

Таджикский национальный университет

На правах рукописи



Саидусайнов Муким Саидусайнович

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА И СВЯЗАННЫЕ
С НИМИ ВОПРОСЫ**

Специальность 1.1.1 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Душанбе – 2027

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

Научный консультант:

Шабозов Мирганд Шабозович

доктор физико – математических наук, академик НАН Таджикистана, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

Официальные оппоненты:

Руновский Константин Всеволодович

доктор физико – математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Севастополе;

Каюмов Ильгиз Рифатович

доктор физико – математических наук, доцент факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета;

Волков Юрий Степанович

доктор физико – математических наук, профессор, ведущий специалист Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет”.

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина”.

Защита диссертации состоится 12 января 2027 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте <http://www.tnu.tj>.

Автореферат разослан „__” ноября 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 73.2.012.03

доктор физико-математических наук,
профессор

Р. Н. Одинаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория приближения функций — одна из наиболее активно развивающихся областей современной математики. В этой теории наиболее важное место занимают задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, во многих случаях сводящиеся к экстремальным задачам. Как правило, в этих задачах требуется определить точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения. Такого рода экстремальные задачи рассматриваются в данной диссертационной работе, а именно исследуются экстремальные задачи теории наилучшего полиномиального приближения функций, аналитических в круге и принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty, \gamma := \gamma(|z|) > 0$).

В диссертации, состоящей из трёх глав, исследуются экстремальные задачи теории приближения различных классов аналитических функций, связанные с: нахождением наилучших приближений в весовом пространстве Бергмана и вычислением точных значений n -поперечников соответствующих классов функций, а также установлением аналога неравенства Колмогорова в пространстве $B_{2,\gamma}$; построением наилучших линейных методов приближения различных классов функций, аналитических в круге, в весовых пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, и вычислением точных значений n -поперечников, интерпретируемых как задачи оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н. П. Корнейчука; среднеквадратичным приближением различных классов функций, аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональным системам $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, вычислением точных значений n -поперечников, совместным приближением функций и их промежуточных производных, установлением точных неравенств типа Джексона–Стечкина и исследованием экстремальных задач на классах функций, задаваемых с помощью $\mathcal{K}$ -функционала Петре, в пространствах B_2 и $B_{2,\gamma}$.

Следует отметить, что наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах функций, аналитических в единичном круге и принадлежащих пространству Харди H_q , $1 \leq q \leq \infty$. Большой вклад при решении экстремальных задач в пространстве Харди внесли К. И. Бабенко [1] и В. М. Тихомиров [2,3], Л. В. Тайкова [4,5], Н. Айнуллоева и Л. В. Тайкова [6]. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах Ю. А. Фаркова [7,8], С. Д. Фишера и М. И. Стесина [9], А. Pinkus [10], К. Ю. Осипенко [11,12], Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко и В. М. Тихомирова [13], С. Б. Вакрчука [14] М. Ш. Шабозова с соавторами [15–19] и другие. Что касается постановки и решения аналогичных задач в пространстве Бергмана B_q ($1 \leq q \leq \infty$), то здесь имеется немного результатов, однако ряд окончательных результатов получен в работах М. З. Двейрина и И. В. Чебаненко [20] и А. Pinkus [10].

В весовых пространствах Бергмана $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, за исключением работы С. Б. Вакарчука и М. Ш. Шабозова [21], другие исследования по решению аналогичных экстремальных задач нам неизвестны. В целом в пространствах Бергмана с весом решение экстремальных задач аналитических в круге функций находится на стадии разработки, что делает решение указанных экстремальных задач в этих пространствах особенно актуальным.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение различных экстремальных задач теории полиномиального приближения аналитических функций, принадлежащих пространству Бергмана. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие задачи.

1. Найти точные неравенства между величиной наилучшего приближения аналитических функций $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ и усреднёнными с заданным весом модулями непрерывности первого и второго порядка производных $f_a^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.
2. Вычислить точные значения n -поперечников классов функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_i, \mu)$, $i = 1, 2$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
3. Доказать неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана.
4. Найти наилучшие линейные методы приближения классов $W_{q,R}^{(r)}$, $W_q^{(r)}(\Phi)$, и $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.
5. Построить наилучшие линейные методы приближения классов $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ и найти значение соответствующих поперечников в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
6. Доказать точное неравенство типа Джексона для усредненной с весом характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$.
7. Вычислить верхние грани совместного приближения классов функций, задаваемых характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ и $\mathcal{K}$ -функционалами, а также вычислить их n -поперечники.

Методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы теории функций и функционального анализа, ориентированные на оптимизацию, а также методы решения экстремальных задач теории приближения функций. Для решения экстремальных задач в качестве аппарата приближения применяются комплексные алгебраические полиномы.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Исследована задача о наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. Получены точные неравенства между величиной наилучшего приближения аналитических функций $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ и усреднёнными с заданным весом модулями непрерывности первого и второго порядка производных $f_a^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.
2. Для классов функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ вычислены значения n -поперечников в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
3. Доказан аналог неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана. Также рассмотрено применение данного неравенства к задачам теории аппроксимации.
4. Найдены наилучшие линейные методы приближения классов $W_{q,R}^{(r)}$, $W_q^{(r)}(\Phi)$ и $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.
5. Построены наилучшие линейные методы приближения классов $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
6. Доказано точное неравенство типа Джексона для усреднённой с весом характеристики гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$.
7. Получены верхние грани совместного приближения классов функций, задаваемых характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ и $\mathcal{K}$ -функционалами, а также вычислены их n -поперечники.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты, представленные в ней, могут быть использованы для решения других задач теории приближений. Каждая глава диссертации может быть включена в программу специализированных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по математическим специальностям в высших учебных заведениях.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- международной летней математической Школе-конференции по теории функций С.Б. Стечкина, Душанбе (Таджикистан), 2016; Миасс (Екатеринбург), 2017; Кыштым (Екатеринбург), 2018, 2019, 2021-2026;
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, а также кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2011-2026 гг.);

- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций”, посвящённой 60-летию академика АН РТ М. Ш. Шабозова (Душанбе, 2012);
- 4-й международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2013);
- международной научной конференции “Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений”, посвящённой 85-летию академика АН РТ Л. Г. Михайлова (Душанбе, 2013);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных-математиков А. Мухсинова, А. Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (Худжанд, 2014);
- международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвящённой 80-летию член корр. АН РТ, доктор физ.мат. наук, профессора В. Я. Стеценко (Душанбе, 2015);
- международной научной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвящённой 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т. С. (Душанбе, 2015);
- международной Школа-Конференции “Соболевские чтения” (Новосибирск, 2016);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложений”, посвящённой 25-летию Государственного независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2016);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложений”, посвящённой 70-летию академика Илолова М. (Душанбе, 2018);
- международной научной конференции “Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций”, посвящённой 90-летию академика АН РТ Михайлова Л. Г. (Душанбе, 2018);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций”, посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М. Ш. Шабозова (Душанбе, 2022);

- международной научной конференции “Современные проблемы теории чисел и математического анализа”, посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 2022);
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, посвящённой 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан, 30 летию конституции Республики Таджикистан, двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” и 70-летию доктора физико-математических наук Тухлиева Камаридина (Худжанд, 2024);
- международной научно-теоретической конференции, посвящённой “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева (Душанбе, 2025);
- международной конференции “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова и 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 2025);
- международной научной конференции “Развитие математических наук, информатики и механики в период независимости”, посвящённой 35-летию независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2026);
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа”, посвящённой “35-летию государственной независимости Республики Таджикистан” и “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” (Душанбе, 2026).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 20 работах. Все статьи опубликованы в изданиях, входящих в утверждённый ВАК России перечень ведущих рецензируемых изданий, 12 статей (или их переводные версии) опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Диссертационная работа представляет собой самостоятельное исследование автора. Все научные результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. В процессе выполнения совместных работ М. Ш. Шабозовым автору была оказана научно-консультационная помощь.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и библиографического списка, содержащего 120 наименований. Главы подразделяются на параграфы, которые, в свою очередь, разбиты на подпараграфы (пункты). Используется подчинённая нумерация. Общий объём диссертации составляет 199 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** раскрывается актуальность диссертационного исследования, приводится обзор научной литературы и результатов, относящихся к рассматриваемой проблеме, определяются цель и задачи работы, а также формулируются её основные результаты.

В **первой главе** диссертации рассматриваются задачи нахождения наилучших приближений аналитических функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, вычисления точных значений n -поперечников некоторых классов функций и установления неравенства типа Колмогорова в пространстве $B_{2,\gamma}$.

Пусть $U_R \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \in \mathbb{R}_+$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество функций, аналитических в U_R . Для любой функции $f \in A(U_R)$ и любого $\rho \in (0, R)$ введем следующие средние значения:

$$M_q(f, \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(\rho e^{it})|, & q = \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \in \mathbb{R}_+$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, которые существуют почти всюду на $[0, 2\pi]$:

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 \leq t < 2\pi} |f(Re^{it})|, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

При $R = 1$ положим $U := U_1$, $H_q := H_{q,1}$, а также $\|f\|_{H_q} := \|f\|_{H_{q,1}}$.

Рассмотрим пространство $H_{q,\rho}$ для $\rho \in (0, 1]$, определяемое как множество функций $f \in A(U_\rho)$, для которых

$$\|f\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho \cdot)\|_{H_q} < \infty.$$

Далее введем пространство $\mathcal{L}_q$, состоящее из всех комплекснозначных функций f , определённых в U , удовлетворяющих следующему условию:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_U |f(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^q dt d\rho \right)^{1/q}.$$

Через $\mathcal{L}_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} L_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f , для которых

$$\gamma^{1/q} \cdot f \in \mathcal{L}_q(U), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathcal{L}_q}.$$

Под $B_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} B_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$ понимаем банахово пространство функций $f \in A(U)$, для которых норма

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f, \rho) d\rho \right)^{1/q},$$

является конечной. Аналогично определим пространство $B_{q,\gamma,R}$ как множество функций $f \in A(U_R)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} := \|f(R \cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty.$$

Положим

$$\tilde{B}_{q,\gamma,R} = \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, \|f\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq 1\}.$$

Для $q = \infty$ требуется, чтобы функции f были непрерывными на замкнутом круге $\bar{U}_R$. Когда $\gamma \equiv 1$, пространство $B_q = B_{q,1}$ совпадает с классическим пространством Бергмана, систематическое изучение которого началось со знаменитой работы С. Бергмана [22], в которой изложены общая теория и различные приложения этого пространства.

Для оценки гладкости функций в этих пространствах вводим модули непрерывности первого и второго порядка:

$$\omega(f, t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leq t} \left\| f(\cdot e^{i(\cdot+h/2)}) - f(\cdot e^{i(\cdot-h/2)}) \right\|_{B_{q,\gamma}},$$

$$\omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leq t} \left\| f(\cdot e^{i(\cdot+h)}) - 2f(\cdot e^{ih}) + f(\cdot e^{i(\cdot-h)}) \right\|_{B_{q,\gamma}}.$$

Модуль непрерывности m -го порядка в пространстве $B_{q,\gamma}$ определим величиной

$$\omega_m(f, t)_{B_{q,\gamma}} = \sup \{ \|\Delta_m(f, \cdot, \cdot, h)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \leq t \} =$$

$$= \sup \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |\Delta_m(f; \rho, \tau, h)|^q d\rho d\tau \right)^{1/q} : |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_m(f; \rho, \tau, h) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f \left(\rho e^{i(\tau+kh)} \right)$$

означает конечную разность m -го порядка функции f с шагом h .

Символом $f_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим производную r -го порядка функции $f \in A(U_R)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho \exp(it)$, т.е.

$$f'_a(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial t} = f'(z)zi \text{ и } f_a^{(r)}(z) := \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}'_a, \quad r \geq 2.$$

Для функции $f \in A(U_R)$, у которых r -я производная $f_a^{(r)}$ также принадлежит пространству $H_{q,R}$, вводим множество

$$H_{q,R,a}^{(r)} := \left\{ f \in A(U_R) : f_a^{(r)} \in H_{q,R} \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty, R \in \mathbb{R}_+).$$

Далее структурные свойства функции $f \in H_{q,R,a}^{(r)}$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} := \sup \left\{ \|f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot+\tau/2)}) - f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot-\tau/2)})\|_{H_q} : |\tau| \leq t \right\}$$

граничных значений $f_a^{(r)}(Re^{it})$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}}$. Рассматриваются также множества функций

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \|f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty),$$

и

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty).$$

Через

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

обозначим множество алгебраических комплексных полиномов степени n .

Величину наилучшего приближения функции $f \in B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$) элементами $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ определим равенством

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} := E_{n-1}(f)_{q,\gamma} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}.$$

Приводим также определения n -поперечников в произвольном нормированном пространстве. Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в нем; $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X ; $L_n \subset X$ – n -мерное линейное подпространство; $L^n \subset X$

– подпространство коразмерности n ; $\Lambda : X \rightarrow L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n .

Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{def}{=} \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n \} : f \in \mathfrak{M} \}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{def}{=} \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda X \subset L_n \} \quad (2)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор Λ^* ($\Lambda^* X \subset L_n$), если он существует и реализует в (2) точную нижнюю грань, то есть такой, что

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup \{ \|f - \Lambda^*(f)\|_X : f \in \mathfrak{M} \},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : L_{n+1} \subset X \}, \quad (3)$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \sup \{ \|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n \} : L^n \subset X \}, \quad (4)$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \stackrel{def}{=} \inf \{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \}, \quad (5)$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \} \quad (6)$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp X \subset L_n \} : L_n \subset X \} \quad (7)$$

называют соответственно *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным* и *проеекционным* n -поперечниками.

Если существует подпространство $L_n^* \subset X$, $\dim L_n^* = n$, на котором реализуется нижняя грань в (5), то есть

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = E(\mathfrak{M}, L_n^*)_X,$$

то L_n^* называют *экстремальным подпространством* для $d_n(\mathfrak{M}, X)$. Экстремальное подпространство L_n^* является наилучшим аппаратом приближения множества $\mathfrak{M}$ в классе всех подпространств $\{L_n\} \subset X$.

Подпространство $\tilde{L}_n \subset X$, $\dim \tilde{L}_n = n$, если оно существует, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \tilde{L}_n)_X,$$

называют *экстремальным* для $\delta_n(\mathfrak{M}, X)$. Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\hat{L}_n \subset X$, $\dim \hat{L}_n = n$, таких, что

$$E(\mathfrak{M}, \hat{L}_n)_X = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \hat{L}_n)_X = d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если существует подпространство $\bar{L}_{n+1} \subset X$, $\dim \bar{L}_{n+1} = n + 1$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \bar{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\},$$

то оно является экстремальным для $b_n(\mathfrak{M}, X)$.

Подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n , если оно существует, такое, что

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L_*^n\},$$

называют экстремальным для $d^n(\mathfrak{M}, X)$.

Между перечисленными выше n -поперечниками (3)-(7) выполняются следующие соотношения [10, 23]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \frac{d_n(\mathfrak{M}, X)}{d^n(\mathfrak{M}, X)} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X). \quad (8)$$

В случае, если X – гильбертово пространство, то между указанными поперечниками справедливы соотношения [10, 23]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \Pi_n(\mathfrak{M}, X). \quad (9)$$

Пусть $\Phi_j(u)$, $j = 1, 2$, $u \geq 0$ – произвольные возрастающие непрерывные функции, такие, что $\Phi_j(0) = 0$ ($j = 1, 2$). Для любых $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \geq 1$ и $r, n \in \mathbb{N}$ определим классы функций

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) = & \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \times \right. \\ & \times \left. \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \Phi_1(h), h \in \mathbb{R}_+ \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) := & \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \times \right. \\ & \times \left. \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi_2(h), 0 < h \leq \pi/2 \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В первом параграфе первой главы приведены обобщения неулучшаемых неравенств, доказанных Л.В. Тайковым [5], а также Н. Айнуллоевым и Л.В. Тайковым [6] для аналитических в единичном круге функций $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$), на случай, когда $f \in A(U_R)$ принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$).

Полученные результаты связывают величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}}$ с усредненным с весом $\left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\}$ значением модулей непрерывности и гладкости в пространстве $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$).

Теорема 1.1.1. Для произвольной функции $f(z) \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$), при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ & \leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^u \omega \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

и знак равенства в (12) реализуется на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.1.2. Для любой функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $0 < u \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\begin{aligned} & E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \\ & \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \end{aligned} \quad (13)$$

и знак равенства в (13) реализует функция $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Во втором параграфе первой главы, опираясь на результаты, полученные в теоремах 1.1.1 и 1.1.2, вводятся классы функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ и $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$, определяемые формулами (10) и (11) соответственно. Для этих классов функций вычисляются значения n -поперечников $b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma,R})$ и $d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma,R})$, где $\mathfrak{M} := \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ и $\mathfrak{M} := \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$.

Введём также обозначения:

$$(\sin t)_* := \{\sin t, \text{ если } 0 \leq t \leq \pi/2; \ 1, \text{ если } t > \pi/2\};$$

$$(1 - \cos nt)_* := \{1 - \cos nt, \text{ если } nt \leq \pi; \ 2, \text{ если } nt > \pi\}.$$

Теорема 1.2.1. Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (14)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) = \\ &= E_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \right)_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (14), не пусто.

Теорема 1.2.2. Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in (0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_2(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (15)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) &= b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) = \\ &= E_{n-1}(W_{q,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned}$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (15), не пусто.

Третий параграф первой главы посвящён неравенству типа Колмогорова в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$.

Пусть $\mathcal{J} := \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ или $\mathcal{J} := \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $n, \nu \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$; $s, p, q \in \mathbb{R}_+$. В теории приближений и её приложениях хорошо известны неравенства Колмогорова, которые оценивают сверху $L_q(\mathcal{J})$ – норму промежуточной производной функции через $L_p(\mathcal{J})$ – норму самой функции и $L_s(\mathcal{J})$ – норму её старшей производной:

$$\begin{aligned} \|f^{(\nu)}\|_{L_q(\mathcal{J})} &\leq \\ &\leq \mathcal{K} \|f\|_{L_p(\mathcal{J})}^\alpha \cdot \|f^{(r)}\|_{L_s(\mathcal{J})}^\beta, \quad \alpha = \frac{n - \nu - \frac{1}{s} + \frac{1}{q}}{n - \frac{1}{s} + \frac{1}{p}}, \quad \alpha + \beta = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathcal{K}$ – некоторая константа, зависящая от указанных числовых параметров.

К настоящему времени получено достаточно много неравенств типа (16) в разных нормах и областях. В частности, интерес к точным неравенствам типа (16) вызван их связью с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования ограниченными операторами и другими родственными задачами. Подробную информацию об исследованиях, посвященных неравенству типа Колмогорова для функций вещественного переменного как в одномерном, так и в многомерном случае и связанных с ними экстремальных задач, можно найти в обзорной статье В. В. Арестова [24] и в сравнительно недавно вышедшей монографии В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчука, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [25]. Что же касается неравенства вида (16) для аналитических в единичном круге функций в пространствах Харди H_p ($p \geq 1$) и Бергмана B_p ($p \geq 1$), то в случае $p = 2$ такие неравенства были получены С. Б. Вакарчуком [26]. Отметим также, что К. Ю. Осипенко [27] получил точное неравенство Колмогорова в случае равномерных норм на $\mathbb{R}$ для функций, аналитических в полосе $|Im z| < \beta$.

Через $\tilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$ будем обозначать класс функций $f \in A(U)$, для которых $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$. Следуя подходу К. И. Бабенко [1], можно показать,

что $\widetilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma}$ при любом $q \in [1, \infty)$. Кроме того, при любом $q \geq 2$ имеет место включение $B_{q,\gamma} \subset B_{2,\gamma}$.

Приводим один из основных результатов этого параграфа.

Теорема 1.3.1. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любой функции $z^r f^{(r)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}. \quad (17)$$

Учитывая принадлежность промежуточной производной $z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}$, $1 \leq \nu \leq r$ функции $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$, $q \geq 2$ пространству Бергмана B_p , $1 \leq p \leq 2$, а также справедливость соотношений $f \in B_s$, $z^r f^{(r)} \in B_\mu$, где $2 \leq s, \mu \leq q$, из неравенства (17), при $\gamma(\rho) \equiv 1$ вытекает более общее утверждение.

Теорема 1.3.2. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_p} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_{B_s}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_\mu}^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in \widetilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Пользуясь равенством

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2},$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k \in \mathcal{P}_{n-1}$$

– частная сумма Тейлора разложения функции в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k,$$

в этом же параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3.3. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и функций $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которых коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_{2,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} (E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}})^{\nu/r} \cdot (E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}})^{1-\nu/r}. \end{aligned}$$

Теорема 1.3.3 в случае $\gamma \equiv 1$ допускает следующее обобщение.

Теорема 1.3.4. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = r - \nu, r - 1$, имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_p} &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} (E_{n-1}(f)_{B_s})^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_\mu} \right)^{1-\nu/r} \end{aligned}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [2–4, 7].

Вторая глава диссертации посвящена экстремальной задаче построения наилучших линейных методов приближения различных классов функций, аналитических в круге, в весовых пространствах Бергмана $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при всех значениях $1 \leq q \leq \infty$.

Первый параграф второй главы посвящён историческому обзору и постановке экстремальной задачи отыскания наилучших линейных методов приближения классов функций в произвольном нормированном пространстве X .

Первая работа, в которой был построен наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$, была работа К. И. Бабенко [1]. Пользуясь этим результатом, В. М. Тихомиров [2] вычислил точное значение колмогоровского n -поперечника класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ в пространстве H_∞ . Л. В. Тайков [28] нашёл наилучший линейный метод класса $W^{(r)}H_{1,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ и чуть позже, в работе [4] обобщил эти результаты для класса $W^{(r)}H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$) и вычислил значение колмогоровского n -поперечника указанного класса в H_q ($1 \leq q \leq \infty$). Обобщение всех перечисленных результатов дано в статье J. T. Sheik [29].

В дальнейшем эта тематика нашла отражение в работах Ю. А. Фаркова [30], А. Пинкуса [10], К. Ю. Осипенко [31], С. Б. Вакарчука [32–34], С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [35], С. Б. Вакарчука и М. Ш. Шабозова [21], М. Ш. Шабозов с учениками [16, 36] и др.

Приведём общую постановку задачи нахождения наилучших линейных методов приближения в произвольном банаховом пространстве X .

Каждой функции $f(z) \in A(U_R)$ посредством произвольной матрицы чисел $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}_{k=0}^n$ сопоставляется последовательность полиномов

$$V_{\Lambda,n}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} c_k(f) z^k,$$

и в произвольном банаховом пространстве X полагают

$$\mathcal{E}_n(f, \Lambda)_X := \|f(z) - V_{\Lambda,n}(f, z)\|_X,$$

которая характеризует скорость приближения функции $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n}(f)$ в метрике пространства X линейным методом Λ . *Наилучшим линейным методом* приближения на классе $\mathfrak{M} \subset X$ называется треугольная матрица $\Lambda^* := \{\lambda_{k,n}^*\}_{k=0}^n$, такая что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; \Lambda^*)_X := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f; \Lambda)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda^*)_X.$$

В этом же параграфе рассматривается наилучший линейный метод приближения для класса

$$W_{q,R}^{(r)} = \left\{ f : f^{(r)} \in H_{q,R}, \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1, r \in \mathbb{Z}_+, R \geq 1, 1 \leq q \leq \infty \right\}.$$

Основным результатом первого параграфа второй главы является

Теорема 2.1.1. *Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место равенства*

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) &= b_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) = \\ &= d^n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = d_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = \delta_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = E(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{L_{q,\gamma}} = \\ &= \mathcal{E}(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{L_{q,\gamma}} = \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{L_{q,\gamma}} : f \in W_{q,R}^{(r)} \right\} = \\ &= \begin{cases} \infty, & n < r, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}, & n \geq r, 1 \leq q < \infty, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}, & n \geq r, q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом:

1) в случае n -поперечников $d_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma})$ и $\delta_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma})$ подпространство

$$L_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \left\{ \{z^j\}_{j=0}^{r-1}, \left\{ \left[R^{2(n-j)} - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot |z|^{2(n-j)} \right] \cdot z^j \right\}_{j=r}^{n-1} \right\},$$

является экстремальным для класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $L_{q,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$\Lambda_{n-1}^*(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{r-1} c_j(f) z^j + \sum_{j=r}^{n-1} c_j(f) z^j \left[1 - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \right], \quad (18)$$

является наилучшим для класса $W_{q,R}^{(r)}$ линейным методом приближения в пространстве $L_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$L_*^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, k = \overline{0, n-1} \right\},$$

будет экстремальным для n -поперечника $d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$;
 4) подпространство

$$\bar{L}_{n+1} \stackrel{def}{=} \mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C} \right\},$$

является экстремальным для $b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$.

Отметим, что теорема 2.1.1 является обобщением одной из теорем А. Пинкуса [10, теорема 2.4., с.254-255] доказанного для обычного пространства Бергмана $B_q (1 \leq q \leq \infty)$ на случая весовых пространств $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при $1 \leq q \leq \infty$.

Во втором параграфе второй главы, исходя из результата теоремы 1 (см. следствие 3, формула (3) в [5]), Л. В. Тайков вёл следующий класс функций

$$W_q^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q, \quad \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2k}\right), \quad k \in \mathbb{N} \right\},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, а $\Phi(t)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$.

Он доказал, что если мажоранта $\Phi(t)$, $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\lambda\pi} \sin \frac{\lambda\pi}{2}, & \text{если } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), & \text{если } \lambda \geq 2, \end{cases} \quad (19)$$

то для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $1 \leq q \leq \infty$ справедливо равенство

$$d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), H_q \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right).$$

В той же работе было доказано, что условие (19) выполняется, например, для функции

$$\Phi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}.$$

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию (19). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) &= b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) = \\ &= d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) = d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E} \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\
&= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_q^{(r)}(\Phi) \right\} = \\
&= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

При этом:

1) в случае n -поперечников $d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ и $\delta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ подпространство

$$\begin{aligned}
&L_n^* := \text{span} \left\{ \{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \right. \\
&\left. \left[\left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} z^k \right]_{k=r}^{n-1} \right\},
\end{aligned}$$

является экстремальным;

2) линейный непрерывный оператор

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{n-1}^* := \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \\
&\sum_{k=r}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k(f) z^k,
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\beta_{k,r} := \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int_0^{\pi/2(n-r)} (1 - \sin(n-r)x) \cos(k-r)x dx.$$

является наилучшим для класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$L_*^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \ k = \overline{0, n-1} \right\},$$

является экстремальным для n -поперечника $d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$;

4) экстремальным для n -поперечника $b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$ является подпространство

$$\bar{L}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \ c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

В третьем параграфе второй главы рассматривается задача построения наилучшего линейного метода приближения функций, принадлежащих классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$. Целью параграфа является доказательство того, что ранее установленные в теореме 1.2.1 точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечников справедливы также для гельфандовского и линейного n -поперечника класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в $B_{q,\gamma,R}$.

С этой целью для произвольной функции $f(z) \in A(U_R)$ вводится линейный полиномиальный оператор степени не выше $(n-1)$, определяемый равенством

$$\mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z) := c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \quad (21)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \mu n \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt \cdot \cos \mu n t dt, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теорема 2.3.1. *Если при заданном $\mu \geq 1$, любых $h \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (14), то для произвольных $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} d^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \delta_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{E}(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}, \mathcal{P}_{n-1})_{B_{q,\gamma,R}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} \right\} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

При этом линейный полиномиальный оператор (21) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$.

В четвертом параграфе второй главы рассматривается задача построения наилучшего линейного метода приближения функций, принадлежащих классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$. Здесь, аналогично третьему параграфу, приводится доказательство ранее установленные в теореме 1.2.2 точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечника для гельфандовского и линейного n -поперечника класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в $B_{q,\gamma,R}$.

Вводится линейный полиномиальный оператор степени не выше $(n-1)$, определяемый равенством

$$\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \quad (22)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kx (1 - \sin \mu n x) dx.$$

Теорема 2.4.1. *Если при заданном $\mu \geq 1/2, n \in \mathbb{N}$ и любых $h \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi_2(h)$ удовлетворяет ограничению (15), то для произвольных $r \in \mathbb{N}, 0 < R \leq 1, 1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right) = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right\} = \\ &= \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$, линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$ определён равенством (22).

При этом:

- 1) $L_{n+1}^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ является оптимальным подпространством для бернштейновского n -поперечника $b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- 2) $L_n^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n -поперечника $d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- 3) $L_*^n := \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ является оптимальным подпространством коразмерности для гельфандовского n -поперечника $d^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- 4) линейный полиномиальный оператор (22) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$ и реализует линейный n -поперечник $\delta^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$.

В пятом параграфе второй главы обобщаются результаты С. Б. Вакарчука, полученные в работе [34], на более широкий класс весовых пространств. В частности, изучаются поперечники классов аналитических функций

$$W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) := \left\{ f \in A(U_R), f_a^{(r)} \in H_{q,R} : \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^x \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2x} \right) \right] dt \leq \Phi(x), x \in (0, \pi/2] \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ ($\mu \geq 1$) – произвольные фиксированные числа в пространствах $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ и $B_{q,\gamma}$ при $1 \leq q \leq \infty$.

В работе Н. Айнуллоева [37] доказано, что если мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет следующему ограничению при всех $x \in (0, \pi/2]$ и $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right)} \geq nx \int_0^1 (\sin xnt)_* [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt, \quad (23)$$

где $(\sin x)_* := \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in [0, \pi/2]; \\ 1, & \text{если } x \geq \pi/2 \end{cases}$, то при всех $r \geq 2$

$$b_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_q) = d_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_q) = \frac{1}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (24)$$

Там же доказано, что одним из примеров мажоранты, для которой выполняется ограничение (23), является функция $\Phi(x) = x^{\beta(\mu)}$, где

$$\beta(\mu) := 1 + \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int_0^1 t \cos(\pi t/2\mu) [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt.$$

В частности, $\beta(1) = \pi/2$ и для любого $\mu \in [1, \infty)$, $\pi/2 \leq \beta(\mu) < 2$.

С. Б. Вакарчук [34] распространил результат (24) на более общий случай

$$\lambda_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников в (8).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.5.2. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \geq 1$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (23). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) &= b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) = d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= d_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \delta_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= E(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E}(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \{ \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \} = \\ &= \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

При этом:

1) подпространство

$$\mathcal{L}_n^* :=$$

$$= \text{span} \left\{ 1; \left\{ R^{2(n-k)} + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \rho^{2(n-k)} \right\}_{k=1}^{n-1} \right\},$$

является экстремальным для n -поперечников $d_n(\cdot)$ и $\delta_n(\cdot)$ класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$\Lambda_{n-1,r-1}(f, z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2(n-k)} \right\} c_k z^k, \quad (25)$$

где

$$0 < \rho \leq R, \quad \gamma_k := \mu n \int_0^{\pi/(2n\mu)} \cos(kt) \cos(n\mu t) dt.$$

является наилучшим для класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$\mathcal{L}_*^n := \{f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}\}$$

является экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d^n(\cdot)$;

4) экстремальным для n -поперечника $b_n(\cdot)$ является подпространство

$$\mathcal{P}_n := \text{span}\{1, z, z^2, \dots, z^n\}.$$

Шестой параграф посвящён интерпретации результатов, полученных в предыдущих параграфах второй главы, в терминах задач оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н.П. Корнейчука [38–40]. Задача восстановления заключается в построении наилучшего оператора, обеспечивающего минимальную погрешность на заданном классе при ограниченной информации о функции. В этом параграфе приводятся необходимые обозначения и определения и устанавливается связь между теорией поперечников и задачами оптимального восстановления, имеющими важное значение для вычислительной математики и теории приближений.

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор

$$\mathcal{M}_n := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$$

функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$, где X^* – пространство, сопряжённое с X . Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $f \in X$ числовой вектор

$$T(f, \mathcal{M}_n) = \{\mu_1(f), \mu_2(f), \dots, \mu_n(f)\}.$$

Задачу восстановления функции $f \in X$ по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$\Phi(f; \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mu_k(f) g_k(z), \quad (26)$$

где $G_n = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{T}$ – соответственно произвольные системы линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathfrak{M} \subset X$, $\mathcal{T} = \{\Gamma_n\}$ – вектор числовых коэффициентов, для которых (26) имеет смысл. Погрешность восстановления на классе $\mathfrak{M}$ считают равной

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathfrak{M}; \mathcal{M}, G_n) = \\ = \inf \{ \sup \{ \|f - \Phi(f, \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z)\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Gamma_n \subset \mathcal{T} \} \end{aligned} \quad (27)$$

и полагают

$$\mathcal{R}(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, G_n) : \mathcal{M}_n, G_n \}.$$

Пусть $\mathcal{M}'_n$ – набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Тогда рассматривают величину

$$\mathcal{R}'(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, G_n) : \mathcal{M}'_n, G_n \}.$$

Методы восстановления $(\mathring{\mathcal{M}}_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)$, $(\mathring{\mathcal{M}}'_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)$, для которых

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi(f; \mathring{\mathcal{M}}_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\},$$

$$\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi(f; \mathring{\mathcal{M}}'_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

называют соответственно оптимальным и оптимальным линейным методом восстановления функций класса $\mathfrak{M}$. Н.П.Корнейчук [41, с.375-388] доказал, что

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X), \quad \mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \lambda_n(\mathfrak{M}, X),$$

причём, если $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}} \otimes L$, где $\tilde{\mathfrak{M}}$ – компакт, а L – конечномерное подпространство, то и в первом соотношении имеет место знак равенства.

Параллельно с (27) рассматривают также величину

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X = \sup \{ \|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, T(f_1, \mathcal{M}_n) = T(f_2, \mathcal{M}_n) \},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$. Полагая

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n) : \mathcal{M}_n \},$$

где нижняя грань берётся по всем наборам $\mathcal{M}_n$ линейных функционалов, определённых на сопряжённом пространстве X , получаем

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) \leq 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X),$$

а если $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное и выпуклое множество, то

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Теорема 2.6.1. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathfrak{N}_n^*, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^*)$ функций $f(z)$ из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (18) функция Λ_{n-1}^* . При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.6.2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathfrak{N}_n^*, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^*)$ функций $f(z)$ из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (20) функция Λ_{n-1}^* . При этом для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.6.3. Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathfrak{N}_n, \mathcal{M}_n, \Gamma_n)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (21) функция $\mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.4. Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathfrak{N}_n, \mathcal{M}_n, \Gamma_n)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (22) функция $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.5. Наилучший метод кодирования функций из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathfrak{N}_n, \mathcal{M}_n, \Gamma_n)$ функций $f(z)$ из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (25) функция $\Lambda_{n-1,r,r-1}(f, z)$. При этом для любых $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ и $R \geq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)}H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_a^{(r)}H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Результаты главы 2 опубликованы в работах [1, 5, 6, 19, 20].

В **третьей главе** рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, с помощью рядов Фурье по ортонормированной в области $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. В частности, изучается случай, когда $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а в качестве ортонормированной системы выступает система $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$. На классах аналитических функций, определяемых специальным модулем непрерывности m -го порядка, получены точные оценки скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье. Кроме того, вычислены точные значения n -поперечников соответствующих классов в пространстве B_2 .

В первом параграфе третьей главы рассматриваются основные обозначения и определения, которые будут использоваться на протяжении всей главы, а также приводятся необходимые вспомогательные факты.

Под $B_2 := B_2(\mathcal{D})$ будем понимать пространство Бергмана – комплексных функций f , аналитических в односвязной ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma = d\sigma(z)$ – элемент площади.

Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем ортонормированной по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системой комплекснозначных функций, если

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{Z}_+, \\ 1 & \text{при } k = l, k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Если $f \in B_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma \quad (28)$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Функции f сопоставляется её ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z). \quad (29)$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

– частичная сумма n -го порядка ряда (29). Составим линейную комбинацию первых из n функций системы $\{\varphi_k(z)\}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z),$$

которую назовём обобщённым полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты. Хорошо известно, что (см., например [42, с. 203]):

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : d_k \in \mathbb{C} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f , определённые равенством (28).

Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \quad (31)$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (31) понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве B_2 следуя [43] рассмотрим оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1 - h) d\sigma(\zeta) \quad (32)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (32) обладает следующими простыми свойствами:

- 1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 2) $\|F_h(f)\| \leq \|f\|$; 3) $F_h \varphi_k(z) = (1 - h)^k \varphi_k(z)$;
- 4) $\|F_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$.

Для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков как и в классическом случае следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(z),$$

где $\Delta_h^m f(z)$ называется *обобщенной* конечной разностью m -го порядка функции $f \in B_2$ посредством оператора обобщенного сдвига $F_h f(z)$;

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z), \quad F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z)), \quad k = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2 . Величину

$$\begin{aligned}\Omega_m(f; t)_2 &= \sup \{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \leq t \} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2}\end{aligned}\quad (33)$$

будем называть *обобщенным* модулем непрерывности m -го порядка функции f в пространстве B_2 .

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой её производной. Отметим, что в случае равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами, точная константа в неравенстве Джексона найдена в [44]. Аналогичная задача в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ решена в [45, 46]. Данная тематика впоследствии плодотворно развивалась, например, в работах [47–51].

В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина изучалась в работе [43].

В этом параграфе приводится уточнение одного из результатов работы [43] в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1.3. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha^m}} \cdot \Omega_m(f, h_n(\alpha)),$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}$. Неравенство обращается в равенство для функции $f(z) = \varphi_n(z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Во втором параграфе третьей главы изучается задача о неравенстве типа Джексона для осреднённой с весом характеристики Ω_m производных аналитических функций. Основным результатом этого параграфа являются следующие

Теорема 3.2.1. *Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m(f^{(r)}, t), \quad (34)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ константа в правой части неравенства (34) уменьшена быть не может.

Теорема 3.2.2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, $g(t)$ – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \frac{1}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы 3.2.2 вытекает ряд утверждений.

Следствие 3.2.2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $p = 1/m$, $h \in (0, 1)$, $g(t)$ – весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^m} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}] g(t) dt \right)^{-m}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (35), в частности при $g(t) \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, вытекает равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m} = \\ = \frac{1}{\{(n-r+1)h - 1 + (1-h)^{n-r+1}\}^m}. \end{aligned} \quad (36)$$

Полагая в (36), например $h = 1/(n-r+1)$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m} = \\ = \left(1 - \frac{1}{n-r+1} \right)^{-m(n-r+1)}. \end{aligned} \quad (37)$$

В свою очередь из (37) следует экстремальное равенство

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = e^m.$$

Следствие 3.2.3. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.2. Положим

$$g(t) := (n-r)(1-t)^{n-r-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r.$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^h \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ = \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^{n-r}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (38)$$

Из (38), в частности при $h = 1/(n-r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \end{aligned} \quad (39)$$

При $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (39) следует, что

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-2m}.$$

В частности, если $r = 0$, то

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(f, t)_2 (1-t)^{n-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-2m}.$$

Для теорем, доказанных в данном параграфе, здесь же приведены обобщения этих результатов на случай задачи о совместном приближении функций и

их промежуточных производных в пространстве B_2 . Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.2.3. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-s-1}^2 \left(f^{(s)} \right)_2 \leq \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-2m} \cdot \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2, \quad (40)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ константа в правой части неравенства (40) уменьшена быть не может.

Теорема 3.2.4. Пусть $f \in B_2^{(r)}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, $g \in L_p$ – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Через $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq 1, \quad 0 < t < 1,$$

а через $W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$) обозначим множество функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0, 1)$ удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$) её промежуточные производные $f^{(s)}$ ($1 \leq s \leq r-1$) также принадлежат пространству B_2 , то определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2$ на некотором подмножестве функции $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ при $n > r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Точнее, требуется найти следующую величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(\mathfrak{M}^{(r)} \right) := \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}. \quad (41)$$

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.5. Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда для любого натурального $n > r \geq s$, $t \in (0, 1)$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, t) \right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (42)$$

Заметим, что при $t = t_* = 1/(n-r)$, $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$ из (42) следует асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, t_*) \right)_2 \asymp \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-m}.$$

Теорема 3.2.6 Пусть $0 < p \leq \infty$, $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ и $h \in (0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right) &:= \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (43)$$

Существует функция $g_0 \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$, реализующая в (43) верхнюю грань.

В последние годы в теории приближения всё более широкое применение находит так называемый $\mathcal{K}$ -функционал Петре [52–54]. Особенно важную роль этот функционал играет при точном решении различных экстремальных задач аппроксимации, где требуется учитывать одновременно гладкость и аппроксимационные свойства функций.

В третьем параграфе третьей главы, опираясь на результаты параграфа 3.2, рассматриваются экстремальные задачи на классах функций, задаваемых при помощи $\mathcal{K}$ -функционала, и приводятся их точные решения.

Для исследования этих классов используется следующий $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m) &:= \mathcal{K} \left(f; t^m; B_2, B_2^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - J\|_2 + t^m \left\| J^{(m)} \right\|_2 : J \in B_2^{(m)} \right\}, \quad f \in B_2. \end{aligned}$$

Одним из общих результатов третьего параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.3.2 Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ($r \geq s$) – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1.$$

Неубывающая на $[0, \infty)$ функция Φ называется k -мажорантой [55, с. 25], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют просто мажорантой.

В данном параграфе рассматривается задача (41) при произвольных $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$ для следующего класса функций

$$W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) = \left\{ f \in B_2^{(r)} : \mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m) \right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3.3. Пусть Φ – мажоранта, определяющая класс функций $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Тогда для любого натурального $n \geq m + r$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 = \\ & = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned}$$

В четвертом параграфе третьей главы рассматриваются задачи вычисления точных значений n -поперечников для классов функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$, $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежащих пространству B_2 , а также для следующего класса

$$W_{m,p}^{(r)}(h, g) := W_p^{(r)} B_2(\Omega_m, h, g) = \left\{ f \in B_2^{(r)} : \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 g(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Основными результатами данного параграфа являются

Теорема 3.4.1 При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m, t), B_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m, t), B_2) = \\ &= \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Теорема 3.4.2 Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, g – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) &= E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Теорема 3.4.3 Пусть Φ – мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \geq m + r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) &= E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned}$$

В последнем пятом параграфе третьей главы изучается задача среднеквадратического приближения некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной в области $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k^*(z)\}_{k=0}^\infty$ в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$, где $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha(1-|z|)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ – вес Якоби. Доказаны точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие величину наилучшего среднеквадратичного полиномиального приближения $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ и $\mathcal{K}$ -функционала Петре.

Условимся в дальнейшем называть весом неотрицательную функцию $\gamma := \gamma(|z|) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемую по Лебегу в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ такую, что

$$\iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) d\sigma > 0,$$

где $d\sigma = dx dy$ – элемент площади. Будем рассматривать вопросы среднеквадратичного приближения суммами Фурье комплексных функций f , аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma} := B_{2,\gamma}(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ пространство $B_{2,\gamma}$ превращается в обычное пространство Бергмана [42, с. 259]. Отметим, что в случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$, задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$ изучалась в работе [43].

Хорошо известно [42, с. 262-265], что теория среднеквадратичного приближения по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функций f тесно связана с теорией ортогональных по области $\mathcal{D}$ функций. Поэтому для большей связности изложения мы

приведем основные понятия, относящиеся к теории ортогональных с весом в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системы функций. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем ортонормированной с весом γ по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системой комплекснозначных функций, если

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{\gamma} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{Z}_+, \\ \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2 = 1 & \text{при } k = l, k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\|\varphi_k\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, то система $\{\varphi_k(z) \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормальной. Функции f сопоставляется её ряд Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z), \quad (44)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma$$

– коэффициенты Фурье функции f . Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z)$$

– частная сумма n -го порядка ряда, стоящая в правой части равенства (44). Составим линейную комбинацию первых n функций системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(z), \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (45)$$

и множество всех обобщенных полиномов вида (45) обозначим через $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

назовем наилучшим среднеквадратическим приближением функции $f \in B_{2,\gamma}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Очевидно, что система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной в пространстве $B_{2,\gamma}$, но не ортонормированной, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^k \bar{z}^l d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{k+l+1} e^{i(k-l)t} d\rho dt = \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho := \mu_k > 0, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, система функций

$$\varphi_k^*(z) := \left\{ (\sqrt{\mu_k})^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty} \quad (46)$$

будет ортонормальной системой.

Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим класс аналитических в круге U функций. Пусть теперь f – произвольная функция, принадлежащая классу $\mathcal{A}(U)$. Ряд Маклорена этой функции внутри U имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (47)$$

Очевидно, что ряд Фурье функции $f(z)$ по ортонормальной системы (46) совпадает с рядом Маклорена (47). Ряд Фурье функции $f(z)$ внутри единичного круга U представляет собой аналитическую функцию (47), для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k |c_k(f)|^2.$$

Согласно второй теореме Вейерштрасса, ряд (47) может быть сколько угодно раз продифференцирована, причем все продифференцированные ряды равномерно сходятся к соответствующей производной, и для любого $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ множество функций $f \in B_{2,\gamma}$, у которых $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$, то есть $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma} < \infty$. Легко заметить, что при любом $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(r)}(z) - S_{n-1}^{(r)}(f, z) = f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

в силу чего получаем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \inf \left\{ \|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho, \end{aligned} \quad (48)$$

а также имеет место равенство

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho. \quad (49)$$

Всюду далее через

$$\mu_s(\gamma) = \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^s d\rho, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (50)$$

обозначим момент порядка s весовой функции $\gamma(\rho)$ на отрезке $[0, 1]$. В силу обозначения (50), равенства (48) и (49) запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma), \\ \|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 &= \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma). \end{aligned}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.5.2. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n > r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (51)$$

Пользуясь леммой 3.5.2, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3.5.1 При всех $k \geq n > r \geq 1$ и $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (52)$$

Пусть $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ – множество функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, у которых

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\}.$$

Теорема 3.5.2 Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (53)$$

В следующей теореме находим точную верхнюю грань модуль коэффициентов ряда Тейлора для класса $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$.

Теорема 3.5.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда справедливо равенство

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (54)$$

Докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ посредством $\mathcal{K}$ -функционала Петре. Определим $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ и $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &:= \mathcal{K} \left(f; t^m; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + t^m \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right\}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (55)$$

Теорема 3.5.4 Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие что $n \geq r + m$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = 1.$$

Результаты главы 3 опубликованы в работах [8–18].

Автор выражает глубокую благодарность академику НАН Таджикистана, доктору физико-математических наук, профессору Шабозову Мирганду Шабозовичу за многолетнее внимание к работе, ценные научные советы, обсуждения и поддержку.

Цитированная литература

- [1] Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.
- [2] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

- [3] Тихомиров В. М. Теория приближения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1987. Т. 14. С. 103–260.
- [4] Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
- [5] Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.
- [6] Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
- [7] Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 5. С. 229–231.
- [8] Farkov Yu. A. n –Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity. 1996. V. 12, № 1. P. 58–79.
- [9] Fisher S. D., Stessin M. I. The n –width of the unit ball of H^q J. Approx. Theory. 1991. V. 67, № 3. P. 347–356.
- [10] Pinkus A. n –widths in approximation theory, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [11] Osipenko K. Yu. Exact n –Widths of Hardy-Sobolev Classes // Const. Approx. 1997. V. 13, № 1. P. 17–27.
- [12] Осипенко К. Ю., Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди-Соболева // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
- [13] Magaril-Il’yaev G. G., Osipenko K. Y., Tikhomirov V. M. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 2001. V. 108, № 1. P. 97–117.
- [14] Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журн. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.
- [15] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.
- [16] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 469–480.

- [17] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Д. Д. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 239–254.
- [18] Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН 2023. Т. 29, № 4. С. 283–291.
- [19] Шабозов М. Ш., Каримзода Р. А. K –функционалы и точные значения n –поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 4. С. 301–308.
- [20] Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. В кн.: Теория отображений и приближение функций. Наукова думка, Киев. 1983. С. 62–73.
- [21] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. 2010. Т 201, № 8. С. 3–22.
- [22] Bergman S. The cernel function and conformal mapping. Math.surveys, N.Y.: Amer.Math.Society. 1950.
- [23] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ. 1976. 324 с.
- [24] Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
- [25] Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка. 2003. 590 с.
- [26] Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. Неравенствах типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
- [27] Osipenko K. Y. Optimal Recovery of the Derivative of Periodic Analytic Functions from Hardy Classes // J. Approx. Theory. 1999. V. 97, № 2. P. 384–395.
- [28] Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов $\mathcal{B}^r$ и H^r // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 183–189.
- [29] Sheik J. T. Polynomial Approximation of functions analytic in a disc // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 17. № 6. P. 1238 – 1243.

- [30] Фарков Ю. А. О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19. № 5. С. 185–212.
- [31] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. О поперечниках класса Харди H_2 в n -мерном шаре // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 5. С. 193.
- [32] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
- [33] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.
- [34] Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.
- [35] Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.
- [36] Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1414–1423.
- [37] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986. С. 91–101.
- [38] Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановлений функций и их производных // Изв. АН СССР. 1981. Т. 45, № 2. С. 266–290.
- [39] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка. 1982. 252 с.
- [40] Корнейчук Н. П. Оптимальные методы кодирования и восстановления функций // Optimal algorithms. Proc. International Symposium Bulgarian Acad. Sci., Sofia. 1986. С. 157–171.
- [41] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений. М.: Наука. 1987. 424 с.
- [42] Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л.: Наука. 1964. 440 с.

- [43] Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. вычис. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 999–1004.
- [44] Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
- [45] Черных Н. И. О неравенствах Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [46] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
- [47] Жук В. В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 748–750.
- [48] Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
- [49] Лигун А. А. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
- [50] Бабенко А. Г. О точной константы в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
- [51] Иванов В. И., Смирнов О. И. Константы Джексона и константы Юнга в пространстве L_p . Тула: Туль. ун-т. 1995. 192 с.
- [52] Берг Й., Лефстрем Й. Введение // В кн.: Интерполяционные пространства. М. Мир, 1980.
- [53] Ditzian Z., Totik V. $\mathcal{K}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. 1986. V. 46, № 1. P. 38–41.
- [54] Mhaskar N. H. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 1986. V. 46, № 1. P. 100–110.
- [55] Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. 1992. Киев. Наукова думка. 227 с.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Саидусайнов М. С. Наилучшие линейные методы в весовых пространствах Бергмана и точные значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН РТ. 2013. Т.56, №7. С. 521 – 524.
- [2] Саидусайнов М. С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., гео. и тех. наук. 2014, №4(157). С. 24 – 31.
- [3] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Значение n -поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. №3. С. 40 – 57.
- [4] Саидусайнов М. С. Неравенства типа Колмогорова для аналитических в круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана // ДАН РТ. 2015. Т.58, №8. С. 651 – 659.
- [5] Саидусайнов М. С. О значении поперечников и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. №3. С. 91 – 104.
- [6] Саидусайнов М. С. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, № 1. С. 240 – 253.
- [7] Акопян Р. Р., Саидусайнов М. С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических в круге. // Тр. ИММ УрО РАН 2017. Т. 23, №3. С. 22 – 32.
- [8] Саидусайнов М. С. $\mathcal{H}$ -функционалы и точные значения n -поперечников в пространстве Бергмана // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., гео. и тех. наук. 2017, №2(167). С. 7 – 17.
- [9] Shabozov M.Sh., Saidusaynov M.S. Mean-Square Approximation of Complex Variable Functions by Fourier Series in the Weighted Bergman Space // Intern. J of Adv. res. in Math. 2017. V. 9. P. 34 – 43.
- [10] Saidusaynov M.S. $\mathcal{H}$ -Functionals and Exact Values of n -th Widths in the Bergman Space // Ural Math. J 2017. V. 3, № 2. P. 74 – 81.
- [11] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 613 – 627.

- [12] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журн. 2018. Т. 20, № 1. С. 86 – 97.
- [13] Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций в весовом пространстве Бергмана и значение n -поперечников функциональных классов // ДАН РТ. 2018. Т. 61, № 4. С. 317 – 324.
- [14] Саидусайнов М. С. Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве Бергмана // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 217 – 224.
- [15] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 258 – 272.
- [16] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2 // Изв. вузов. Матем. 2020, № 6. С. 65 – 72.
- [17] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Чебышевский сб. 2022. Т. 23, № 1. С. 167 – 182.
- [18] Saidusainov M.S. Some inequalities between the best simultaneous approximation and the modulus of continuity in a weighted Bergman space // Ural Math. J. 2023. V. 9, № 2. P. 165 – 174.
- [19] Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. On widths of some classes of analytic functions in a circle // Ural Math. J. 2024. V. 10, № 2. P. 121 – 130.
- [20] Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. Widths of some classes of analytic functions in the weighted Bergman space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. V. 46. № 7. P. 3577 – 3587.