную нами в конце доказательства теоремы 1.3.2 и для которой имеют место равенства (1.1.17), (1.2.9) и (1.3.10). Учитывая указанные равенства, запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f_0^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot \alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m/2}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.4.4}$$

Из сопоставления неравенств (1.4.3) и (1.4.4) получаем требуемое равенство (1.4.1), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Из теоремы 1.4.1 вытекают ряд утверждений

Следствие 1.4.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \geq s,\ m = 1,\ 0 < p \leq \infty,\ 0 < h \leq 3\pi/4(n-r)$, φ *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\int\limits_0^h \big(1-\ \mathrm{sinc}\big((n-r)t\big)\big)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.4.5}$$

В частности, из (1.4.5) при $p = 2$, $\varphi \equiv 1$ *имеем*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_1^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=$$

$$=\left\{\frac{n-r}{(n-r)h-\mathrm{Si}\big((n-r)h\big)}\right\}^{1/2}, \tag{1.4.6}$$

где $\mathrm{Si}(u)=\int\limits_0^u \mathrm{sinc}\tau d\tau$ *— интегральный синус.*

Следствие 1.4.2. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$, $m=1$, $p=2$, $0<h\leq 3\pi/4(n-r)$, $\varphi(t)\equiv t$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h t\Lambda_1^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2\left\{\big((n-r)h/2\big)^2-\sin^2\big((n-r)h/2\big)\right\}^{1/2}}. \tag{1.4.7}$$

В частности, из (1.4.7) при $h=\pi/2(n-r)$ *следует равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/2(n-r)} t\Lambda_1^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi^2-8}}.$$

§ 1.5. О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана посредством модулей непрерывности

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций, структурные свойства которых задаются различными модулями непрерывности, ранее изучались, в работах [35, 41–43, 45]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и решим некоторые экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций и их последовательных производных, принадлежащих пространству Бергмана, структурные свойства которых определяются обычными модулями непрерывности первого порядка в пространстве Бергмана B_2.

Нам далее понадобятся следующие соотношения приведённые в предыдующих параграфах:

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}), \tag{1.5.1}$$

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}, \tag{1.5.2}$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \tag{1.5.3}$$

Соотношения (1.5.1)-(1.5.3) справедливы для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, и $n > r \geq s$. Положим

$$\Delta_h^1(f;\rho,u) := f\left(\rho e^{i(u+h)}\right) - f(\rho e^{iu})$$

и равенством

$$\omega(f,t):=\omega(f,t)=\sup\left\{\|\Delta_h^1(f;\rho,u)\|:|h|\le t\right\}$$

определим модуль непрерывности функции $f\in B_2$.

Простые вычисления с применением равенства Парсеваля показывают, что

$$\omega(f,t):=2\sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1-\cos kh). \tag{1.5.4}$$

Пользуясь равенствм (1.5.4) и учитывая, что для коэффициентов Маклорена в разложении в ряд Маклорена производной $f^{(r)}(z)$ и $f(z)$ имеет место равенство $|c_k(f^{(r)})|^2=\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2$, запишем

$$\omega^2(f^{(r)},t):=2\sup_{|h|\le t}\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\,\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t). \tag{1.5.5}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *При любых $n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\ge s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left\{\int\limits_0^{\tau}\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}}=$$

$$=\left\{\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{n-r}{2\big((n-r)\tau-\sin(n-r)\tau\big)}\right\}^{1/2}. \tag{1.5.6}$$

Доказательство. В силу равенство (1.5.4) для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ запишем

$$\omega(f,t)\ge 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1-\cos kt)=$$

$$= 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} - 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cos kt =$$

$$= 2E_{n-1}^2(f) - 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cos kt.$$

Отсюда получаем

$$2E_{n-1}^2(f) \le 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cos kt + \omega^2(f,t).$$

Обе части полученного неравенства интегрируя по переменному t в пределах от 0 до τ $(0 < n\tau \le \pi/2)$, имеем

$$2\tau E_{n-1}^2(f) \le 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot\frac{\sin k\tau}{k} + \int\limits_0^{\tau}\omega^2(f,t)dt. \tag{1.5.7}$$

Поделив обе части полученного неравенства на 2τ, запишем

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot\frac{\sin k\tau}{k\tau} + \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega^2(f,t)dt, \tag{1.5.8}$$

и так как [27]

$$\max_{u\ge nt}\left|\frac{\sin u}{u}\right| = \frac{\sin nt}{nt} \quad (0 \le nt \le \pi/2),$$

то из неравенства (1.5.8) получаем

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{\sin n\tau}{n\tau}\cdot E_{n-1}^2(f) + \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega^2(f,t)dt,$$

или что тоже

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)}\cdot\int\limits_0^{\tau}\omega^2(f,t)dt. \tag{1.5.9}$$

Поскольку неравенство (1.5.9) справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то из него вытекает, что

$$E^2_{n-r-1}(f^{(r)}) \le \frac{n-r}{2\big((n-r)\tau - \sin(n-r)\tau\big)} \cdot \int\limits_0^\tau \omega^2(f^{(r)},t)dt. \qquad (1.5.10)$$

Учитывая неравенство (1.5.10), из (1.5.1) для любого $s = 1, 2, \ldots, r-1$ будем иметь

$$E^2_{n-s-1}(f^{(s)}) \le \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E^2_{n-r-1}(f^{(r)}) \le$$

$$\le \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{n-r}{2\big((n-r)\tau - \sin(n-r)\tau\big)} \int\limits_0^\tau \omega^2(f^{(r)},t)dt. \qquad (1.5.11)$$

Из (1.5.11) сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (1.5.6):

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\int\limits_0^\tau \omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} \le$$

$$\le \left\{\frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{n-r}{2\left((n-r)\tau - \sin(n-r)\tau\right)}\right\}^{1/2}. \qquad (1.5.12)$$

Для получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ $(n > r,\ n, r \in \mathbb{N})$, для которой кроме равенств (1.1.17), (1.2.9) и (1.3.3) в силу равенства (1.5.5) имеют место равенства

$$\omega_2(f_0^{(r)},t) := 2\frac{\alpha^2_{n,r}}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t), \qquad (1.5.13)$$

$$\int\limits_0^\tau \omega^2(f_0^{(r)},t)dt := 2\frac{\alpha^2_{n,r}}{n-r+1}\left\{\frac{(n-r)t - \sin(n-r)t}{n-r}\right\}. \qquad (1.5.14)$$

Учитывая равенства (1.1.17) и (1.5.14), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\int\limits_0^\tau \omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} \geq \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left\{\int\limits_0^\tau \omega^2(f_0^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{\big(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}\big)\cdot \alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1}}{\alpha_{n,r}/\sqrt{(n-r+1)}\cdot \Big\{2\big[(n-r)t-\sin(n-r)t\big]/(n-r)\Big\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{n-r}{2((n-r)\tau-\sin(n-r)\tau)}\right\}^{1/2}. \qquad (1.5.15)$$

Требуемое равенство (1.5.6) получаем из сопоставления оценки сверху (1.5.12) с оценкой снизу (1.5.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.1.

Теорема 1.5.2. *Для любых чисел* $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$ *и* $0<t\leq\pi/(n-r)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\omega(f^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{1}{(n-r)t},\ 0<(n-r)t\leq\pi. \qquad (1.5.16)$$

Доказательство. Обе части неравенства (1.5.7) проинтегрируем от 0 до h по переменному τ, и заменив $1/k^2$ на $1/n^2$ при $k\geq n$ в итоге будем иметь

$$h^2E_{n-1}^2(f)\leq 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot\frac{(1-\cos kh)}{k^2}+\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(f,t)dt\right)d\tau\leq$$

$$\leq \frac{2}{n^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)+\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(f,t)dt\right)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\omega^2(f,h)+\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(f,t)dt\right)d\tau. \qquad (1.5.17)$$

Интегрируя по частям интеграл, стоящий в правой части (1.5.8), получаем

$$\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(f,t)dt\right)d\tau=\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f,t)dt.$$

Пользуясь этим неравенством, запишем (1.5.17) в виде

$$E_{n-1}^2(f)\leq \frac{1}{(nh)^2}\left\{\omega^2(f,h)+n^2\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f,t)dt\right\}. \qquad (1.5.18)$$

Заменив в (1.5.18) f на $f^{(r)}$ и n на $n-r$, имеем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})\leq$$

$$\leq \frac{1}{((n-r)h)^2}\cdot\left\{\omega^2(f^{(r)},h)+(n-r)^2\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}. \qquad (1.5.19)$$

Учитывая (1.5.19), в силу (1.5.1) запишем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})\leq \frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\left(\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^2\cdot\frac{1}{((n-r)h)^2}\times$$

$$\times\left\{\omega^2(f^{(r)},h)+(n-r)^2\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\omega^2(f^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{1}{(n-r)t}, \qquad (1.5.20)$$

и оценка сверху для экстремальной характеристики, расположенной в левой части равенства (1.5.16), получена.

Аналогичную оценку снизу указанной характеристики получим для рассмотренной нами выше функции $f_o(z)=z^n\in B_2,\ n>r$, пользуясь равенствами (1.5.13)-(1.5.14). Так как

$$\omega_2(f_0^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(f_0^{(r)},\tau)d\tau=$$

$$=2\cdot\frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}\cdot(1-\cos(n-r)t)+$$

$$+(n-r)^2\cdot 2\cdot\frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}\cdot\int\limits_0^t(t-\tau)\cdot(1-\cos(n-r)t)dt=$$

$$=2\frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}\left\{(1-\cos(n-r)t)+(n-r)^2\cdot\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1-\cos(n-r)t}{(n-r)^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}\cdot((n-r)t)^2, \qquad (1.5.21)$$

то, учитывая (1.5.21), мы имеем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\omega^2(f^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/2}}\geq$$

$$\geq \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left\{\omega^2(f_0^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(f_0^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\cdot\alpha_{n,s}\sqrt{n-s+1}}{\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}\cdot(n-r)t}=\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{1}{(n-r)t}. \qquad (1.5.22)$$

Требуемое равенство (1.5.16) получаем из сравнения неравенств (1.5.20) и (1.5.22), чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.2.

Глава II. Решение некоторых экстремальных задач для классов функций

Во второй главе для некоторых классов функций, естественно возникающих из результатов полученных в первой главе, решаются две экстремальные задачи: а) находятся точные значения ряда известных в теории аппроксимации n-поперечников; б) вычисляется точная верхняя грань величины наилучшего совместного полиномиального приближения.

Материалы, изложенные в этой главе, опубликованы в работах [53, 55].

§ 2.1. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций

Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и определения из теории n-поперечников (см., например, [27, 31]). Пусть $S := \{f : \|f\| \leq 1\}$ — единичный шар в B_2; $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2; $\mathscr{L}_n \subset B_2$ — n-мерное подпространство; $\mathscr{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : B_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^{\perp} : B_2 \to \mathscr{L}^n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathcal{M}; B_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \mathscr{L}_{n+1} \subset \mathcal{M}\right\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset B_2\right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathscr{L}_n\right\} : f \in \mathcal{M}\right\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathcal{M}\right\} : \Lambda B_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L} \subset B_2\right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda^{\perp} f\| : f \in \mathcal{M}\right\} : \Lambda^{\perp} B_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathcal{M} \in B_2$.

Указанные n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве B_2 связаны соотношениями (см., например, [27, 31]):

$$b_n(\mathcal{M}; B_2) \le d^n(\mathcal{M}; B_2) \le d_n(\mathcal{M}; B_2) = \delta_n(\mathcal{M}; B_2) = \Pi(\mathcal{M}; B_2). \quad (2.1.1)$$

2.1.1. Поперечники класса $W^{(r)}B_2$

Исходя из результата леммы 1.1.1, через $W^{(r)}B_2\,(n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, производная r-го порядка $f^{(r)}$ которых удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\| \le 1$. Справедлива следующая

Теорема 2.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда*

$$\lambda_n\big(W^{(r)}B_2; B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}B_2\big) = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \quad (2.1.2)$$

где

$$\mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}B_2\big) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}B_2\big\},$$

а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из рассмотренных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Из неравенства

$$E_{n-1}(f)_2 \le \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)$$

вытекающего из (1.1.15) и верного для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ в предположении $f \in B_2^{(r)} \cap W^{(r)}B_2$, учитывая соотношение

$$E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big) \le \big\|f^{(r)}\big\| \le 1$$

получаем оценку сверху всех n-поперечников

$$\lambda_n\big(W^{(r)}B_2, B_2\big) \le \mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}B_2\big) \le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}. \qquad (2.1.3)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, докажем, что $(n+1)$-мерная сфера комплексных алгебраических полиномов

$$R_{n+1} := \left\{p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\| = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\right\}$$

принадлежит классу $W^{(r)}B_2$ и поэтому в силу определения бернштейновского n-поперечника будем иметь [31, 50]

$$b_n\big(W^{(r)}B_2\big) \ge b_n(R_{n+1}) \ge \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}. \qquad (2.1.4)$$

Итак, нужно доказать, что $R_{n+1} \subset W^{(r)}B_2$.

Пусть $p_n(z) \in R_{n+1}$. Докажем, что $\left\|p_n^{(r)}\right\| \le 1$. Применяя тождество Парсеваля, имеем

$$\left\|p_n^{(r)}\right\|^2 = \left\|\sum_{k=r}^{n} \alpha_{k,r} c_k(p_n) z^{k-r}\right\|^2 = \sum_{k=r}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{\left|c_k(p_n)\right|^2}{k-r+1} =$$

$$= \sum_{k=r}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{\left|c_k(p_n)\right|^2}{k+1}. \qquad (2.1.5)$$

Но так как при $r \le k \le n$ функция

$$\alpha(k) := \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} = \big[k(k-1)\cdots(k-r+2)(k-r+1)\big]^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} =$$

$$= \big[k(k-1)\cdots(k-r+2)\big]^2 \cdot (k-r+1)(k+1)$$

является возрастающей, то

$$\max_{r \le k \le n} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} = \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1}, \qquad (2.1.6)$$

а потому пользуясь равенством (2.1.6) из (2.1.5), имеем

$$\left\|p_n^{(r)}\right\|^2 \leq \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \sum_{k=r}^{n} \frac{\left|c_k(p_n)\right|^2}{k+1} \leq$$

$$\leq \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\left|c_k(p_n)\right|^2}{k+1} = \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \|p_n\|^2.$$

Отсюда

$$\left\|p_n^{(r)}\right\| \leq \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot \|p_n\|. \tag{2.1.7}$$

Заметим, что полученное нами неравенство (2.1.7) является неравенством типа Бернштейна для любого полинома $p_n(z) \in B_2^{(r)}$ в пространстве B_2. Если теперь предположить, что $p_n(z) \in B_2^{(r)} \cap R_{n+1}$, то из (2.1.7) получаем

$$\left\|p_n^{(r)}\right\| \leq \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot \|p_n\| \leq$$

$$\leq \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} = 1.$$

Этим доказано, что сфера $R_{n+1} \subset W^{(r)}B_2$ и тем самим имеют место неравенства (2.1.4). Сравнивая оценки сверху (2.1.3) и снизу (2.1.4), получаем требуемое равенство (2.1.2), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1

Замечание 2.1.1. Доказанная теорема 2.1.1 является своеобразным обобщением теоремы 8.1.3 – первый точный результат в задаче о поперечниках – доказанный А.Н. Колмогоровым для класса дифференцируемых периодических функций $W^{(r)}L_2$ в метрике $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ на случай класса $W^{(r)}B_2$ аналитических в единичном круге функций, принадлежащих гильбертову пространству Бергмана B_2.

2.1.2. Точные значения n-поперечников классов функций $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\,(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$

Пусть $\Phi(t)$, где $0 \leq \ t \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее ее будем называть мажорантой.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и Φ – произвольная мажорантная функция. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка удовлетворяют условию

$$\Lambda_m\big(f^{(r)}, t\big) \leq \Phi(t),\ t \in (0, 2\pi].$$

Теорема 2.1.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, *функция* $J_{1,m}$ *определяется формулами* (1.2.1), (1.2.2), $\lambda_n(\cdot)$ – *любой из вышеперечисленных из* n*-поперечников,* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$. *Если для произвольных* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $t \in (0, 2\pi]$ *функция* Φ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m} J_{1,m}\big((n-r)t\big)}, \tag{2.1.8}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_n\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.1.9}$$

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.1.8), *не пусто.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ из формулы (1.2.5), при $t = \pi/(n-r)$ учитывая равенство $2^{m/2} J_{1,m}(\pi) = \sqrt{C_{2m}^m}$, получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(\pi)} \Lambda_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Lambda_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Lambda_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right).$$

Учитывая определение класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ и неравенства между n-поперечниками (2.1.1), отсюда получаем оценки сверху

$$\lambda_m\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) \le d_n\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) \le$$

$$\le E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\big) \le \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \qquad (2.1.10)$$

С целью получения оценок снизу рассматриваемых n-поперечников класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ в силу неравенства (2.1.1) достаточно найти оценку снизу бернштейновского n-поперечника. Для этого в множестве алгебраических комплексных полиномов $\mathscr{P}_n$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\| \le \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}.$$

Пусть p_n – произвольный полином, принадлежащий $\mathscr{P}_n$. Пользуясь формулами (1.2.3), (1.2.7) и (2.1.6), для любого $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеем

$$\Lambda_m^2(p_n^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(p_n)|^2}{k-r+1} \cdot J_{1,m}^2\big((k-r)t\big) =$$

$$= 2^m \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} \cdot J_{1,m}^2\big((k-r)t\big) \le$$

$$\le 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} \cdot J_{1,m}^2\big((n-r)t\big) \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} =$$

$$= 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} \cdot J_{1,m}^2\big((n-r)t\big) \cdot \|p_n\|^2$$

или, что то же

$$\Lambda_m(p_n^{(r)}, t) \leq 2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot J_{1,m}\big((n-r)t\big) \cdot \|p_n\|. \tag{2.1.11}$$

Если теперь предположить, что полином $p_n \in S_{n+1}$, то из формулы (2.1.11) и условия (2.1.8) получаем требуемое неравенство

$$\Lambda_m\big(p_n^{(r)}, t\big) \leq 2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot J_{1,m}\big((n-r)t\big) \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) = \frac{2^{m/2}}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}\big((n-r)t\big) \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \leq \Phi(t),$$

где $t \in (0, 2\pi]$. Последнее неравенство означает, что шар S_{n+1} принадлежит классу $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Учитывая неравенства (2.1.1) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу

$$\lambda_n\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) \geq b_n\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) \geq$$

$$\geq b_n\big(S_{n+1}; B_2\big) \geq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.1.12}$$

Сопоставляя неравенства (2.1.10) и (2.1.12), получаем равенства (2.1.9).

Известно [11], что условию (2.1.8) удовлетворяет, например, функция

$$\Phi^*(t) = t^{\beta/2}, \text{ где } 0 < \beta < 2k.$$

Этим доказательство теоремы 2.1.2 завершается.

2.1.3. Точные значения n-поперечников классов функций $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\,(r\in\mathbb{Z}_+,\,0<p\le\infty)$ в пространстве B_2

Результат этого параграфа вытекает из равенства (1.4.5), следствие 1.4.1. Точнее, из (1.4.5) при любых $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, $s=0$, $m=1$, $0<p\le\infty$, $0<h\le 3\pi/(n-r)$, $\varphi\equiv 1$, для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^h\Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{1/p}}{\sqrt{2}\left(\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}.\qquad(2.1.13)$$

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\,(r\in\mathbb{Z}_+,\,0<p\le\infty)$, Φ – некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f\in B^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при любом $h\in(0,2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h\Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)dt\le\Phi^p(h).$$

Теорема 2.1.3. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$, $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников перечисленных выше. Если для любых значений $h\in(0,2\pi]$ и $n\in\mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p\big(\pi/(n-r)\big)}\ge\frac{\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\operatorname{sinc}t)^{p/2}dt}{\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}t)^{p/2}dt},\qquad(2.1.14)$$

то имеют место равенства

$$\lambda_n\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi),B_2\big)=\mathscr{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big)=$$

$$= \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.1.15)$$

Доказательство. Полагая в формуле (2.1.13) $h=\pi/(n-r)$ и учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^{\pi/(n-r)} \Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^{\pi/(n-r)} \big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}} \le$$

$$\le \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем функциям $f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$ и учитывая неравенства (2.1.1) между n-поперечниками, запишем оценки сверху

$$\lambda_n\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi);B_2\big) \le \mathscr{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big) \le$$

$$\le \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.1.16)$$

Как и в предыдущем параграфе, для получения оценок снизу рассматриваемых n-поперечников в подпространстве алгебраических комплексных полиномов $\mathscr{P}_n$ рассмотрим шар

$$\widetilde{S}_{n+1} :=$$

$$= \left\{ p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\| \leq \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}} \right\}$$

и покажем справедливость включения $\widetilde{S}_{n+1} \subset W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$.

Заметим, что из неравенства (2.1.11) при $m = 1$ с учетом равенства $J_{1,1}\big((n-r)t\big) = \big(1 - \operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{1/2}$ вытекает соотношение

$$\Lambda_1(p_n^{(r)}, t) \leq \sqrt{2}\alpha_{n,r}\sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}}\big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{1/2}\|p_n\|.$$

используя которое для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$ при любом $h \in (0, 2\pi]$ запишем

$$\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(p_n^{(r)}, t\big)dt \leq 2^{p/2}\alpha_{n,r}^p \left(\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{p/2} \int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{p/2} dt \|p_n\|^p.$$

Отсюда для произвольного полинома $p_n \in \widetilde{S}_{n+1}$ на основании условия (2.1.14) получаем

$$\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(p_n^{(r)}, t\big)dt \leq 2^{p/2}\alpha_{n,r}^p \left(\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{p/2} \int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc}(n-r)t\big)^{p/2} dt \times$$

$$\times \frac{n-r}{2^{p/2}\alpha_{n,r}^p} \cdot \left(\frac{n-r+1}{n+1}\right)^{p/2} \cdot \frac{\Phi^p\big(\pi/(n-r)\big)}{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt} \leq$$

$$\leq \frac{\int\limits_0^{(n-r)h} (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt} \cdot \Phi^p\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \leq \Phi^p(h),$$

где $h \in (0, 2\pi]$. Этим включение $\widetilde{S}_{n+1} \subset W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ доказано, тогда используя формулу (2.1.1) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем нужную оценку снизу всех вышеперечисленных n-поперечников класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$:

$$\lambda_n\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); B_2\big) \geq b_n\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); B_2\big) \geq b_n(\widetilde{S}_{n+1}; B_2) \geq$$

$$\geq \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}. \tag{2.1.17}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.1.16) с оценками снизу (2.1.17), получаем требуемое равенство (2.1.15).

В [11] доказано, что функция $\widetilde{\Phi}(t) := t^{\gamma/p}, (0 < p \leq \infty)$, где

$$\gamma := \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt}, \ \ (1 + \frac{p}{2} < \gamma < 1 + p)$$

принадлежит классу $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$.

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы 2.1.3 при $p = 2$ имеют место равенства*

$$\lambda_n\big(W_2^{(r)}(\Lambda_1, \Phi), B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_2^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{\frac{n-r}{2\big[(n-r)h - \operatorname{Si}\big((n-r)h\big)\big]}\right\}^{1/2}.$$

2.1.4. Точные значения n-поперечников класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$ — некоторая константа, φ — весовая на $[0, h]$ функция, $0 < p \leq \infty$. Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \le \int\limits_0^h \varphi(t)dt.$$

Теорема 2.1.4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$, $n > r$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h); B_2\right) = E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)\right) =$$

$$= \frac{2^{-m/2}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}, \tag{2.1.18}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — любой из перечисленных выше k-поперечников.

Доказательство. Из неравенства (1.4.3), в котором полагаем $s = 0$, соотношение (2.1.1) и определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$, получаем оценку сверху

$$\lambda_n\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h); B_2\right) \le E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \tag{2.1.19}$$

Для получения аналогичной оценки снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ введём в рассмотрение шар

$$S^*_{n+1} :=$$

$$= \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \le \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J^p_{1,m}((n-r)t)\varphi(t)dt} \right\}^{1/p} \right\}.$$

Учитывая формулу (1.2.3) и тот факт, что при любом фиксированном $r \in \mathbb{Z}_+$ таком, для которого $r \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$J_{1,m}((k-r)t) \le J_{1,m}((n-r)t),$$

для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ запишем

$$\Lambda_m(p_n^{(r)}, t) = \left\{ 2^m \sum_{k=r}^{n} \alpha^2_{k,r} \frac{|a_k(p_n)|^2}{k-r+1} \cdot J^2_{1,m}((k-r)t) \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^m \sum_{k=r}^{n} \alpha^2_{k,r} \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|a_k(p_n)|^2}{k+1} \cdot J^2_{1,m}((k-r)t) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le 2^{m/2}\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot J_{1,m}((n-r)t) \cdot \|p_n\|. \qquad (2.1.20)$$

Возведя обе части неравенства (2.1.20) в степень p $(0 < p \le \infty)$, затем умножая их на функцию φ и интегрируя по t в пределах от 0 до h, где $0 < h \le 3\pi/4(n-r)$, после чего возведя обе части полученного неравенства в степень $1/p$ $(0 < p \le \infty)$, будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda^p_m(p_n^{(r)}, t)\varphi(t)dt \right)^{1/p} \le$$

$$\leq 2^{m/2}\alpha_{n,r}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\|p_n\|. \qquad (2.1.21)$$

Теперь, для произвольного $p_n\in S_{n+1}$ из (2.1.21) получаем

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(p_n^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\leq 2^{m/2}\alpha_{n,r}\sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\times$$

$$\times\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\cdot\left\{\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}=\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

а это означает, что $S_{n+1}^*\subset W_p^{(r)}(\Lambda_m;\varphi,h)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника и соотношения (2.1.1), запишем оценки снизу всех n-поперечников

$$\lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m;\varphi,h);B_2\right)\geq b_n\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m;\varphi,h);B_2\right)\geq b_n(S_{n+1}^*,B_2)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\cdot\left\{\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.1.22)$$

Требуемые равенства (2.1.18) получаем путём сопоставления оценок сверху (2.1.21) с оценкой снизу (2.1.22), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.4.

§ 2.2. Решение экстремальной задачи (1.3.1) для некоторых классов функций

В этом параграфе требуется при любом $n \in \mathbb{N}$ и $s = 0, 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq s$, и множестве $\mathfrak{M}^{(r)} \in B_2^{(r)}$ найти точное значение следующей экстремальной величины:

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) = \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}, \tag{2.2.1}$$

где $\mathfrak{M}^{(r)}$ есть один из введенных в параграфе 2.1 классов функций.

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$. Тогда*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}B_2) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Заметив, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ величина

$$E_{n-r-1}(f^{(r)}) \leq \|f^{(r)}\| \leq 1,$$

из неравенства (1.3.2) получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}, \tag{2.2.3}$$

откуда следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.2.2):

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}B_2) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.2.4}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, воспользуемся функцией $g(z) = \dfrac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot z^n$. Для этой функции при всех $s = 0, 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$g^{(s)}(z) = \sqrt{n-r+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\, z^{n-s},$$

а отсюда, в силу равенства (1.5.2), получаем

$$E_{n-s+1}(g^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \tag{2.2.5}$$

и так как $g^{(r)}(z) = \sqrt{n-r+1}\cdot z^{n-r}$, $\|g^{(r)}\| = 1$, то функция $g \in W^{(r)}B_2$, а потому в силу (2.2.5) запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}B_2) \geq E_{n-s-1}(g^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.2.6}$$

Сопоставив оценку сверху (2.2.4) с оценкой снизу (2.2.6), получаем требуемое равенство (2.2.2). Теорема 2.2.1 доказана.

Так как при любых $n > r \leq s$

$$\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{n(n-1)\cdots(n-s+1)(n-s)(n-s+1)\cdots\big((n-r)-(r-s)+1\big)} =$$

$$= \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots\big((n-s)-(r-s)+1\big)} = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}},$$

то равенство (2.2.2) можно записать в виде

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}B_2\big) = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots\big((n-s)-(r-s)+1\big)}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.2.7}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$. *Если для произвольных* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $t \in (0, 2\pi]$ *функция* Φ *удовлетворяет* *ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}\big((n-r)t\big). \tag{2.2.8}$$

то справедливо равенство

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)\big) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.2.9}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ из формулы (1.3.4) при $t = \pi/(n-r)$ с учетом равенства $2^{m/2}J_{1,m}(\pi) = \sqrt{C_{2m}^m}$ имеем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/(n-r)\big)}{2^{m/2}J_{1,m}(\pi)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Lambda_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.2.10}$$

Для функций $f \in B_2^{(r)} \cap W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)$ из неравенства (2.2.10) следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.2.9):

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)\big) = \sup\Big\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) : f \in W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.2.11}$$

Далее, с целью получения аналогичной оценки снизу, воспользуемся тем, что в теореме 2.1.2 доказано, что множество алгебраических комплексных полиномов $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$, принадлежащих шару

$$S_{n+1} := \left\{ p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\| = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}$$

при выполнении условия (2.2.8), принадлежит также классу функций $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Введем в рассмотрение функцию

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+1} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \cdot z^n,$$

для которой норма равна

$$\|g_2\| = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

а потому $g_2 \in W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Дифференцируя s ($s = 0, 1, \ldots, r$; $r \in \mathbb{N}$) раз функцию g_2, запишем

$$g_2^{(s)}(z) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+1} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \cdot z^{n-s}.$$

Отсюда, в силу формулы (1.5.2) имеем

$$E_{n-s-1}\big(g_2^{(s)}\big) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.2.12}$$

Используя равенство (2.2.12), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\big) \geq E_{n-s-1}(g_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{2.2.13}$$

Из доказанных оценок сверху (2.2.11) и снизу (2.2.13) сразу вытекает требуемое равенство (2.2.9). Теорема 2.2.2 доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$. *Если для любых значений* $h \in (0, 2\pi]$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию* (2.1.14), *то имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) =$$

$$= \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.2.14)$$

Доказательство. В следствии 1.4.1 доказано, что если $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, $0 < p \le \infty$, $0 < h \le 3\pi/4(n-r)$, φ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция, то для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ имеет место точное неравенство

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc}((n-r)t)\big)^{p/2} \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.2.15)$$

Полагая в (2.2.15) $h = \pi/(n-r)$ и учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, получаем нужную нам оценку сверху

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) \le$$

$$\le \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.2.16)$$

Рассмотрим функцию

$$f_3(z) = \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{n-r+1} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big) \cdot z^n}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}.$$

Для этой функции

$$\|f_3\| = \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}$$

и следовательно, функция $f_3 \in \widetilde{S}_{n+1}$, где $\widetilde{S}_{n+1}$ – шар введенный в теореме 2.1.3, а значит $f_3 \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$. С другой стороны, так как при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ производная s-го порядка f_3 имеет вид

$$f_3^{(s)}(z) = \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}},$$

то в соответствии с формулой (1.5.2)

$$E_{n-s-1}\big(f_3^{(s)}\big) = \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}},$$

и следовательно, имеет место оценка снизу

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) \geq E_{n-s-1}\big(f_3^{(s)}\big) =$$

$$= \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}. \tag{2.2.17}$$

Сравнивая неравенства (2.2.16) и (2.2.17), получаем равенство (2.2.14), чем и заканчиваем доказательство теоремы 2.2.3.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.3 при $p = 2$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_2^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big) =$$
$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{2\left[(n-r)h - \mathrm{Si}\big((n-r)h\big)\right]} \right\}^{1/2}.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$. Тогда имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m;\varphi,h)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt} \right\}^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

Доказательство теоремы 2.2.4 в общих чертах повторяет схему доказательства теоремы 2.2.3, а потому, мы здесь его не приведем.

§ 2.3. Решение экстремальной задачи (1.3.1) для классов функций $\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$ и $\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, h)$

Исходя из результатов теорем 1.5.1, 1.5.2 вводим следующие классы функций: $\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$ – класс функций $f \in B_2^{(r)}$, производные r-го порядка $f^{(r)}$ которых при любых $\tau \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\tau \omega^2\big(f^{(r)}, u\big)du \le \Phi(\tau),\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогичным образом через $\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, \tau)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, производные r-го порядка $f^{(r)}$ которых при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\omega\big(f^{(r)}, \tau\big) + (n-r)^2 \int_0^\tau (\tau - t)\omega^2\big(f^{(r)}, t\big)dt \le 1.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$. Если мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi\big(\pi/2(n-r)\big)} \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi - 2}\begin{cases} (n-r)\tau - \sin(n-r)\tau, & \text{при } 0 < (n-r)\tau \le \pi, \\ 2(n-r)\tau - \pi, & \text{при } (n-r)\tau > \pi, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

то справедливо равенство

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{\frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{1/2}. \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Из соотношения (1.5.11) при $\tau = \pi/2(n-r)$ для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{\frac{n-r}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega^2\big(f^{(r)},t\big)dt\right\}^{1/2}.$$

Используя определение класса $\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$, имеем

$$\sup\left\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) : f \in \mathscr{F}^{(r)}(\Phi)\right\} \le$$

$$\le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{\frac{n-r}{\pi-2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{1/2}, \tag{2.3.3}$$

и оценка сверху величины, расположенной слева в равенстве (2.3.2), получена. С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины, покажем, что при любых $n \in \mathbb{N}$, и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $(n+1)$-мерная сфера полиномов

$$\sigma_{n+1}^* := \left\{p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\| = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{n-r}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{1/2}\right\}$$

принадлежит классу $\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$. Для этого докажем, что для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega^2\big(p_n^{(r)},t\big) \le \frac{n+r}{n-r+1}\cdot 2\big(1-\cos(n-r)t\big)_* \cdot \alpha_{n,r}^2\|p_n\|^2, \tag{2.3.4}$$

где

$$(1-\cos t)_* := \{1-\cos t, \text{ если } 0 < t \le \pi;\ 2, \text{ если } t > \pi\}.$$

В самом деле, пользуясь формулой (1.5.5) и учитывая равенство (2.1.6), имеем

$$\omega^2(p_n^{(r)},t) = 2\sup_{|h|\le t}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{k,r}^2\cdot\frac{|c_k(p_n)|}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t) \le$$

$$\le 2\big(1-\cos(n-r)t\big)_*\sum_{k=r}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}\cdot\frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} \le$$

$$\leq 2\bigl(1-\cos(n-r)t\bigr)_* \max_{r\leq k\leq n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} =$$

$$= 2\bigl(1-\cos(n-r)t\bigr)_* \max_{r\leq k\leq n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \|p_n\|^2 \leq$$

$$\leq 2\bigl(1-\cos(n-r)t\bigr)_* \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \bigl\|p_n\bigr\|^2,$$

и неравенство (2.3.4) доказано.

Учитывая (2.3.4), согласно первой части условия (2.3.1) при $0 < (n-r)\tau \leq \pi$ получаем

$$\int_0^\tau \omega^2(p_n^{(r)}, t)dt \leq \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \|p_n\|^2 \cdot 2 \int_0^\tau \bigl(1-\cos(n-r)t\bigr)dt =$$

$$= \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \frac{2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{(n-r)\tau - \sin(n-r)t}{n-r} =$$

$$= \frac{2}{\pi-2}\bigl[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau\bigr]\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \leq \Phi(\tau). \qquad (2.3.5)$$

Если же $(n-r)\tau > \pi$, то используя второе из неравенств (2.3.1), получаем

$$\int_0^\tau \omega^2\bigl(p_n^{(r)}, t\bigr)dt \left(\int_0^{\pi/(n-r)} + \int_{\pi/(n-r)}^{\tau}\right) \omega^2\bigl(p_n^{(r)}, \tau\bigr)d\tau =$$

$$= \frac{n+1}{n-r+1} \cdot 2\bigl(2(n-r)\tau - \pi\bigr)\alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{\|p_n\|^2}{n-r} =$$

$$= \frac{n+1}{n-r+1} \cdot 2\bigl[2(n-r)\tau - \pi\bigr] \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi-2}\left[2(n-r)\tau - \pi\right]\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \leq \Phi(\tau). \qquad (2.3.6)$$

Из (2.3.5) и (2.3.6) следует, что при выполнении условия (2.3.1) имеет место включение $\sigma_{n+1}^* \subset \mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$. Теперь рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sqrt{n-r+1} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2} \frac{z^n}{\alpha_{n,r}}.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$g_1^{(s)}(x) = \sqrt{n-r+1} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot z^{n-s}.$$

В силу равенства (1.5.2)

$$E_{n-s-1}\big(g_1^{(s)}\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2} \tag{2.3.7}$$

и так как

$$\|g_1\| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2}$$

то функция $g_1 \in \sigma_{n+1}^*$, а значит $g_1 \in \mathscr{F}^{(r)}(\Phi)$. Поэтому учитывая (2.3.7), запишем

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}(\Phi)\big) \geq E_{n-s-1}\big(g_1^{(s)}\big) =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2}. \tag{2.3.8}$$

Требуемое равенство получаем из сравнения неравенств (2.3.3) и (2.3.8).

Л.В. Тайков [27] показал, что функция

$$\Phi_*(\tau) = \tau^{\pi/(\pi-2)}$$

является примером мажоранты, удовлетворяющей условиям (2.3.1), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < t \leq \pi/(n-r)$. *Тогда*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, \tau)\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}. \tag{2.3.9}$$

В частности, из (2.3.9) *при* $t = \pi/(n-r)$ *имеем*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, \pi/(n-r))\big) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.3.10}$$

Доказательство. Из равенства (1.5.17) следует, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t} \times$$

$$\times \left\{ \omega\big(f^{(r)}, t\big) + (n-r)^2 \int\limits_0^t (t-r)\omega^2\big(f^{(r)}, \tau\big) d\tau \right\}^{1/2}. \tag{2.3.11}$$

Из (2.3.11) учитывая определение класса $\mathscr{F}^{(r)}(\omega, t)$, имеем

$$\sup\left\{ E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) : f \in \mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, t) \right\} \le$$

$$\le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t},\ 0 < (n-r)t \le \pi. \tag{2.3.12}$$

Как и в предыдущих теоремах, простыми вычислениями можно убедиться, что функция

$$f_2(z) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{z^n}{(n-r)t} \in \mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, t)$$

и для этой функции

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(\mathscr{F}_1^{(r)}(\omega, t)\big) \ge E_{n-s-1}\big(f_2^{(s)}\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}. \tag{2.3.13}$$

Из неравенств (2.3.12) и (2.3.13) следует равенство (2.3.9), и этим теорема 2.3.2 доказана.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- вычислены точные значения константы в неравенства типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найдены точные верхние грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций в B_2.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации для аналитических функций многих переменных.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. – 2010. – Т. 50, № 6. – С. 999–1004.

[2] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации // М. Гостехиздат. – 1947. – 323 С.

[3] *Айнуллоев Н., Тайков Л.В.* Наилучшее приближение в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40, № 3. – С. 341–351

[4] *Бабенко К.И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. – 1958. – Т. 22, № 5. – С. 631–640.

[5] *Бердышев В.И.* О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 3–16.

[6] *Белый В.И.* К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. матем. журнал. – 1967. – Т. 19, № 2. – С. 104–108.

[7] *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного // М.: Наука. – 1969. 240 С.

[8] *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, № 1. – С. 30–39.

[9] *Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.* Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их при-

ложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т. 63, № 12. – С. 1579–1601.

[10] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92, № 4. – С. 497–514.

[11] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 2. – С. 215–238.

[12] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений // М.: Наука. – 1971.

[13] *Двейрин М.З.* О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка. – 1975. вып. 6. – С. 41–54.

[14] *Двейрин М.З.* Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функц. анализ и прил. – 1975. – Т. 23. – С. 32–46.

[15] *Двейрин М.З., Чебаненко И.В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Киев: Наукова думка. – 1983. – С. 62–73.

[16] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 5. – С. 641–658.

[17] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Тр. ИММ

УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 5–15.

[18] *Корнейчук Н.П.* Точная константа в неравенстве Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, № 3. – С. 514–516.

[19] *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, № 5. – С. 669–674.

[20] *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения // М.: Наука. – 1987. – 424 С.

[21] *Лигун А.А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, №1. – С. 21–30.

[22] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 8. – С. 81–102.

[23] *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного // М.-Л.: Наука. – 1964. – 440 С.

[24] *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 3. – С. 219–242.

[25] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415.

[26] *Стороженко Э.А., Освальд П.* Теоремы Джексона в $L_p(\mathbb{R}^k)$ $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. – 1978. – Т. 19, № 4. – С. 888–901.

[27] *Тайков А.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20, № 3. – С. 433–438.

[28] *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 155–162.

[29] *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 285–295.

[30] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. – 1960. – Т. 15, № 3. – С. 81–120.

[31] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – 1976. – 325 С.

[32] *Фарков Ю.А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. матем. наук. – 1990. – Т. 45, № 5. – С. 197–198.

[33] *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2, № 5. – С. 513–522.

[34] *Черных Н.И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т. 198. – С. 232–241.

[35] *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН России. – 2002. – Т. 383, № 2. – С. 171–174.

[36] *Шабозов М.Ш.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2

// Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 450–458.

[37] *Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р.* О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. матем. журн. – 2019. – Т. 60, № 6. – С. 1414–1423.

[38] *Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х.* Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_p^r, $1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. – 2003. – Т. 394, № 4. – С. 399–401.

[39] *Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.* Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Матем. заметки. – 2018. – Т. 103, № 4. – С. 617–631.

[40] *Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.* Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журнал. – 2018. – Т. 20, № 1. – С. 86–97.

[41] *Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.* Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 2. – С. 258–272.

[42] *Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К.* О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ. – 2018. – Т. 61, № 5. – С. 419–426.

[43] *Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М.* О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Матем. – 2020. вып. 2. – С. 74-92.

[44] *Шабозов М.Ш., Шабозова А.А.* Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле

Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 255–264.

[45] *Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.* О наилучшем приближении и точных значениях поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_p, $1 \leq p \leq \infty$ // ДАН России. – 2006. – Т. 410, № 4. – С. 461–464.

[46] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. – 2002. – Т. 382, № 6. – С. 447–449.

[47] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т. 90, № 5. – С. 764–775.

[48] *Fisher S.D., Micchelli C.A.* The n-widths of sets of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – T. 47. – P. 789–801.

[49] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen Summen gegebenen Ordnung // Dissertation. Göttingen. – 1911.

[50] *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 P.

[51] *Quade E.S.* Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. –1937. – V. 3. – PP. 529–543.

[52] *Scheick J.T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 17. – P. 1238–1243.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК Российской Федерации:

[53] *Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Матем. заметки. – 2021. вып. 2. – С. 266–281.

[54] *Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2 // ДАН РТ. – 2021. – Т. 64, № 7-8. – С. 385–392.

[55] *Кадамшоев Н.У.* О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ. – 2022. – Т. 64, № 11-12. – С. 637–645.

[56] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* О приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН РТ. – 2021. – Т. 64, № 5-6. – С. 262–268.

2. В других изданиях:

[57] *Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У.* Неравенства между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2 // Міжнародна наукова конференція "*Теорія наближень і її застосування*", присвячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). – С. 66–67.

[58] *Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Материалы республиканской научно-практической конференции *"Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества"* (Худжанд, 29-30 октября 2021). – С.38–40.

[59] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* Неравенства между наилучшими совместными приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 16–20.

[60] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* О наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Материалы международной научной конференции "*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова, (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 50–53.