

Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Саидусайнов Муким Саидусайнович

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА И СВЯЗАННЫЕ
С НИМИ ВОПРОСЫ**

Специальность 1.1.1 –

“Вещественный, комплексный и функциональный анализ”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М. Ш. Шабозов

Душанбе – 2 0 2 6

Оглавление

Список обозначений	4
Введение	6
Глава 1. Наилучшие приближения в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$	45
1.1 Наилучшее приближение в весовом пространстве Бергмана	45
1.2 Точные значения n -поперечников для некоторых классов функций	53
1.3 Неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной	63
Глава 2. Наилучшие линейные методы приближения в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$	71
2.1 Наилучший линейный метод приближения для класса $W_{q,R}^{(r)}$	71
2.1.1 Точные верхние грани коэффициентов Тейлора класса функций $W_{q,R}^{(r)}$	77
2.2 Наилучший линейный метод приближения класса $W_q^{(r)}(\Phi)$	80
2.3 Наилучший линейный метод приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$	88
2.4 Наилучший линейный метод приближения для класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$	94
2.5 Наилучший линейный метод приближения для класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$	101
2.6 Экстремальные задачи оптимального восстановления и кодирования функций	114
Глава 3. Среднеквадратическое приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана	119

3.1	Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве Бергмана B_2	121
3.1.1	Обозначения и определения. Вспомогательные факты.	121
3.1.2	Неравенство Джексона – Стечкина	125
3.2	Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве B_2 и значения n -поперечников	132
3.2.1	Неравенство типа Джексона для осредненной с весом характеристики Ω_m	132
3.2.2	Совместное приближения некоторых классов функций	142
3.3	Точные оценки приближения посредством $\mathcal{K}$ -функционала	154
3.4	Точные значения n -поперечников классов функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$, $W_{m,p}^{(r)}(h, g)$ и $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$	161
3.5	Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$	168
3.5.1	Определения и некоторые результаты.	168
3.5.2	Случай, когда область $\mathcal{D}$ есть единичный круг	172

Литература

185

Список обозначений

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ – соответственно множества натуральных, целых, целых неотрицательных, вещественных, вещественных неотрицательных и комплексных чисел.

$\operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{D}$ – произвольная односвязная область плоскости $\mathbb{C}$.

$U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – открытый круг радиуса $R > 0$, при $R = 1$ полагаем $U := U_1$.

$\overline{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ – замкнутый круг радиуса $R > 0$.

$\Gamma_R = \{z \in \overline{U}_R : |z| = R\}$ – окружность радиуса $R > 0$.

$A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций.

$H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, – пространство Харди с нормой $\|\cdot\|_{H_{q,R}}$.

$B_{q,R}$, $1 \leq q < \infty$, – пространство Бергмана с нормой $\|\cdot\|_{B_{q,R}}$;

$\mathcal{L}_q \stackrel{\text{def}}{=} L_q(U_R)$, $1 \leq q < \infty$, – банахово пространство комплекснозначных в области U_R функций f с нормой $\|\cdot\|_{L_q}$.

$\gamma(|z|)$ – неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю радиальная функция на множестве U_R , для краткости эту функцию будем называть весом.

$\mathcal{L}_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} L_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$, – множество комплекснозначных в U функций f с нормой $\|f\|_{L_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{L_q}$.

$B_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} B_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$, – пространство Бергмана с весом γ .

$B_{q,\gamma,R} := B_q(U_R, \gamma)$ – пространство функций $f \in A(U_R)$, для которых $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} := \|f(R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

$\Delta_m(f; \rho, \tau, h) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(\tau+kh)})$ – разность m -го порядка функции $f \in A(U_\rho)$, $\rho \in (0, 1]$ с шагом h .

$\omega_m(f, t)_{B_{q,\gamma}}$ – модуль непрерывности m -го порядка в пространстве $B_{q,\gamma}$.

$\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n$.

$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}$ – величина наилучшего приближения функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$) множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

$\Phi(u)$ – произвольная возрастающая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, такая, что $\Phi(0) = 0$.

Классы аналитических функций:

$H_{q,R,a}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, – класс функций $f \in A(U_R)$, для которых $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$, $(f_a^{(r)} := \partial^r f(z)/\partial t^r, z = \rho e^{it})$.

$\tilde{B}_{q,\gamma,R}$ – класс функций $f \in B_{q,\gamma,R}$, для которых $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq 1$.

$\mathfrak{B}_{q,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, – класс функций $f \in B_{q,\gamma}$, для которых конечна норма $\|f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, – класс функций $f \in B_{q,\gamma}$, для которых конечна норма $\|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

$\tilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, – класс функций $f \in B_{q,\gamma}$, для которых конечна норма $\|z^r f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

$W_{q,R}^{(m)}$, $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, – класс функций $f^{(m)} \in H_{q,R}$, для которых $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1$.

$W_q^{(r)}(\Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, – класс функций $f \in A(U)$, для которых $f^{(r)} \in H_q$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2k}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ ($\mu \geq 1, r \in \mathbb{N}$), – класс функций $f \in B_{q,\gamma}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega_j(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \Phi_j(h), \quad h > 0.$$

$W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$, $R \geq 1, \mu \in \mathbb{R}_+ (\mu \geq 1)$, – класс функций $f \in A(U_R)$, для которых $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2} \int_0^x \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2x} \right) \right] dt \leq \Phi(x), \quad x \in (0, \pi/2].$$

$b_n(\mathfrak{M}, X)$, $d^n(\mathfrak{M}, X)$, $d_n(\mathfrak{M}, X)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, X)$, $\Pi_n(\mathfrak{M}, X)$ – соответственно бернштейновский, гильфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n -поперечники.

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Теория приближения функций — одна из наиболее активно развивающихся областей современной математики. В этой теории наиболее важное место занимают задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, во многих случаях сводящиеся к экстремальным задачам. Как правило, в этих задачах требуется определить точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения. Такого рода экстремальные задачи рассматриваются в данной диссертационной работе, а именно рассматриваются исследования по экстремальным задачам теории наилучшего полиномиального приближения функций, аналитических в круге, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty, \gamma := \gamma(|z|) > 0$).

В диссертации, состоящей из трёх глав, исследуются экстремальные задачи теории приближения различных классов аналитических функций, связанные с: нахождением наилучших приближений в весовом пространстве Бергмана и вычислением точных значений n -поперечников соответствующих классов функций, а также установлением аналога неравенства Колмогорова в пространстве $B_{2,\gamma}$; построением наилучших линейных методов приближения различных классов функций, аналитических в круге, в весовых пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, и вычислением точных значений n -поперечников, интерпретируемых как задачи оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н. П. Корнейчука; среднеквадратичным приближением различных классов функций, аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональным системам $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, вычислением точных значений n -поперечников, совместным приближением функций и их промежуточных производных, установлением точных неравенств типа Джексона – Стечкина и исследованием экстре-

мальных задач на классах функций, задаваемых с помощью $\mathcal{H}$ -функционала Петре, в пространствах B_2 и $B_{2,\gamma}$.

Следует отметить, что наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах функций, аналитических в единичном круге принадлежащих пространству Харди H_q ($1 \leq q \leq \infty$). Большой вклад при решении экстремальных задач в пространстве Харди внесли К. И. Бабенко [7] и В. М. Тихомиров [60–62], Л. В. Тайков [54, 55, 57], Н. Айнуллоева и Л. В. Тайкова [2]. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах М. З. Двейрина [33–35], Ю. А. Фаркова [63, 91], С. Д. Фишера и М. И. Стесина [92], А. Pinkus [98], К. Ю. Осипенко [50, 51, 95–97], Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко [48, 93], С. Б. Вакарчука [15–18, 21, 24–26], С. Б. Вакарчука и М. Б. Вакарчука [29–31], С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [32], М. Ш. Шабозова с соавторами [69, 70, 79, 81–83] и другие.

Что касается постановки и решения аналогичных задач в пространстве Бергмана B_q ($1 \leq q \leq \infty$), то здесь имеется немного результатов, но ряд окончательных результатов получены в работах М. З. Двейрина [33, 34], М. З. Двейрина и И. В. Чебаненко [35], А. Pinkus [98, гл. VIII, §2], Ю. А. Фаркова [63] и С. Б. Вакарчука [20].

В весовых пространствах Бергмана $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ решение аналогичных экстремальных задач, за исключением работы С. Б. Вакарчука и М. Ш. Шабозова [28] другие работы нам неизвестны. В целом в пространствах Бергмана с весом решение экстремальных задач аналитических в круге функций находится на стадии разработки, что делает решение указанных экстремальных задач в этих пространствах особенно актуальным.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение различных экстремальных задач теории полиномиального приближения аналитических функций, принадлежащих пространству Бергмана. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие задачи.

1. Найти точные неравенства между величиной наилучшего приближения аналитических функций $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ и усреднёнными с заданным весом модулями непрерывности первого и второго порядка производных $f_a^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.

2. Вычислить точные значения n -поперечников классов функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_i, \mu)$, $i = 1, 2$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
3. Доказать неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана.
4. Найти наилучшие линейные методы приближения классов $W_{q,R}^{(r)}$, $W_q^{(r)}(\Phi)$, и $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при $1 \leq q \leq \infty$.
5. Построить наилучшие линейные методы приближения классов $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_i, \mu)$, $i = 1, 2$ и найти значение соответствующих поперечников в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
6. Доказать точное неравенство типа Джексона для усредненной с весом характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$.
7. Вычислить верхние грани совместного приближения классов функций, задаваемых характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ и $\mathcal{K}$ -функционалами, а также вычислить их n -поперечники.

Объекты исследования. Объектом исследования являются различные экстремальные задачи теории приближения аналитических функций в круге, принадлежащих как обычному, так и весовому пространствам Бергмана.

Методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы теории функций и функционального анализа, ориентированные на оптимизацию, а также методы решения экстремальных задач теории приближения функций. Для решения экстремальных задач в качестве аппарата приближения применяются комплексные алгебраические полиномы.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Исследована задача о наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. Получены точные неравенства между величиной наилучшего приближения аналитических функций $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ и усреднёнными с заданным весом модулями непрерывности первого и второго порядка производных $f_a^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.

2. Для классов функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ вычислены значения n -поперечников в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
3. Доказан аналог неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана. Также рассмотрено применение данного неравенства к задачам теории аппроксимации.
4. Найдены наилучшие линейные методы приближения классов $W_{q,R}^{(r)}$, $W_q^{(r)}(\Phi)$ и $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при $1 \leq q \leq \infty$.
5. Построены наилучшие линейные методы приближения классов $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_j, \mu)$, $j = 1, 2$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.
6. Доказано точное неравенство типа Джексона для усреднённой с весом характеристики гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$.
7. Получены верхние грани совместного приближения классов функций, задаваемых характеристикой гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ и $\mathcal{K}$ -функционалами, а также вычислены их n -поперечники.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты, представленные в ней, могут быть использованы для решения других задач теории приближений. Каждая глава диссертации может быть включена в программу специализированных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по математическим специальностям в высших учебных заведениях.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- международной летней математической Школе-конференции по теории функций С.Б. Стечкина, Душанбе (Таджикистан), 2016; Миасс (Екатеринбург), 2017; Кыштым (Екатеринбург), 2018, 2019, 2021-2026;
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, а также кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М. Ш. Шабозова (Душанбе, 2011-2026 гг.);

- 4-й международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2013);
- международной научной конференции “Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений”, посвященной 85-летию академика АН РТ Л. Г. Михайлова (Душанбе, 2013);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных-математиков А.Мухсинова, А.Б.Назимова, С.Байзаева, Д.Осимовой, К.Тухлиева (Худжанд, 2014);
- международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвященной 80-летию член корр. АН РТ, доктор физ.мат. наук, профессора В. Я. Стеценко (Душанбе, 2015);
- международной научной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел посвященная 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т. С. (Душанбе, 2015);
- международной Школа-Конференции “Соболевские чтения” (Новосибирск, 2016);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений”, посвященная 25-летию Государственного независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2016);
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложений”, посвященной 70-летию академика Илолова М. (Душанбе, 2018);
- международной научной конференции “Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций”, посвященной 90-летию академика АН РТ Михайлова Л. Г. (Душанбе, 2018).

- международной научной конференции “Современные проблемы теории чисел и математического анализа”, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 2022);
- международной научно – практической конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, посвященной 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан, 30 летию конституции Республики Таджикистан, двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” и 70-летию доктора физико-математических наук Тухлиева Камаридина (Худжанд, 2024).
- международной научно – теоретической конференции, посвященной “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева (Душанбе, 2025);
- международной конференции “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова и 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 2025);
- международной научной конференции “Развитие математических наук, информатики и механики в период независимости”, посвященной 35-летию независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2026);
- международной научно – практической конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа”, посвященной “35-летию государственной независимости Республики Таджикистан” и “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” (Душанбе, 2026).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 20 работах [101–120]. Все статьи опубликованы в изданиях, входящих в утвер-

ждённый ВАК России перечень ведущих рецензируемых изданий, 12 статей (или их переводные версии) опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Диссертационная работа представляет собой самостоятельное исследование автора. Все научные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. В совместных работах с М. Ш. Шабозовым научному консультанту принадлежит постановка задач.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и библиографического списка, содержащего 120 наименований. Главы разбиты на параграфы, параграфы разбиты на подпараграфы (пункты). Используется подчинённая нумерация. Общий объём диссертации составляет 199 страниц.

Обзор основных результатов диссертации.

Приведём необходимые обозначения и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $U_R \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \in \mathbb{R}_+$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество функций, аналитических в U_R . Для любой функции $f \in A(U_R)$ и любого $\rho \in (0, R)$ введём следующие средние значения:

$$M_q(f, \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(\rho e^{it})|, & q = \infty. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \in \mathbb{R}_+$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, которые существуют почти всюду на $[0, 2\pi]$ (см. [52, с.279-280]):

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 \leq t < 2\pi} |f(Re^{it})|, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

При $R = 1$ положим $U := U_1$, $H_q := H_{q,1}$, а также $\|f\|_{H_q} := \|f\|_{H_{q,1}}$.

Рассмотрим пространство $H_{q,\rho}$ для $\rho \in (0, 1]$, определяемое как множество функций $f \in A(U_\rho)$, для которых

$$\|f\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho \cdot)\|_{H_q} < \infty.$$

Далее введем пространство $\mathcal{L}_q$, состоящее из всех комплекснозначных функций f , определённых в U , удовлетворяющих следующему условию:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_U |f(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^q dt d\rho \right)^{1/q}.$$

Через $\mathcal{L}_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} L_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f , для которых

$$\gamma^{1/q} \cdot f \in \mathcal{L}_q(U), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathcal{L}_q}.$$

Под $B_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} B_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$ понимаем банахово пространство функций $f \in A(U)$, для которых норма

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f, \rho) d\rho \right)^{1/q},$$

является конечной. Аналогично определим пространство $B_{q,\gamma,R}$ как множество функций $f \in A(U_R)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} := \|f(R \cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty.$$

Положим

$$\tilde{B}_{q,\gamma,R} = \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, \|f\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq 1\}.$$

Для $q = \infty$ требуется, чтобы функции f были непрерывными на замкнутом круге $\bar{U}_R$. Когда $\gamma \equiv 1$, пространство $B_q = B_{q,1}$ совпадает с классическим пространством Бергмана, систематическое изучение которого началось со знаменитой работы С. Бергмана [89], в которой изложены общая теория и различные приложения этого пространства.

Для оценки гладкости функций в этих пространствах вводим модули непрерывности первого и второго порядка:

$$\omega(f, t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leq t} \left\| f(\cdot e^{i(\cdot+h/2)}) - f(\cdot e^{i(\cdot-h/2)}) \right\|_{B_{q,\gamma}},$$

$$\omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leq t} \left\| f(\cdot e^{i(\cdot+h)}) - 2f(\cdot e^{ih}) + f(\cdot e^{i(\cdot-h)}) \right\|_{B_{q,\gamma}}.$$

Модуль непрерывности m -го порядка в пространстве $B_{q,\gamma}$ определим величиной

$$\begin{aligned} \omega_m(f, t)_{B_{q,\gamma}} &= \sup \left\{ \|\Delta_m(f, \cdot, \cdot, h)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \leq t \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |\Delta_m(f; \rho, \tau, h)|^q d\rho d\tau \right)^{1/q} : |h| \leq t \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_m(f; \rho, \tau, h) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(\tau+kh)})$$

означает конечную разность m -го порядка функции f с шагом h .

Символом $f_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим производную r -го порядка функции $f \in A(U_R)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho \exp(it)$, т.е.

$$f'_a(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial t} = f'(z)zi \text{ и } f_a^{(r)}(z) := \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}'_a, \quad r \geq 2.$$

Для функции $f \in A(U_R)$, у которых r -я производная $f_a^{(r)}$ также принадлежит пространству $H_{q,R}$, вводим множество

$$H_{q,R,a}^{(r)} := \left\{ f \in A(U_R) : f_a^{(r)} \in H_{q,R} \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty, R \in \mathbb{R}_+).$$

Далее структурные свойства функции $f \in H_{q,R,a}^{(r)}$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}} := \sup \left\{ \|f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot+\tau/2)}) - f_a^{(r)}(Re^{i(\cdot-\tau/2)})\|_{H_q} : |\tau| \leq t \right\}$$

граничных значений $f_a^{(r)}(Re^{it})$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega(f_a^{(r)}, t)_{H_{q,R}}$. Рассматриваются также множества функций

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \|f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty),$$

и

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty \right\}, \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty).$$

Через

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

обозначим множество алгебраических комплексных полиномов степени n .

Величину наилучшего приближения функции $f \in B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$) элементами $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ определим равенством

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} := E_{n-1}(f)_{q,\gamma} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}.$$

Приводим также определения n -поперечников в произвольном нормированном пространстве. Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в нем; $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X ; $L_n \subset X$ – n -мерное линейное подпространство; $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n ; $\Lambda : X \rightarrow L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n .

Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n \} : f \in \mathfrak{M} \}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda X \subset L_n \} \quad (0.0.2)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор Λ^* ($\Lambda^* X \subset L_n$), если он существует и реализует в (0.0.2) точную нижнюю грань, то есть такой, что

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup \{ \|f - \Lambda^*(f)\|_X : f \in \mathfrak{M} \},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : L_{n+1} \subset X \}, \quad (0.0.3)$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \sup \{ \|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n \} : L^n \subset X \}, \quad (0.0.4)$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \}, \quad (0.0.5)$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \} \quad (0.0.6)$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}^\perp X \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset X \right\} \quad (0.0.7)$$

называют соответственно *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным* и *проекционным* n -поперечниками.

Если существует подпространство $L_n^* \subset X$, $\dim L_n^* = n$, на котором реализуется нижняя грань в (0.0.5), то есть

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = E(\mathfrak{M}, L_n^*)_X,$$

то L_n^* называют *экстремальным подпространством* для $d_n(\mathfrak{M}, X)$. Экстремальное подпространство L_n^* является наилучшим аппаратом приближения множества $\mathfrak{M}$ в классе всех подпространств $\{L_n\} \subset X$.

Подпространство $\tilde{L}_n \subset X$, $\dim \tilde{L}_n = n$, если оно существует, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \tilde{L}_n)_X,$$

называют *экстремальным* для $\delta_n(\mathfrak{M}, X)$. Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\hat{L}_n \subset X$, $\dim \hat{L}_n = n$, таких, что

$$E(\mathfrak{M}, \hat{L}_n)_X = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \hat{L}_n)_X = d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если существует подпространство $\bar{L}_{n+1} \subset X$, $\dim \bar{L}_{n+1} = n + 1$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \bar{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \},$$

то оно является экстремальным для $b_n(\mathfrak{M}, X)$.

Подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n , если оно существует, такое, что

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L_*^n \},$$

называют экстремальным для $d^n(\mathfrak{M}, X)$.

Между перечисленными выше n -поперечниками (0.0.3)-(0.0.7) выполняются следующие соотношения [61, 98]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \frac{d_n(\mathfrak{M}, X)}{d^n(\mathfrak{M}, X)} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X). \quad (0.0.8)$$

В случае, если X – гильбертово пространство, то между указанными поперечниками справедливы соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \Pi_n(\mathfrak{M}, X). \quad (0.0.9)$$

Пусть $\Phi_j(u)$, $j = 1, 2$, $u \geq 0$ – произвольные возрастающие непрерывные функции, такие, что $\Phi_j(0) = 0$ ($j = 1, 2$). Для любых $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \geq 1$ и $r, n \in \mathbb{N}$ определим классы функций

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) = \\ & = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \Phi_1(h), h \in \mathbb{R}_+ \right\}, \end{aligned} \quad (0.0.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) := \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \times \right. \\ & \times \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi_2(h), 0 < h \leq \pi/2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

В первой главе диссертации рассматриваются задачи нахождения наилучших приближений аналитических функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, вычисления точных значений n -поперечников некоторых классов функций и установления неравенства типа Колмогорова в пространстве $B_{2,\gamma}$.

В первом параграфе первой главы приведены обобщения неулучшаемых неравенств, доказанных Л. В. Тайковым [57], а также Н. Айнуллоевым и Л. В. Тайковым [2] для аналитических в единичном круге функций $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$), на случай, когда $f \in A(U_R)$ принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma,R}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < R \leq 1$).

Полученные результаты связывают величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}}$ с усредненным с весом $\left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\}$ значением модулей непрерывности и гладкости в пространстве $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$).

Теорема 1.1.1. *Для произвольной функции $f(z) \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$, ($1 \leq q \leq \infty, r \in \mathbb{N}$),*

при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ & \leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^u \omega \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \end{aligned} \quad (0.0.12)$$

и знак равенства в (0.0.12) реализуется на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.1.2. Для любой функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $0 < u \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\begin{aligned} & E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \\ & \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \end{aligned} \quad (0.0.13)$$

и знак равенства в (0.0.13) реализует функция $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Во втором параграфе первой главы, опираясь на результаты, полученные в теоремах 1.1.1 и 1.1.2, вводятся классы функций $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ и $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$, определяемые формулами (0.0.10) и (0.0.11) соответственно. Для этих классов функций вычисляются значения n -поперечников $b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma,R})$ и $d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma,R})$, где $\mathfrak{M} := \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ и $\mathfrak{M} := \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$.

Введём также обозначения:

$$(\sin t)_* := \begin{cases} \sin t, & \text{если } 0 \leq t \leq \pi/2; \\ 1, & \text{если } t > \pi/2; \end{cases}$$

$$(1 - \cos nt)_* := \begin{cases} 1 - \cos nt, & \text{если } nt \leq \pi; \\ 2, & \text{если } nt > \pi. \end{cases}$$

Теорема 1.2.1. Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (0.0.14)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) = \\ &= E_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \right)_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (0.0.14), не пусто.

Теорема 1.2.2. Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in (0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_2(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (0.0.15)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) &= b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) = \\ &= E_{n-1}(W_{q,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned}$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (0.0.15), не пусто.

Третий параграф первой главы посвящён неравенству типа Колмогорова в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$. Приводим один из основных результатов этого параграфа.

Теорема 1.3.1. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любой функции $z^r f^{(r)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}.$$

В случае $\gamma(\rho) \equiv 1$, когда $B_{q,1} \equiv B_q$, удаётся доказать более общее неравенство типа Колмогорова.

Теорема 1.3.2. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_p} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \|f\|_{B_s}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_\mu}^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in \widetilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Пользуясь равенством

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2},$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k \in \mathcal{P}_{n-1}$$

– частная сумма Тейлора разложения функции в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k,$$

в этом же параграфе доказывается следующая

Теорема 1.3.3. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и функций $f \in \tilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которых коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_{2,\gamma}} &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} (E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}})^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}} \right)^{1-\nu/r}. \end{aligned}$$

Теорема 1.3.3 в случае $\gamma \equiv 1$ допускает следующее обобщение.

Теорема 1.3.4. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_p} \leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} (E_{n-1}(f)_{B_s})^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_\mu} \right)^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Вторая глава диссертации посвящена экстремальной задаче построения наилучших линейных методов приближения различных классов функций, аналитических в круге, в весовых пространствах Бергмана $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при всех значениях $1 \leq q \leq \infty$.

Первый параграф второй главы посвящён историческому обзору и постановке экстремальной задачи отыскания наилучших линейных методов приближения классов функций в произвольном нормированном пространстве X .

Вопросам отыскания наилучших линейных методов приближения занимались К. И. Бабенко [7], В. М. Тихомиров [60–62], J. T. Sheik [100], В. И. Белый [10], а также В. И. Белый и М. З. Двейрин [11]. Задача отыскания наилучших

линейных методов заключается в следующем: каждой функции $f(z) \in A(U_R)$ посредством произвольной матрицы чисел $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}_{k=0}^n$ сопоставляется последовательность полиномов

$$V_{\Lambda,n}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} c_k(f) z^k,$$

и в произвольном банаховом пространстве X полагают

$$\mathcal{E}_n(f, \Lambda)_X := \|f(z) - V_{\Lambda,n}(f, z)\|_X,$$

которая характеризует скорость приближения функции $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n}(f)$ в метрике пространства X линейным методом Λ . *Наилучшим линейным методом* приближения на классе $\mathfrak{M} \subset X$ называется треугольная матрица $\Lambda^* := \{\lambda_{k,n}^*\}_{k=0}^n$, такая что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; \Lambda^*)_X := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f; \Lambda)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda^*)_X.$$

В этом же параграфе рассматривается наилучший линейный метод приближения для класса

$$W_{q,R}^{(r)} = \left\{ f : f^{(r)} \in H_{q,R}, \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1, r \in \mathbb{Z}_+, R \geq 1, 1 \leq q \leq \infty \right\}.$$

Основным результатом первого параграфа второй главы является

Теорема 2.1.1. *Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место равенства*

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) &= b_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) = \\ &= d^n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = d_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = \delta_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma}) = E(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{L_{q,\gamma}} = \\ &= \mathcal{E}(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{L_{q,\gamma}} = \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{L_{q,\gamma}} : f \in W_{q,r}^{(r)} \right\} = \\ &= \begin{cases} \infty, & n < r, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}, & n \geq r, 1 \leq q < \infty, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}, & n \geq r, q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом:

1) в случае n -поперечников $d_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma})$ и $\delta_n(W_{q,R}^{(r)}; L_{q,\gamma})$ подпространство

$$L_n^* \stackrel{def}{=} \text{span} \left\{ \{z^j\}_{j=0}^{r-1}, \left\{ \left[R^{2(n-j)} - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot |z|^{2(n-j)} \right] \cdot z^j \right\}_{j=r}^{n-1} \right\},$$

является экстремальным для класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $L_{q,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$\Lambda_{n-1}^*(f, z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{r-1} c_j(f) z^j + \sum_{j=r}^{n-1} c_j(f) z^j \left[1 - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \right], \quad (0.0.16)$$

является наилучшим для класса $W_{q,R}^{(r)}$ линейным методом приближения в пространстве $L_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$L_*^n \stackrel{def}{=} \left\{ f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \right\},$$

будет экстремальным для n -поперечника $d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$;

4) подпространство

$$\bar{L}_{n+1} \stackrel{def}{=} \mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C} \right\},$$

является экстремальным для $b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$.

Отметим, что теорема 2.1.1 является обобщением одной из теорем А. Пинкуса [98, теорема 2.4., с. 254-255] доказанного для обычного пространства Бергмана $B_q (1 \leq q \leq \infty)$ на случая весовых пространств $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma} (1 \leq q \leq \infty)$.

Во втором параграфе второй главы, исходя из результата теоремы 1 (см. следствие 3, формула (3) в [57]), Л. В. Тайков вёл следующий класс функций

$$W_q^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q, \quad \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \Phi \left(\frac{\pi}{2k} \right), \quad k \in \mathbb{N} \right\},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, а $\Phi(t)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$.

Он доказал, что если мажоранта $\Phi(t)$, $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\lambda\pi} \sin \frac{\lambda\pi}{2}, & \text{если } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), & \text{если } \lambda \geq 2, \end{cases} \quad (0.0.17)$$

то для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $1 \leq q \leq \infty$ справедливо равенство

$$d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), H_q \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right).$$

В той же работе было доказано, что условие (0.0.17) выполняется, например, для функции

$$\Phi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}.$$

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 2.2.1. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию (0.0.17). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) &= b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) = \\ &= d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) = d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = \\ &= E \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E} \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_q^{(r)}(\Phi) \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

При этом

1. в случае n -поперечников $d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ и $\delta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ подпространство

$$L_n^* := \text{span} \left\{ \{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \left[\left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} z^k \right]_{k=r}^{n-1} \right\},$$

является экстремальным;

2. линейный непрерывный оператор

$$\Lambda_{n-1}^* := \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k(f) z^k, \quad (0.0.18)$$

где

$$\beta_{k,r} := \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int_0^{\pi/2(n-r)} (1 - \sin(n-r)x) \cos(k-r)x dx.$$

является наилучшим для класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

3. подпространство

$$L_*^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \ k = \overline{0, n-1} \right\},$$

является экстремальным для n -поперечника $d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$;

4. экстремальным для n -поперечника $b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$ является подпространство

$$\bar{L}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \ c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

В третьем параграфе второй главы рассматривается задача построения наилучшего линейного метода приближения функций, принадлежащих классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$. Целью параграфа является доказательство того, что ранее установленные в теореме 1.2.1 точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечников справедливы также для гельфандовского и линейного n -поперечника класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в $B_{q,\gamma,R}$.

С этой целью для произвольной функции $f(z) \in A(U_R)$ вводится линейный полиномиальный оператор степени не выше $(n-1)$, определяемый равенством

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z) := c_0 + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (0.0.19)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \mu n \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt \cdot \cos \mu n t dt, \ k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теорема 2.3.1. Если при заданном $\mu \geq 1$, любых $h \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (0.0.14), то для произвольных $n, r \in \mathbb{N}, 0 < R \leq 1$

и $1 \leq q \leq \infty$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} d^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \delta_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{E}(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}, \mathcal{P}_{n-1})_{B_{q,\gamma,R}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} \right\} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

При этом линейный полиномиальный оператор (0.0.19) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$.

В четвертом параграфе второй главы рассматривается задача построения наилучшего линейного метода приближения функций, принадлежащих классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$. Здесь, аналогично третьему параграфу, приводится доказательство ранее установленные в теореме 1.2.2 точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечника для гельфандовского и линейного n -поперечника класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в $B_{q,\gamma,R}$.

Вводится линейный полиномиальный оператор степени не выше $(n-1)$, определяемый равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) = \\ c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (0.0.20)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kx (1 - \sin \mu n x) dx.$$

Теорема 2.4.1. Если при заданном $\mu \geq 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ и любых $h \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi_2(h)$ удовлетворяет ограничению (0.0.15), то для произвольных $r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right) = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right\} = \\ &= \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$, линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$ определён равенством (0.0.20) При этом:

a) $\bar{L}_{n+1} = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ является оптимальным подпространством для бернштейновского n -поперечника $b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;

b) $L_n^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n -поперечника $d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;

c) $L_*^n := \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ является оптимальным подпространством коразмерности для гельфандовского n -поперечника $d^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;

d) линейный полиномиальный оператор (0.0.20) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$ и реализует линейный n -поперечник $\delta^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$.

В пятом параграфе второй главы обобщаются результаты С. Б. Вакарчука, полученные в работе [23], на более широкий класс весовых пространств. В частности, изучаются поперечники классов аналитических функций

$$W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) := \left\{ f \in A(U_R), f_a^{(r)} \in H_{q,R} : \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^x \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2x} \right) \right] dt \leq \Phi(x), x \in (0, \pi/2] \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ ($\mu \geq 1$) – произвольные фиксированные числа в пространствах $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ и $B_{q,\gamma}$ при $1 \leq q \leq \infty$.

В [3] доказано, что если мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет следующему ограничению при всех $x \in (0, \pi/2]$ и $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right)} \geq nx \int_0^1 (\sin xnt)_* [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt, \quad (0.0.21)$$

где $(\sin x)_* := \{ \sin x, \text{ если } x \in [0, \pi/2]; \quad 1, \text{ если } x \geq \pi/2 \}$, то при всех $r \geq 2$

$$b_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_q) = d_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_q) = \frac{1}{n^{r-1}} \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right). \quad (0.0.22)$$

Там же доказано, что одним из примеров мажоранты, для которой выполняется ограничение (0.0.21), является функция $\Phi(x) = x^{\beta(\mu)}$, где

$$\beta(\mu) := 1 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 \int_0^1 t \cos(\pi t/2\mu) [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt.$$

В частности, $\beta(1) = \pi/2$ и для любого $\mu \in [1, \infty)$, $\pi/2 \leq \beta(\mu) < 2$.

С. Б. Вакарчук [23] распространил результат (0.0.22) на более общий случай

$$\lambda_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников в (0.0.8).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.5.2. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \geq 1$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (0.0.21). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) &= b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) = d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= d_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \delta_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= E(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E}(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \right\} = \\ &= \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

При этом:

1) подпространство

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^* &:= \\ &= \text{span} \left\{ 1; \left\{ R^{2(n-k)} + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \rho^{2(n-k)} \right\}_{k=1}^{n-1} \right\}, \end{aligned}$$

является экстремальным для n -поперечников $d_n(\cdot)$ и $\delta_n(\cdot)$ класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1,r-1}(f, z) &= \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2(n-k)} \right\} c_k z^k, \end{aligned} \tag{0.0.23}$$

где

$$0 < \rho \leq R, \quad \gamma_k := \mu n \int_0^{\pi/(2n\mu)} \cos(kt) \cos(n\mu t) dt.$$

является наилучшим для класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$\mathcal{L}_*^n := \{f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}\}$$

является экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d^n(\cdot)$;

4) экстремальным для n -поперечника $b_n(\cdot)$ является подпространство

$$\mathcal{P}_n := \text{span}\{1, z, z^2, \dots, z^n\}.$$

Шестой параграф второй главы посвящён интерпретации полученных в теоремах 2.1.1–2.5.1 точных значений n -поперечников как задач оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н. П. Корнейчука [42, 44, 45]. Задача восстановления заключается в построении наилучшего оператора, обеспечивающего минимальную погрешность на заданном классе при ограниченной информации о функции. В этом параграфе приводятся необходимые обозначения и определения и устанавливается связь между теорией поперечников и задачами оптимального восстановления, имеющими важное значение для вычислительной математики и теории приближений.

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор

$$\mathcal{M}_n := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$$

функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$, где X^* – пространство, сопряжённое с X . Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $f \in X$ числовой вектор

$$T(f, \mathcal{M}_n) = \{\mu_1(f), \mu_2(f), \dots, \mu_n(f)\}.$$

Задачу восстановления функции $f \in X$ по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$\Phi(f; \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mu_k(f) g_k(z), \quad (0.0.24)$$

где $G_n = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{T}$ – соответственно произвольные системы линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathfrak{M} \subset X$, $\mathcal{T} = \{\Gamma_n\}$ – вектор числовых коэффициентов, для которых (0.0.24) имеет смысл. Погрешность восстановления на классе $\mathfrak{M}$ считают равной

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathfrak{M}; \mathcal{M}, G_n) = \\ = \inf \{ \sup \{ \|f - \Phi(f, \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z)\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Gamma_n \subset \mathcal{T} \} \end{aligned} \quad (0.0.25)$$

и полагают

$$\mathcal{R}(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, G_n) : \mathcal{M}_n, G_n \}.$$

Пусть $\mathcal{M}'_n$ – набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Тогда рассматривают величину

$$\mathcal{R}'(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, G_n) : \mathcal{M}'_n, G_n \}.$$

Методы восстановления $(\overset{\circ}{\mathcal{M}}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n)$, $(\overset{\circ}{\mathcal{M}}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n)$, для которых

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi \left(f; \overset{\circ}{\mathcal{M}}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\},$$

$$\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi \left(f; \overset{\circ}{\mathcal{M}}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\},$$

называют соответственно оптимальным и оптимальным линейным методом восстановления функций класса $\mathfrak{M}$. Н.П.Корнейчук [45, с.375-388] доказал, что

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X), \quad \mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \lambda_n(\mathfrak{M}, X),$$

причём, если $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}} \otimes L$, где $\tilde{\mathfrak{M}}$ – компакт, а L – конечномерное подпространство, то и в первом соотношении имеет место знак равенства.

Параллельно с (0.0.25) рассматривают также величину

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X = \sup \{ \|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, T(f_1, \mathcal{M}_n) = T(f_2, \mathcal{M}_n) \},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$. Полагая

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n) : \mathcal{M}_n \},$$

где нижняя грань берётся по всем наборам $\mathcal{M}_n$ линейных функционалов, определённых на сопряжённом пространстве X , получаем

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) \leq 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X),$$

а если $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное и выпуклое множество, то

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Теорема 2.6.1. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\overset{\circ}{\mathfrak{N}}'_n, \mathcal{M}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (0.0.16) функция Λ_{n-1}^* . При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.6.2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\overset{\circ}{\mathfrak{N}}'_n, \mathcal{M}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (0.0.18) функция Λ_{n-1}^* . При этом для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.6.3. *Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}_n', \mathcal{M}_n, \Gamma_n^\circ\right)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (0.0.19) функция $\mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}_n'(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.4. *Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}_n', \mathcal{M}_n, \Gamma_n^\circ\right)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (0.0.20) функция $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}_n'(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.6. *Наилучший метод кодирования функций из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}_n', \mathcal{M}_n, \Gamma_n^\circ\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (0.0.23) функция $\Lambda_{n-1,r,r-1}(f, z)$. При этом для любых $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$

и $R \geq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}_n'(W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

В третьей главе рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, с помощью рядов Фурье по ортонормированной в области $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$. В частности, изучается случай, когда $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а в качестве ортонормированной системы выступает система $\{z^k\}_{k=0}^\infty$. На классах аналитических функций, определяемых специальным модулем непрерывности m -го порядка, получены точные оценки скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье. Кроме того, вычислены точные значения n -поперечников соответствующих классов в пространстве B_2 .

В первом параграфе третьей главы рассматриваются основные обозначения и определения, которые будут использоваться на протяжении всей главы, а также приводятся необходимые вспомогательные факты.

Под $B_2 := B_2(\mathcal{D})$ будем понимать пространство Бергмана – комплексных функций f , аналитических в односвязной ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma = d\sigma(z)$ – элемент площади.

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ ортонормированная система функций в B_2 . Если $f \in B_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma \quad (0.0.26)$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$. Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z). \quad (0.0.27)$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

– частичная сумма n -го порядка ряда (0.0.27). Составим линейную комбинацию первых из n функций системы $\{\varphi_k(z)\}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z),$$

которую назовём обобщённым полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты. Хорошо известно, что (см., например [52], с.203):

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : d_k \in \mathbb{C} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (0.0.28)$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f , определённые равенством (0.0.26).

Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \quad (0.0.29)$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (0.0.29) понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве B_2 следуя [1] рассмотрим оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1 - h) d\sigma(\zeta) \quad (0.0.30)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (0.0.30) обладает следующими простыми свойствами:

- 1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 2) $\|F_h(f)\| \leq \|f\|$; 3) $F_h \varphi_k(z) = (1 - h)^k \varphi_k(z)$;
- 4) $\|F_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$.

Для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков как и в классическом случае следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(z),$$

где $\Delta_h^m f(z)$ называется *обобщенной* конечной разностью m -го порядка функции $f \in B_2$ посредством оператора обобщенного сдвига $F_h f(z)$;

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z), \quad F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z)), \quad k = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2 . Величину

$$\begin{aligned} \Omega_m(f; t)_2 &= \sup \{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \leq t \} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (0.0.31)$$

будем называть *обобщенным* модулем непрерывности m -го порядка функции f в пространстве B_2 .

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой её производной. Отметим, что в случае равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами, точная константа в неравенстве Джексона найдена в [39]. Аналогичная задача в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ решена в [67, 68]. Данная тематика впоследствии плодотворно развивалась, например, в работах [8, 32, 37, 38, 47, 56, 75].

В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина изучалась в работе [1].

В этом параграфе приводится уточнение одного из результатов работы [1] в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1.3. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$*

имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha^m}} \cdot \Omega_m(f, h_n(\alpha)),$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}$. Неравенство обращается в равенство для функции $f(z) = \varphi_n(z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Во втором параграфе третьей главы изучается задача о неравенстве типа Джексона для осреднённой с весом характеристики Ω_m производных аналитических функций. Основным результатом этого параграфа являются следующие

Теорема 3.2.1. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, t \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m(f^{(r)}, t), \quad (0.0.32)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ константа в правой части неравенства (0.0.32) уменьшена быть не может.

Теорема 3.2.2. Пусть $n, t \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, $g(t)$ – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \frac{1}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы 3.2.2 вытекает ряд утверждений.

Следствие 3.2.2. Пусть $n, t \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $p = 1/m$, $h \in (0, 1)$, $g(t)$ – весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^m} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}] g(t) dt \right)^{-m}. \end{aligned} \quad (0.0.33)$$

Из (0.0.33), в частности при $g(t) \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, вытекает

равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^h \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} \\ &= \frac{1}{\{(n-r+1)h - 1 + (1-h)^{n-r+1}\}^m}. \end{aligned} \quad (0.0.34)$$

Полагая в (0.0.34), например $h = 1/(n-r+1)$, получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n-r+1} \right)^{-m(n-r+1)}. \end{aligned} \quad (0.0.35)$$

В свою очередь из (0.0.35) следует экстремальное равенство

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = e^m.$$

Следствие 3.2.3. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.2. Положим

$$g(t) := (n-r)(1-t)^{n-r-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r.$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^h \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ &= \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^{n-r}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (0.0.36)$$

Из (0.0.36), в частности при $h = 1/(n-r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ &= \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \end{aligned} \quad (0.0.37)$$

При $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (0.0.37) следует, что

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

В частности, если $r = 0$, то

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(f, t)_2 (1-t)^{n-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

Для теорем, доказанных в данном параграфе, здесь же приведены обобщения этих результатов на случай задачи о совместном приближении функций и их промежуточных производных в пространстве B_2 . Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.2.3. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2 \leq \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-2m} \cdot \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2, \quad (0.0.38)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ константа в правой части неравенства (0.0.38) уменьшена быть не может.

Теорема 3.2.4. Пусть $f \in B_2^{(r)}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, $g \in L_p$ – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Через $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq 1, \quad 0 < t < 1,$$

а через $W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty$) обозначим множество функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0, 1)$ удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}, r \geq 2$) ее промежуточные производные $f^{(s)}$ ($1 \leq s \leq r-1$) также принадлежат пространству B_2 , то определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})_2$ на некотором подмножестве функции $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ при $n > r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Точнее, требуется найти следующую величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \left\{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}. \quad (0.0.39)$$

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.5. Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда для любого натурального $n > r \geq s$, $t \in (0, 1)$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m, t))_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1-(1-t)^{n-r}]^m}. \quad (0.0.40)$$

Заметим, что при $t = t_* = 1/(n-r)$, $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$ из (0.0.40) следует асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m, t_*))_2 \asymp \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}.$$

Теорема 3.2.6. Пусть $0 < p \leq \infty$, $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ и $h \in (0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)) &:= \sup \left\{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(\int_0^h [1-(1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (0.0.41)$$

Существует функция $g_0 \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$, реализующая в (0.0.41) верхнюю грань.

В последние годы в задачах теории приближения всё более широкое применение находит так называемый $\mathcal{K}$ -функционал Петре (см. [12, 90, 94]). Особенно важную роль он играет при точном решении различных экстремальных задач аппроксимации, где требуется учитывать одновременно гладкость и аппроксимационные свойства функций.

В третьем параграфе третьей главы диссертации опираясь на результаты параграфа 3.2, рассматриваются экстремальные задачи на классах функций, задаваемых при помощи $\mathcal{K}$ -функционала, и приводятся их точные решения.

Для исследования этих классов используется следующий $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m) &:= \mathcal{K} \left(f; t^m; B_2, B_2^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - J\|_2 + t^m \|J^{(m)}\|_2 : J \in B_2^{(m)} \right\}, \quad f \in B_2. \end{aligned}$$

Один из общих результатов третьего параграфа является следующая

Теорема 3.3.2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ($r \geq s$) – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1.$$

Неубывающая на $[0, \infty)$ функция Φ называется k -мажорантой [87, с. 25], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют просто мажорантой.

В данном параграфе рассматривается задача (0.0.39) при произвольных $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$ для следующего класса функций

$$W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) = \left\{ f \in B_2^{(r)} : \mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m) \right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3.3. Пусть Φ – мажоранта, определяющая класс функций $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Тогда для любого натурального $n \geq m + r$ и

произвольного $s (0 \leq s \leq r)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned}$$

В четвертом параграфе третьей главы рассматривается задачи вычисления точных значений n -поперечников для классов функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$, $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежащих пространству B_2 , а также для следующего класса

$$W_{m,p}^{(r)}(h, g) := W_p^{(r)} B_2(\Omega_m, h, g) = \left\{ f \in B_2^{(r)} : \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 g(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Основными результатами данного параграфа являются

Теорема 3.4.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m; t), B_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m; t), B_2) = \\ &= \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, g – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) &= E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Теорема 3.4.3. *Пусть Φ – мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \geq m + r$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) &= E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned}$$

В последнем пятом параграфе третьей главы изучается задача среднеквадратического приближения некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной в области $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k^*(z)\}_{k=0}^\infty$ в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$, где $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha(1 - |z|)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ – вес Якоби. Доказаны точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие величину наилучшего среднеквадратичного полиномиального приближения $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ и $\mathcal{K}$ -функционала Петре.

Условимся в дальнейшем называть весом неотрицательную функцию $\gamma := \gamma(|z|) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемую по Лебегу в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ такую, что

$$\iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) d\sigma > 0,$$

где $d\sigma = dx dy$ – элемент площади. Будем рассматривать вопросы среднеквадратичного приближения суммами Фурье комплексных функций f , аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma} := B_{2,\gamma}(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ пространство $B_{2,\gamma}$ превращается в обычное пространство Бергмана (см., например, [52, стр.259]). Отметим, что в случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$, задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$ изучалась в работе [1].

Хорошо известно [52, стр.262-265], что теория среднеквадратичного приближения по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функций f тесно связана с теорией ортогональных по области $\mathcal{D}$ функций. Поэтому для большей связности изложения мы приведем основные понятия, относящиеся к теории ортогональных с весом в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системы функций. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ назовем ортогональной с весом γ по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системой комплексных функций,

если

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma := \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2, & \text{при } k = l, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если

$$\|\varphi_k\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} = 1,$$

то такая система называется ортонормальной. Очевидно, что если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, то система $\{\varphi_k(z) \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормальной. Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z), \quad (0.0.42)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma$$

– коэффициенты Фурье функции f . Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z)$$

– частная сумма n -го порядка ряда, стоящая в правой части равенства (0.0.42).

Составим линейную комбинацию первых n функций системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(z), \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (0.0.43)$$

и множество всех обобщенных полиномов вида (0.0.43) обозначим через $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

назовем наилучшим среднеквадратическим приближением функции $f \in B_{2,\gamma}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Очевидно, что система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной в пространстве $B_{2,\gamma}$, но не ортонормированной, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^k \bar{z}^l d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{k+l+1} e^{i(k-l)t} d\rho dt = \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho := \mu_k > 0, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, система функций

$$\varphi_k^*(z) := \left\{ (\sqrt{\mu_k})^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty} \quad (0.0.44)$$

будет ортонормальной системой.

Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим класс аналитических в круге U функций. Пусть теперь f – произвольная функция, принадлежащая классу $\mathcal{A}(U)$. Ряд Маклорена этой функции внутри U имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (0.0.45)$$

Очевидно, что ряд Фурье функции $f(z)$ по ортонормальной системы (0.0.44) совпадает с рядом Маклорена (0.0.45). Ряд Фурье функции $f(z)$ внутри единичного круга U представляет собой аналитическую функцию (0.0.45), для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k |c_k(f)|^2.$$

Согласно второй теореме Вейерштрасса [14], ряд (0.0.45) может быть сколько угодно раз продифференцирована, причем все продифференцированные ряды равномерно сходятся к соответствующей производной, и для любого $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ множество функций $f \in B_{2,\gamma}$, у которых $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$, то есть $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma} < \infty$. Легко заметить, что при любом $k \geq n > r$,

$k, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(r)}(z) - S_{n-1}^{(r)}(f, z) = f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

в силу чего получаем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \inf \left\{ \|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho, \end{aligned} \quad (0.0.46)$$

а также имеет место равенство

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho. \quad (0.0.47)$$

Всюду далее через

$$\mu_s(\gamma) = \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^s d\rho, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (0.0.48)$$

обозначим момент порядка s весовой функции $\gamma(\rho)$ на отрезке $[0, 1]$. В силу обозначения (0.0.48), равенства (0.0.46) и (0.0.47) запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2 \left(f^{(r)} \right)_{2,\gamma} &:= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma), \\ \|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 &= \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma). \end{aligned}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.5.1. *При всех $k \geq n > r \geq 1$ и $\alpha \geq 0, \beta > -1$ имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}.$$

Теорема 3.5.4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие что $n \geq r + m, \alpha \geq 0, \beta > -1$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = 1.$$

Глава 1. Наилучшие приближения в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$

В первой главе диссертации рассматривается задача нахождения наилучших приближений аналитических функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, и вычисления точных значений n -поперечников некоторых классов функций. Приведены обобщения неравенств приближения, установленные ранее для аналитических в единичном круге функций, на случай, когда рассматриваемые функции принадлежат весовому пространству $B_{q,\gamma,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R > 0$. Вводятся специальные функциональные классы, определяемые условиями на гладкость и вес, и вычисляются значения поперечников этих классов в соответствующем весовом пространстве. Доказано точное неравенство типа Колмогорова в пространстве $B_{2,\gamma}$, которое оценивает норму промежуточной производной функции через норму самой функции и её старшей производной в весовом пространстве Бергмана.

1.1. Наилучшее приближение в весовом пространстве Бергмана

В данном параграфе доказаны точные неравенства, устанавливающие связь между величинами наилучшего приближения функций $f \in B_{q,\gamma,R}$ и усредненными, с заданным весом, значениями модулей непрерывности и гладкости r -й производной $f_a^{(r)}$ в пространстве $B_{q,\gamma}$.

Во всех приведённых ниже теоремах полученные неравенства являются

точными в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_{q,\gamma}$, для которой эти неравенства обращаются в равенства.

Теорема 1.1.1. Для произвольной функции $f(z) \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$), при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ имеют место неравенства

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^u \omega \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \quad (1.1.1)$$

и знак равенства в (1.1.1) реализуется на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Для доказательства (1.1.1) воспользуемся установленным в [74] неравенством

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad 0 < R \leq 1. \quad (1.1.2)$$

В силу неравенства (1.1.2), а также неравенством [74]

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{n^{r-1}} E_{n-1} \left(f_a^{(r-1)} \right)_{B_{q,\gamma}}, \quad r \in \mathbb{N}$$

соотношение (1.1.1) достаточно доказать для $r = 1$. Таким образом, требуется доказать, что при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{2} \int_0^u \omega \left(f'_a, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt.$$

С этой целью для произвольного $u \in (0, \pi/(2n)]$ введём в рассмотрение оператор

$$\mathfrak{F}(f, z) = \frac{\pi}{4u} \int_0^u \left\{ f(ze^{i\tau}) + f(ze^{-i\tau}) \right\} \cos \frac{\pi\tau}{2u} d\tau, \quad z \in U, \quad (1.1.3)$$

который используем в качестве промежуточного приближения. Полагая, ради удобства, $F(\rho, t) := f(\rho e^{it})$, перепишем равенство (1.1.3) в виде

$$\mathfrak{F}(f, \rho e^{it}) = \frac{\pi}{4u} \int_0^u \left\{ F(\rho, t + \tau) + F(\rho, t - \tau) \right\} \cos \frac{\pi\tau}{2u} d\tau. \quad (1.1.4)$$

Воспользовавшись неравенством треугольника

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq E_{n-1}(f - \mathfrak{F}(f))_{B_{q,\gamma}} + E_{n-1}(\mathfrak{F}(f))_{B_{q,\gamma}}, \quad (1.1.5)$$

оценим каждое слагаемое в правой части (1.1.5), имея в виду, что в любом банаховом пространстве X выполняется неравенство $E_{n-1}(f)_X \leq \|f\|_X$. Так как

$$\begin{aligned} & f(\rho e^{it}) - \mathfrak{F}(f, \rho e^{it}) = \\ &= -\frac{\pi}{4u} \int_0^u \{F(\rho, t + \tau) - 2F(\rho, t) + F(\rho, t - \tau)\} \cos \frac{\pi\tau}{2u} d\tau, \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

то, учитывая, что

$$F(\rho, t + \tau) - 2F(\rho, t) + F(\rho, t - \tau) = \int_0^\tau \{F'_a(\rho, t + \theta) - F'_a(\rho, t - \theta)\} d\theta,$$

и выполнив интегрирование по частям в правой части (1.1.6), приходим к равенству

$$\begin{aligned} f(\rho e^{it}) - \mathfrak{F}(f, \rho e^{it}) &= \frac{1}{2} \int_0^u \{F'(\rho, t - \tau) - F'(\rho, t + \tau)\} \left(1 - \sin \frac{\pi\tau}{2u}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^u \{f'_a(\rho e^{i(t-\tau)}) - f'_a(\rho e^{i(t+\tau)})\} \left(1 - \sin \frac{\pi\tau}{2u}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Возведя обе части равенства (1.1.7) по абсолютному значению в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), затем полученное равенство умножив на $\rho\gamma(\rho)$, интегрировав по t в пределах $0 \leq t \leq 2\pi$ и по ρ в пределах $0 \leq \rho \leq 1$ и применив обобщённое неравенство Минковского, имеем

$$\|f - \mathfrak{F}(f)\|_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{2} \int_0^u \left\| f'_a(\rho e^{i(t-\tau)}) - f'_a(\rho e^{i(t+\tau)}) \right\|_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin \frac{\pi\tau}{2u}\right) d\tau.$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$\begin{aligned} & E_{n-1}(f - \mathfrak{F}(f))_{B_{q,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^u \left\| f'_a(\rho e^{i(t-\tau)}) - f'_a(\rho e^{i(t+\tau)}) \right\|_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin \frac{\pi\tau}{2u}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

При оценке второго слагаемого в правой части (1.1.5) аналогично [2, с.343] будем считать, что $f(z)$ и следовательно $F(z)$ являются полиномами степени n , пользуясь тем, что множество всех полиномов всюду плотно в пространстве $B_{q,\gamma}$, можем осуществить одновременно приближение как функции $f(z)$, так и её последовательные производные $f_a^{(s)}(z)$ ($s \in \mathbb{N}$) в $B_{q,\gamma}$. При этом, пользуясь неравенством [74]

$$E_{n-1}(\mathfrak{F})_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-r} E_{n-1} \left(\mathfrak{F}_a^{(r)} \right)_{B_{q,\gamma}} \quad (1 \leq q \leq \infty, \quad n, r \in \mathbb{N}),$$

при $r = 2$ запишем

$$E_{n-1}(\mathfrak{F})_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-2} E_{n-1} \left(\mathfrak{F}_a'' \right)_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-2} \left\| \mathfrak{F}_a'' \right\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (1.1.9)$$

Поскольку из равенства (1.1.4) вытекает, что

$$\mathfrak{F}_a''(f, \rho e^{it}) = \frac{\pi}{4u} \int_0^u \left\{ F''(\rho, t + \tau) + F''(\rho, t - \tau) \right\} \cos \frac{\pi\tau}{2u} d\tau, \quad (1.1.10)$$

то, выполнив интегрирование по частям в формуле (1.1.10), затем применяя упомянутое выше неравенство Минковского, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left\| \mathfrak{F}_a''(f) \right\|_{B_{q,\gamma}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 \int_0^u \left\| F'(\rho, t + \tau) - F'(\rho, t - \tau) \right\|_{B_{q,\gamma}} \sin \frac{\pi\tau}{2u} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 \int_0^u \left\| f'_a \left(\rho e^{i(t-\tau)} \right) - f'_a \left(\rho e^{i(t+\tau)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \sin \frac{\pi\tau}{2u} d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Учитывая (1.1.11), неравенства (1.1.9) примет вид

$$E_{n-1}(\mathfrak{F})_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 \int_0^u \left\| f'_a \left(\rho e^{i(t-\tau)} \right) - f'_a \left(\rho e^{i(t+\tau)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \sin \frac{\pi\tau}{2u} d\tau.$$

Объединяя неравенства (1.1.8) и (1.1.11) в силу (1.1.5) запишем

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^u \left\| f'_a \left(\rho e^{i(t-\tau)} \right) - f'_a \left(\rho e^{i(t+\tau)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi\tau}{2u} \right\} d\tau. \quad (1.1.12)$$

Пользуясь определением модуля непрерывности, из (1.1.12) будем иметь

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{2} \int_0^u \omega \left(f'_a, 2\tau \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi\tau}{2u} \right\} d\tau. \quad (1.1.13)$$

В (1.1.13) заменяя функцию f на производную $f_a^{(r-1)}$ получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1} \left(f_a^{(r-1)} \right)_{B_{q,\gamma}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^u \omega \left(f_a^{(r)}, 2\tau \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi\tau}{2u} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Если функция $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$), то в силу (1.1.14) и неравенства

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-r+1} E_n \left(f_a^{(r-1)} \right)_{B_{q,\gamma}} \quad (1 \leq q \leq \infty, r \in \mathbb{N}),$$

учитывая (1.1.2), запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq R^n E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{R^n}{n^{r-1}} E_{n-1}(f_a^{(r-1)})_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^u \omega \left(f_a^{(r)}, 2\tau \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2nu} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi\tau}{2u} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что знак равенства в полученном неравенстве достигается для функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, при всех $1 \leq q \leq \infty$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.1.1. $\square$

Заметим, что если в неравенстве (1.1.15) полагать $\frac{\pi}{2nu} = \mu$ ($1 \leq \mu \leq \infty$), то оно примет вид

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega \left(f_a^{(r)}, 2\tau \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n \tau \right\} d\tau, \quad (1.1.16)$$

которым воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 1.1.2. Для любой функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $0 < u \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ справедливо неумлучшаемое неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

и знак равенства в (1.1.17) реализует функция $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим следующий линейный оператор

$$\mathfrak{F}(f, z) = \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \{ f(ze^{it}) + f(ze^{-it}) \} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt, \quad z \in U, \quad (1.1.18)$$

который используем в качестве промежуточного приближения функции $f(z)$.

Приняв обозначение $F(\rho, x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\rho e^{ix})$, перепишем оператор (1.1.18) в виде

$$\mathfrak{F}(f, \rho e^{ix}) = \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \{ F(\rho, x+t) + F(\rho, x-t) \} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt.$$

Воспользуясь хорошо известным неравенством для наилучших приближений (1.1.5), оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (1.1.5). Применяя обобщённое неравенство Минковского [45, с.395] и учитывая определение модуля гладкости, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f - \mathfrak{F}(f))_{B_{q,\gamma}} &\leq \|f - \mathfrak{F}(f)\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &= \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \|F(\rho, x+t) - 2F(\rho, x) + F(\rho, x-t)\|_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Приступая к оценке второго слагаемого $E_{n-1}(\mathfrak{F}(f))_{B_{q,\gamma}}$ в неравенстве (1.1.5), как и при доказательстве предыдущей теоремы, используя схему рассуждений, приведённую в [56], можно считать функцию $f(z)$ (и, следовательно, $\mathfrak{F}(f, z)$)

произвольным алгебраическим полиномом некоторой степени n , поскольку множество всех алгебраических полиномов всюду плотно в метрике $B_{q,\gamma}$ и тогда можно одновременно осуществить приближение в $B_{q,\gamma}$, как функцию $f(z)$, так и её последовательные производные по аргументу $f_a^{(r)}(z)$. При этих соглашениях, очевидно, производные $\mathfrak{F}_a^{(r)}(f, z)$, $r \in \mathbb{N}$ принадлежат $B_{q,\gamma}$, и мы вправе применить неравенство

$$E_{n-1}(\mathfrak{F})_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-r} E_{n-1}(\mathfrak{F}_a^{(r)})_{B_{q,\gamma}}, \quad (1.1.20)$$

доказанное в работе [74], которую используем при $r = 2$. Имея в виду, что $E_{n-1}(\mathfrak{F}_a'')_{B_{q,\gamma}} \leq \|\mathfrak{F}_a''\|_{B_{q,\gamma}}$, воспользуемся определением оператора $\mathfrak{F}(f, x)$, выполним дважды интегрирование по частям, и применив упомянутое обобщенное неравенство Минковского получим

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}_a''\|_{B_{q,\gamma}} &= \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \left\| \int_0^u \left\{ F_a''(\rho, x+t) + F_a''(\rho, x-t) \right\} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt \right\|_{B_{q,\gamma}} = \\ &= \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^2 \left\| \int_0^u \left\{ F_a'(\rho, x+t) - F_a'(\rho, x-t) \right\} \cos \frac{\pi t}{2u} dt \right\|_{B_{q,\gamma}} = \\ &= \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^3 \left\| \int_0^u \left\{ F(\rho, x+t) - 2F(\rho, x) + F(\rho, x-t) \right\} \sin \frac{\pi t}{2u} dt \right\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^3 \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} \sin \frac{\pi t}{2u} dt. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Собирая неравенства (1.1.19)-(1.1.21) с учётом (1.1.5) и соотношения [74]

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}, \quad 0 < R \leq 1, \quad (1.1.22)$$

получаем требуемое неравенство (1.1.17). Точность неравенства (1.1.17) на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, $1 \leq q \leq \infty$ проверяется непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство теоремы 1.1.2. $\square$

Из доказанной теоремы 1.1.2 вытекает следующее

Следствие 1.1.1. Если для произвольной $r \in \mathbb{N}$ производная $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, то при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)un^r} \int_0^u \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

и равенство достигается на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$.

Отметим, что неравенство (1.1.23) вытекает из соотношений (1.1.22) и (1.1.20).

Следствие 1.1.2. При выполнении условий теоремы 1.1.2 для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $\mu \geq 1/2$ выполняется неухудшаемое неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\mu n R^n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \quad (1.1.24)$$

и если $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, то имеет место также неухудшаемое неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \\ &\leq \frac{\mu R^n}{(\pi-2)n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt, \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

в том смысле, что неравенства (1.1.24) и (1.1.25) обращаются в равенства для функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$.

В самом деле, полагая в (1.1.17) $\pi/(2un) = \mu$, откуда $un = \pi/(2\mu)$, $\mu \geq 1/2$, неравенство (1.1.17) примет вид (1.1.24), а неравенство (1.1.25) вытекает из (1.1.23).

1.2. Точные значения n -поперечников для некоторых классов функций

Пусть $\Phi_i(u)$, $i = 1, 2, u \geq 0$ – произвольные возрастающие непрерывные функции, такие, что $\Phi_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$). Для любых $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \geq 1$ и $r, n \in \mathbb{N}$ определим классы функций

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) = \\ = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \Phi_1(h), h \in \mathbb{R}_+ \right\}, \\ \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) := \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi_2(h), 0 < h \leq \pi/2 \right\}. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$(\sin t)_* := \begin{cases} \sin t, & \text{если } 0 \leq t \leq \pi/2; \\ 1, & \text{если } t > \pi/2 \end{cases},$$

$$(1 - \cos nt)_* := \begin{cases} 1 - \cos nt, & \text{если } nt \leq \pi; \\ 2, & \text{если } nt > \pi \end{cases}.$$

Теорема 1.2.1. *Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (1.2.1)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) = \\ &= E_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \right)_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (1.2.1), не пусто.

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции f из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$, пользуясь определением указанного класса, из неравенства (1.1.16)

при любом $r, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < R \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned}
E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n \tau\} d\tau = \\
&= \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n \tau\} d\tau \right) \leq \\
&\leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \tag{1.2.3}
\end{aligned}$$

Из неравенства (1.2.3) и соотношения (0.0.8) между вышеперечисленными n -поперечниками получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}
b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &\leq d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) \leq \\
&\leq E_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \tag{1.2.4}
\end{aligned}$$

Чтобы получить оценки снизу указанных n -поперечников равной правой части (1.2.4), в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_{q,\gamma,R}$ введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathcal{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \right\}$$

и докажем, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. В [74] при любых $n, r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q \leq \infty$ для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ доказано неравенство

$$\|(p_n)_a^{(r)}(ze^{it}) - (p_n)_a^{(r)}(ze^{-it})\|_{B_{q,\gamma}} \leq 2(\sin nt)_* n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

откуда сразу следует соотношение

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)}, 2t\right)_{B_{q,\gamma}} \leq 2(\sin nt)_* n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{1.2.5}$$

Для произвольной $R \in (0, 1)$ и любого $p_n \in \mathcal{P}_n$ запишем равенство [24]

$$p_n(\rho e^{it}) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_n\left(R\rho e^{i(t-\tau)}\right) e^{in\tau} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R^k \cos k\tau\right) d\tau, \tag{1.2.6}$$

которое легко проверяется непосредственным вычислением. Поскольку функция

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R^k \cos k\tau = \frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos \tau + R^2} \tag{1.2.7}$$

– ядро Пуассона, которое неотрицательно при любых $R \in (0, 1)$ и $\tau \in [0, 2\pi)$, то, применив обобщённое неравенство Минковского и используя определение нормы в пространстве $B_{q,\gamma}$ из (1.2.6) с учётом (1.2.7), получаем

$$\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}}. \quad (1.2.8)$$

Воспользовавшись соотношением (1.2.8), неравенство (1.2.5) запишем в виде

$$\omega \left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \leq 2n^r R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \cdot (\sin nt)_*. \quad (1.2.9)$$

Учитывая определение класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ и ограничение (1.2.1) из неравенства (1.2.9) для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{S}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^h \omega \left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \\ & \leq 2n^r \cdot R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (\sin nt)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \\ & \leq 2n^r \cdot \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (\sin nt)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt = \\ & = \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nh\tau)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi \tau}{2} \right\} d\tau \leq \Phi_1(h). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует включение $\mathcal{S}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. Отсюда, учитывая определение бернштейновского n -поперечника, сразу получаем оценки снизу указанных величин

$$\begin{aligned} d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) & \geq b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) \geq \\ & \geq b_n(\mathcal{S}_{n+1}, B_{q,\gamma,R}) \geq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Сравнивая оценку сверху (1.2.4) и снизу (1.2.10), приходим к требуемым равенствам (1.2.2). На первый взгляд, условия (1.2.1) теоремы 1.2.1 выглядят неестественными. Но это не так. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что указанные условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы при любом $\mu \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ совокупность функций $\{n^{-r} \Phi_1(\pi/(2\mu n)) z^n\}$

принадлежала классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. Анализируя условия (1.2.1) теоремы 1.2.1 выясним значения α , при которых функция $\Phi_1^*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет указанным условиям. Конкретизируя в (1.2.1) мажоранту $\Phi_1^*(u)$, будем иметь

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2}\right\} dt.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \geq nh \int_0^1 (\sin nht)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2}\right\} dt. \quad (1.2.11)$$

Неравенство (1.2.11) впервые появилось в работе Л. В. Тайкова и Н. Айнуллоева [2] при вычислении точного значения колмогоровского n -поперечника в пространстве Харди H_q ($1 \leq q \leq \infty$). Там же выяснено, что оно выполняется для значений

$$\alpha(\mu) + 1 := \beta(\mu) = 1 + \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int_0^1 t \cos \left(\frac{\pi t}{2\mu}\right) \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] dt.$$

Следовательно, неравенство (1.2.11) выполняется для значений

$$\alpha := \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int_0^1 t \cos \left(\frac{\pi t}{2\mu}\right) \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] dt. \quad (1.2.12)$$

Из равенства (1.2.12) вытекает, что $\alpha(1) = (\pi/2) - 1$, $\lim\{\alpha(\mu) : \mu \rightarrow \infty\} = 1$ и при всех $\mu \in [1, \infty)$, $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$. $\square$

Теорема 1.2.2. Если при некотором $\mu \geq 1$ и любых $h \in (0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi_2(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2}\right\} dt, \quad (1.2.13)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) &= b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) = \\ &= E_{n-1}(W_{q,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (1.2.13), непусто.

Доказательство. Из неравенства (1.1.25) для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \cdot \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right), \quad 0 < R \leq 1, \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$E_{n-1} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \cdot \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \quad (1.2.15)$$

Учитывая соотношения (0.0.8) между n -поперечниками и неравенство (1.2.15), запишем оценку сверху

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) &\leq d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) \leq \\ &\leq E_{n-1} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \cdot \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

С целью получения оценки снизу указанных n -поперечников, в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_{q,\gamma,R}$ введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathcal{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \right\}$$

и докажем, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$. В [74] доказано, что при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ и $1 \leq q \leq \infty$ для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\|(p_n)_a^{(r)}(ze^{it}) - 2p_n^{(r)}(z) + (p_n)_a^{(r)}(ze^{-it})\|_{B_{q,\gamma}} \leq 2(1 - \cos nt)_* n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

откуда немедленно получаем неравенство

$$\omega_2 \left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \leq 2(1 - \cos nt)_* n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (1.2.17)$$

Учитывая, что для любой $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ также имеет место неравенство (1.2.8)

$$\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}}, \quad 0 < R \leq 1,$$

то неравенство (1.2.17) запишем в следующем виде

$$\omega_2 \left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{B_{q,\gamma}} \leq 2n^r R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} (1 - \cos nt)_*. \quad (1.2.18)$$

Воспользовавшись определением класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ и ограничением (1.2.13), из неравенства (1.2.18) для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{S}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2((p_n)_a^{(r)}, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \\ & \leq 2n^r R^{-n} \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (1 - \cos nt)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt = \\ & = \frac{\pi}{\pi - 2} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt \leq \Phi_2(h), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$. Учитывая определение бернштейновского n -поперечника, получаем оценки снизу указанных величин

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) & \geq b_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)) \geq \\ & \geq b_n(\mathcal{S}_{n+1}, B_{q,\gamma,R}) \geq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \cdot \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Сравнивая оценки сверху (1.2.16) и оценки снизу (1.2.19), получаем требуемое равенства (1.2.14). Необходимо отметить, что непосредственными вычислениями легко убедиться в том, что условие (1.2.13) является необходимым и достаточным для того, чтобы при любом $\mu \geq 1/2$ и $r, n \in \mathbb{N}$ совокупность функций

$$\left\{ \frac{\pi}{4\mu(in)^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{B_{q,\gamma}}} \right\}$$

принадлежала классу $W_{q,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$. Анализируя условие (1.2.13) теоремы 1.3.2, выясним значения α , при которых функция $\Phi_2^*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет указанному условию. Конкретизируя функцию $\Phi_2^*(u)$ в (1.2.13), приходим к неравенству

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi} \right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt. \quad (1.2.20)$$

В работе [3] доказано, что если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любых значениях $t, \tau \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi_2(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\tau)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi x h}{2\mu\tau}\right)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi x}{2}\right\} dx, \quad (1.2.21)$$

то неравенство (1.2.21) выполняется, например, для степенной функции, имеющей вид $\Phi_2^*(u) = u^\alpha$, где

$$\alpha := \alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi - 2)\mu} \int_0^1 t \left\{1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2}\right\} \sin \frac{\pi t}{2\mu} dt, \quad (1.2.22)$$

причём $\alpha(1) = 2/(\pi - 2)$, $\lim\{\alpha(\mu) : \mu \rightarrow \infty\} = 2$ и для всех $\mu \in [1/2, +\infty)$ имеет место неравенство $2/(\pi - 2) \leq \alpha(\mu) \leq 2$. Если в неравенстве (1.2.21) полагать $\tau = \pi/(2\mu n)$, то мы приходим к неравенству (1.2.13) и, полагая $\Phi_2^*(u) = u^\alpha$, получаем (1.2.20). Это означает, что неравенства (1.2.20) и (1.2.21) для функции $\Phi_2^*(u)$ эквивалентны. Следовательно, неравенство (1.2.20) выполняется для функции (1.2.22), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2. $\square$

При доказательстве нижеприведённой теоремы 1.2.3 мы воспользуемся тем, что для любого $f \in A(U_R)$ при любом $\rho \in (0, 1]$ и $R \geq 1$ выполняется равенство [98, с.256]:

$$f(\rho e^{it}) - Q_n(f, \rho e^{it}) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho R e^{i\theta}) F_R(t - \theta) d\theta, \quad (1.2.23)$$

где

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad Q_n(f, z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (1 - R^{2j-2n}) z^j, \quad (1.2.24)$$

$$F_R(t) = e^{int} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \cos kt \right],$$

причём при любых $R \geq 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_R(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - 1) dt}{R^2 - 2R \cos t + 1} = 1. \quad (1.2.25)$$

Нам понадобится далее следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2.1. Для произвольного алгебраического полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}, \quad R \geq 1, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (1.2.26)$$

которое обращается в равенство для полинома $g_n(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. В монографии [98, с.252] доказано, что для произвольного $p_n \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$M_q^q(p_n, \rho R) \leq R^{nq} \cdot M_q^q(p_n, \rho), \quad R \geq 1, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (1.2.27)$$

Умножая обе части неравенства (1.2.27) на $\rho\gamma(\rho)$ и интегрируя по ρ на отрезке $[0, 1]$, получим

$$\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(p_n, \rho R) d\rho \leq R^{nq} \int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(p_n, \rho) d\rho,$$

или что то же

$$\|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}}^q \leq R^{nq} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}^q,$$

откуда сразу вытекает неравенство (1.2.26). Равенство для $g_n \in \mathcal{P}_n$ проверяется непосредственным вычислением. Лемма 1.4.1 доказана. $\square$

Теорема 1.2.3. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда для любого натурального n справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) &= d^n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) = d_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) = \\ &= \delta_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) = E_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R})_{B_{q,\gamma}} = \mathcal{E}(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, Q_n)_{B_{q,\gamma}} = R^{-n}. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

При этом:

- 1) $\mathcal{P}_n = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ является оптимальным подпространством для бернштейновского n -поперечника $b_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma})$.
- 2) $L^n = \{f : f \in B_{q,\gamma}, f^{(k)}(0) = 0, k = \overline{0, n-1}\}$ является оптимальным подпространством для гельфандовского n -поперечника $d^n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma})$.

3) $\mathcal{P}_{n-1} = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n -поперечника $d_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma})$.

4) $Q_n(f, z)$, определённое равенством (1.2.24), является оптимальным подпространством для линейного n -поперечника $\delta_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma})$.

Доказательство. Применяя неравенство для свёртки [45, с.43] к равенству (1.2.23), с учётом (1.2.25) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - Q_n(f, \rho e^{it})|^q dt \leq R^{-nq} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(\rho R e^{i\theta})|^q d\theta.$$

Отсюда сразу получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |f(\rho e^{it}) - Q_n(f, \rho e^{it})|^q d\rho dt \leq \\ & \leq R^{-nq} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |f(\rho R e^{i\theta})|^q d\rho d\theta, \end{aligned}$$

или что то же

$$\|f - Q_n(f)\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n} \|f\|_{B_{q,\gamma,R}}. \quad (1.2.29)$$

Из неравенства (1.2.29) для любого $f \in \tilde{B}_{q,\gamma,R}$ получаем

$$\delta_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) \leq \mathcal{E}_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, Q_n)_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n}. \quad (1.2.30)$$

Для получения оценки бернштейновского n -поперечника снизу введём в рассмотрение шар полиномов

$$S_n = \{p_n(z) : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n}\}$$

и покажем, что $S_n \subset \tilde{B}_{q,\gamma,R}$, то есть для любого $p_n \in S_n$ выполняется неравенство $\|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq 1$. В самом деле, согласно неравенству (1.2.26) получаем

$$\|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^n \cdot R^{-n} = 1,$$

и включение $S_n \subset \tilde{B}_{q,\gamma,R}$ доказано. Но тогда согласно определению бернштейновского n -поперечника получаем

$$b_n(\tilde{B}_{q,\gamma,R}, B_{q,\gamma}) \geq b_n(S_n, B_{q,\gamma}) \geq R^{-n}. \quad (1.2.31)$$

Равенства (1.2.28) следуют из сопоставления неравенств (1.2.30) и (1.2.31), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3. $\square$

1.3. Неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной

Пусть $\mathcal{J} := \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ или $\mathcal{J} := \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $n, \nu \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$; $s, p, q \in \mathbb{R}_+$. В теории приближений и её приложениях хорошо известны неравенства Колмогорова, которые оценивают сверху $L_q(\mathcal{J})$ — норму промежуточной производной функции через $L_p(\mathcal{J})$ — норму самой функции и $L_s(\mathcal{J})$ — норму её старшей производной:

$$\|f^{(\nu)}\|_{L_q(\mathcal{J})} \leq \mathcal{K} \|f\|_{L_p(\mathcal{J})}^\alpha \cdot \|f^{(r)}\|_{L_s(\mathcal{J})}^\beta, \quad \alpha = \frac{n - \nu - \frac{1}{s} + \frac{1}{q}}{n - \frac{1}{s} + \frac{1}{p}}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (1.3.1)$$

где $\mathcal{K}$ — некоторая константа, зависящей от указанных числовых параметров.

К настоящему времени получено достаточно много неравенств типа (1.3.1) в разных нормах и областях. В частности, интерес к точным неравенствам типа (1.3.1) вызван их связью с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования ограниченными операторами и другими родственными задачами. Подробную информацию об исследованиях, посвященных неравенству типа Колмогорова для функций вещественного переменного как в одномерном, так и в многомерном случае и связанных с ними экстремальных задач, можно найти в обзорной статье В. В. Арестова [6] и в сравнительно недавно вышедшей монографии В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчука, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [9]. Что же касается неравенства вида (1.3.1) для аналитических в единичном круге функций в пространствах Харди $H_p(p \geq 1)$ и Бергмана $B_p(p \geq 1)$, то в случае $p = 2$ такие неравенства были получены С. Б. Вакарчуком [15], С. Б. Вакарчуком и М. Б. Вакарчуком [29–31], а в случае $1 \leq p \leq \infty$ в пространстве Харди H_p — Р. Р. Акопяном [4]. Отметим также, что К. Ю. Осипенко [97] получил точное неравенство Колмогорова в случае равномерных норм на $\mathbb{R}$ для функций, аналитических в полосе $|Im z| < \beta$. Некоторые экстремальные задачи,

связанные с задачей Стечкина в пространствах Харди и Бергмана, исследованы Р.Р.Акопяном и М.С.Саидусайновым [5]. В работе М. Ш. Шабозова и М. С. Саидусайнова [73] получены неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана.

Через $\tilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$ будем обозначать класс функций $f \in A(U)$, для которых $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$. Следуя подходу К. И. Бабенко [7], можно показать, что $\tilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma}$ при любом $q \in [1, \infty)$. Кроме того, при любом $q \geq 2$ имеет место включение $B_{q,\gamma} \subset B_{2,\gamma}$. Для произвольной функции $f \in A(U)$ имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (1.3.2)$$

откуда

$$z^r f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^k,$$

где

$$\alpha_{k,r} = k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N},$$

а $c_k(f)$ -коэффициенты Тейлора функции f . Применяя равенство Парсеваля, из равенств (1.3.2) и определения (0.0.1) получаем следующие равенства

$$M_2^2(f; \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k},$$

$$M_2^2(z^r f^{(r)}; \rho) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} |c_k|^2 \rho^{2k}.$$

Для получения последующих результатов нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции $z^r f^{(r)} \in \tilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k = 0, k = \overline{r-\nu, r-1}$ и $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, справедливо точное неравенство*

$$M_2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left(M_2 \left(z^r f^{(r)}; \rho \right) \right)^{1-\nu/r} (M_2(f; \rho))^{\nu/r}. \quad (1.3.3)$$

Неравенство (1.3.3) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z)$, такая что $z^r f_0(z) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$ и для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Воспользуясь определением (0.0.1) и условием леммы 1.5.1 на коэффициенты Тейлора, имеем

$$M_2^2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k|^2 \rho^{2k}. \quad (1.3.4)$$

Записав равенство (1.3.4) в виде

$$M_2^2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2(1-\nu/r)} \left\{ \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 (|c_k| \rho^k)^{2\nu/r}$$

и используя схему рассуждения [30], получаем

$$\begin{aligned} M_2^2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) &\leq \\ &\leq \left\{ \sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2\nu/r}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Применив неравенство Гёльдера для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^q \right)^{1/q}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p \geq 1$$

к правой части неравенства (1.3.5), полагая $p = r/(r-\nu)$, $q = r/\nu$, будем иметь

$$\begin{aligned} M_2^2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) &\leq \\ &\leq \left\{ \sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} \right\}^{\nu/r} \cdot \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \rho^{2k} \right\}^{1-\nu/r}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

В работе [30] установлено, что

$$\sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} = \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}. \quad (1.3.7)$$

Учитывая равенства (0.0.1), (1.3.6) и (1.3.7), получаем требуемое неравенство (1.3.3), чем и завершаем доказательство леммы 1.5.1

$$M_2 \left(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho \right) \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left(M_2 \left(z^r f^{(r)}; \rho \right) \right)^{1-\nu/r} \cdot (M_2(f; \rho))^{\nu/r}.$$

□

Согласно определению пространства $B_{q,\gamma}$, а также конечности нормы

$$\|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \int_0^2 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} < \infty,$$

конечными будут и промежуточные нормы $\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} < \infty$, $1 \leq \nu \leq r$.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любой функции $z^r f^{(r)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}. \quad (1.3.8)$$

Доказательство. При $\nu = r$ неравенство (1.3.8) очевидно. Пусть функция $z^r f^{(r)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$ и выполняются условия теоремы 1.4.1 относительно коэффициентов Тейлора $c_k(f)$. Тогда в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho, \\ \|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 &= \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Очевидно, что равенство (1.3.9) можно записать в следующем удобном для дальнейшего виде

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 = \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) d\rho.$$

Из полученного равенства, учитывая неравенство (1.3.3), получаем

$$\begin{aligned} &\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 \leq \\ &\leq \int_0^1 \rho \gamma(\rho) \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \right\}^2 \left(M_2(z^r f^{(r)}; \rho) \right)^{2(1-\nu/r)} (M_2(f; \rho))^{2\nu/r} d\rho = \\ &= \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \right\}^2 \int_0^1 [\rho \gamma(\rho) M_2^2(z^r f^{(r)}; \rho)]^{1-\nu/r} \cdot [\rho \gamma(\rho) M_2^2(f; \rho)]^{\nu/r} d\rho. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Полагая в правой части неравенства (1.3.10) $p' = r/(r - \nu)$, $p = r/\nu$ и применяя неравенство Гёльдера для интегралов

$$\int_0^1 f(\rho)g(\rho)d\rho \leq \left(\int_0^1 |f(\rho)|^{p'} d\rho \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_0^1 |g(\rho)|^p d\rho \right)^{1/p}$$

$$(1/p + 1/p' = 1, \quad p \geq 1, \quad 1 \leq p' \leq \infty),$$

с учётом определения нормы в пространстве $B_{2,\gamma}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} &\leq \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \right\} \times \\ &\times \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho \right) d\rho \right)^{\frac{1}{2}(1-\nu/r)} \cdot \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2 (f; \rho) d\rho \right)^{\frac{\nu}{2r}} = \\ &= \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r} \cdot \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r}, \quad 1 \leq \nu \leq r, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы 1.5.1.

Покажем неулучшаемость неравенства (1.3.8). Введём в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^r$, очевидно принадлежащую пространству $B_{q,\gamma}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{B_{2,\gamma}} &= \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2}, \\ \|z^r f_0^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}} &= \alpha_{r,r} \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2}, \\ \|z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} &= \alpha_{r,r-\nu} \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Полученные равенства, поставляя в левую часть неравенства (1.3.8), получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_2^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_2^{1-\nu/r} = \\ &= \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{\nu/2r} \cdot \alpha_{r,r}^{1-\nu/r} \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2-\nu/2r} = \\ &= \alpha_{r,r-\nu} \left(\int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} = \|z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}, \end{aligned}$$

откуда и следует неулучшаемость неравенства (1.3.8). □

Учитывая принадлежность промежуточной производной $z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}$, $1 \leq \nu \leq r$ функции $f \in \tilde{\mathcal{B}}_{q,\gamma}^{(r)}$, $q \geq 2$ пространству Бергмана B_p , $1 \leq p \leq 2$, а также справедливость соотношений $f \in B_s$, $z^r f^{(r)} \in B_\mu$, где $2 \leq s, \mu \leq q$, из неравенства (1.3.8), при $\gamma(\rho) \equiv 1$ вытекает более общее утверждение.

Теорема 1.3.2. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_p} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}} \|f\|_{B_s}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_\mu}^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

В работе [72] доказано, что

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2}, \quad (1.3.11)$$

где $T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k \in \mathcal{P}_{n-1}$ — частная сумма Тейлора разложения функции в степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$. В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.3.3. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и функций $f \in \tilde{\mathcal{B}}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которых коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)})_{B_{2,\gamma}} &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}} (E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}})^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}} \right)^{1-\nu/r}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Доказательство. В самом деле, для любой функции $f \in B_{2,\gamma}$, полагаем

$$R_{n-1}(f, z) := f(z) - T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (1.3.13)$$

Ясно, что $R_{n-1}(f, z) \in B_{2,\gamma}$. Из (1.3.13) в силу (1.3.11) вытекает, что

$$\|R_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2} := E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}. \quad (1.3.14)$$

Пусть $1 \leq \nu \leq n-1$, где $n, \nu \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Так как

$$T_{n-1}^{(\nu)}(f, z) = \sum_{k=\nu}^{n-1} \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu} = \sum_{k=0}^{n-\nu-1} \alpha_{\nu+k,\nu} c_{\nu+k}(f) z^k = T_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}, z),$$

то для $n \geq r \geq \nu \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} z^{r-\nu} R_{n-1}^{(r-\nu)}(f, z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu} c_k(f) z^k = \\ &= z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}(z) - z^{r-\nu} T_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}, z) = R_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}, z). \end{aligned}$$

Отсюда, для тех же натуральных $n, m, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяющих неравенству $n \geq r \geq \nu \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| z^{r-\nu} R_{n-1}^{(r-\nu)}(f) \right\|_{B_{2,\gamma}} &= \left\| z^{r-\nu} R_{n-r+\nu-1} \left(f^{(r-\nu)}, z \right) \right\|_{B_{2,\gamma}} = \\ &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2} := E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_{2,\gamma}}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Аналогичным образом, из соотношения

$$z^r R_{n-1}^{(r)}(f, z) = z^r f^{(r)}(z) - z^r T_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = R_{n-r-1}(z^r f^{(r)}, z)$$

для $n \geq r \geq 1$ вытекает равенство

$$\begin{aligned} \left\| z^r R_{n-1}^{(r)}(f) \right\|_{B_{2,\gamma}} &= \left\| R_{n-r-1} \left(z^r f^{(r)}, z \right) \right\|_{B_{2,\gamma}} = \\ &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2} := E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Применяя теорему 1.4.1 к функции $R_{n-1}(f)$, с учетом соотношений (1.3.14), (1.3.15) и (1.3.16) получаем требуемое равенство (1.3.12).

Легко проверить, что для функции $f_0(z) = z^n \in B_{2,\gamma}$

$$E_{n-1}(f_0)_{B_{2,\gamma}} = \|z^n\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

$$E_{n-r-1} \left(z^r f_0^{(r)} \right)_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{n,r} \|z^n\|_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{n,r} \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

$$E_{n-r+\nu-1} \left(z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)} \right)_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{n,r-\nu} \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

а потому имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} \left(E_{n-1}(f_0)_{B_{2,\gamma}} \right)^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}} \right)^{1-\nu/r} = \\ &= \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{\nu/2r} \cdot \left(\alpha_{n,r}^2 \int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2-\nu/2r} = \\ &= \alpha_{n,r-\nu} \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} = E_{n-r+\nu-1} \left(z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)} \right)_{B_{2,\gamma}}, \end{aligned}$$

откуда и следует точность неравенства (1.3.12). Теорема 1.5.3 доказана. $\square$

Теорема 1.5.3, в случае $\gamma(\rho) \equiv 1$ допускает следующее обобщения

Теорема 1.3.4. Пусть $r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq r$, $1 \leq p \leq 2 \leq s, \mu \leq q$. Тогда для любой функции $f \in \tilde{\mathcal{B}}_q^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место точное неравенство

$$E_{n-r+\nu-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_{B_p} \leq \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} \left(E_{n-1}(f)_{B_s} \right)^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_\mu} \right)^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_q^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Глава 2. Наилучшие линейные методы приближения в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$

Вторая глава диссертации посвящена задаче построения наилучших линейных методов приближения на различных классов функций, аналитических в круге, в весовых пространствах Бергмана $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ при всех значениях $1 \leq q \leq \infty$. Для рассматриваемых классов функций построены наилучшие линейные методы приближения и вычислены значения поперечников в пространствах $B_{q,\gamma}$ и $\mathcal{L}_{q,\gamma}$. Кроме того, обобщаются результаты С. Б. Вакарчука на более широкий класс весовых пространств. В завершение главы полученные точные значения n -поперечников интерпретируются как задачи оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н. П. Корнейчука.

2.1. Наилучший линейный метод приближения для класса $W_{q,R}^{(r)}$

Вопросам отыскания наилучших линейных методов различных классов функций посвящены, например, работы [7, 11, 19, 20, 22, 23, 27, 28, 35, 48–50, 54, 60, 64, 80, 100] и многие другие.

Первая работа, в которой был построен наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$, была работа К. И. Бабенко [7]. Пользуясь этим результатом, В. М. Тихомиров [60] вычислил точное значение колмогоровского n -поперечника класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ в пространстве H_∞ . Л. В. Тайков [54]

нашёл наилучший линейный метод класса $W^{(r)}H_{1,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ и чуть позже, в работе [55] обобщил эти результаты для класса $W^{(r)}H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$) и вычислил значение колмогоровского n -поперечника указанного класса в H_q ($1 \leq q \leq \infty$). Обобщение всех перечисленных результатов дано в статьях J. T. Sheik [100], В. И. Белого и М. З. Двейрина [11].

Приведём общую постановку задачи нахождения наилучших линейных методов приближения в произвольном банаховом пространстве X .

Каждой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(U_R)$$

сопоставим посредством произвольной треугольной матрицы чисел $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}_{k=0}^n$ последовательность полиномов

$$V_{\Lambda,n}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} c_k z^k.$$

Пусть X – произвольное банахово пространство. Величина

$$\mathcal{E}_n(f, \Lambda)_X := \|f(z) - V_{\Lambda,n}(f, z)\|_X$$

характеризует скорость приближения функции $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n}(f)$ в метрике пространства X или, что то же самое, линейным методом Λ . *Наилучшим линейным методом* приближения на классе $\mathfrak{M} \subset X$ называется треугольная матрица $\Lambda^* := \{\lambda_{k,n}^*\}_{k=0}^n$, такая, что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; \Lambda^*)_X := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f; \Lambda)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda^*)_X.$$

Результаты работ, перечисленных выше авторов [7, 55, 60, 100], можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2.А. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_q, \Lambda^*)_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{n(n-1) \cdots (n-r+1)}, \quad (2.1.1)$$

где

$$\lambda_{k,n}^* := \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, r-1, \\ 1 - \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \rho^{2(n-k)}, & k = r, r+1, \dots, n-1. \end{cases}$$

М. З. Двейрин и И. В. Чебаненко [35] обобщили результат (2.1.1) на классы функций $W^{(\alpha)}H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$, $\alpha > 0$), определяемых через дробные производные $f^{(\alpha)}(z)$ в смысле Лиувилля и таких, что $\|f^{(\alpha)}\|_{q,\rho} \leq 1$.

В дальнейшем эта тематика нашла отражение в работах Ю. А. Фаркова [63, 64], А. Пинкуса [98], К. Ю. Осипенко [49, 50], С. Б. Вакарчука [19, 20, 22, 23], С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [27], С. Б. Вакарчука и М. Ш. Шабозова [28], М. Ш. Шабозов с учениками [79, 80] и др.

В этом параграфе будем рассматривать наилучший линейный метод приближения для класса

$$W_{q,R}^{(r)} = \left\{ f : f^{(r)} \in H_{q,R}, \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1, r \in \mathbb{Z}_+, R \geq 1, 1 \leq q \leq \infty \right\}.$$

Уточним экстремальные подпространства L_n^* , L_*^n , $\bar{L}_{n+1}$ и наилучший линейный метод приближения Λ_{n-1}^* . Для этого полагаем

$$\begin{aligned} L_n^* &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{z^j\}_{j=0}^{r-1}, \left\{ \left[R^{2(n-j)} - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot |z|^{2(n-j)} \right] \cdot z^j \right\}_{j=r}^{n-1} \right\}, \\ \Lambda_{n-1}^*(f, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{r-1} c_j(f) z^j + \sum_{j=r}^{n-1} c_j(f) z^j \left[1 - \frac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}} \cdot \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \right], \\ L_*^n &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, k = \overline{0, n-1} \right\}, \\ \bar{L}_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где $\alpha_{n,r} = n(n-1) \cdots (n-r+1)$, $n \geq r$.

В принятых обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned}
b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) &= b_n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma}) = d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma}) = \\
&= d^n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma}) = d_n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \delta_n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma}) = E(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\
&= \mathcal{E}(W_{q,R}^{(r)}; L_n^*)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_{q,R}^{(r)} \right\} = \\
&= \begin{cases} \infty, & n < r, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}, & n \geq r, \ 1 \leq q < \infty, \\ \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}, & n \geq r, \ q = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

При этом:

- 1) в случае n -поперечников $d_n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma})$ и $\delta_n(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma})$ подпространство L_n^* является экстремальным для класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;
- 2) линейный непрерывный оператор Λ_{n-1}^* является наилучшим для класса $W_{q,R}^{(r)}$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;
- 3) подпространство L_n^* будет экстремальным для n -поперечника $d^n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$;
- 4) подпространство $\bar{L}_{n+1} \equiv \mathcal{P}_n$ является экстремальным для $b_n(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma})$.

Доказательство. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$, у которой производная $f^{(r)} \in H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $n \geq r$ и $R \geq 1$, имеет место представление [98, с.254]

$$\begin{aligned}
&f(\rho e^{it}) - \Lambda_{n-1}^*(f, \rho e^{it}) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(R e^{i\theta}) e^{ir\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < t \leq 2\pi,
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

где

$$G_R(\rho, t) \stackrel{\text{def}}{=} R^r \left(\frac{\rho}{R} \right)^n e^{int} \left(\frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \frac{\cos kt}{\alpha_{k+n,r}} \right),$$

а $\Lambda_{n-1}^*(f, z)$ определен равенством (2.1.2).

В справедливости (2.1.3) легко убедиться, разложив подынтегральную функцию $f^{(r)}(z)$ в ряд Тейлора и произведя почленное интегрирование. Применением двойного преобразования Абеля легко доказать, что для всех $t \in [0, 2\pi)$ и $\rho \in [0, 1]$ функция $G_R(\rho, t) \geq 0$, причем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_R(\rho, t) dt = R^r (\rho/R)^n \alpha_{n,r}^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Из определения нормы в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ и равенстве (2.1.3) получаем

$$\begin{aligned} & \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta}) e^{ir\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right|^q d\rho dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Применяя известное неравенство для свертки функции [41, р.71]

$$\|f * g\|_{L_q[0,2\pi]} \leq \|f\|_{L_q[0,2\pi]} \cdot \|g\|_{L_1[0,2\pi]},$$

с учетом (2.1.4) для произвольной $f \in W_{q,R}^{(r)}$ из (2.1.5), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta}) e^{ir\theta} G_R(\rho, t - \theta) d\theta \right|^q dt \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(Re^{i\theta})|^q d\theta \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_R(\rho, t)| dt \right)^q = \\ & = (R^r (\rho/R)^n \cdot \alpha_{n,r}^{-1})^q \|f^{(r)}\|_{H_{q,R}}^q \leq (R^r (\rho/R)^n \cdot \alpha_{n,r}^{-1})^q. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Теперь из неравенства (2.1.6) и равенства (2.1.5) для произвольной $f \in W_{q,R}^{(r)}$ запишем

$$\|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq R^{r-n} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \quad (2.1.7)$$

Из неравенств (0.0.8) и (2.1.7) имеем

$$\begin{aligned}
\text{diam} \left(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) &\leq \delta_n \left(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) \leq \\
&\leq \mathcal{E} \left(W_{q,R}^{(r)}; L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \sup \left\{ \|f - \Lambda_n^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_{q,R}^{(r)} \right\} \leq \\
&\leq R^{r-n} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q},
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где под $\text{diam}(\cdot)$ подразумевается любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ или $d^n(\cdot)$.

При этом согласно (0.0.5) и (0.0.2) будем иметь

$$d_n \left(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) \leq E \left(W_{q,R}^{(r)}; L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \mathcal{E} \left(W_{q,R}^{(r)}; L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}}.$$

В монографии [98, гл. II, §3, предложение 3.2] доказано, что если X и Y – линейные нормированные пространства и X является подпространством Y , то $d^n(A, X) = d^n(A, Y)$, где множество $A \subset X$. Так как $B_{q,\gamma} \subset \mathcal{L}_{q,\gamma}$, то исходя из этого, можем записать

$$d^n \left(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d^n \left(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma} \right). \tag{2.1.9}$$

Используя определение бернштейновского n -поперечника, имеем

$$b_n \left(W_{q,R}^{(r)}; \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) \geq b_n \left(W_{q,R}^{(r)}; B_{q,\gamma} \right). \tag{2.1.10}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника, записанного в правой части неравенства (2.1.10), вводим в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{r-n} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \right\}$$

и докажем, что $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(r)}$. В работе С. Б. Вакарчука и М. Ш. Шабозова [28] доказано, что для любого алгебраического комплексного полинома $p_n(z) \in B_{q,\gamma}$,

$1 \leq q < \infty$ имеет место точное неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq R^{n-r} \cdot \alpha_{n,r} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \cdot \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{2.1.11}$$

Включение $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(r)}$ сразу вытекает из (2.1.11), поскольку для любого $p_n \in S_{n+1}$ имеем

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq R^{n-r} \cdot \alpha_{n,r} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \cdot \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq 1,$$

а потому, используя определение бернштейновского n -поперечника, получаем

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}, B_{q,\gamma}) &\geq b_n(S_{n+1}, B_{q,\gamma}) \geq \\ &\geq R^{r-n} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{np+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Утверждение теоремы 2.1.1 с учетом (2.1.9) и (2.1.10) вытекает из сопоставления неравенств (2.1.8) и (2.1.12). $\square$

Отметим, что из теоремы 2.1.1 в случае $\gamma(\rho) \equiv 1$ вытекает результат теоремы 2.4 А. Пинкуса [98, с.254], а в случае

$$\gamma(\rho) = \rho^{-1} \cdot (1 - \rho)^{\lambda(1/p-1/q)-1}, \quad 0 < p < q \leq \infty, \quad \min(q, \lambda) \geq 1, \quad R = 1$$

получаем результат С. Б. Вакарчука [23].

2.1.1. Точные верхние грани коэффициентов Тейлора класса функций $W_{q,R}^{(r)}$

В случае приближения периодических функций вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались, например, в работах А. В. Ефимова [36], А. Ф. Тимана [59], Н. П. Корнейчука [40], В. И. Бердышева [13], С. А. Теляковского [58], А. И. Степанца [53] и других. В связи с этим определенный интерес представляет вычисление точных верхних граней коэффициентов Тейлора на различных классах аналитических в круге функций. Рассмотрим аналогичную задачу для коэффициентов $c_n(f)$ разложения

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) z^n,$$

аналитической в круге радиуса $R > 0$ функции $f(z) \in W_{q,R}^{(r)}$, $1 \leq q < \infty$.

Теорема 2.1.2. При выполнении условий теоремы 2.1.1 имеет место следующее равенство

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{q,R}^{(r)} \right\} = \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}, \quad (2.1.13)$$

где $n > r$; $n, r \in \mathbb{N}$; $R \geq 1$, $1 \leq q < \infty$.

Доказательство. Хорошо известно, что для коэффициентов $c_n(f)$ произвольной функции $f \in A(U_R)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \xi^{-(n+1)} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \rho < R.$$

Используя соотношение (2.1.3), для произвольного элемента $f \in W_{q,R}^{(r)}$ запишем интегральное представление

$$\begin{aligned} \rho^n c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\rho e^{it}) - \Lambda_{n-1}^*(f, \rho e^{it})) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta}) e^{ir\theta} G_r(\rho, t - \theta) d\theta \right\} dt. \end{aligned}$$

Из неравенства (2.1.6) сразу следует, что

$$\begin{aligned} \rho^n |c_n(f)| &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta}) e^{ir\theta} G_r(\rho, t - \theta) d\theta \right|^q dt \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_r(\rho, t)| dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(Re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q} \leq \rho^n \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \|f^{(r)}\|_{H_{q,R}}, \end{aligned}$$

где $R \geq 1$. Отсюда и из определения класса $W_{p,R}^{(r)}$ получаем оценка сверху

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{p,R}^{(r)} \right\} \leq \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}. \quad (2.1.14)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} z^n, \quad n > r.$$

Покажем, что $f_0 \in W_{q,R}^{(r)}$. В самом деле, поскольку

$$f_0^{(r)}(z) = R^{r-n} z^{n-r},$$

$$\|f_0^{(r)}\|_{H_{q,R}} = R^{r-n} \|(Rz)^{n-r}\|_{H_q} = \|z^{n-r}\|_{H_q} = 1, \quad n > r,$$

то $f_0 \in W_{q,R}^{(r)}$. Поэтому

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{q,R}^{(r)} \right\} \geq |c_n(f_0)| = \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}. \quad (2.1.15)$$

Сопоставляя неравенства (2.1.14) и (2.1.15), получаем равенство (2.1.13), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.2. $\square$

2.2. Наилучший линейный метод приближения класса $W_q^{(r)}(\Phi)$

Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, где $0 < \rho \leq 1$, $U_1 := U$; $A(U_\rho)$ – множество функций, аналитических в круге U_ρ ; H_q ($1 \leq q \leq \infty$) – пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f, \rho),$$

где

$$M_q(f, \rho) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max \{ |f(\rho e^{it})| : 0 < t \leq 2\pi \}, & q = \infty \end{cases}$$

и интеграл понимается в смысле Лебега.

Известно [52], что норма $\|f\|_{H_q}$ реализуется на угловых граничных значениях $f(e^{it})$ функций $f \in H_q$, которые существуют почти всюду на $[0, 2\pi)$.

Полагаем

$$H_{q,\rho} := \{f \in A(U_\rho) : \|f(\cdot)\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho \cdot)\|_{H_q} < \infty\}$$

и для $r \in \mathbb{Z}_+$

$$H_q^{(r)} := \{f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q\} \quad (H_q^{(0)} \equiv H_q),$$

где

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^k,$$

$$\alpha_{k,r} = k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k \geq r, k \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1,$$

$c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k.$$

Для произвольной функции $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$) запишем модуль гладкости

$$\omega_2(f, 2x)_{H_q} := \sup_{|t| \leq x} \left\| f(e^{i(\cdot+t)}) - 2f(e^{i(\cdot)}) + f(e^{i(\cdot-t)}) \right\|_{H_q}.$$

Пусть $\Phi(t)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$. Используя Φ в качестве мажорирующей функции, рассмотрим классы функций введенных Л.В. Тайковым [57]:

$$W_q^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q, \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2k}\right), k \in \mathbb{N} \right\},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$.

В работе [57, теорема 4] доказано, что если мажоранта $\Phi(t)$ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\lambda\pi} \sin \frac{\lambda\pi}{2}, & \text{если } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), & \text{если } \lambda \geq 2, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

то для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $1 \leq q \leq \infty$ справедливо равенство

$$d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), H_q \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right).$$

Там же доказано, что ограничению (2.2.1) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}$.

Представляет определенный интерес вычисление точных значений перечисленных выше n -поперечников класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространствах $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ и $B_{q,\gamma}$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$.

С этой целью конкретизируем экстремальные подпространства L_n^* , L_*^n , $\bar{L}_{n+1}$ и наилучший линейный метод приближения Λ_{n-1}^* , о котором было сказано в конце первого пункта. Для $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$L_n^* := \text{span} \left\{ \{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \left[\left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} z^k \right]_{k=r}^{n-1} \right\},$$

$$\Lambda_{n-1}^* := \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k(f) z^k, \quad (2.2.2)$$

где

$$\beta_{k,r} := \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int_0^{\pi/2(n-r)} (1 - \sin(n-r)x) \cos(k-r)x dx.$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 2.2.1. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию (2.2.1). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) &= b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) = \\ &= d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = \delta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = \\ &= E \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E} \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_q^{(r)}(\Phi) \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

При этом

1. в случае n -поперечников $d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ и $\delta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right)$ подпространство L_n^* является экстремальным;
2. линейный непрерывный оператор Λ_{n-1}^* является наилучшим для класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;
3. подпространство L_*^n – экстремальное для n -поперечника $d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$;
4. экстремальным для n -поперечника $b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right)$ является подпространство $\bar{L}_{n+1}$.

Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма 2.2.1. Для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$) имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q} \quad (2.2.4)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n$, $n > r$.

Доказательство. Из равенства (2.3) работы [82, случай $s = 0$] следует, что для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$) существует полином $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$, для которого при любых $n \in \mathbb{N}$, $n > r$, $0 < \rho \leq 1$ выполняется неравенство

$$\|f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it})\|_{H_q} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q} \quad (2.2.5)$$

Возведём обе части неравенства (2.2.5) в степени q ($1 \leq q < \infty$), умножим на $\rho\gamma(\rho)$ и интегрируем по ρ на отрезке $[0, 1]$, затем полученное соотношение возведём в степень $1/q$ ($1 \leq q < \infty$). В итоге получаем

$$\|f - p_{n-1}\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}$$

Отсюда сразу следует требуемое неравенство (2.2.4). Точность неравенства (2.2.4) для функции $f_0(z) = z^n$ проверяется непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство леммы 2.2.1. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.1. В работе [57, с.288] Л.В. Тайковым было доказано, что для любой функции $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$) справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{H_q} \leq \frac{n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f, 2t)_{H_q} dt \quad (2.2.6)$$

и знак равенства достигается для $f_0(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если в (2.2.6) заменить число n на $n - r$ и функцию f заменить на производную $f^{(r)} \in H_q$, то для любой функции $f \in H_q^{(r)}$ имеем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q} \leq \frac{n-r}{\pi - 2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt. \quad (2.2.7)$$

Учитывая (2.2.7), неравенства (2.2.4) запишем в виде

$$E_{n-1}(f)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \frac{n-r}{\pi - 2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_q} dt. \quad (2.2.8)$$

Из (3.2.8) в предположении $f \in W_q^{(r)}(\Phi)$ следует неравенство

$$E_{n-1}(f)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right).$$

Отсюда, в силу соотношения (0.0.8) получим оценку сверху для бернштейновского и колмогоровского n -поперечников

$$\begin{aligned} b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) &\leq d_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) \leq E_{n-1} \left(W_q^{(r)}(\Phi) \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

С целью получения аналогичной оценки сверху для линейного n -поперечника воспользуемся результатом, полученным С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [27, с.324], где доказано, что для произвольной функции $f \in W_q^{(r)}(\Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty$) при любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \leq 1$ имеет место неравенство

$$\left\| f(\rho e^{i(\cdot)}) - \Lambda_{n-1}^*(f, \rho e^{i(\cdot)}) \right\|_{H_q} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right),$$

откуда, как и выше получаем оценку сверху для линейного n -поперечника

$$\begin{aligned} \delta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) &\leq \mathcal{E}_{n-1} \left(W_q^{(r)}(\Phi) \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1}^*(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_q^{(r)}(\Phi) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Из (2.2.9) и (2.2.10) следует оценка сверху n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ и $\delta_n(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) &\leq \\ &\leq E_{n-1} \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \mathcal{E}_{n-1} \left(W_q^{(r)}(\Phi); L_n^* \right)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

где $\lambda(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ или $\delta_n(\cdot)$.

Известно [98, гл. II, §3], что если X и Y – линейные нормированные пространства и X является подпространством Y ($X \subset Y$), то $d^n(\mathfrak{N}, X) = d^n(\mathfrak{N}, Y)$, где $\mathfrak{N} \subset X$. Исходя из этого, мы можем записать

$$d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) = d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right). \quad (2.2.12)$$

Используя определение бернштейновского n -поперечника, имеем

$$b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma} \right) \geq b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \quad (2.2.13)$$

и в силу соотношения (0.0.8) для завершения доказательства теоремы достаточно установит неравенство

$$b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right).$$

С этой целью введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathbb{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}$$

и докажем принадлежность шара $\mathbb{S}_{n+1} \subset W_q^{(r)}(\Phi)$. Введем также обозначение

$$(1 - \cos nx)_* := \begin{cases} 1 - \cos nx, & \text{если } 0 < nx \leq \pi; \\ 2, & \text{если } nx > \pi. \end{cases}$$

В [55] для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ доказано неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r} \|p_n\|_{H_q}, \quad n > r, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.2.14)$$

Нам также понадобится следующее неравенство

$$\rho^{nq} \|p_n\|_{H_q}^q \leq M_q^q(p_n, \rho) \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1), \quad (2.2.15)$$

которое вытекает из неравенства

$$\int_{|z|=1} |p_n(z)|^q |dz| \leq \rho^{-(nq+1)} \int_{|z|=\rho} |p_n(z)|^q |dz|$$

доказанного Н.И. Хилом, Г. Сеге и Я.Д. Тамаркиным (см., например, [88]). Умножив обе части (2.2.15) на $\rho\gamma(\rho)$ и проинтегрировав полученное соотношение по ρ на отрезке $[0, 1]$, получаем

$$\left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot \|p_n\|_{H_q} \leq \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

откуда

$$\|p_n\|_{H_q} \leq \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \cdot \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (2.2.16)$$

Для принадлежности шара $\mathbb{S}_{n+1}$ классу $W_q^{(r)}(\Phi)$ воспользуемся неравенством

$$\omega_2(p_n^{(r)}, 2t)_{H_q} \leq 2\alpha_{n,r}(1 - \cos(n-r)t)_* \cdot \|p_n\|_{H_q}. \quad (2.2.17)$$

вытекающее из одного результата Л.В. Тайкова [57]. Рассмотрим два случая: $2k \geq n-r$ и $2k < n-r$. Пусть, например, $2k \geq n-r$. Для произвольного полинома $p_n \in \mathbb{S}_{n+1}$ в силу (2.2.16) и (2.2.17) запишем

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(p_n^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \\ & \leq 2\alpha_{n,r} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \cdot \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \cdot \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} (1 - \cos(n-r)t) dt \leq \\ & \leq \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{2k}{\pi(n-r)} \cdot \sin \frac{\pi(n-r)}{2k} \right) \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Используя (2.2.18) и первое из ограничения (2.2.1), где

$$t = \frac{\pi}{2(n-r)}, \quad \lambda = \frac{n-r}{k}, \quad \lambda t = \frac{\pi}{2k} \quad (2.2.19)$$

получим

$$\frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(p_n^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq \Phi \left(\frac{\pi}{2k} \right). \quad (2.2.20)$$

Рассмотрим теперь случай $2k < n-r$. В этом случае, воспользовавшись (2.2.17) и (2.2.16) для произвольного $p_n \in \mathbb{S}_{n+1}$ имеем

$$\frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(p_n^{(r)}, 2t)_{H_q} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \frac{k}{\pi-2} \left(\int_0^{\pi/(n-r)} 2(1 - \cos(n-r)t) dt + \int_{\pi/(n-r)}^{\pi/(2k)} 4dt \right) = \\
&= \frac{2\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{k}{n-r} \right) \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right). \tag{2.2.21}
\end{aligned}$$

Учитывая обозначения (2.2.19) и второе ограничение (2.2.1) из (2.2.22) получим соотношение (2.2.20) и тем самым включение $\mathbb{S}_{n+1} \subset W_q^{(r)}(\Phi)$ доказано. Но тогда из определения бернштейновского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned}
&b_n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \geq b_n(\mathbb{S}_{n+1}, B_{q,\gamma}) \geq \\
&\geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

Сопоставляя соотношения (2.2.11) и (2.2.22) получаем требуемое равенства (2.2.3).

Из хода доказательства теоремы следует, что подпространство L_n^* является экстремальным для класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ в случае точных значений колмогоровского $d_n(\cdot)$ и линейного $\delta_n(\cdot)$ – n -поперечника, а подпространства $\bar{L}_{n+1}$ – экстремальным для бернштейновского n -поперечника $b_n(\cdot)$. Линейный непрерывный оператор Λ_{n-1}^* , определенный равенством (2.2.2) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$. Из последней цепочки неравенств (2.2.10) для произвольной функции $f \in W_q^{(r)}(\Phi)$, в частности, следует, что в случае $c_k(f) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$ в силу определения гельфандовского n -поперечника

$$\begin{aligned}
&d^n \left(W_q^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \leq \sup \left\{ \|f\|_{B_{q,\gamma}} : f \in W_q^{(r)}(\Phi) \cup L_*^n \right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \tag{2.2.23}
\end{aligned}$$

Сопоставляя неравенств (2.2.22) и (2.2.23) и принимая во внимание соотношения (0.0.8), убедимся, что подпространство L_*^n коразмерности n является экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d_n(\cdot)$. Теорема 2.2.1 доказана. $\square$

2.3. Наилучший линейный метод приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$

В этом параграфе, мы построим наилучший линейный метод приближения функций класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ и с его помощью докажем, что полученные в теореме 1.2.1 результаты справедливы также для гельфандовских и линейных n -поперечников. С этой целью для произвольной функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in A(U)$$

запишем линейный полиномиальный оператор $(n-1)$ -й степени

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z) &:= c_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \mu n \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt \cdot \cos \mu n t dt, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теорема 2.3.1. *Если при заданном $\mu \geq 1$, любых $h \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (1.2.1), то для произвольных $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} d^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \delta_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{E}(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}, \mathcal{P}_{n-1})_{B_{q,\gamma,R}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} \right\} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

При этом линейный полиномиальный оператор (2.3.1) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$.

Доказательство. Введём обозначения

$$V_{n-1,r-1,R}(f, z) := c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k,$$

$$G_{n-1,r-1}(R, t) := \frac{1}{2n^{r-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \frac{\cos kt}{(n+k)^{r-1}}. \quad (2.3.3)$$

Применяя лемму 2.2 из [98, с.251], легко убедимся, что при всех $t \in [0, 2\pi]$ и $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$ функция $G_{n-1,r-1}(R, t) \geq 0$. Легко проверить, что для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ имеет место интегральное представление разности

$$\begin{aligned} f(Rz) - V_{n-1,r-1,R}(f, Rz) = \\ = \frac{R^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} f_a^{(r-1)}(ze^{-it}) e^{int} G_{n-1,r-1}(R, t) dt, \quad z \in U. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

В справедливости равенства (2.3.4) также можно убедиться, если подынтегральной функции $f_a^{(r-1)}(ze^{-it})$ разложить в ряд Тейлора, умножать на ряд (2.3.3) и почленно интегрировать по переменной t на отрезке $[0, 2\pi]$. Полагая в правой части функции (1.1.3) $u = \pi/(2\mu n)$, $\mu \geq 1$ и разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, имеем

$$\mathfrak{F}(f, z) := \frac{\mu n}{2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \{f(ze^{it}) + f(ze^{-it})\} \cos \mu n t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,n} c_k(f) z^k. \quad (2.3.5)$$

Из (2.3.5) сразу вытекает, что

$$\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,n} (ik)^{r-1} c_k(f) z^k.$$

Представим линейный оператор (2.3.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z) &= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} R^{2(n-k)} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right\} \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \gamma_{k,n} c_k z^k := \\ &:= V_{n-1,r-1,R}(f, z) + \Lambda_{n-1,r-1,R}(f, z). \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1,r-1,R}(f, z) &= \\ &= \frac{R^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} V_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F} \left(f_a^{(r-1)} \right), ze^{-it} \right) e^{int} G_{n-1,r-1}(R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.4) и (2.3.6) следует, что

$$\begin{aligned} f(Rz) - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, Rz) &= \\ &= \frac{R^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r-1)}(ze^{-it}) - V_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F} \left(f_a^{(r-1)} \right) \right), ze^{-it} \right\} e^{int} G_{n-1,r-1}(R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Учитывая определение нормы в $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$), применив обобщённое неравенство Минковского, вследствие положительности ядра (2.3.3) из (2.3.7) получаем

$$\begin{aligned} &\|f(R\cdot) - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{R^n}{n^{r-1}} \|f_a^{(r-1)} - V_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}) \right)\|_{B_{q,\gamma}}, \quad 0 < R \leq 1. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\begin{aligned} &\|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ &\leq \frac{R^n}{n^{r-1}} \left\{ \|f_a^{(r-1)} - \mathfrak{F}(f_a^{(r-1)})\|_{B_{q,\gamma}} + \|\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}) \right)\|_{B_{q,\gamma}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Заменив в неравенстве (2.3.8) функцию f на $f^{(r-1)}$, полагая в нём $u = \pi/(2\mu n)$ и воспользовавшись определением модуля непрерывности (??) в пространстве $B_{q,\gamma}$, получаем

$$\begin{aligned} &\|f_a^{(r-1)} - \mathfrak{F}(f_a^{(r-1)})\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \cdot \{1 - \sin \mu n \tau\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Чтобы оценить второе слагаемое в правой части неравенства (2.3.8), следуя схеме рассуждений, приведенной в работе Н. Айнуллоева и Л. В. Тайкова [2],

будем считать функцию $\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ алгебраическим полиномом $p_n(z)$ некоторой степени n . Так как множества всех полиномов всюду плотно в $B_{q,\gamma}$ [74], то проводимые в дальнейшем математические операции над функцией $\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)})$ будем считать корректными. Воспользовавшись равенством [20]

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}, z) - V_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}), z) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}_a''(f_a^{(r-1)}, ze^{-it}) G_{n-1,2}(1, t) dt, \end{aligned}$$

применив обобщённое неравенство Минковского и используя неотрицательность и интегрируемость функции (2.3.3), получаем

$$\|\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}, z) - V_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-2} \|\mathfrak{F}_a''(f_a^{(r-1)})\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (2.3.10)$$

Заменив в неравенстве (1.1.11) функцию f_a' на $f_a^{(r-1)}$, полагая в нём $u = \frac{\pi}{2\mu n}$, $\mu \geq 1$ и учитывая определение модуля непрерывности, имеем

$$n^{-2} \|\mathfrak{F}_a''(f_a^{(r-1)})\|_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \sin \mu n \tau d\tau. \quad (2.3.11)$$

Таким образом, для второго слагаемого в правой части (2.3.8) с учётом (2.3.10) и (2.3.11) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}, z) - V_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau) \sin \mu n \tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Из (2.3.8) в силу неравенств (2.3.9) и (2.3.12) запишем

$$\begin{aligned} & \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ & \leq \frac{R^n}{2n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n \tau\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Учитывая определение класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$, из (2.3.13) получаем:

$$\begin{aligned} & \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ & \leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n \tau\} d\tau \right) \leq \quad (2.3.14) \\ & \leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Докажем, что существует функция $f_0 \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$, удовлетворяющая условию (1.2.1), для которой в (2.3.14) достигается равенство. Рассмотрим функцию

$$f_0(z) := \frac{\pi}{4\mu(in)^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{B_{q,\gamma}}}$$

и покажем, что $f_0 \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. При доказательстве теоремы 1.3.1 мы показали, что $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathcal{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \right\}$$

принадлежит классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. Поскольку

$$\|f_0\|_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

то функция $f_0 \in \mathcal{S}_{n+1}$. Следовательно, $f_0(z)$ удовлетворяет ограничению (1.2.1) и принадлежит классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$. Так как, кроме того, в силу (2.3.1)

$$\mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f_0, z) \equiv 0,$$

то мы имеем

$$\|f_0 - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f_0)\|_{B_{q,\gamma,R}} = \|f_0\|_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

а потому

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right)_{B_{q,\gamma,R}} = \\ & = \sup \left\{ \|f - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \right\} = \quad (2.3.15) \\ & = \|f_0 - \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f_0)\|_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Равенство (2.3.15) означает, что линейный полиномиальный оператор (2.3.1) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$. Из (2.3.15) следует оценка сверху для линейного n -поперечника:

$$\begin{aligned} \delta_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &\leq \\ &\leq \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), \mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}, \mathcal{P}_n \right) = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Аналогичную оценку сверху получим для гельфандовского n -поперечника. В самом деле, для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \cap L_*^n$ в силу (2.3.7) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

запишем

$$\begin{aligned} f(R\rho e^{it}) &= \frac{R^n e^{in\tau}}{\pi i^{r-1}} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r-1)}(\rho e^{-i\theta}) - V_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r-1)}) \right), \rho e^{i\theta} \right\} e^{-in\theta} G_{n-1,r-1}(R, \tau - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Из (0.0.8), (2.3.14), (2.3.16), (2.3.17) и определения гельфандовского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned} d^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &\leq \\ &\leq \sup \left\{ \|f\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu) \cap L_*^n \right\} \leq \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Сопоставляя (2.3.16), (2.3.18) с неравенствами оценка снизу (1.2.10), в силу соотношения (0.0.8) между n -поперечниками, получаем требуемые равенства (2.3.2), причём подпространство

$$L_*^n = \left\{ f : f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

коразмерности n является экстремальным для гельфандовского n -поперечника.

Теорема 2.3.1 полностью доказана. $\square$

2.4. Наилучший линейный метод приближения для класса

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$$

Рассмотрим наилучший линейный метод приближения функций класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ и, следуя схеме рассуждений, приведённой в [103], распространим полученные в теореме 1.2.2 результаты для всех рассматриваемых в работе n -поперечников.

Для произвольной функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in A(U)$$

запишем линейный полиномиальный оператор $(n-1)$ -й степени следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) = c_0 + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kx (1 - \sin \mu n x) dx. \quad (2.4.2)$$

Теорема 2.4.1. *Если при заданном $\mu \geq 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ и любых $h \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi_2(h)$ удовлетворяет ограничению (1.2.13), то для произвольных $r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right) = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right\} = \\ &= \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$ определён равенством (2.4.1) При этом:

- a) $L_{n+1}^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ является оптимальным подпространством для бернштейновского n -поперечника $b_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- b) $L_n^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n -поперечника $d_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- c) $L_*^n := \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ является оптимальным подпространством коразмерности для гельфандовского n -поперечника $d^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$;
- d) линейный полиномиальный оператор (2.4.1) является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$ и реализует линейный n -поперечник $\delta^n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right)$.

Доказательство. Утверждение а) и б) следуют из предыдущей теоремы 1.2.2 параграфа 1.4, а потому приведём доказательство остальных утверждений сформулированной теоремы 2.4.1.

Для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ непосредственным вычислением получаем равенство

$$\begin{aligned} f(Rz) - \Lambda_{n-1,r,R}(f, Rz) &= \\ &= \frac{R^n}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} f_a^{(r)}(ze^{-it}) e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt, \quad z \in U, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

где

$$\Lambda_{n-1,r,R}(f, z) := c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k,$$

$$G_{n-1,r}(R, t) := \frac{1}{n^r} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R^k \frac{\cos kt}{(n+k)^r}. \quad (2.4.5)$$

Легко проверить, что числовая последовательность $\{R^k(n+k)^{-r}\}$ является выпуклой и, согласно лемме 2.2 из [98, с.251], при всех $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$ и

$t \in [0, 2\pi]$ функция $G_{n-1,r}(R, t) \geq 0$, а потому из (2.4.5) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{n-1,r}(R, t) dt = \frac{1}{n^r}. \quad (2.4.6)$$

Далее, полагая в правой части функции (1.1.18) $u = \pi/(2\mu n)$ ($\mu \geq 1/2$), приходим к следующему равенству

$$\mathfrak{F}(f, z) = \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \{f(ze^{it}) + f(ze^{-it})\} (1 - \sin \mu n t) dt, \quad z \in U. \quad (2.4.7)$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, запишем (2.4.7) в виде

$$\mathfrak{F}(f, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,n} c_k(f) z^k, \quad (2.4.8)$$

где коэффициенты $\gamma_{k,n}$ определены равенством (2.4.2). Из (2.4.8) сразу следует, что

$$\mathfrak{F}(f_a^{(r)}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,n} (ik)^r c_k(f) z^k.$$

Представим линейный полиномиальный оператор (2.4.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) &:= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} R^{2(n-k)} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right\} \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r \gamma_{k,n} c_k(f) z^k := \\ &:= \Lambda_{n-1,r,R}(f, z) + \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, Rz) = \frac{R^n}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), ze^{it}) e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt. \quad (2.4.10)$$

Тогда из (2.4.4), (2.4.9) и (2.4.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} f(Rz) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, Rz) &= \\ &= \frac{R^n}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r)}(ze^{-it}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), ze^{-it}) \right\} e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Учитывая определение нормы в $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ и применив обобщённое неравенство Минковского с учётом равенства (2.4.6) из (2.4.11) получим

$$\begin{aligned} & \|f(R\cdot) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{R^n}{n^r} \left\| f_a^{(r)} - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{B_{q,\gamma}}, \quad 0 < R \leq 1. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} & \|f(R\cdot) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{R^n}{n^r} \left\{ \left\| f_a^{(r)} - \mathfrak{F} \left(f_a^{(r)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} + \left\| \mathfrak{F} \left(f_a^{(r)} \right) - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Заменив в неравенстве (1.1.19) функцию f на $f_a^{(r)}$, полагая в нём $u = \pi/(2\mu n)$, сразу получаем

$$\begin{aligned} & \|f_a^{(r)} - \mathfrak{F}(f_a^{(r)})\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ & \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} (1 - \sin \mu n t) dt. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Воспользовавшись легко проверяемым равенством

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F} \left(f_a^{(r)} \right) - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), z \right) = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}_a'' \left(f_a^{(r)}, ze^{-it} \right) G_{n-1,2}(1, t) dt = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{F} \left(f_a^{(r+2)}, ze^{-it} \right) G_{n-1,2}(1, t) dt, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

применив обобщённое неравенство Минковского к (2.4.14) и используя равенство (2.4.5) при $R = 1$ и $r = 2$ с учётом (2.4.6), получаем

$$\left\| \mathfrak{F} \left(f_a^{(r)} \right) - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-2} \left\| \mathfrak{F}'' \left(f_a^{(r)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (2.4.15)$$

Учитывая определение функции $\mathfrak{F}$ в равенстве (2.4.7) и дважды интегрируя по частям на основании неравенства Минковского, приходим к следующему

продолжению оценки неравенства (2.4.15)

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} &\leq n^{-2} \left\| \mathfrak{F} \left(f_a^{(r+2)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{\mu^3 n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \sin \mu n t dt. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Из неравенств (2.4.12)-(2.4.16) для любой функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \\ &\leq \frac{\mu n R^n}{(\pi - 2)n^r} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt = \\ &= \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Теперь докажем, что существует функция $g_0 \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$, удовлетворяющая ограничению (1.2.13), для которой неравенство (2.4.17) обращается в равенство. Рассмотрим функцию

$$g_0(z) := \frac{\pi}{2(\pi - 2)(in)^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{q,\gamma}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При доказательстве теоремы 1.3.2 было установлено, что $(n+1)$ -мерный шар полиномов радиуса, равный правой части (2.4.17), принадлежит классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ и так как

$$\|g_0(z)\|_{q,\gamma,R} := \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

то g_0 принадлежит шару $\mathcal{S}_{n+1}$, и следовательно, g_0 удовлетворяет ограничению (1.2.13) и принадлежит классу $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$. Так как, кроме того, из представления (2.4.1) следует, что $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0, z) \equiv 0$, то имеет место равенство

$$\|g_0(z) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0)\|_{q,\gamma,R} := \|g_0(z)\|_{q,\gamma,R} = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

а потому

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E} \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu); \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right)_{q,\gamma,R} := \\
& = \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{q,\gamma,R} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \right\} = \\
& = \|g_0(z) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0)\|_{q,\gamma,R} := \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right).
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Полученное равенство означает, что линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)$, определённый равенством (2.4.1), является наилучшим линейным методом приближения класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$. Из (2.4.18) сразу следует оценка сверху для линейного n -поперечника

$$\delta_n \left(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \tag{2.4.19}$$

Точно такую же оценку получим для гельфандовского n -поперечника. В самом деле, для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \cap L_*^n$ в силу (2.4.11) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

запишем равенство

$$\begin{aligned}
& f(R\rho e^{it}) = \frac{R^n}{2\pi i^r} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r)}(\rho e^{-i\theta}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), \rho e^{-i\theta}) \right\} e^{-in\theta} G_{n-1,r}(R, t - \theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Из (0.0.8), (2.4.17), (2.4.20) и определения гельфандовского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned}
& d^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \leq \\
& \leq \sup \left\{ \|f\|_{q,\gamma,R} : f \in \mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu) \cup L_*^n \right\} \leq \\
& \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \cdot \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right).
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Сравнивая неравенства (2.4.19), (2.4.21) с неравенствами снизу (1.2.19), в силу соотношения (0.0.8) получаем требуемые равенства (2.4.3), причём подпространство

$$L_*^n := \left\{ f : f \in B_{q,\gamma}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

коразмерности n является экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu))$. Теорема 2.4.1 полностью доказана. $\square$

2.5. Наилучший линейный метод приближения для класса

$$W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$$

В данном параграфе будем обобщать результат С. Б. Вакарчука приведенной в работе [23] для класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ на весовых пространствах $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ и $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty$).

Пусть $\Phi(u)$ ($u \geq 0$) – произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя Φ в качестве мажоранты введём в рассмотрении классы аналитических функций

$$W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu) := \left\{ f \in A(U_R), f_a^{(r)} \in H_{q,R} : \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^x \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2x} \right) \right] dt \leq \Phi(x), x \in (0, \pi/2] \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ ($\mu \geq 1$) – произвольные фиксированные числа.

В [3] доказано, что если при некотором $\mu \geq 1$ для произвольных чисел $x \in (0, \pi/2]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(\pi/2n\mu)} \geq nx \int_0^1 (\sin xnt)_* [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt, \quad (2.5.1)$$

где $(\sin x)_* := \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in [0, \pi/2]; \\ 1, & \text{если } x \geq \pi/2 \end{cases}$,

то при всех $r \geq 2$

$$b_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi, \mu); H_q) = d_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi, \mu); H_q) = \frac{1}{n^{r-1}} \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right). \quad (2.5.2)$$

Там же доказано, что одним из примеров мажоранты, для которой выполняется ограничение (2.5.1), является функция $\Phi(x) = x^{\beta(\mu)}$, где

$$\beta(\mu) := 1 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 \int_0^1 t \cos(\pi t/2\mu) [1 + (\mu^2 - 1) \sin(\pi t/2)] dt.$$

В частности, $\beta(1) = \pi/2$ и для любого $\mu \in [1, \infty)$, $\pi/2 \leq \beta(\mu) < 2$.

С. Б. Вакарчук [23] распространил результат (2.5.2) на более общий случай

$$\lambda_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi, \mu); H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(U_R)$ положим

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1,r-1}(f, z) = \\ = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2(n-k)} \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

где

$$0 < \rho \leq R, \quad \gamma_k := \mu n \int_0^{\pi/(2n\mu)} \cos(kt) \cos(n\mu t) dt. \quad (2.5.4)$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение

Лемма 2.5.1. Пусть f – произвольная функция из класса $H_{q,R,a}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$). Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leq \\ \leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} [1 + (\mu^2 - 1) \sin(n\mu t)] dt, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

которая для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R,a}^{(r)}$ обращается в равенство.

Доказательство. Введём следующие обозначения

$$V_{n-1,r-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n-1} c_k z^k,$$

где

$$\lambda_{k,n-1} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2(n-k)}, & \text{если } k = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

и

$$G_{n-1,r-1}(\rho/R, t) := \frac{1}{n^{r-1}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k}{(n+k)^{r-1}} \cos kt, \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 2.$$

Учитывая выпуклость вниз числовой последовательности $\{(\rho/R)^k/(n+k)^{r-1}\}_{k=0}^{\infty}$ и тот факт, что её общий член стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, в силу леммы 2.3 из [98, с.251-252] заключаем, что функция $G_{n-1,r-1}(\rho/R, t)$ является неотрицательной при всех $0 < \rho \leq R$ и $t \in (0, 2\pi]$ и интегрируемой по $t \in (0, 2\pi]$. При этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{n-1,r-1}(\rho/R, t) dt = \frac{1}{n^{r-1}}. \quad (2.5.6)$$

Повторяя схему рассуждений работы [20, с.9], для произвольной функции $f \in H_{q,R,a}$ запишем равенство

$$\begin{aligned} f(\rho z) - V_{n-1,r-1}(f, \rho z) &= \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} f_a^{(r-1)}(Rze^{-it}) e^{int} G_{n-1,r-1}(\rho/R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Далее в качестве промежуточного приближения функции f как и в [2] воспользуемся функцией

$$\mathcal{F}_u(f, z) := \frac{\pi}{4u} \int_0^u [f(ze^{it}) + f(ze^{-it})] \cos\left(\frac{\pi t}{2u}\right) dt.$$

Полагая $u = u_* := \pi/(2n\mu)$ и разлагая подинтегральную функцию f в степенной ряд Тейлора имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f, z) &:= \mathcal{F}_{u_*}(f, z) = \\ &= \frac{n\mu}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} [f(ze^{it}) + f(ze^{-it})] \cos(n\mu t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k c_k z^k, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

где константа γ определено а (2.5.4). Пользуясь равенством

$$f_a^{(r-1)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^{r-1} c_k z^k$$

из (2.5.8) получаем

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (ik)^{r-1} c_k z^k.$$

Пусть

$$V_{n-1,r-1}^*(f, z) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \gamma_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2(n-k)} c_k z^k. \quad (2.5.9)$$

Непосредственной вычислением можно убедиться в справедливости интегрального представления

$$\begin{aligned} V_{n-1,r-1}^*(f, \rho z) = \\ = \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), Rze^{-it}) e^{int} G_{n-1,r-1}(\rho/R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Положим

$$\Lambda_{n-1,r-1}(f, z) := V_{n-1,r-1}(f, z) + V_{n-1,r-1}^*(f, \rho z).$$

Учитывая равенств (2.5.7) и (2.5.10) имеем

$$\begin{aligned} f(\rho z) - \Lambda_{n-1,r-1}(f, \rho z) = \\ = \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r-1)}(Rze^{-it}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), Rze^{-it}) \right\} e^{int} \times \\ \times G_{n-1,r-1}(\rho/R, t) dt. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Применив к разности (2.5.11) обобщённое неравенство Минковского и учитывая равенство (2.5.6) получаем

$$\begin{aligned} \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} &\leq \\ &\leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \|f_a^{(r-1)} - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{H_{q,R}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \left\{ \|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_{H_{q,R}} + \|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_{H_{q,R}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Оценим каждую из норм слагаемых в правой части (2.5.12). В силу [2, с.343] запишем оценку сверху первого слагаемого

$$\|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_{H_{q,R}} \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} [1 - \sin(n\mu t)] dt. \quad (2.5.13)$$

Второе слагаемого в правой части (2.5.12) оценим как и в [2], считая, что $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ является алгебраическим полиномом некоторой степени m , то есть $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) \in \mathcal{P}_m$. Поскольку множество $\mathcal{P}_m$ всюду плотно в пространстве $H_{q,R}$, то приводимые далее математические операции над функции $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ являются корректными. Используя (2.5.7), где $\rho = R$ и в левой части равенства вместо функции $f(Rz)$ стоит $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz)$, а полиномиальный оператор имеет вид $V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz))$, запишем

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, Rz)) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)}, Rze^{-it}) G_{n-1,2}(1, t) dt. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Применив к (2.5.14) обобщённое неравенство Минковского и учитывая равенство (2.5.6) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)})) \right\|_{H_{q,R}} \leq \\ & \leq \frac{1}{n^2} \left\| \mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)}) \right\|_{H_{q,R}} = \frac{1}{n^2} \left\| \mathcal{F}_a^{(1)}(f_a^{(r)}) \right\|_{H_{q,R}}. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Чтобы оценить норму в правой части (2.5.15) в первой части формулы (2.5.8) вместе f полагаем $f_a^{(r-1)}$, продифференцируем обе его части по аргументу z и выполним в правой части полученного соотношения по аналогии с [2] интегрирование по частям, затем применив снова упомянутого неравенства Минковского, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)})) \right\|_{H_{q,R}} \leq \\ & \leq \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \sin(n\mu t) dt. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Из неравенств (2.5.12), (2.5.13) и (2.5.16) для произвольной функции $H_{q,R,a}^{(r)}$ следует неравенство (2.5.5). Непосредственным вычислением убедимся, что на функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R,a}^{(r)}$ неравенство (2.5.5) обращается в равенство, чем и завершаем доказательство леммы 2.5.1. $\square$

Имеет место следующая

Теорема 2.5.1. Если при заданном $\mu \geq 1$, любых $0 < x \leq \pi/2$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет ограничению (2.5.1), то для произвольных $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$ справедливы равенства

$$\lambda_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), H_{q,\rho}) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right), \quad (2.5.17)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\delta_n(\cdot)$. При этом линейный оператор $\Lambda_{n-1,r-1}(f)$ определённый равенством (2.5.3) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в метрике пространство $H_{q,\rho}$.

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ из неравенство (2.5.5) получаем

$$\begin{aligned} & \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{2n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} [1 + (\mu^2 - 1) \sin(n\mu t)] dt \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Из (2.5.18) следует оценка сверху линейного n -поперечника

$$\delta(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu); H_{q,\rho}) \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (2.5.19)$$

Для получения аналогичной оценки снизу бернштейновского n -поперечника достаточно установить, что $(n+1)$ -мерный сфера полиномов

$$S_{n+1} := \left\{ p_n(z) : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \right\}$$

содержится в классе $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$.

Известно (см. [98, с.252]), что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ выполняется неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq R^n n^r \|p_n\|_{H_q}, \quad (2.5.20)$$

а также (см, например, [88]) для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любом $\rho \in (0, 1]$ имеет место неравенство

$$\rho^n \|p_n\|_{H_q} \leq \|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \quad (2.5.21)$$

В качестве следствия из (2.5.20) и (2.5.21) имеем

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \quad (2.5.22)$$

Учитывая неравенство

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \leq 2(\sin nt)_* \cdot \|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{q,R}}, \quad (2.5.23)$$

вытекающего из одного результата [2] в силу (2.5.22) запишем

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \cdot \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \cdot 2(\sin nt)_*. \quad (2.5.24)$$

Обе части неравенство (2.5.24) умножим на $2^{-1} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x}\right]$ и интегрируем по t в пределах от 0 до x , затем заменяя норму полинома по формуле радиуса сферы S_{n+1} с учётом ограничения (2.5.1) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^x \omega(p_{n,a}^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x}\right] dt \leq \\ & \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^n n^r \cdot \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \int_0^x (\sin nt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x}\right] dt = \\ & = xn \int_0^1 (\sin xnt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] dt \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \leq \Phi(x), \end{aligned}$$

из которого следует включение $S_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$. Поэтому в силу определения бернштейновского n -поперечника запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); H_{q,\rho}) & \geq b_n(S_{n+1}, H_{q,\rho}) = \\ & = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Сопоставляя неравенств (2.5.19) и (2.5.25) с соотношениями (0.0.8) между n -поперечниками получаем требуемое равенство (2.5.17).

Заметим, что для функции $f_1(z) = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) z^n$ имеем

$$\Lambda_{n-1,r-1}(f_1) \equiv 0, \quad \|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right),$$

а потому $f_1 \in S_{n+1}$, а значить $f_1 \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ и так как

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\| : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \right\} = \\ & = \|f_1 - \Lambda_{n-1,r-1}(f_1)\|_{H_{q,\rho}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right), \end{aligned}$$

то $\Lambda_{n-1,r-1}(f)$ является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в $H_{q,\rho}$. Теорема 2.5.1 доказана. $\square$

Теорема 2.5.2. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \geq 1$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2.5.1). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) = b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ & = d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) = d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ & = d_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \delta_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ & = E(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E}(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ & = \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \right\} = \\ & = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

При этом:

1) подпространство

$$\mathcal{L}_n^* :=$$

$$= \text{span} \left\{ 1; \left\{ R^{2(n-k)} + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \rho^{2(n-k)} \right\}_{k=1}^{n-1} \right\},$$

является экстремальным для n -поперечников $d_n(\cdot)$ и $\delta_n(\cdot)$ класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор $\Lambda_{n-1,r-1}(f)$ определённый равенством (2.5.3) является наилучшим для класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ линейным методом приближения в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$;

3) подпространство

$$\mathcal{L}_*^n := \{f \in B_{q,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}\}$$

является экстремальным для гельфандовского n -поперечника $d^n(\cdot)$;

4) экстремальным для n -поперечника $b_n(\cdot)$ является подпространство

$$\mathcal{P}_n := \text{span}\{1, z, z^2, \dots, z^n\}.$$

Доказательство. В силу принятых обозначений и определения пространство $H_{q,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ в первом пункте первой главы, имеем

$$\|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{H_{q,\rho}} = M_q(\rho, f - \Lambda_{n-1,r-1}(f))$$

пользуясь которой неравенство (2.5.18) запишем в виде

$$M_q(\rho, f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)) \leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right). \quad (2.5.27)$$

Возведя обе части неравенство (2.5.27) в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), умножая на $\rho\gamma(\rho)$ и проинтегрировав полученное соотношение по ρ на отрезке $[0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(\rho, f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)) d\rho \right)^{1/q} \leq \\ & \leq \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

или что тоже

$$\|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}, \quad (2.5.28)$$

причём легко проверить, что (2.5.28) обращается в равенство для рассмотренной нами выше функции $f_1 \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \cap \mathcal{L}_{q,\gamma}$. Учитывая соотношения (0.0.8) между n -поперечниками и неравенства (2.5.28) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) &\leq \delta_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) \leq \\ &\leq \mathcal{E}(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \Lambda_{n-1,r-1}(f))_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} = \\ &= \sup \left\{ \|f - \Lambda_{n-1,r-1}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \right\} = \\ &= \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

где под $\lambda_n(\cdot)$ подразумевается любой из ранее перечисленных n -поперечников.

При этом надо учитывать, что

$$\begin{aligned} d_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) &\leq E(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_n^*)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \mathcal{E}(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_n^*)_{\mathcal{L}_{q,\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Следует также учитывать хорошо известный факт (см., например, [92, гл. II, §3, предложение 3.2]), что если X и Y – линейные нормированные пространства и X является подпространством Y , то

$$d^n(A, X) = d^n(A, Y),$$

где $A \subset X$. В силу этого, запишем

$$d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) = d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}). \quad (2.5.31)$$

Используя определение бернштейновского n -поперечника, имеем

$$b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{q,\gamma}) \geq b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}). \quad (2.5.32)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ докажем, что $(n+1)$ -мерная сфера полиномов

$$\sigma_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} \right\}$$

принадлежит классу $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$. С этой целью заметим, что если записать неравенство (2.5.21) в виде

$$\rho^n \|p_n\|_{H_q} \leq M_q(p_n, \rho)$$

и возвести обе части последнего неравенство в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), умножив на $\rho\gamma(\rho)$ и интегрировать по ρ на отрезке $[0, 1]$, то получаем

$$\left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} \cdot \|p_n\|_{H_q} \leq \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

или что тоже

$$\|p_n\|_{H_q} \leq \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}.$$

Учитывая последнее неравенство из (2.5.20) имеем

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq R^n n^r \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}$$

и в силу (2.5.23) будем иметь

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \leq R^n n^r \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \cdot 2(\sin nt)_*.$$

Умножая обе части полученного неравенства на $2^{-1} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x}\right]$ и интегрируя по t от 0 до x для любого $p_n \in \sigma_{n+1}$ с учётом ограничения (2.5.1) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^x \omega(p_{n,a}^{(r)}, 2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x}\right] dt \leq \\ & \leq R^n n^r \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{-1/q} \cdot \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^x (\sin nt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2x} \right] dt = \\
& = xn \int_0^1 (\sin xnt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \leq \Phi(x)
\end{aligned}$$

и включение $\sigma_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ доказано, а потому имеем оценку снизу

$$\begin{aligned}
b_n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) & \geq b_n(\sigma_{n+1}; B_{q,\gamma}) = \\
& = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{2.5.33}$$

Сопоставляя соотношение (2.5.29)–(2.5.33) получаем требуемые равенства (2.5.26).

Из вышеприведенного следует, что подпространство $\mathcal{L}_n^*$ является экстремальным для класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$, в случае вычисления точных значений колмогоровского и линейного n -поперечников, а подпространство $\mathcal{P}$ – экстремальное для бернштейновского n -поперечника. Линейный непрерывный оператор $\Lambda_{n-1,r-1}$ будет наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$.

Заметим, что так как для произвольного элемента $f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \cap \mathcal{L}_*^n$ в силу (2.5.9), (2.5.11) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

справедливо интегральное представление

$$f(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a^{(r)}(R e^{i\theta}) e^{in\theta} G_{n-1,r-1}(\rho/R, t - \theta) d\theta,$$

где $0 < \rho \leq R$, $t \in [0, 2\pi)$. Из (2.5.28) и определения гельфандовского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned}
d^n(W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu); B_{q,\gamma}) & \leq \sup \{ \|f\|_{B_{q,\gamma}} : f \in W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu) \cap \mathcal{L}_*^n \} \leq \\
& \leq \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

Сопоставляя неравенств (2.5.33) и (2.5.34) с учётом соотношения (0.0.8), заключаем, что подпространство $\mathcal{L}_*^n$ коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского n -поперечника. Теорема 2.5.2 доказана. $\square$

2.6. Экстремальные задачи оптимального восстановления и кодирования функций

Полученные точные значения n -поперечников классов функций в теоремах 2.1.1, 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1 и 2.5.1 можно интерпретировать как задачи оптимального восстановления и кодирования функций в постановке Н. П. Корнейчука [42, 44, 45]. Экстремальная задача отыскания оптимальных методов восстановления, гарантирующих минимальную погрешность на заданном классе функций, является одной из наиболее важных в вычислительной математике, особенно в задачах вариационного характера. Приведём необходимые понятия и определения в постановке Н. П. Корнейчука из [42, 44, 45].

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $\mathcal{M}_n := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$, где X^* – пространство, сопряжённое с X . Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $f \in X$ числовой вектор

$$T(f, \mathcal{M}_n) = \{\mu_1(f), \mu_2(f), \dots, \mu_n(f)\}.$$

Задачу восстановления функции $f \in X$ по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$\Phi(f; \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mu_k(f) g_k(z), \quad (2.6.1)$$

где $G_n = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{T}$ – соответственно произвольные системы линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathfrak{M} \subset X$, $\mathcal{T} = \{\Gamma_n\}$ – вектор числовых коэффициентов, для которых (2.6.1) имеет смысл. Погрешность восстановления на классе $\mathfrak{M}$ считают равной

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathfrak{M}; \mathcal{M}, G_n) = \\ = \inf \{ \sup \{ \|f - \Phi(f, \mathcal{M}_n, G_n, \Gamma_n; z)\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Gamma_n \subset \mathcal{T} \} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

и полагают

$$\mathcal{R}(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, G_n) : \mathcal{M}_n, G_n \}.$$

Пусть $\mathcal{M}'_n$ – набор заданных на X линейных ограниченных функционалов.

Тогда рассматривают величину

$$\mathcal{R}'(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathcal{R}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, G_n) : \mathcal{M}'_n, G_n \}.$$

Методы восстановления $\left(\overset{\circ}{\mathcal{M}}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right), \left(\overset{\circ}{\mathcal{M}}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right)$, для которых

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi \left(f; \overset{\circ}{\mathcal{M}}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\},$$

$$\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \|f - \Phi \left(f; \overset{\circ}{\mathcal{M}}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n \right)\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\},$$

называют соответственно оптимальным и оптимальным линейным методом восстановления функций класса $\mathfrak{M}$. Н.П.Корнейчук [45, с.375-388] доказал, что

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X), \quad \mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X) = \lambda_n(\mathfrak{M}, X),$$

причём, если $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}} \otimes L$, где $\tilde{\mathfrak{M}}$ – компакт, а L – конечномерное подпространство, то и в первом соотношении имеет место знак равенства.

Параллельно с (2.6.2) рассматривают также величину

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X = \sup \{ \|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, T(f_1, \mathcal{M}_n) = T(f_2, \mathcal{M}_n) \},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$. Полагая

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \mathfrak{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n) : \mathcal{M}_n \},$$

где нижняя грань берётся по всем наборам $\mathcal{M}_n$ линейных функционалов, определённых на сопряжённом пространстве X , получаем

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) \leq 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X),$$

а если $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное и выпуклое множество, то

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{R}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Теорема 2.6.1. Пусть $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}'_n, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^\circ\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_{q,R}^{(r)}$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (2.2.2) функция Λ_{n-1}^* .

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_{q,R}^{(r)}, \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.6.2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда наилучший метод кодирования функций из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}'_n, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^\circ\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_q^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (2.2.2) функция Λ_{n-1}^* . При этом для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливы равенства

$$\frac{1}{2}\lambda^n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \mathcal{R}_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) =$$

$$= \mathcal{R}'_n(W_q^{(r)}(\Phi), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.$$

Теорема 2.6.3. *Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}_n^{\circ}, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^{\circ} \right)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (2.3.1) функция $\mathfrak{L}_{n-1,r-1,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_1, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.4. *Наилучший метод кодирования функций из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в банаховом пространстве $B_{q,\gamma,R}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}_n^{\circ}, \mathcal{M}_n, \Gamma_n^{\circ} \right)$ функций $f(z)$ из класса $\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu)$ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$ является определённая равенством (2.4.1) функция $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$. При этом для любых $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) &= \mathcal{R}_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}(\Phi_2, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi_2 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.5. *Наилучший метод кодирования функций из класса $W_a^{(r)} H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в банаховом пространстве $H_{q,\rho}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов*

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}'_n, \mathcal{M}_n, \mathring{\Gamma}_n\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ является определённая равенством (2.5.3) функция $\Lambda_{n-1,r,r-1}(f, z)$. При этом для любых $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ и $0 < \rho \leq R$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), H_{q,\rho}) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), H_{q,\rho}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), H_{q,\rho}) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \end{aligned}$$

Теорема 2.6.6. Наилучший метод кодирования функций из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ доставляет набор $\mathfrak{N}_n^*$ функционалов

$$\mu_k(f) = c_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathfrak{N}'_n, \mathcal{M}_n, \mathring{\Gamma}_n\right)$ функций $f(z)$ из класса $W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu)$ в пространстве $\mathcal{L}_{q,\gamma}$ является определённая равенством (2.5.3) функция $\Lambda_{n-1,r,r-1}(f, z)$. При этом для любых $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ и $R \geq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^n(W_a^{(r)}H_{q,R}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)}H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \\ &= \mathcal{R}'_n(W_a^{(r)}H_{q,\rho}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{q,\gamma}) = \frac{R^{-n}}{n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Глава 3. Среднеквадратическое приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана

В третьей главе рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, с помощью рядов Фурье по ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. В частности, изучается случай, когда $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а в качестве ортонормированной системы выступает $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$. На классах аналитических функций, задаваемых специальным модулем непрерывности m -го порядка, получены точные оценки скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье, а также вычислены точные значения n -поперечников соответствующих классов в пространстве B_2 .

Рассматривается задача приближения в среднем функций, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, и уточняется один из результатов, связанных с задачей о точной константе в неравенстве Джексона – Стечкина. Изучается неравенство типа Джексона для осреднённой с весом характеристики Ω_m производных аналитических функций и обобщения этих результатов на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных в пространстве B_2 .

Исследуются экстремальные задачи на классах функций, задаваемых при

помощи $\mathcal{H}$ -функционала Петре, и вычисляются точные значения n -поперечников для классов, принадлежащих пространству B_2 .

Также рассматривается задача среднеквадратичного приближения некоторых классов аналитических функций рядами Фурье по ортогональной системе в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$, где доказано точное неравенство типа Джексона – Стечкина. Особое внимание уделяется случаю, когда область $\mathcal{D}$ совпадает с единичным кругом, а вес γ имеет вид $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha(1 - |z|)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ – вес Якоби. Доказаны точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие наилучшее среднеквадратичное приближение функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ с $\mathcal{H}$ -функционалом Петре.

3.1. Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве Бергмана B_2 .

3.1.1. Обозначения и определения. Вспомогательные факты.

В этом параграфе и далее через $B_2 := B_2(\mathcal{D})$ обозначим пространство Бергмана комплексных функций f , аналитических в односвязной ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma = d\sigma(z)$ – элемент площади.

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированная система функций в B_2 . Если $f \in B_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma \quad (3.1.1)$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Функции f сопоставляется её ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z). \quad (3.1.2)$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

– частичная сумма n -го порядка ряда (3.1.2). Составим линейную комбинацию первых n функций системы $\{\varphi_k(z)\}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z),$$

которую назовём обобщённым полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплекс-

ные коэффициенты. Хорошо известно, что (см., например, [52], с.203):

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : d_k \in \mathbb{C} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f , определённые равенством (3.1.1).

Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \quad (3.1.4)$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (3.1.4) понимается в смысле сходимости в $B_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве B_2 , следуя [1], рассмотрим оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1 - h) d\sigma(\zeta) \quad (3.1.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (3.1.5) обладает следующими простыми свойствами:

- 1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 2) $\|F_h(f)\| \leq \|f\|$; 3) $F_h \varphi_k(z) = (1 - h)^k \varphi_k(z)$;
- 4) $\|F_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$.

Для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_h^1 f(z) &= F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z), \\ \Delta_h^m f(z) &= \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(z), \end{aligned}$$

где $\Delta_h^m f(z)$ называется *обобщенной* конечной разностью m -го порядка функции $f \in B_2$ посредством оператора обобщенного сдвига $F_h f(z)$;

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z), \quad F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z)), \quad k = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2 . Пользуясь формулами (3.1.1) и (3.1.4) оператор (3.1.5) представим в виде

$$\begin{aligned} F_h f(z) &= \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h) d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \bar{\varphi}_k(\zeta) (1-h)^k \right\} d\sigma = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) \bar{\varphi}_k(\zeta) d\sigma \right) \varphi_k(z) (1-h)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) (1-h)^k. \end{aligned}$$

Поэтому для разности первого порядка получаем

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) [(1-h)^k - 1], \quad (3.1.6)$$

и методом математической индукции при любом $m \in \mathbb{N}$ получаем формулу

$$\Delta_h^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - (1-h)^k]^m a_k(f) \varphi_k(z), \quad h \in (0, 1). \quad (3.1.7)$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k(z)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) получаем равенство

$$\|\Delta_h^m f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^{2m} |a_k(f)|^2.$$

Величину

$$\begin{aligned} \Omega_m(f; t)_2 &= \sup \{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \leq t \} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

будем называть *обобщенным* модулем непрерывности m -го порядка функции f в пространстве B_2 .

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mathcal{D}$ есть единичный круг

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Очевидно, что в этом случае система функций $\psi_k(z) = z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является ортогональной в круге U :

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} \psi_k(z) \overline{\psi_l(z)} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+l+1} e^{i(k-l)t} dr dt = 0, \quad k \neq l.$$

Но эта система не является ортонормированной, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |\psi_k(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k+1} dr dt = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, система функций $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1} z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является ортонормированной системой. Для её элементов имеем классическую разность с шагом h

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h^1 \varphi(z) &= \varphi_k(z+h) - \varphi_k(z) = \\ &= \sqrt{k+1} ((z+h)^k - z^k) = \sqrt{k+1} \sum_{l=1}^k C_k^l z^{k-l} h^l = \\ &= \sqrt{k+1} h \sum_{l=1}^k C_k^l z^{k-l} h^{l-1} = O(h), \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Перепишем равенство (3.1.6) в следующем виде

$$\begin{aligned} \Delta_h^1 f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) ((1-h)^k - 1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^k (-h)^j C_k^j \right\} = \\ &= h \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^k a_k(f) \varphi_k(z) (-1)^j C_k^j h^{j-1} = O(h), \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Из (3.1.9) и (3.1.10) видно, что разность первого порядка, как для классической разности (3.1.9) так и для обобщенной разности (3.1.10), имеют одинаковый (первый) порядок малости по h при $h \rightarrow 0$ и тем самым оправданы введенные в (3.1.6) и (3.1.7) обобщенные разности для любых аналитических функций $f(z)$ ортогональных систем $\{\varphi_k(z)\}$.

3.1.2. Неравенство Джексона – Стечкина

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача об отыскании точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой её производной. Отметим, что в случае равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами точная константа в неравенстве Джексона найдена в [39]. Аналогичная задача в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ решена в [67, 68]. В дальнейшем эта тематика плодотворно развивалась, например, в работах [8, 32, 37, 38, 47, 56, 75].

В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина изучалась в работе [1].

В работе [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 3.А. [1] *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $h \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq [1 - (1 - h)^n]^{-m} \Omega_m(f, h), \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.1.1)$$

причем при каждом фиксированном n константа в правой части неравенства (3.1.1) уменьшена быть не может.

Хотя в формулировке вышеприведенной теоремы явно не сказано, понятно, что оно содержательно только в том смысле, что при каждом фиксированном

$m \in \mathbb{N}$ параметры n и h должны быть связаны таким образом, что при $n \rightarrow \infty$ числа $h = h_n$ должны стремиться к нулю. Иначе, зафиксировав h и устремив n к ∞ , получим верное, но грубое неравенство $0 \leq \Omega_m(f, h)$, а значит при любом фиксированном $h \in (0, 1)$ и очень больших (фиксированных) n неравенство также будет грубым. Приводим уточнение вышеприведенного утверждения в случае $m = 1$.

Теорема 3.1.1. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $\alpha \in (0, 1)$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \Omega^2(f, h_n(\alpha)), \quad (3.1.2)$$

где $h_n = h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}$. Неравенство (3.1.2) обращается в равенство для функции $f_0(z) = \varphi_n(z)$.

Доказательство. Из равенства (3.1.6) находим

$$\|\Delta_h^1 f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 [(1-h)^k - 1]^2. \quad (3.1.3)$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^1 f\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 [(1-h)^k - 1]^2 \geq \\ &\geq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 [(1-h)^{2k} - 2(1-h)^k + 1] = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 [\alpha + (1-\alpha + (1-h)^{2k} - 2(1-h)^k)] = \\ &= \alpha E_{n-1}^2(f) + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \mathcal{A}(k, h, \alpha), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где $\mathcal{A}(k, h, \alpha) = 1 - \alpha + (1-h)^{2k} - 2(1-h)^k$, $\alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим поведение величины $\mathcal{A}(k, h, \alpha)$ как функции, зависящей от h , при ограничениях $k \geq n$ и $\alpha \in (0, 1)$ для параметров k и α . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial h} \mathcal{A}'(k, h, \alpha) = 2k(1-h)^{k-1} - 2k(1-h)^{2k-1} =$$

$$= 2k(1-h)^{k-1}[1-(1-h)^k] > 0.$$

Отсюда видно, что функция $\mathcal{A}(k, h, \alpha)$ при любом $\alpha \in (0, 1)$, и любом $k \geq n$ есть является возрастающая функция параметра h , и меняется при возрастании h на $[0, 1]$ от $-\alpha$ до $1 - \alpha$. Находим нули $h_k(\alpha)$ функции $\mathcal{A}(k, h, \alpha)$:

$$1 - \alpha + (1-h)^{2k} - 2(1-h)^k = 0, \text{ т.е. } [1 - (1-h)^k]^2 = \alpha, \quad (3.1.5)$$

откуда $h_k = h_k(\alpha) = 1 - \sqrt[k]{1 - \sqrt{\alpha}}$. Таким образом $\mathcal{A}(k, h_k(\alpha), \alpha) = 0$, при каждом $k = n, n+1, n+2, \dots$ и $\mathcal{A}(k, h, \alpha) > 0$ при $h > h_k(\alpha)$ в силу возрастания этой функции по h . Значения $h_k(\alpha)$ при $k = n, n+1, n+2, \dots$ убывают:

$$h_n(\alpha) \geq h_{n+1}(\alpha) \geq h_{n+2}(\alpha) \geq \dots$$

Тогда при $h \geq h_n(\alpha)$ будет $h \geq h_k(\alpha)$ для $k > n$, откуда получаем: $\mathcal{A}(k, h, \alpha) \geq 0$ при $h \geq h_n$ и любых $k \geq n$, $\alpha \in (0, 1)$ (из-за возрастания этой функции по h). Значит, в силу (3.1.4) для h_n и α связанных условием (3.1.5) имеем оценку

$$\left\| \Delta_{h_n(\alpha)}^1 f \right\|_2^2 \geq \alpha E_{n-1}^2(f). \quad (3.1.6)$$

Отсюда и определения модуля непрерывности вытекает оценка (3.1.2). Так как $h_k(\alpha) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $0 \leq 1 - \sqrt[k]{1 - \sqrt{\alpha}} \leq 1$. Поэтому при $h \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 [1 - (1-h)^k]^2 < \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2.$$

Таким образом, ряд, стоящий в левой части последнего соотношения, при $h \in [0, 1]$ сходится равномерно, а значит является непрерывной функцией на отрезке $[0, 1]$, в частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 [1 - (1-h_n(\alpha))^k]^2 = 0.$$

Следовательно, $\Omega(f, h_n(\alpha))$ равномерно по $\alpha \in [0, 1]$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Непосредственным вычислением легко проверить, что при каждом $n \in$

$\mathbb{N}$ неравенство (3.1.2) обращается в равенство для $f(z) = f_n(z) = \varphi_n(z) \in B_2$, так как

$$E_{n-1}^2(\varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 = 1,$$

а

$$\|\Delta_{h_n(\alpha)}^1 \varphi_n\|^2 = ((1 - h_n(\alpha))^n - 1)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha.$$

Этим и завершаем доказательство теоремы 3.1.1. □

Рассмотрим следующий класс функций

$$\mathfrak{B}_2 = \left\{ f(z) \in B_2 : \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2 \right)^{1/2} := M(f) < \infty \right\}.$$

Так как по теореме Лагранжа о среднем имеем

$$\|\Delta_h^1 f\|^2 = \sum |a_k(f)|^2 k^2 (1 - h_{\text{ср}})^{k-1} h^2 \leq M^2(f) h^2,$$

то для функций $f(z) \in \mathfrak{B}_2$ имеем $\Omega(f, h) \leq M(f)h$.

Теорема 3.1.2. *Если $f \in \mathfrak{B}_2$, то при любом $\alpha \in (0, 1]$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq M(f) \cdot \frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}, \quad (3.1.7)$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Используя неравенство (3.1.6) и равенство (3.1.3), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|\Delta_{h_n(\alpha)}^1 f\|^2 = \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 [1 - (1 - h_n(\alpha))^k]^2 = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2 \cdot \frac{[1 - (1 - h_n(\alpha))^k]^2}{k^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \max_{k \geq 1} \left\{ \frac{[1 - (1 - h_n(\alpha))^k]^2}{k^2} \right\} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \max_{k \geq 1} \left\{ \frac{[1 - (1 - h_n(\alpha))^k]}{k} \right\}^2 \cdot M^2(f). \quad (3.1.8)$$

Легко установить, например, обычным образом, считая, что k неизвестным параметром, при любом $\alpha \in (0, 1]$

$$\max_{k \geq 1} \frac{1 - (1 - h_n(\alpha))^k}{k} = h_n(\alpha). \quad (3.1.9)$$

Из неравенства (3.1.8) и равенства (3.1.9) окончательно имеем:

$$E_{n-1}^2(f) \leq M^2(f) \cdot \frac{h_n^2(\alpha)}{\alpha},$$

и этим теорема 3.1.2 доказана. □

Следствие 3.1.1. Для $f \in \mathfrak{B}_2$ имеем

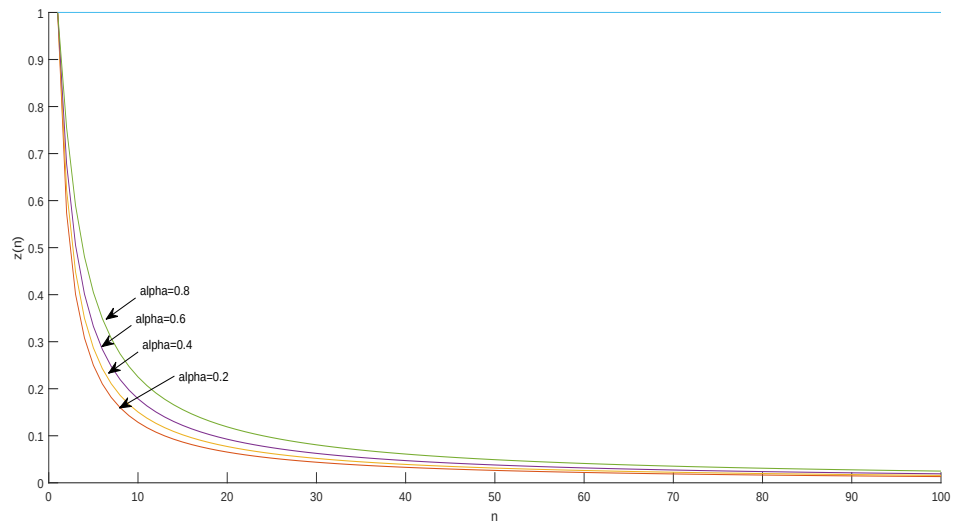
$$E_{n-1}(f) \leq M(f) \inf_{\alpha \in (0,1)} \frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{M(f)}{n}. \quad (3.1.10)$$

Неравенство (3.1.10) обращается в равенство для функции $f_0(z) = \varphi_n(z)$.

Доказательство. Рассмотрим поведение отношения $\frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$, как функция двух переменных от n и α в виде

$$y(n, \alpha) = \frac{1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}, \quad n \in [1, +\infty), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Очевидно, что при $\alpha \rightarrow 1$, $y(n, 1) \rightarrow 1$. Построим график функции $y(n, \alpha)$ при некоторых фиксированных $\alpha \in (0, 1)$ и возрастанием значения $n \in [1, +\infty)$



При малых значениях $\alpha : \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$, функция $y(n, \alpha)$ будет принимать малые значения

$$y(n, \alpha_1) < y(n, \alpha_2) < y(n, \alpha_3) < \dots < 1.$$

Очевидно, что

$$\inf_{\alpha \in (0,1)} \frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{n}. \quad (3.1.11)$$

В самом деле, сделав в (3.1.11) замену переменной $1 - \sqrt{\alpha} = t^n$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} &= \inf_{t \in (0,1)} \frac{1 - t}{1 - t^n} = \\ &= \inf_{t \in (0,1)} \frac{1 - t}{(1 - t)(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1})} = \\ &= \inf_{t \in (0,1)} \frac{1}{1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство (3.1.10). $\square$

Имеет место более общий аналог результата, полученный в теореме 3.1.1, для модуля непрерывности порядка m .

Теорема 3.1.3. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha^m}} \cdot \Omega_m(f, h_n(\alpha)), \quad (3.1.12)$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1 - \sqrt{\alpha}}$. Неравенство обращается в равенство для функции $f(z) = \varphi_n(z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Используя равенство (3.1.7) запишем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m f\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 [(1 - h)^k - 1]^{2m} \geq \\ &\geq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 [(1 - h)^k - 1]^{2m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 [\alpha + (1 - \alpha + (1 - h)^{2k} - 2(1 - h)^k)]^m = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 [\alpha + \mathcal{A}(k, h, \alpha)]^m = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \left\{ \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \alpha^l [\mathcal{A}(k, h, \alpha)]^{m-l} \right\} = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \left\{ \alpha^m + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l [\mathcal{A}(k, h, \alpha)]^{m-l} \right\} = \\
&= \alpha^m \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l [\mathcal{A}(k, h, \alpha)]^{m-l} = \\
&= \alpha^m E_{n-1}^2(f) + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l [\mathcal{A}(k, h, \alpha)]^{m-l}. \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

В силу условия (3.1.5) для h_n и α из (3.1.13) получаем

$$\|\Delta_{h_n(\alpha)}^m f\|^2 \geq \alpha^m E_{n-1}^2(f). \tag{3.1.14}$$

Из (3.1.14) и определения модуля непрерывности вытекает оценка (3.1.12). Легко проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ неравенство (3.1.12) обращается в равенство для $f(z) = f_n(z) = \varphi_n(z) \in B_2$, $E_{n-1}^2(\varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 = 1$, а $\|\Delta_{h_n(\alpha)}^m \varphi_n\|^2 = ((1 - h_n(\alpha))^n - 1)^{2m} = (\sqrt{\alpha})^{2m} = \alpha^m$. Теорема 3.1.3 доказана. $\square$

3.2. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве B_2 и значения n -поперечников

3.2.1. Неравенство типа Джексона для осредненной с весом характеристики Ω_m

При доказательстве основных результатов данного параграфа мы будем опираться на схему рассуждений, изложенную в работе [77]. При этом существенно развиваем и обобщаем результаты работы [1].

Пусть f – произвольная аналитическая в круге U функция. Ряд Маклорена этой функции имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad (3.2.1)$$

где

$$c_k(f) = \frac{k+1}{\pi} \iint_{(U)} f(z) \bar{z}^k d\sigma$$

– коэффициенты Маклорена. Коэффициенты Фурье $a_k(f)$ функции f и её коэффициенты Маклорена $c_k(f)$ связаны соотношением:

$$a_k(f) = \frac{c_k(f)}{\sqrt{k+1}}. \quad (3.2.2)$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(z)$ по ортонормированной системе $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1} z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) с учетом (3.2.2) приобретает вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(f)}{\sqrt{k+1}} \sqrt{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (3.2.3)$$

При этом имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1}.$$

Отсюда и из (3.1.3) следует, что

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1}. \quad (3.2.4)$$

Ряд Фурье (3.2.3) функции f совпадает с рядом Маклорена (3.2.1) и его внутри круга U можно почленно дифференцировать сколько угодно раз. По теореме Вейерштрасса (см., например, [14, стр.107]) все продифференцированные ряды в любом круге меньшего радиуса равномерно сходятся к соответствующей производной функции $f(z)$. Дифференцируя ряд (3.2.1) почленно r раз, получаем

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) k(k-1) \cdots (k-r+1) z^{k-r} := \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (3.2.5)$$

где, по-прежнему, положено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k \geq r. \quad (3.2.6)$$

Учитывая свойство 4 оператора $F_h(f)$, из которого, в частности, следует равенство

$$F_h(z^{k-r}) = (1-h)^{k-r} z^{k-r}, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k \geq r, \quad h \in (0, 1),$$

и заменяя в формуле (3.1.8) функцию f на производную r -го порядка $f^{(r)}$, с учетом равенства (3.2.5) получаем выражение модуля непрерывности m -го порядка производной $f^{(r)}$:

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = \sum_{k=r}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \quad (3.2.7)$$

Всюду далее через $B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U)$ обозначим класс функций $f \in B_2$, у которых $f^{(r)} \in B_2$. При доказательстве основных результатов будем опираться на схему рассуждений, изложенную в работах [78]. При этом существенно развиваем и обобщаем результаты работы [1].

Нам понадобится следующая простая

Лемма 3.2.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \quad (3.2.8)$$

Доказательство. Прежде всего, из равенства (3.2.5) следует, что

$$S_{n-1}^{(\mu)}(f, z) = \sum_{k=\mu}^{n-1} c_k(f) \alpha_{k,\mu} z^{k-\mu} = S_{n-\mu-1}(f^{(\mu)}, z), (\mu = 1, 2, \dots, r),$$

а потому имеем

$$f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) \alpha_{k,r} z^{k-r},$$

откуда следует равенство

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.2.9)$$

Теперь, учитывая последнее равенство, запишем

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha_{k,r}^2} \cdot \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \quad (3.2.10)$$

Так как при всех $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} & \max_{k \geq n > r} \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha_{k,r}^2} = \\ &= \max_{k \geq n > r} \frac{k-r+1}{(k+1)[k(k-1) \cdots (k-r+1)]^2} = \\ &= \max_{k \geq n > r} \frac{1}{(k+1)[k(k-1) \cdots (k-r+2)]^2(k-r+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)[n(n-1) \cdots (n-r+2)]^2(n-r+1)} = \frac{n-r+1}{(n+1)\alpha_{n,r}^2}, \end{aligned}$$

то из (3.2.10) следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_2 &\leq \frac{n-r+1}{n+1} \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} = \\ &= \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Из неравенства (3.2.11) сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-r-1}(f^{(r)})} \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \quad (3.2.12)$$

Так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ ($n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$) в силу (3.2.4) и (3.2.9)

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2 = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}, \quad (3.2.13)$$

то для величины, стоящей в левой части неравенства (3.2.12), имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)_2}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \quad (3.2.14)$$

Требуемое равенство (3.2.8) вытекает из сопоставления оценки сверху (3.2.12) и оценки снизу (3.2.14), чем и завершаем доказательство леммы 3.2.1. $\square$

Теорема 3.2.1. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m(f^{(r)}, t)_2, \quad (3.2.15)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ константа в правой части неравенства (3.2.15) уменьшена быть не может.

Доказательство. Пусть $f \in B_2$. В работе [1] установлено, что для произвольной функции $f \in B_2$ при любом $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_2 \leq [1 - (1-t)^n]^{-m} \Omega_m(f, t)_2, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (3.2.16)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константа в правой части неравенства (3.2.16) уменьшена быть не может. Используя неравенство (3.2.16), для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ для величины наилучшего приближения $E_{n-r-1}(f^{(r)})$ запишем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leq [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m(f^{(r)}, t)_2. \quad (3.2.17)$$

Из неравенств (3.2.11) и (3.2.17) следует оценка сверху

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m \left(f^{(r)}, t \right)_2.$$

Последнее неравенство справедливо для любой $f \in B_2^{(r)}$, поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m \left(f^{(r)}, t \right)_2} \leq \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \quad (3.2.18)$$

где $0 < t < 1$. Для получения оценки снизу величины в левой части (3.2.18) рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, использованную выше при доказательстве леммы 1. Для этой функции из соотношения (3.2.7) вытекает равенство

$$\Omega_m \left(f_0^{(r)}, t \right)_2 = [1 - (1-t)^{n-r}]^m \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}. \quad (3.2.19)$$

Из (3.2.19) и первого равенства в (3.2.13) следует, что

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \Omega_m \left(f_0^{(r)}, t \right)_2,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 3.2.1. □

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.1 справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m \left(f^{(r)}, t \right)_2} &= \\ &= \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Полагая в (3.2.20), в частности $t = 1/(n-r)$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m \left(f^{(r)}, \frac{1}{n-r} \right)_2} &= \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n-r} \right)^{n-r} \right]^{-m} = \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-m}. \end{aligned}$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать вещественную неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0, h]$ функцию g , не эквивалентную нулю.

Лемма 3.2.2. Пусть g – весовая на $[0, h]$ функция, числа $\alpha_{k,r}$ определены в (3.2.6), $k, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r$, $t \in (0, 1)$, $0 < p \leq 2$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq n} \left\{ \alpha_{k,r}^p \cdot \left(\frac{k+1}{k-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h [1 - (1-t)^{k-r}]^{mp} g(t) dt \right\}^{2/p} = \\ = \left\{ \alpha_{n,r}^p \cdot \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right\}^{2/p}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Доказательство. В самом деле, учитывая, что при всех $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, соответственно имеют место неравенств

$$\begin{aligned} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} &\geq \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n+1}{n-r+1}, \\ [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} &\geq [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m}, \end{aligned}$$

то, очевидно, имеет место также неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} &\geq \\ \geq \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n+1}{n-r+1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $p/2$ ($0 < p \leq 2$), умножая на положительную функцию g и интегрируя по отрезку $[0, h]$ при любых $k \geq n > r$, $k, n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{k,r}^p \left(\frac{k+1}{k-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h [1 - (1-t)^{k-r}]^{mp} g(t) dt &\geq \\ \geq \alpha_{n,r}^p \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt, \end{aligned}$$

которое при $k = n$ обращается в равенство, и тем самым лемма 3.2.2 доказана. □

Опираясь на лемму 3.2.2, докажем следующее утверждение.

Теорема 3.2.2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, g – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \frac{1}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Доказательство. При установлении равенства (3.2.23) воспользуемся упрощённым вариантом неравенства Минковского (см., например, [98, с.104])

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |h_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |h_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad (3.2.24)$$

верного при всех $0 < p \leq 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Полагая в обеих частях неравенства (3.2.24) $h_k = f_k g^{1/p}$ ($0 < p \leq 2$), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} g(t) dt \right)^{1/p} \geq \\ \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p g(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Используя неравенство (3.2.25) и лемму 3.2.2, имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right\}^{1/p} &= \left\{ \int_0^h (\Omega_m^2(f^{(r)}, t)_2)^{p/2} g(t) dt \right\}^{1/p} \geq \\ &\geq \left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \right)^{p/2} g(t) dt \right\}^{1/p} = \\ &= \left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right)^{p/2} g(t) dt \right\}^{1/p} \geq \\ &\geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h \frac{|c_k(f)|^p}{(k+1)^{p/2}} \cdot \left(\alpha_{k,r} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k-r+1}} \right)^p [1 - (1-t)^{k-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left(\inf_{k \geq n} \alpha_{k,r}^p \cdot \left(\frac{k+1}{k-r+1} \right)^{p/2} \cdot \int_0^h [1 - (1-t)^{k-r}]^{pm} g(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} = \\
&= \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{pm} g(t) dt \right)^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2} = \\
&= \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \cdot E_{n-1}(f)_2 \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{pm} g(t) dt \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{3.2.26}
\end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_r$ – подпространство алгебраических комплексных полиномов степени $\leq r$.

С целью получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (3.2.26), в классе $B_2^{(r)}$ рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$, использованную нами при доказательстве теоремы 3.2.1. В силу первого из равенств (3.2.13) и равенства (3.2.19) вытекает обратное неравенство

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} \geq \\
&\geq \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} \\
&= \frac{1}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}. \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

Требуемое равенство (3.2.23) следует из сравнения неравенств (3.2.26) и (3.2.27).

Этим доказательство теоремы 3.2.2 завершается. $\square$

Из доказанной теоремы 3.2.2 вытекает ряд утверждений.

Следствие 3.2.2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $p = 1/m$, $h \in (0, 1)$, g – весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 g(t) dt \right)^m} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}] g(t) dt \right)^{-m}. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Из (3.2.28), в частности при $g(t) \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, вытекает равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^h \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = \\ = \frac{1}{\{(n-r+1)h - 1 + (1-h)^{n-r+1}\}^m}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Полагая в (3.2.29), например, $h = 1/(n-r+1)$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = \\ = \left(1 - \frac{1}{n-r+1} \right)^{-m(n-r+1)}. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

В свою очередь из (3.2.30) следует экстремальное равенство

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r+1) \int_0^{1/(n-r+1)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 dt \right)^m} = e^m.$$

Следствие 3.2.3. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.2. Положим

$$g(t) := (n-r)(1-t)^{n-r-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r.$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^h \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ = \left\{ \frac{mp+1}{[1 - (1-h)^{n-r}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Из (3.2.31), в частности при $h = 1/(n - r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^{1/p}} = \\ = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

При $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (3.2.32) следует, что

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left((n-r) \int_0^{1/(n-r)} \Omega_m^{1/m} \left(f^{(r)}, t \right)_2 (1-t)^{n-r-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-2m}.$$

В частности, если $r = 0$, то

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(f, t)_2 (1-t)^{n-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-2m}.$$

3.2.2. Совместное приближения некоторых классов функций

В этом параграфе приводятся обобщения результатов, изложенных в предыдущем параграфе, с использованием тех же обозначений и некоторых базовых фактов, приведенных там.

Условимся далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ предполагать, что $f \notin \mathcal{P}_r$, где $\mathcal{P}_r$ – множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше r . Имеет место следующее

Лемма 3.2.3. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, при условии $n > r \geq s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \quad (3.2.33)$$

Доказательство. В самом деле, учитывая, что при любых $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, удовлетворяющих ограничению $k \geq n > r \geq s$, справедливо легко проверяемое равенство

$$\max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} = \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1},$$

из соотношения (3.2.9) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2 &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \leq \\ &\leq \max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2, \end{aligned}$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.2.33):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \quad (3.2.34)$$

Но так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}, \quad E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2 = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}, \quad (3.2.35)$$

то, пользуясь равенствами (3.2.35), получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} \geq \frac{E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \quad (3.2.36)$$

Равенство (3.2.33) вытекает из сопоставления неравенств (3.2.34) и (3.2.36).

Лемма 3.2.3 доказана. $\square$

Лемма 3.2.4. При любых $k, m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r \geq s$ и $t \in (0, 1)$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq n} \left\{ [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \right\} = \\ = [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1}. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Доказательство. В самом деле, поскольку функция

$$\begin{aligned} y(k) &:= [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} = \\ &= [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \cdot \left[\frac{k(k-1) \cdots (k-r+1)}{k(k-1) \cdots (k-s+1)} \right]^2 \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} = \\ &= [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \cdot [(k-s)(k-s-1) \cdots (k-r+2)]^2 \cdot (k-r+1)(k-s+1) \end{aligned}$$

при фиксированных $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $n > r \geq s$ монотонно возрастает по $k \geq n$, то

$\inf_{k \geq n} y(k) = y(n)$ и имеет место соотношение (3.2.37). Лемма 3.2.4 доказана. $\square$

Теорема 3.2.3. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$E_{n-s-1}^2 \left(f^{(s)} \right)_2 \leq \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-2m} \cdot \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2, \quad (3.2.38)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ константа в правой части неравенства (3.2.38) уменьшена быть не может.

Доказательство. Пользуясь равенством (3.2.7), для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, с учётом равенств (3.2.9) и (3.2.37) будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 &= \sum_{k=r}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \geq \\ &\geq \sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} \geq \\ &\geq \inf_{k \geq n} \left\{ [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} = \\ &= [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1} \cdot E_{n-s-1}^2 \left(f^{(s)} \right)_2, \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

откуда и вытекает неравенство (3.2.38). Докажем неувлучшаемость (3.2.38). Для этого вводим в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, использованную нами при доказательстве леммы 3.2.2, а также, пользуясь первым из равенств (3.2.35) и соотношением (3.2.19), будем иметь

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}^2 \left(f_0^{(s)} \right)_2 &= \frac{\alpha_{n,s}^2}{n-s+1} = \\ &= \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-2m} \cdot \Omega_m^2(f_0^{(r)}; t)_2, \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

откуда и следует утверждение теоремы 3.2.3. □

Следствие 3.2.4. В условиях теоремы 3.2.3 имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t)_2} &= \\ &= \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

В частности, из (3.2.41) при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; 1/(n-r))_2} &= \\ &= (1 - e^{-1})^{-m}. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Доказательство. В самом деле, из (3.2.38) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.2.41):

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t)_2} &\leq \\ &\leq \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

а учитывая равенство (3.2.40), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t)_2} &\geq \\ &\geq \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{\Omega_m(f_0^{(r)}; t)_2} = \\ &= \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Из сравнения неравенств (3.2.43) и (3.2.44) следует равенство (3.2.41) и, если полагать в обеих частях (3.2.41) $t = 1/(n-r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и перейти к верхней грани по всем $n \in \mathbb{N}$, то приходим к равенству (3.2.42), чем и завершаем доказательство следствия 3.2.4. $\square$

Теорема 3.2.4. Пусть $f \in B_2^{(r)}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, $g \in L_p$ – весовая на интервале $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в соотношении (3.2.45) для параметра p , удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m\|_p$ определен соотношениями

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_m g^{1/p} \right\|_p &= \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \\ \|\Omega_m\|_\infty &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p} = \\ &= \max \left\{ \Omega_m(f^{(r)}, t)_2 : t \in (0, h], \quad 0 < h < 1 \right\}. \end{aligned}$$

При этом указанный функционал, лишь при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Переходим к доказательству (3.2.45). Для случая $0 < p \leq 2$, при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ равенство (3.2.45) доказывается по схеме рассуждений в теореме 3.2.2, поэтому приводим доказательство (3.2.45) в случае $2 \leq p \leq \infty$. С этой целью, неравенство (3.2.38) перепишем в виде

$$\left[1 - (1-t)^{n-r} \right]^{2m} \cdot E_{n-s-1}^2 \left(f^{(s)} \right)_2 \leq \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2$$

и, возведя обе стороны неравенства в степень $p/2$ ($2 \leq p \leq \infty$), умножив на весовую функцию $g(t)$ и интегрируя по переменной t от 0 до h , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 g(t) dt \geq \\ \geq \frac{\alpha_{n,r}^p}{\alpha_{n,s}^p} \cdot \left(\frac{n-s+1}{n-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h \left[1 - (1-t)^{n-r} \right]^{mp} g(t) dt \cdot E_{n-s-1}^p \left(f^{(s)} \right)_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 g(t) dt \right)^{1/p} \geq \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}} \cdot \sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}} \cdot \\ & \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p} \cdot E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Поскольку неравенство (3.2.46) верно для любого $f \in B_2^{(r)}$, то из него получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части (3.2.45)

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} \leq \\ & \leq \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$. Учитывая первое из равенств (3.2.35) и соотношение (3.2.19), запишем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} \geq \\ & \geq \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1} \left(f_0^{(s)} \right)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ & = \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) (\alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1})}{\left((\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}) \int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}} = \\ & = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Сопоставляя оценку сверху (3.2.47) с оценкой снизу (3.2.48), получаем требуемое равенство (3.2.45). Факт того, что в (3.2.45) функция $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ реализует верхнюю грань, следует из трех последних равенств в соотношении (3.2.48). Теорема 3.2.4 доказана. $\square$

Через $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq 1, \quad 0 < t < 1,$$

а через $W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty$) обозначим множество функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0, 1)$ удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Отметим, что из теоремы 3.2.4 несложным вычислением в качестве следствия можно получить равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right)_2 &:= \sup \left\{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

которым далее воспользуемся.

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}, r \geq 2$) её промежуточные производные $f^{(s)}$ ($1 \leq s \leq r-1$) также принадлежат пространству B_2 , то определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})_2$ на некотором подмножестве функции $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ при $n > r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$.

Точнее, требуется найти следующую величину:

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(\mathfrak{M}^{(r)} \right) := \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}. \quad (3.2.50)$$

В принятых обозначениях справедлива

Теорема 3.2.5. Пусть $m, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$. Тогда для любого натурального $n > r \geq s$, $t \in (0, 1)$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, h) \right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (3.2.51)$$

Доказательство. В самом деле, если предполагать, что $f \in B_2^{(r)} \cap W_2^{(r)}(\Omega_m, h)$, то из (3.2.38) сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (3.2.51):

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, t) \right)_2 \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (3.2.52)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}[1 - (1-t)^{n-r}]^m} \cdot z^n, \quad 0 < t < 1.$$

Для этой функции легко проверить, что

$$\begin{aligned} g_0^{(s)}(z) &= \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}[1 - (1-t)^{n-r}]^m} \cdot \alpha_{n,s} \cdot z^{n-s}, \\ E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \\ \Omega_m \left(g_0^{(r)}, t \right)_2 &= 1, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Последнее равенство означает, что $g_0(z) \in W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$. Учитывая равенство (3.2.53), запишем оценку снизу искомой величины

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right)_2 &\geq E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Из сравнения неравенств (3.2.52) и (3.2.54) следует равенство (3.2.51), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.5. $\square$

Заметим, что при $t = 1/(n-r)$, $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$ из (3.2.51) следует асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)} \left(\Omega_m, \frac{1}{n-r} \right) \right)_2 \asymp \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-m}.$$

Теорема 3.2.6. Пусть $0 < p \leq \infty$, $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ и $h \in (0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right) := \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (3.2.55)$$

Существует функция $g_0 \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$, реализующая в (3.2.55) верхнюю грань.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что из соотношения (3.2.46) для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 g(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

Если в неравенстве (3.2.56) предположить, что $f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$, то получим

$$\begin{aligned} E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Из неравенства (3.2.57) вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части (3.2.55):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right) &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Для получения оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение функцию

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p} \cdot z^n \quad (3.2.59)$$

и покажем, что функция g_0 принадлежит классу $W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$. Дифференцируя r раз функцию g_0 , будем иметь

$$g_0^{(r)}(z) = \sqrt{n-r+1} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p} \cdot z^{n-r}.$$

Пользуясь этим равенством, в силу формулы (3.2.19) получаем

$$\Omega_m \left(g_0^{(r)}, t \right)_2 = \frac{[1 - (1 - t)^{n-r}]^m}{\left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Возведя обе части последнего равенства в степень p ($0 < p \leq \infty$), умножив на вес $g(t)$ и интегрируя в пределах от $t = 0$ до $t = h$, будем иметь

$$\int_0^h \Omega_m^p \left(g_0^{(r)}, t \right)_2 g(t) dt = 1$$

или, что то же,

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p \left(g_0^{(r)}, t \right)_2 g(t) dt \right)^{1/p} = 1,$$

и таким образом включение $g_0 \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ доказано.

Поскольку для всех $0 \leq s \leq r < n$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, имеет место соотношение

$$g_0^{(s)}(z) = \sqrt{n - r + 1} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p} \cdot z^{n-s},$$

то в силу формулы (3.2.9) имеем

$$E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n - r + 1}{n - s + 1}} \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Пользуясь последним равенством, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} &\geq E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n - r + 1}{n - s + 1}} \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

Очевидно, что требуемое равенство (3.2.55) вытекает из сопоставления неравенств (3.2.58) и (3.2.60). Теорема 3.2.6 доказана. $\square$

Следствие 3.2.5. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2.5. Положим

$$g(t) := g^*(t) = (n - r)(1 - t)^{n-r-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g^*, h) \right\} = \\ & = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^{n-r}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

В следующей теореме для класса $W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ найдём точную верхнюю грань модулей коэффициентов Тейлора.

Теорема 3.2.7. Пусть $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r, 0 < p \leq \infty$ и $h \in (0, 1)$. Тогда справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} = \\ & = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^h [1-(1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы функций $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1}z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) в единичном круге U для произвольной функции $f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$ запишем

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \left| \iint_{(U)} f(z) \bar{z}^n d\sigma \right| = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \left| \iint_{(U)} [f(z) - S_{n-1}(f, z)] \bar{z}^n d\sigma \right| \leq \\ & \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \iint_{(U)} |f(z) - S_{n-1}(f, z)| \cdot |\bar{z}^n| d\sigma, \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

где $S_{n-1}(f, z)$ – частная сумма n -го порядка ряда Маклорена функции $f \in \mathcal{A}(U)$. Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу в правой части неравенства (3.2.62), будем иметь

$$|c_n(f)| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \cdot \|f - S_{n-1}(f)\|_2 \cdot \|\bar{z}^n\|_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2. \quad (3.2.63)$$

Учитывая соотношение (3.2.49) и равенство (3.2.55) (при $s = 0$) из (3.2.63), получаем

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} \leq E_{n-1} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (3.2.64)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (3.2.64), рассмотрим снова функцию $g_0(z) \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h)$, определенную равенством (3.2.59), и для которой

$$\begin{aligned} \sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m, g, h) \right\} &\geq |c_n(g_0)| = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

Равенство (3.3.5) получаем из сопоставления соотношений (3.2.64) и (3.2.65).

Теорема 3.2.7 доказана. □

3.3. Точные оценки приближения посредством $\mathcal{K}$ -функционала

В последнее время при решении задач аппроксимации используют $\mathcal{K}$ -функционал Петре [12, 90, 94]. Отметим, что $\mathcal{K}$ -функционалы нашли наиболее важное применение при точном решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций. В этом разделе, опираясь на результаты параграфа 3.2, приводим решения ряда экстремальных задач на классах функций, задаваемых $\mathcal{K}$ -функционалом.

Определим $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m) &:= \mathcal{K} \left(f; t^m; B_2, B_2^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - y\|_2 + t^m \left\| y^{(m)} \right\|_2 : y \in B_2^{(m)} \right\}, \quad f \in B_2. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Справедлива следующая

Теорема 3.3.1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо следующее равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1. \quad (3.3.2)$$

Доказательство. Используя равенства (3.2.11), для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1} \left(f^{(r)} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ есть частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in B_2^{(m)}$. В силу равенства (3.1.2) и неравенства (3.3.3) получаем

$$\begin{aligned} \|g - S_{n-r-1}(g)\| &= E_{n-r-1}(g) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} E_{n-r-m-1} \left(g^{(m)} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\|. \quad (3.3.4)$$

Из неравенств (3.3.3) и (3.3.4) сразу следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\| + \|g - S_{n-r-1}(g)\| \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\| + \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Заметим, что левая часть неравенства (3.3.5) не зависит от функции $g \in B_2^{(m)}$, а потому, переходя в правой части неравенства (3.3.5) к нижней грани по всем функциям $g \in B_2^{(m)}$ и используя определения $\mathcal{K}$ -функционала (3.3.1), получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \leq 1. \quad (3.3.6)$$

С целью получения оценки снизу экстремальной характеристики, приведённой в левой части (3.3.6), в равенстве (3.3.1) полагаем $f(z) := p_n(z)$, где $p_n(z)$ – произвольный алгебраический комплексный полином из $\mathcal{P}_n$. Поскольку функция $y(z) \equiv 0$ принадлежит классу $B_2^{(m)}$, из (3.3.1), в частности, следует оценка сверху

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq \|p_n\|.$$

Так как функция $h(z) := p_n(z)$ также принадлежит классу $B_2^{(m)}$, то из (3.3.1) также следует оценка

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq t^m \|p_n^{(m)}\|.$$

Таким образом, для произвольного элемента $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ из двух последних соотношений следует неравенство

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq \min \left\{ \|p_n\|; t^m \|p_n^{(m)}\| \right\}. \quad (3.3.7)$$

Рассмотрим снова ту же функцию $f_0(z) = z^n$, использованную нами при доказательстве предыдущих теорем 1 и 2. Поскольку

$$\begin{aligned} f_0^{(r+m)} &= n(n-1) \cdots (n-r+1) \cdots (n-r-m+1) z^{n-r-m} = \\ &= \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} z^{n-r-m}, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

то в силу неравенства (3.3.7) будем иметь

$$\begin{aligned} &\mathcal{K} \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|f_0^{(r+m)}\| = \\ &= \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \frac{\alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m}}{\sqrt{n-r-m+1}} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Используя полученное неравенство и первое из равенств (3.2.13), получаем:

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Требуемое равенство (3.3.2) получаем из сопоставления оценки сверху (3.3.6) с оценкой снизу (3.3.10), чем и завершаем доказательство теоремы 3.3.1. $\square$

Имеет место более общее утверждение.

Теорема 3.3.2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ($r \geq s$) – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1. \quad (3.3.11)$$

Доказательство. Используя равенство (3.2.33), для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ запишем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1} \left(f^{(r)} \right)_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|_2, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ есть частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $h \in B_2^{(m)}$. Из неравенств (3.3.12) и (3.3.4) сразу следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_2 + \|g - S_{n-r-1}(g)\|_2 \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_2 + \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\|_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Левая часть неравенства (3.3.13) не зависит от функции $h \in B_2^{(m)}$, а потому, минимизируя его правую часть по $h \in B_2^{(m)}$ с учётом определения $\mathcal{K}$ -функционала (3.3.1), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f)_2 &\leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.3.11)

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)_2} \leq 1. \quad (3.3.15)$$

С целью получения оценки снизу воспользуемся неравенством (3.3.7) и ранее рассмотренной нами функцией (3.3.8). Тогда в силу неравенств (3.3.9), (3.3.15) и равенства

$$E_{n-s-1} \left(f_0^{(s)} \right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}$$

получаем

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq \\
& \geq \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}(f_0)_2}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = \\
& = \frac{\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}}{\mathcal{K} \left(f_0^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq 1. \tag{3.3.16}
\end{aligned}$$

Равенство (3.3.11) получаем из неравенств (3.3.15) и (3.3.16). Теорема 3.3.2 доказана. $\square$

Заметим, что из результата следствия 3.2.4 (равенство (3.2.41)) и теоремы 3.3.2 (равенство (3.3.11)) после некоторых простых вычислений вытекает асимптотическое равенство

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \sim \Omega_m(f^{(r)}, t), \quad 0 < t < 1.$$

Неубывающая на $[0, \infty)$ функция Φ называется k -мажорантой [87, с. 25], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют просто мажорантой.

Через $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$) аналогичный класс функций $f \in B_2^{(r)}$, для которых

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t < 1.$$

Приводим решение задачи (3.2.50) для класса функций $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$.

Теорема 3.3.3. Пусть Φ – мажоранта, определяющая класс функций $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}, r \geq 1$. Тогда для любого натурального $n \geq m + r$ и

произвольного $s(0 \leq s \leq r)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Доказательство. В самом деле, оценка сверху величины, расположенной в левой части (3.3.17), следует из равенства (3.3.14), из которой для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ получаем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)_2 \leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Покажем, что функция

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) z^n$$

принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Найдем производную $(r+m)$ -го порядка от функции $g_0(z)$:

$$\begin{aligned} g_0^{(r+m)}(z) &= \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m} z^{n-r-m} = \\ &= \sqrt{n-r+1} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \alpha_{n-r,m} z^{n-r-m}. \\ \left\| g_0^{(r+m)}(z) \right\|_2 &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-r-m+1}} \cdot \alpha_{n-r,m} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство (3.3.7) для функции $g_0^{(r)}$, запишем

$$\begin{aligned} & \mathcal{K} \left(g_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left\| g_0^{(r+m)} \right\| = \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \end{aligned}$$

Так как для этой функции

$$g_0^{(s)}(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \cdot \alpha_{n,s} z^{n-s},$$

$$E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right),$$

тогда пользуясь последним равенством, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 &\geq E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Сопоставляя оценку сверху (3.3.18) с оценкой снизу (3.3.19), получаем требуемое равенство (3.3.17), чем и завершаем доказательство теоремы 3.3.3. $\square$

3.4. Точные значения n -поперечников классов функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$, $W_{m,p}^{(r)}(h, g)$ и $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$

В предыдущем параграфе через $W_2^{(r)}(\Omega_m, t)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) обозначили класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t)_2 \leq 1, \quad 0 < t < 1.$$

Далее пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 1)$, $0 < p \leq 2$; g – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Обозначим через $W_{m,p}^{(r)}(h, g) := W_p^{(r)} B_2(\Omega_m, h; g)$ – класс, состоящий из функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 g(t) dt \leq 1.$$

Теорема 3.4.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m; t), B_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m; t), B_2) = \\ &= \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m}, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху всех рассматриваемых n -поперечников класса $W_2^{(r)}(\Omega_m; t)$ получаем из неравенства (3.2.20), поскольку

$$\begin{aligned} E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m; t) \right)_2 &= \sup \left\{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(r)}(\Omega_m; t) \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (0.0.9) между n -поперечниками, получаем оценку сверху n -поперечников:

$$\lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m; t), B_2) \leq E_{n-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m; t))_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot [1 - (1-h)^{n-r}]^{-m}. \quad (3.4.2)$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n -поперечников, равных правой части неравенства (3.4.1), в $(n+1)$ -мерном подпространстве комплексных алгебраических полиномов

$$\mathcal{P}_{n+1} = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

введём в рассмотрение шар

$$\mathcal{S}_{n+1} := \left\{ p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m} \right\},$$

$n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и покажем, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\Omega_m; t)$. В самом деле, для произвольной $p_n(z) \in \mathcal{S}_{n+1}$, в силу очевидного соотношения

$$\max_{r < k \leq n} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 = [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2.$$

и определения модуля непрерывности (3.2.7), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(p_n^{(r)}, t) &= \sum_{k=r}^n [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \cdot \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+1} |a_k|^2 = \\ &= \sum_{k=r}^n [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq \\ &\leq [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \sum_{k=r}^n \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq \\ &\leq [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \|p_n\|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

откуда следует включение $\mathcal{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\Omega_m; t)$. Но тогда, согласно определению бернштейновского n -поперечника и соотношения (0.0.9), для любого из перечисленных выше n -поперечников запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m, t), B_2) &\geq b_n(W_2^{(r)}(\Omega_m, t), B_2) \geq b_n(\mathcal{S}_{n+1}, B_2) \geq \\ &\geq \sqrt{(n-r+1)/(n+1)} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{-m}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Требуемое равенство (3.4.1) получаем из сопоставления оценки сверху (3.4.2) и оценки снизу (3.4.3). Таким образом, теорема 3.4.1 доказана. $\square$

Отметим, что для колмогоровского n -поперечника теорема 3.4.1 при $r = 0$ была доказана в [1].

Следствие 3.4.1. В условиях теоремы 3.4.1 при $t = t_* = 1/(n - r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\Omega_m, t_*), B_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\Omega_m; t_*))_{B_2} = \\ &= \sqrt{\frac{n - r + 1}{n + 1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n - r} \right)^{n-r} \right]^{-m} \sim \\ &\sim (1 - e^{-1})^{-m} \cdot \sqrt{\frac{n - r + 1}{n + 1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.4.2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 1)$, g – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) &= E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) \\ &= \sqrt{\frac{n - r + 1}{n + 1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. Пользуясь неравенством (3.2.26) и определением класса функций $W_{p,m}^{(r)}(h, g)$, запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h, g)) &= \sup \left\{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{p,m}^{(r)}(h, g) \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n - r + 1}{n + 1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

откуда благодаря соотношениям (0.0.9) и (3.4.5) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) &\leq E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h, g)) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n - r + 1}{n + 1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1 - t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Для получения соответствующих оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ введем в рассмотрение шар

$$\mathcal{B}_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{p,m}^{(r)}(h, g)$. С этой целью для произвольного $p_n \in \mathcal{B}_{n+1}$ запишем вытекающее из (3.2.7) неравенство

$$\Omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 \leq \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} \cdot \|p_n\|_2^2. \quad (3.4.7)$$

Возводя обе части неравенства (3.4.7) в степень $p/2$ ($0 < p \leq 2$), умножая на весовую функцию g и интегрируя по отрезку $[0, h]$, для любых $p_n \in \mathcal{B}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^h \Omega_m^p(p_n^{(r)}, t)_2 g(t) dt \leq \\ & \leq \left\{ \alpha_{n,r}^p \cdot \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right)^{p/2} \int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right\} \cdot \|p_n\|_2^p \leq 1 \end{aligned}$$

и, следовательно, включение $\mathcal{B}_{n+1} \subset W_{p,m}^{(r)}(h, g)$ доказано. Отсюда, согласно соотношения (0.0.9) и определения бернштейновского n -поперечника запишем

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) & \geq b_n(W_{p,m}^{(r)}(h, g); B_2) \geq b_n(\mathcal{B}_{n+1}, B_2) \\ & \geq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{n-r}]^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Сопоставляя оценки сверху (3.4.6) и оценки снизу (3.4.8) всех n -поперечников получаем требуемое равенство (3.4.4), чем и завершаем доказательство теоремы 3.4.2. $\square$

Напомним, что в предыдущем параграфе через $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t < 1.$$

В определении введенного класса Φ является некоторой мажорантой и $B_2^{(0)} \equiv B_2$, а $W_2^{(0)}(\mathcal{K}_m, \Phi) = W_2(\mathcal{K}_m, \Phi)$.

Теорема 3.4.3. Пусть Φ – мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \geq m + r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) &= E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Доказательство. В самом деле, согласно определению класса $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, из неравенства (3.3.6) и соотношения между различными n -поперечниками (0.0.9) получаем оценки сверху

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) &\leq d_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) \leq E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Для нахождения соответствующей оценки снизу в силу (0.0.9) достаточно оценить бернштейновский n -поперечник класса $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Введем на множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ шар

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n+1} &:= \\ &:= \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что для произвольной

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(p_n) z^k \in \mathcal{P}_n$$

в силу формулы (3.2.5) с учетом тождества $\alpha_{k,r+m} = \alpha_{k,r} \cdot \alpha_{k-r,m}$ имеет место равенство

$$p_n^{(r+m)}(z) = \sum_{k=r+m}^n a_k(p_n) \alpha_{k,r+m} z^{k-r-m} := \sum_{k=r+m}^n a_k(p_n) \alpha_{k,r} \cdot \alpha_{k-r,m} z^{k-r-m},$$

откуда, применяя равенство Парсеваля и неравенство $\alpha_{k,r} \leq \alpha_{n,r}$, $k \leq n$, получаем неравенство типа Бернштейна

$$\|p_n^{(r+m)}\| = \left\{ \sum_{k=r+m}^n |a_k(p_n)|^2 \alpha_{k,r}^2 \cdot \alpha_{k-r,m}^2 \right\}^{1/2} \leq \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} \|p_n\|. \quad (3.4.11)$$

Так как Φ – мажоранта, то согласно определению для нее при любых $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1$ имеет место неравенство $\tau_1 \Phi(\tau_2) \leq \tau_2 \Phi(\tau_1)$. Поэтому для любых $0 < t_1 \leq t_2 \leq 1$, полагая $\tau_1 := t_1^m$, $\tau_2 := t_2^m$, получаем

$$t_1^{-m} \Phi(t_1^m) \geq t_2^{-m} \Phi(t_2^m). \quad (3.4.12)$$

Докажем включения $\mathcal{M}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, то есть требуется для любых полиномов $p_n \in \mathcal{M}_{n+1}$ доказать неравенство

$$\mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t \leq 1.$$

Так как согласно предположению теоремы $n \geq m + r$, $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то рассмотрим два случая:

$$0 < t \leq \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)^{1/m}$$

и

$$\left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)^{1/m} \leq t \leq 1.$$

Пусть сначала

$$0 < t \leq \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)^{1/m}.$$

В этом случае, используя неравенство (3.4.12), где

$$t_1 := t, \quad t_2 := \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)^{1/m},$$

а также применяя неравенства (3.3.3) и (3.4.11), для любого $p_n \in \mathcal{M}_{n+1}$ получаем:

$$\mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m)_2 \leq t^m \cdot \|p_n^{(r+m)}\| \leq t^m \cdot \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} \|p_n\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq t^m \cdot \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \\
&\leq t^m \cdot \alpha_{n-r,m} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-r-m+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \Phi(t^m). \quad (3.4.13)
\end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)^{1/m} \leq t \leq 1.$$

Тогда, используя неравенство (3.3.7) и неравенство типа Бернштейна

$$\|p_n^{(r)}\| \leq \alpha_{n,r} \cdot \|p_n\|,$$

а также учитывая, что мажоранта Φ является неубывающей, имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m)_2 \leq \|p_n^{(r)}\|_2 \leq \alpha_{n,r} \|p_n\|_2 \leq \\
&\leq \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \\
&\leq \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \Phi(t^m). \quad (3.4.14)
\end{aligned}$$

Таким образом, из определения класса $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ и неравенств (3.4.13) и (3.4.14) вытекает, что $\mathcal{M}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Тогда, согласно определению бернштейновского n -поперечника и соотношения (0.0.9) между рассмотренными выше n -поперечниками, получаем оценку снизу всех n -поперечников:

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) \geq b_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), B_2 \right) \geq b_n(\mathcal{M}_{n+1}; B_2) \geq \\
&\geq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \quad (3.4.15)
\end{aligned}$$

Сопоставляя оценки сверху (3.4.10) и оценки снизу (3.4.15), получаем требуемые равенства (3.4.9), чем и завершаем доказательство теоремы 3.4.3. $\square$

3.5. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$

3.5.1. Определения и некоторые результаты.

Условимся в дальнейшем называть весом неотрицательную интегрируемую по Лебегу в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функцию $\gamma := \gamma(|z|) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$\iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) d\sigma > 0,$$

где $d\sigma = dxdy$ – элемент площади. В этой параграфе будем рассматривать вопросы среднеквадратичного приближения суммами Фурье комплексных функций f , аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma} := B_{2,\gamma}(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ пространство $B_{2,\gamma}$ превращается в обычное пространство Бергмана (см., например, [52, стр.259]). Отметим, что в случае приближения в среднем функций комплексной переменной, аналитических в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$ изучалась в работе [1].

Хорошо известно [52, стр.262-265], что теория среднеквадратичного приближения по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функций f тесно связана с теорией ортогональных по области $\mathcal{D}$ функций. Поэтому для большей связности изложения мы приведем основные понятия, относящиеся к теории ортогональных с весом в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системы функций. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем

ортгональной с весом γ по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системой комплексных функций, если

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma := \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2, & \text{при } k = l, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если

$$\|\varphi_k\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} = 1,$$

то такая система называется ортонормальной. Очевидно, что если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, то система $\{\varphi_k(z) \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормальной. Функции f ставится в соответствие её ряд Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z), \quad (3.5.1)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma$$

– коэффициенты Фурье функции f . Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z) \quad (3.5.2)$$

– частная сумма n -го порядка ряда в правой части равенства (3.5.1). Составим линейную комбинацию первых n функций системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(z), \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (3.5.3)$$

и множество всех обобщенных полиномов вида (3.5.3) обозначим через $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

будем называть наилучшим среднеквадратическим приближением функции $f \in B_{2,\gamma}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.5.1. *Среди всех обобщенных полиномов вида (3.5.3) наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in B_{2,\gamma}$ доставляет n -я частичная сумма (3.5.2). При этом*

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2. \quad (3.5.4)$$

Если система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормальна в $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, то из (3.5.4) вытекает равенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство леммы 3.5.1 проводится стандартным методом (см., например, [52, с. 202]), поэтому мы его опускаем.

В условиях леммы 3.5.1 имеет место

Следствие 3.5.1. *Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ справедливо равенство*

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2,$$

причём если система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормальна, то

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \quad (3.5.5)$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, причем равенство в (3.5.5) понимается в смысле сходимости в пространстве $B_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D}; \gamma(|\xi|)\gamma(|\eta|))$.

Сразу отметим, что в ряде частных случаев можно указать явные выражения для функции $T(\xi, \eta; h)$. Так, например, если область $\mathcal{D}$ равна $U = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$, $\gamma(|z|) = 1$, то система функций $\varphi_k(z) = \sqrt{(k+1)/\pi} z^k$, $k = 0, 1, \dots$ является ортонормированной (см., например, [52, с.208]). В этом случае имеем (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta; h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (\xi \bar{\eta} h)^k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - \xi \bar{\eta} h)^2}. \end{aligned}$$

В пространстве $B_{2,\gamma}$ рассмотрим оператор

$$F_h f(z) = \iint_{(U)} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) T(z, \zeta; 1 - h) d\zeta, \quad (3.5.6)$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига. Оператор $F_h(f)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 2) $\|F_h(f)\| \leq \|f\|$; 3) $F_h \varphi_k(z) = (1 - h)^k \varphi_k(z)$,
- 4) $\|F_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$.

При помощи оператора обобщенного сдвига $F_h(f)$ для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^1 f(z) &= f(z) - F_h f(z) = (\mathbb{I} - F_h) f(z), \\ \Delta_h^m f(z) &= \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (\mathbb{I} - F_h)^m f(z) = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^{(k)} f(z), \end{aligned}$$

где $F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f = f$, $F_h^{(k)} f(z) = F_h(F_h^{(k-1)} f(z))$, $k = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве $B_{2,\gamma}$.

3.5.2. Случай, когда область $\mathscr{D}$ есть единичный круг

Рассмотрим более подробно случай, когда область $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ есть единичный круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. В этом случае система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, но не ортонормальной, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^k \bar{z}^l d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{k+l+1} e^{i(k-l)t} d\rho dt = \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho := \lambda_k > 0, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, система функций

$$\varphi_k^*(z) := \left\{ \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty}$$

будет ортонормальной системой. Через $\mathscr{A}(U)$ обозначим класс аналитических в круге U функций. Пусть теперь f – произвольная функция, принадлежащая классу $\mathscr{A}(U)$. Ряд Маклорена этой функции внутри U имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (3.5.7)$$

Найдем коэффициенты Фурье $a_k(f)$ этой функции. Имеем:

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) f(z) \varphi_k^*(z) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) z^l \right\} \cdot \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot \bar{z}^k d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) \cdot \left\{ \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^l \bar{z}^k d\sigma \right\} = \\
&= c_k(f) \cdot \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |z|^{2k} d\sigma = \\
&= c_k(f) \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = c_k(f) \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot \lambda_k = \\
&= c_k(f) \cdot \sqrt{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f \in \mathcal{A}(U)$ по ортонормальной системе $\varphi_k^*(z) = \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) с учетом (3.5.8) приобретает вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} c_k(f) \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \tag{3.5.9}$$

Этот ряд совпадает с рядом Маклорена (3.5.7), т.е. ряд Фурье функции $f(z)$ внутри единичного круга U представляет собой аналитическую функцию (3.5.7), для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |c_k(f)|^2. \tag{3.5.10}$$

В частности, если $\gamma(|z|) \equiv 1$, то из (3.5.10) вытекает известное равенство (см., например, [52, с.208-209])

$$\|f\|_{2,1}^2 = \|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Равенство (3.5.9) означает, что ряд Фурье функции, аналитической в единичном круге U , одновременно является рядом Маклорена этой функции и, согласно второй теореме Вейерштрасса [14], может быть сколько угодно раз продифференцирована, причем все продифференцированные ряды равномерно сходятся к соответствующей производной, и для любого $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где, ради краткости, положено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ множество функций $f \in B_{2,\gamma}$, у которых $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$, то есть $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma} < \infty$. Легко заметить, что при любом $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(r)}(z) - S_{n-1}^{(r)}(f, z) = f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

в силу чего имеем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \inf \left\{ \|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho, \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

а также имеет место равенство

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho. \quad (3.5.12)$$

В силу обозначения (0.0.48) равенства (3.5.11) и (3.5.12) запишем в виде

$$E_{n-r-1}^2 \left(f^{(r)} \right)_{2,\gamma} := \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma), \quad (3.5.13)$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma). \quad (3.5.14)$$

Из равенств (3.5.13) и (3.5.14) при $\gamma(\rho) \equiv 1$ вытекают соответствующие ранее полученные нами равенства [111]:

$$E_{n-r-1}^2 \left(f^{(r)} \right)_{2,1} := E_{n-r-1}^2 \left(f^{(r)} \right)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1},$$

$$\left\| f^{(r)} \right\|_{2,1}^2 := \left\| f^{(r)} \right\|_2^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}.$$

При изложении дальнейших результатов мы предполагаем, что имеет место следующая

Гипотеза. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r$, $\gamma(\rho)$ – непрерывная весовая функция. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma)}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma)} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma)}. \quad (3.5.15)$$

Доказать равенство (3.5.15) в такой общности для всех непрерывных весов нам не удалось. Остановимся на случае веса Якоби

$$\gamma(\rho) := \gamma_{\alpha,\beta}(\rho) = \rho^\alpha (1 - \rho)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Очевидно, что $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho)$ непрерывна при $\alpha, \beta \geq 0$. В этом случае, легко доказать, что равенство (3.5.15) имеет место. Более того равенство (3.5.15) выполняется даже при любых $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Имеет место следующая

Лемма 3.5.2. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n > r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (3.5.16)$$

Доказательство. Нахождение точной области параметров α , β , r для которых верно (3.5.16), является технически сложной задачей. Покажем, что (3.5.16) справедливо при $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$, $r \geq 1$. Положим

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}.$$

Легко вычислить, что при всех $k \geq n > r \geq 1$,

$$\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)},$$

$$\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)},$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера, то пользуясь формулой [65, с.754]

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)\Gamma(a)$$

функцию $\psi(k, r)$ представим в виде

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}.$$

Проверим, что

$$\frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \beta > -1, k \geq r+1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} &= \left(\frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2k+4+\alpha)}{\Gamma(2k+2+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2k+5+\alpha+\beta)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2(k-r)+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}{\Gamma(2(k-r)+4+\alpha)} = \left(\frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \times \\ &\times \frac{(2k+2+\alpha)(2k+3+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha+\beta)(2(k-r)+4+\alpha+\beta)}{(2k+3+\alpha+\beta)(2k+4+\alpha+\beta)(2(k-r)+2+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha)} = \\ &= \left(1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left(1 + \frac{2r}{2k+2+\alpha-2r} \right) \left(1 + \frac{2r}{2k+3+\alpha-2r} \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{2r}{2k+3+\alpha+\beta} \right) \left(1 - \frac{2r}{2k+4+\alpha+\beta} \right) \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left(1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right)^2 \left(1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)^2 = f^2(k, r). \end{aligned}$$

Проверим условие $f(k, r) - 1 < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} g(k, r) &:= f(k, r) - 1 = \\ &= \left(1 - \frac{r}{k+1} \right) \left(1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) \left(1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right) - 1 = \\ &= -r \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{1}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) - \\ &- r^2 \left(\frac{1}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} + \frac{1}{\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{(k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right) + \frac{r^3}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
& (k+1) \left(k+1 + \frac{\alpha}{2} - r \right) \left(k+2 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cdot \frac{g(k, r)}{r} = \\
& = - \left(\left(k+1 + \frac{\alpha}{2} - r \right) \left(k+2 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) + (k+1) \left(k+1 + \frac{\alpha}{2} - r \right) - \right. \\
& \left. - (k+1) \left(k+2 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \right) - r \left(k+1 + k+2 + \frac{\alpha+\beta}{2} - \left(k+1 + \frac{\alpha}{2} - r \right) \right) + r^2 = \\
& = - \left(k+1 + \frac{\alpha}{2} - r \right) \left(2k+3 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) + (k+1) \left(k+2 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \\
& - r \left(k+2 + \frac{\beta}{2} \right) = -(k+1)^2 + (r-\alpha)k + r \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} \leq \\
& \leq -(r+2)^2 + (r-\alpha)(r+1) + r \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} = \\
& = - \left(2 + \frac{\alpha}{2} \right) r - \frac{\alpha(7+\alpha+\beta)}{4} - 4 < 0.
\end{aligned}$$

Условие $f(k, r) < 1$ выполнено и $\psi(k, r) < \psi(n, r)$ при $k \geq n \geq r+1$. Лемма 3.5.2 доказана. $\square$

Замечание. Одной интегрируемости веса Якоби на отрезке $[0, 1]$ при всех значениях $\alpha, \beta > -1$ для справедливости гипотезы недостаточно.

Покажем, что для любого $r \geq 1$, $k = n = r+1$ существует $\alpha \in (-1, 0)$ и $\beta > 0$ такие, что

$$\psi(r+2, r) = \psi(n+1, r) > \psi(n, r) = \psi(r+1, r)$$

или что то же

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi(r+2, r)}{\psi(r+1, r)} = \\
& = \left(\frac{2}{r+2} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2r+6+\alpha)}{\Gamma(2r+4+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(4+\alpha)}{\Gamma(6+\alpha)} = \\
& = \frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} > 1.
\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} = 1,$$

то достаточно показать, что для любого $r \geq 1$ существует $\alpha \in (-1, 0)$ такое, что

$$\frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} > 1. \quad (3.5.17)$$

Положим $\alpha = -1/2$. Тогда (3.5.17) эквивалентно очевидному неравенству

$$4r^2 + 16r + \frac{63}{4} > \frac{63}{16}(r^2 + 4r + 4) \Rightarrow 4(r^2 + 4r) > \frac{63}{16}(r^2 + 4r) \Rightarrow 4 > \frac{63}{16},$$

и таким образом в этом случае равенство (3.5.16) не выполняется.

Пользуясь леммой 3.5.2, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3.5.1. *При всех $k \geq n > r \geq 1$ и $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}. \quad (3.5.18)$$

Доказательство. Если функция $f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}$, то для величины наилучшего приближения

$$E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} = \sum_{k=n}^{\infty} \mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) |c_k(f)|^2 \quad (3.5.19)$$

этой функции, пользуясь утверждением леммы 3.5.2, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right\} \leq \\ &\leq \max_{k \geq n > r} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \cdot E_{n-r+1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Так как неравенство (3.5.20) верно для любой функции $f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}$, то из (3.5.20) получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (3.5.18)

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}. \quad (3.5.21)$$

Для получения оценки снизу той же величины введём в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Для этой функции из равенств (3.5.13) и (3.5.19) сразу следует, что

$$E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}), \quad (3.5.22)$$

$$E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \alpha_{n,r}^2 \cdot \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}). \quad (3.5.23)$$

Учитывая равенства (3.5.22) и (3.5.23), получаем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \frac{E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (3.5.24)$$

Сопоставляя оценку сверху (3.5.21) с оценкой снизу (3.5.24), получаем требуемое равенство (3.5.18), чем и завершаем доказательство теоремы 3.5.1. $\square$

Пусть $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ – множество функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$.

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\}.$$

Теорема 3.5.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.25)$$

Доказательство. Так как $E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$, то для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ из равенства (3.5.18) следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}} \cdot E_{n-r-1} \left(f^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}, \end{aligned}$$

откуда переходя к верхней грани по всем функциям $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ запишем

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.26)$$

С другой стороны, для функции

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{z^n}{\sqrt{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}, \\ E_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}, \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

и в силу (3.5.13) имеем

$$E_{n-r-1} \left(f_1^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = 1.$$

Последнее равенство означает, что $f_1 \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, а потому, учитывая (3.5.27), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \geq \mathcal{E}_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.28)$$

Требуемое равенство (3.5.25) получаем из сопоставления оценки сверху (3.5.26) с оценкой снизу (3.5.28). Теорема 3.5.2 доказана. $\square$

В следующей теореме находим точную верхнюю грань модуль коэффициентов ряда Тейлора для класса $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$.

Теорема 3.5.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда справедливо равенство

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.29)$$

Доказательство. Учитывая ортонормальность системы функций $\varphi_k^*(z) = (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) в единичном круге U , для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ запишем

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) f(z) \bar{z}^n d\sigma \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma(|z|) [f(z) - S_{n-1}(f, z)] \cdot \bar{z}^n d\sigma \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) |f(z) - S_{n-1}(f, z)| \cdot |\bar{z}^n| d\sigma, \quad (3.5.30)$$

где $S_{n-1}(f, z)$ – частная сумма n -го порядка ряда Маклорена функции $f \in \mathcal{A}(U)$. Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу в правой части (3.5.30), получаем

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \cdot \|\bar{z}^n\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \\ &= \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

Учитывая соотношения (3.5.26), из (3.5.31) получаем

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma}^{(r)} \right\} \leq E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.32)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (3.5.32), рассмотрим снова функцию $f_1(z) \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, введённую нами в конце теоремы 2 и для которой

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} \geq |c_n(f_1)| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (3.5.33)$$

Требуемое равенство (3.5.29) вытекает из сравнения неравенств (3.5.32) и (3.5.33), чем и завершаем доказательство теоремы 3.5.3. $\square$

Докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ посредством $\mathcal{K}$ -функционала Петре. Определим $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ и $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &:= \mathcal{K} \left(f; t^m; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + t^m \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right\}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

Теорема 3.5.4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие что $n \geq r + m$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = 1. \quad (3.5.35)$$

Доказательство. Используя неравенство (3.5.20), для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}, \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$. В силу равенства (3.5.11) и неравенства (3.5.21) запишем

$$\begin{aligned} \|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &= E_{n-r-1}(g)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left(\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

Теперь из неравенств (3.5.36) и (3.5.37) следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + \|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \right\} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left(\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

Так как левая часть неравенства (3.5.38) не зависит от функции $g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$, то, переходя к нижней грани по всем таким функциям в обеих частях (3.5.38), с учётом определения $\mathcal{K}$ -функционала (3.5.34), получим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.5.37):

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \leq 1. \quad (3.5.39)$$

С целью получения оценки снизу той же величины, воспользуемся тем, что для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство (см. доказательство (3.3.7))

$$\mathcal{K}_m(p_n, t^m)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} \leq \min \left\{ \|p_n\|_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}, t^m \left\| p_n^{(m)} \right\|_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} \right\}. \quad (3.5.40)$$

Рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$. Так как для этой функции

$$\begin{aligned} f_0^{(r+m)}(z) &= n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r) \cdots (n-r-m+1) z^{n-r-m} = \\ &= \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} z^{n-(r+m)}, \end{aligned}$$

то в силу неравенства (3.5.40) будем иметь

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \left\| f_0^{(r+m)} \right\|_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} [\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \alpha_{n,r} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

Заметим также, что

$$E_{n-1}(f_0)_2 = [\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.42)$$

Пользуясь соотношениями (3.5.41) и (3.5.42), имеем:

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} \geq \\ &\geq \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f_0)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} \geq \\ &\geq \frac{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} = 1. \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

Требуемое равенство (3.5.35) получаем из сравнения оценки сверху (3.5.39) с оценкой снизу (3.5.43). Теорема 3.5.4 доказана. $\square$

Если в условиях теоремы 3.5.4 полагать $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho) \equiv 1$, то для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r + m$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1.$$

Литература

- [1] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. вычис. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 999–1004.
- [2] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
- [3] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986. С. 91–101.
- [4] Акопян Р.Р. Неравенство Колмогорова для функций, аналитических в полуплоскости // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 3–9.
- [5] Акопян Р.Р., Саидусайнов М.С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 22–32.
- [6] Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.

- [7] Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.
- [8] Бабенко А. Г. О точной константы в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
- [9] Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка. 2003. 590 с.
- [10] Белый В. И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал. 1967. Т. 19, № 2. С. 104–108.
- [11] Белый В. И., Двейрин М. З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. Науково думка, 1971. Вып. 2. С. 37–54.
- [12] Берг Й., Лефстрем Й. Введение // В кн.: Интерполяционные пространства. М. Мир, 1980.
- [13] Бердышев В. И. Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 3. С. 505 – 526.
- [14] Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [15] Вакарчук С. Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. В сб. науч. работ Ин-та математики АН УССР. Киев, 1988. С. 4–7.

- [16] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространствах Харди H_2 // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41, № 6. С. 799–803.
- [17] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 7. С. 873–881.
- [18] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 8. С. 1019–1026.
- [19] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и точные оценки n -поперечников классов аналитических функций // Докл. АН Украины. Математика, естествознание, технические науки. 1994. № 6. С. 15–20.
- [20] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
- [21] Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. 1996. Т. 48, № 1. С. 133–135.
- [22] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.
- [23] Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.

- [24] Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журн. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.
- [25] Вакарчук С. Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
- [26] Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 11–19.
- [27] Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.
- [28] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
- [29] Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. О мультипликативных неравенствах типа Харди-Литтльвуда-Поля для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2010. Т. 18. С. 81–87.
- [30] Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
- [31] Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2012. Т. 20, № 6/1. С. 82–88.

- [32] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т 92, № 4. С. 497–514.
- [33] Двейрин М.З. Поперечники и ε -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функц. анализ и прил. 1975. Т.23. С. 32–46.
- [34] Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1975. Вып. 6. С. 41–54.
- [35] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. В кн.: Теория отображений и приближение функций. Наукова думка, Киев. 1983. С. 62–73.
- [36] Ефимов А.В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1960. Т. 24, № 2. С. 243–296.
- [37] Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 748–750.
- [38] Иванов В.И, Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространстве L_p . Тула: Туль. ун-т. 1995. 192 с.
- [39] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.

- [40] Корнейчук Н. П. Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 2. С. 269–271.
- [41] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука. 1970.
- [42] Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановлений функций и их производных // Изв. АН СССР. 1981. Т. 45, № 2. С. 266–290.
- [43] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка. 1982. 252 с.
- [44] Корнейчук Н. П. Оптимальные методы кодирования и восстановления функций // Optimal algorithms. Proc. International Symposium Bulgarian Acad. Sci., Sofia. 1986. С. 157–171.
- [45] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений. М.: Наука. 1987. 424 с.
- [46] Лангаршоев М. Р. Неравенства типа Джексона–Стечкина между наилучшими полиномиальными приближениями и обобщенными модулями непрерывности в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Матем. заметки. 2024. Т. 116, № 3. С. 396–410.
- [47] Лигун А. А. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.

- [48] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78, № 6. С. 83–102.
- [49] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 4. С. 465–476.
- [50] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. О поперечниках класса Харди H_2 в n -мерном шаре // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 5. С. 193.
- [51] Осипенко К. Ю., Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди-Соболева // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
- [52] Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л.: Наука. 1964. 440 с.
- [53] Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наукова думка. 1981. 324 с.
- [54] Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов $\mathcal{B}^r$ и H^r // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 183–189.
- [55] Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
- [56] Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
- [57] Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.
- [58] Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Матем. заметки. 1968. Т. 4, № 3. С. 291–300.

- [59] Тиман А. Ф. Несколько замечаний о тригонометрических полиномах и о рядах Фурье // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 2(74). С. 175–183.
- [60] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
- [61] Тихомиров В. М. Теория приближения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1987. Т. 14. С. 103–260.
- [62] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ. 1976. 324 с.
- [63] Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 5. С. 229–231.
- [64] Фарков Ю. А. О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19. № 5. С. 185–212.
- [65] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М.: Наука. 1970. 800 с.
- [66] Хуромонов Х. М. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2 // Чебышевский сб. 2024 Т. 25, № 5. С. 183–194.
- [67] Черных Н. И. О неравенствах Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [68] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.

- [69] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.
- [70] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.
- [71] Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 2. С. 171–174.
- [72] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.
- [73] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2007. Т. 50, № 1. С. 14–19.
- [74] Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2009. Т. 136, № 3. С. 7–23.
- [75] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
- [76] Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Anal Math. 2012. Vol. 38. Iss. 2. С. 147–159.

- [77] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{H}$ -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}, [-1, 1])$ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. №1-1. С. 83–97.
- [78] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН 2015. Т. 21, № 4. С. 152–169.
- [79] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 469–480.
- [80] Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1414–1423.
- [81] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Д. Д. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 239–254.
- [82] Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН 2023. Т. 29, № 4. С. 283–291.
- [83] Шабозов М.Ш., Каримзода Р.А. K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 4. С. 301–308.
- [84] Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. О точных значениях поперечников классов аналитических в круге функций // Матем. тр. 2024. Т. 27, № 4. С. 115–140.

- [85] Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О среднеквадратическом приближении функций в пространстве Бергмана B_2 и значение поперечников некоторых классов функций // Уфимск. матем. журн. 2024. Т. 16, № 2. С. 67–76.
- [86] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.
- [87] Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. 1992. Киев. Наукова думка. 227 с.
- [88] Шихалиев Н. И. Неравенства типа С. Н. Бернштейна-А. А. Маркова для аналитических функций // Докл. АН АзССР. 1975. Т. 31, № 8. С. 9–14.
- [89] Bergman S. The cernel function and conformal mapping. Math.surveys, N.Y.: Amer.Math.Society. 1950.
- [90] Ditzian Z., Totik V. $\mathcal{K}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. 1986. V. 46, № 1. P. 38–41.
- [91] Farkov Yu. A. n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity. 1996. V. 12, № 1. P. 58–79.
- [92] Fisher S. D., Stessin M. I. The n -width of the unit ball of H^q J. Approx. Theory. 1991. V. 67, № 3. P. 347–356.
- [93] Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y., Tikhomirov V. M. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 2001. V. 108, № 1. P. 97–117.
- [94] Mhaskar N. H. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 1986. V. 46, № 1. P. 100–110.

- [95] Osipenko K.Yu. Exact n -Widths of Hardy-Sobolev Classes // Const. Approx. 1997. V. 13, № 1. P. 17–27.
- [96] Osipenko K.Y. Optimal Recovery of the Derivative of Periodic Analytic Functions from Hardy Classes // J. Approx. Theory. 1999. V. 97, № 2. P. 384–395.
- [97] Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Function. Huntington (NY): Nova Science Publication Inc. 2000.
- [98] Pinkus A. n -widths in approximation theory, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [99] Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // J Math Sci. 2015. V. 206, № 1. P. 97–114.
- [100] Sheik J.T. Polynomial Approximation of functions analytic in a disc // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 17. № 6. P. 1238 – 1243.

Публикации автора по теме диссертации

- [101] Саидусайнов М. С. Наилучшие линейные методы в весовых пространствах Бергмана и точные значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН РТ 2013. Т. 56, № 7. С. 521–524.
- [102] Саидусайнов М. С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., гео. и тех. наук. 2014, № 4(157). С. 24–31.
- [103] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Значение n –поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических

- функций в весовом пространстве Бергмана // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 3. С. 40–57.
- [104] Саидусайнов М. С. Неравенства типа Колмогорова для аналитических в круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана // ДАН РТ 2015. Т. 58, № 8. С. 651–659.
- [105] Саидусайнов М. С. О значении поперечников и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. № 3. С. 91–104.
- [106] Саидусайнов М. С. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, № 1. С. 240–253.
- [107] Акопян Р. Р., Саидусайнов М. С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических в круге. // Тр. ИММ УрО РАН 2017. Т. 23, № 3. С. 22–32.
- [108] Саидусайнов М. С. $\mathcal{K}$ -функционалы и точные значения n -поперечников в пространстве Бергмана // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., гео. и тех. наук. 2017, № 2(167). С. 7–17.
- [109] Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S. Mean-Square Approximation of Complex Variable Functions by Fourier Series in the Weighted Bergman Space // Intern. J of Adv. res. in Math. 2017. V. 9. P. 34–43.
- [110] Saidusaynov M. S. $\mathcal{K}$ -Functionals and Exact Values of n -th Widths in the Bergman Space // Ural Math. J 2017. V. 3, № 2. P. 74–81.
- [111] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье

- рье в пространстве L_2 и значения n -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 613–627.
- [112] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журн. 2018. Т. 20, № 1. С. 86–97.
- [113] Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций в весовом пространстве Бергмана и значение n -поперечников функциональных классов // ДАН РТ. 2018. Т. 61, № 4. С. 317–324.
- [114] Саидусайнов М. С. Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве Бергмана // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 217–224.
- [115] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 258–272.
- [116] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2 // Изв. вузов. Матем. 2020, № 6. С. 65–72.
- [117] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Чебышевский сб. 2022. Т. 23, № 1. С. 167–182.
- [118] Saidusainov M. S. Some inequalities between the best simultaneous approximation and the modulus of continuity in a weighted Bergman space // Ural Math. J. 2023. V. 9, № 2. P. 165–174.

- [119] Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. On widths of some classes of analytic functions in a circle // Ural Math. J. 2024. V.10, №2. P.121–130.
- [120] Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. // Widths of some classes of analytic functions in the weighted Bergman space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. V.46. №7. P.3577–3587.