

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
КУЛЯБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АБУАБДУЛЛОХ РУДАКИ**

На правах рукописи

УКД: 517.95



КУЛОБИЗОДА МИРЗО АШУРМАД

**ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ
УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Душанбе – 2026

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций
Кулябского государственного университета имени Абуабдуллох Рураки

**Научный
руководитель:**

Сафаров Джумабой - доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные
оппоненты:**

Джангибеков Гулходжа - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Республики Таджикистана;

Джумаев Эрадж Хакназарович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественных наук филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе.

**Ведущая
организация:**

Российско-Таджикский (Славянский) университет

Защита состоится «30» сентября 2026 года в «14:00» ч. на заседании диссертационного совета 6D.KOA-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория №.203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона ученого секретаря +992900766603.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться на сайте www.tnu.tj и в библиотеке Таджикского национального университета.

Автореферат разослан « ____ » « ____ » 2026 года.

**Ученый секретарь диссертационного
совета, кандидат физико-математических
наук**



Гафоров А.Б.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современной теории обобщённых аналитических функций исследование краевых задач для нагруженных уравнений является одним из важных направлений научных исследований. Особый интерес к этим задачам обусловлен тем, что они имеют не только теоретическое значение, но и применяются при моделировании физических, механических и других процессов естественно-научного характера.

Несмотря на достигнутые существенные результаты, вопросы однозначной разрешимости нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций с дополнительными и переопределёнными условиями, а также построения явных формул их решений до настоящего времени исследованы недостаточно полно. В связи с этим изучение двоякопериодических решений для данного класса уравнений, доказательство новых теорем об однозначной разрешимости и получение явных формул решений имеют важное теоретическое значение и определяют актуальность темы диссертационного исследования.

Степень научной разработанности изучаемой темы. «В теории дифференциальных уравнений не менее важным разделом являются нагруженные дифференциальные уравнения. В литературе первые работы появились по нагруженным интегральным уравнениям. Этому классу нагруженных уравнений посвящены работы» [27,28], А. Кнесер, Л. Лихтенштейн, Н.М. Гюнтера, Н.Н. Назарова. На важность изучения таких уравнений подчеркивали А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики, сводящиеся к нагруженным интегральным уравнениям.

«Интерес к нагруженным дифференциальным уравнениям, содержащим значения или её производные на многообразиях меньше размерности области определения искомой функции, обуславливается тем, что решение многих важных задач математической физики, математической биологии, экологии, химии и долгопрогнозирования по оптимальному управлению сводится к изучению таких уравнений.

Большой вклад в разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений внесли учёные» [8,19]: А.М. Нахушев, В.М. Будаков, А.Д. Искандеров, А.В. Бородин, В.М.Казиёв, А.М. Krall, А.А. Керёфов [3, 4, 9, 10, 19, 28]. В последние годы, благодаря усилиям А.М. Нахушева и его последователей, а также М.Т. Джёналиева и его учеников теория нагруженных дифференциальных уравнений получила дальнейшее развитие.

В 1969 А.М. Нахушев при решении поставленной задачи А.В. Бицадзе поиска «корректно поставленных краевых задач для уравнения смешанного типа второго порядка установил, что решения задач со смещением связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями» [12, 13, 14 15].

«Следует отметить, что задачи, связанные с нагруженными уравнениями, не являются классическими, так как наличие нагруженного слагаемого не всегда позволяет использовать известные ранее методы исследования, что приводит как к новым трудностям при решении задач, так и к потребности в разработке новых

методов исследования. В этом и заключается актуальность исследования такого класса уравнений» [8,19].

Было обнаружено, что «нагруженные уравнения применяются, при решении нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Начало систематических исследований нелокальных краевых задач: задача нахождения периодических решений для эллиптических уравнений было» [13]. положено в статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского

По нелокальным задачам, отметим ещё работы В.А. Стеклова [18], А.И. Кожанова [11], Л.С. Пулькиной [22], А.М. Нахушева [16]. В этих работах отмечено, что «наличие нелокальных условий не позволяет применять или исследовать разрешимость задач классическими методами, разработанными для начально – краевых задач» [11,16,20, 22].

«В силу выше отмеченного, задача о нахождении решения уравнения, удовлетворяющего нелокальным условиям, или задача нахождения решения нагруженного уравнения, удовлетворяющего классическим граничным условиям, является важной» [19,20].

В монографиях М.Т. Дженалиева, А.М. Нахушева «изучены краевые задачи для нагруженной системы эллиптического типа» [7, 19, 20]. А.Б. Бородин, Хо Хон Сун, пользуясь «представлением решения для нагруженного эллиптического уравнения второго рода, когда коэффициенты уравнения зависят от меньшего числа независимых переменных доказал, что задача Дирихле имеет единственное решение» [3,26]. Распространил результаты А.Б. Бородина на более общие уравнения. «Также он исследовал задачу Дирихле и обобщенную задачу Римана – Гильберта для модельной нагруженной обобщенной системы Коши – Римана» [27].

В связи с выше изложенными, исследование вопросов разрешимости нагруженной обобщенной системы Коши – Римана, а также равномерно эллиптической системы нагруженных уравнений первого порядка в классе двоякопериодических функций являются важными и актуальными.

В работах И.Н. Векуа [5], В.С. Виноградова [6], Э. Мухамадиева [12], Показеева В.И. [21], С. Байзаева [2], Сафарова Д.С. [24, 25]. Акбарова Р. [1]. и других «для уравнения обобщенных аналитических функций исследованы задачи существования и нахождения решения в классе ограниченных, двоякопериодических и почти – периодических функций» [2,6,12,21,24,25].

Обобщенных аналитических функций с многочисленными их применениями построены в монографии академика Векуа И.Н. и американского математика Берса Л..

Теория двоякопериодических обобщенных аналитических функций с их некоторыми приложениями, построены в монографии Сафарова Д.С., [24]. Для построения таких функций, как расширения класса эллиптических функций, построены интегральные операторы $T_{\zeta}\rho(z)$ и $T_{\sigma}\rho(z)$ соответственно с ядром функциями Вейерштрасса $\zeta(z)$ – дзета и $\sigma(z)$ – сигма. Свойства этих операторов

позволяли полностью описать двоякопериодические обобщенные аналитическим функции и найти некоторые их приложений.

Для равномерно эллиптических систем первого порядка с оператором Бельтрами построены некоторый квазипериодический гомеоморфизм, который квазиконформно отображает основную параллелограмм периодов на четырехугольника плоскости гомеоморфизма. С помощью такого гомеоморфизма, изучение таких уравнений сведено к уравнению обобщенных аналитических функций. При этом на плоскости гомеоморфизма введены обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$, $\tilde{\rho}(z) = \rho(\omega(z))$, $\omega(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Однако уравнения обобщенных аналитических функций.

В работах Нахушева А.М. [17, 18], Дженалиева М.Т. [7], Бородина А.В. [3]. Рамазонова М.И. [8, 23]., Хо Хон Сун [27, 28] и других «изучены различные краевые задачи для эллиптических систем уравнений с нагруженными членами. Главную часть которых составляют оператор Лапласа, Коши-Римана» [3,7,8,23,27,28].

Заметим, что нагруженные обобщенные аналитические функции мало исследованы, кроме отдельных статей, например [18].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Содержание и научная направленность настоящего диссертационного исследования тесно связаны с государственными стратегическими программами и приоритетными направлениями научных исследований Республики Таджикистан. В частности, теоретические и практические результаты исследования соответствуют задачам, поставленным в Указе Президента Республики Таджикистан от 31 января 2020 года № 1445 «Об объявлении 2020–2040 годов Двадцатилетием изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», направленным на развитие фундаментальных исследований и повышение научного потенциала страны.

Кроме того, диссертационная работа выполнена в рамках перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического анализа и теории функций факультета физики, математики и информатики Кулябского государственного университета имени Абуабдуллоха Рудаки на 2021–2025 годы по теме: «Двоякопериодические решения нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Изучение проблем разрешимости нагруженной обобщенной системы Коши – Римана, а также нагруженной равномерно эллиптической системы первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций.

Задачи исследования.

-Обозначим через C_*^1 множество двоякопериодических с периодами $h_1, h_2, \text{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ функций из класса $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω – основной параллелограмм периодов, содержащий начало координат.

- нахождение в классе C_*^1 решения уравнения обобщенных аналитических (у.о.а) функций с нагруженными членами

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (0.0.1)$$

здесь $z = x + iy$ $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши – Римана,

$a = a(z), a_k = a_k(z), f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами $h_1, h_2, z_k \in \bar{\Omega}$;

- нахождение в классе C_*^1 решение у.о.а. функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(z), \quad (0.0.2)$$

с условиями переопределения

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s}, \quad t_j \in \Omega, \quad (0.0.3)$$

здесь a_k, d_j – известные, c_k – неизвестные числа в месте с $w(z)$ и $w(z_k)$

- нахождение в классе C_*^1 единственного решения нагруженными уравнений обобщенных аналитических (н.у.о.а) функций

$$w_{\bar{z}} + aw + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (0.0.4)$$

$a = a(z), b = b(z), d = d(z), f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2 .

- нахождение единственного решения из класса C_*^1 для нагруженного уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (0.0.5)$$

где $q(z) \in C_*^1$ и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $Bw = w_{\bar{z}} - q(z)w_z$ – дифференциальный оператор Бельтрами, $w(z), w(z_k)$ -неизвестные;

- нахождение решения в классе C_*^1 нагруженного квазилинейного уравнения вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k(z) \right) w^n = 0, \quad (0.0.6)$$

где $n \geq 1$ – целое число, $|q(z)| \leq q_0 < 1$,

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s}, \quad t_j \in \Omega, \quad (0.0.7)$$

Объект исследования. Объектом исследования являются нагруженные уравнения обобщенных аналитических функций, а также нагруженные обобщенные уравнения Бельтрами с многими нагруженными членами.

Предмет исследования. Предметом исследования являются установление теорем об однозначной разрешимости и получение формул для решения выше

указанных уравнений в классе двоякопериодических функций с дополнительными условиями переопределения.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие результаты, которые являются новыми:

1. для нагруженными уравнений обобщенных аналитических (н.у.о.а) функций вида (1) найдены условия однозначной разрешимости в классе C_*^1 и получены явные формулы решения;

2. найдены условия однозначной разрешимости задач (2), (3) и получены формулы решения в классе C_*^1 ;

3. для н.у.о.а функций вида (4) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе C_*^1 , с дополнительными точечными условиями;

4. для нагруженного обобщенного уравнения Бельтрами (5) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе C_*^1 ;

5. найдены условия однозначной разрешимости задач (6), (7) при $n = 2$ и формулы единственного решения в классе C_*^1 .

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер и посвящена развитию теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций и краевых задач с дополнительными условиями. В ходе исследования доказаны новые теоремы об однозначной разрешимости нагруженных уравнений в классе C_*^1 , а также получены явные формулы решений для ряда рассматриваемых задач. Полученные результаты могут служить теоретической основой для дальнейшего развития теории краевых задач, исследования уравнений обобщённых аналитических функций и обобщённых уравнений Бельтрами с дополнительными условиями.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы при исследовании близких по постановке задач, в том числе уравнений метааналитических функций высших порядков, систем многомерных эллиптических уравнений с нагруженными членами, задач с переопределёнными и интегральными условиями, а также других задач теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при разработке специальных курсов, чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплинам «Комплексный анализ», «Обобщённые аналитические функции», «Дифференциальные уравнения» и «Краевые задачи» для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов (PhD) и аспирантов высших учебных заведений.

Использование результатов исследования при решении задач математического и комплексного анализа, геометрии, механики и других направлений прикладной математики подтверждает теоретическую и научно-практическую значимость диссертации и создаёт предпосылки для их дальнейшего применения в научных исследованиях.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций вида (0.0.1) и (0.0.4) в классе S_*^1 существуют необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости как при наличии дополнительных переопределённых условий, так и без них, на основе которых получены явные формулы решений указанных уравнений.

2. Доказано, что задачи (0.0.2) и (0.0.3) в классе S_*^1 являются однозначно разрешимыми, а структура их решений определена в виде явных формул, что обеспечивает возможность непосредственного анализа существования, единственности и зависимости решения от исходных данных.

3. Установлено, что для нагруженного обобщённого уравнения Бельтрами вида (0.0.5) с дополнительными точечными переопределёнными условиями в классе S_*^1 определены условия однозначной разрешимости; доказано также, что для обобщённого уравнения Бельтрами с неизвестными коэффициентами и дополнительными точечными условиями установлены теоремы об однозначной разрешимости, а при $n=2$ получена явная формула единственного решения.

Степень достоверности результатов исследования. Степень достоверности результатов исследования обеспечивается использованием современных методов теории обобщённых аналитических функций, комплексного и функционального анализа. Все теоремы, леммы и выводы, представленные в диссертации, строго доказаны и согласуются с известными результатами отечественных и зарубежных исследователей. Достоверность результатов также подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных изданиях, их апробацией на научных конференциях и возможностью применения полученных результатов при дальнейшем развитии теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (с обоснованием и указанием области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Содержание, научные результаты и направления исследования соответствуют следующим разделам паспорта данной научной специальности:

пункту 1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 2. Начальные, краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 3. Качественный анализ дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 5. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Личный вклад соискателя ученой степени. Личный вклад соискателя учёной степени заключается в выборе направления исследования, анализе научной литературы по теме диссертации, постановке научных задач, доказательстве новых теорем об однозначной разрешимости нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций в классе S_*^1 , получении явных формул решений для ряда рассматриваемых задач, исследовании обобщённого уравнения Бельтрами с дополнительными условиями, а также в обобщении и анализе полученных научных результатов. Все основные научные результаты, выводы и положения, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно, теоретически обоснованы и выносятся на защиту.

Апробация и реализация результатов диссертации.

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БГУ под руководством д.ф.м.-н., профессора Сафаров Дж.С. (Бохтар, 2019-2024 г);

- семинарах кафедры математического анализа и теории функций Кулябского государственного университета под руководством к.ф.м.-н., дотцента Каримовой Н.Ш. и к.ф.м.-н. дотцент Абдулазизова А. (г. Куляб, 2019-2024г);

- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и методика её преподавания», посвященной 25-летию Конституции Республики Таджикистан и 80-летию доктора педагогических наук, профессора Шарифзода Джумъа Шариф. Бохтар, (18-19 октября 2019 г);

- республиканской научно-практической конференции, посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора Рахмата Акбарова. (г.Куляб., 2019);

- республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию независимости Республики Таджикистан и 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета «Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий» (Душанбе, 28 мая 2021г.);

- международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», Душанбе, 4 ноября 2021г.

- республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы современной математики» посвященной “20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)” и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ, (Душанбе, 14 октября 2022 года);

- международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвящённой “«Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноября 2022г.);

-международной научно-практической конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года);

-международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А. Джурваева Национальной академии наук Таджикистана, (Душанбе, 26-27 мая 2023 года).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 16 работах автора. Из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, одна статья в другом издании, остальные в материалах республиканских и международных конференций.

Структура диссертации и объем. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы, состоящего из 134 наименований. Общий объём диссертации составляет 176 страниц машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, замечаний и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, замечаний или формул в данном параграфе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Во введении дается краткий исторический обзор результатов исследований по поднятым вопросам, обосновывается суть выбранной темы, определяются цели и задачи исследования, представляется научная новизна и практическое значение полученных результатов. Присоставлены основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена обзору и анализу литературы по исследуемой теме. В основном проведён анализ работ, посвященных нагруженным и дифференциальным уравнениям в частных производных, в частности с оператором Коши-Римана, а также приведены некоторые сведения из теории двоякопериодических обобщенных аналитических функций.

Во второй главе работы исследуются задачи нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$, для нагруженного уравнения вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k + f(z), \quad (2.0.1)$$

где $a = a(z), a_k(z), f(z), f_k(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2, z_k – фиксированные точки основного параллелограмма Ω с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$, содержащего начало координат, z_0 – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$. Неизвестными являются $w(z_k)$ и постоянные $c_l, l = \overline{1, m}$.

Поставленную задачу можно трактовать как обратная задача с неизвестными параметрами. Для определения неизвестных параметров как принято в теории этих задач надо поставить условия переопределения (точечное или интегральное). Будем требовать, чтобы решение $w(z)$ уравнения (2.0.1) удовлетворяло условиям

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad t_j \neq z_j, \quad (2.0.2)$$

где t_j – точки из Ω , e_j – некоторые известные числа.

В 2.1-2.2 изучено уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (2.1.1)$$

где a, a_k – постоянные, $w(z), w(z_k)$ – искомая функция, $n \geq 1$.

1. Сперва находим решения уравнения при $n = 1$ для уравнения

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (2.1.2)$$

решение этого уравнения зависит от значения $a = 0, a \neq 0$.

Теорема 2.1.1. Пусть в уравнении (2.1.1) $a = 0$, то есть $n = 1$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы решение в точке $z = z_1$ принимало значение

$$w(z_1) = \frac{f_0 \pi}{b \Omega_0}, \quad (2.1.3)$$

$$\text{где} \quad f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad \Omega_0 = \text{mes} \Omega |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right), \quad d\Omega = dx dy.$$

При этом его единственное решение из класса C_*^1 представляется формулой

$$w(z) = c + dz - bw(z_1)\bar{z} + T_{\zeta} f(z), \quad (2.1.4)$$

в которой постоянные c и d имеют вид

$$c = \frac{f_0}{\Omega_0} + f_0 \bar{z}_1 - dz_1 - T_{\zeta} f(z_1), \quad d = \frac{\pi}{2i\Omega_0} (\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1) f_0,$$

$$T_{\zeta} f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) \zeta(t-z) d_t \Omega,$$

$\zeta(z)$ – дзетта функции Вейрштраса.

Когда $a \neq 0$, то различают случаи $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$,

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; \quad m_1, m_2 - \text{целые}\},$$

Теорема 2.1.2. Пусть в уравнении (2.1.1) $a \in \Gamma_1$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$.

При этом единственное его решение выражается формулой

$$w(z) = -\frac{b}{a+b}F(z_1) + F(z), \quad (2.1.5)$$

где $F(z)$ и $F(z_1)$ имеют вид

$$f_1(z) = \exp(-a\bar{z} - dz)f(z),$$

$$F(z) = \exp(-a\bar{z} - dz)T_\sigma[f_1(z)], \quad w(z_1) = \frac{a}{a+b}F(z_1).$$

3. В случае $a \in \Gamma_1$ однородное уравнение имеет нетривиальное решение, а для разрешимости неоднородного уравнения должны выполняться условие ортогональности на $f(z)$ при условии

$$w(z_0) = e_1. \quad (2.1.6)$$

Теорема 2.1.3. Пусть в уравнении (2.1.1) $a \in \Gamma$. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (2.1.2) с дополнительным условием (2.0.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(a+b)e^{-a\bar{z}_0+\bar{a}z_0} \neq be^{-a\bar{z}_1+\bar{a}z_1}, \quad \iint_{\Omega} f(z)\exp(a\bar{z}-\bar{a}z)d\Omega = 0. \quad (2.1.7)$$

При этом единственное решение задачи (2.1.2) и (2.0.2) представляется в виде

$$w(z) = ce^{-a\bar{z}+\bar{a}z} + \frac{b}{a}w(z_1) + e^{-a\bar{z}+\bar{a}z}T_\zeta[f_1(z)], \quad (2.1.8)$$

постоянные $w(z_1)$ и c определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} ce^{-a\bar{z}_0+\bar{a}z_0} - \frac{b}{a}w(z_1) = e_1, \\ ce^{-a\bar{z}_1+\bar{a}z_1} - \left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

В 2.2 для уравнения (2.1.1) исследуются двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических со многими нагруженными членами.

Как в случае $n = 1$, исследование проведем в случаях: $a \in \Gamma_1, a \in \Gamma_1$ и $a = 0$.

Теорема 2.2.1. Пусть в уравнении (2.1.1) $a \in \Gamma_1, a \neq 0$. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (2.1.1) необходимо и достаточно, чтобы $\det B \neq 0$.

При этом единственное решение уравнения (2.1.1) имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + F(z), \quad (2.2.1)$$

а $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ вычисляются формулами

$$w(z_j) = B^{-1} b_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.2)$$

где

$$B = aE + A, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad E - \text{единичная матрица, } b_j = aF(z_j), j = \overline{1, n}.$$

Теперь рассмотрим случай $a \in \Gamma_1$ и $a \neq 0$.

Теорема 2.2.2. Пусть в уравнении (2.1.1), $a \in \Gamma_1, a \neq 0$ и выполнено условие

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0. \quad (2.2.3)$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.1.1), (2.0.1) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} A = n + 1.$$

При этом единственное решение задачи представляется в виде

$$w(z) = ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + P(z), \quad (2.2.4)$$

где $P(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} T_{\zeta}[f_1(z)], f_1(z) = f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}$ постоянные $c, w(z_1), \dots, w(z_n)$ находятся по формуле

$$\tilde{w} = A^{-1} \tilde{b}, \quad \tilde{w} = (c, w(z_1), \dots, w(z_n))^T,$$

A^{-1} – обратная матрица к A ,

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ d_1 & (a + a_1) & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & a_1 & a_2 & \dots & (a + a_n) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b} = a(b_1 - c_1, b_2, b_3, \dots, b_n), d_j = -e^{-a\bar{z}_j + \bar{a}z_j}, b_j = -P(z_j), j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 2.2.3. Пусть в уравнении (2.1.1) $a = 0, n \geq 2$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \tilde{B} = n + 1.$$

При этом единственное решение уравнения (2.1.1) из класса C_*^1 представляется в виде

$$w(z) = -c - \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) \bar{z} + dz + T_{\zeta} f(z), \quad (2.2.5)$$

где постоянные $c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ находятся по формуле (2.2.5). Случай $a = 0$ следует из теоремы (2.2.1)

$$\tilde{w} = b^{-1} \tilde{b},$$

B^{-1} – обратная матрица к матрице B . Или

$$c = \frac{\Delta_0}{\Delta}, w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n,$$

Δ_j – определитель, полученный из определителя $\Delta = \det B$ заменой j –го столбца столбцом «Свободных членов».

В 2.3-2.4 исследуется задача (2.0.1), (2.0.2) для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (2.3.1)$$

когда все коэффициенты $a(z), a_k(z)$ и правая часть функции класса H_*^α $\alpha \in (0,1)$. Разрешимость уравнения (2.3.1) зависит от свойства числа $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega,$$

Γ - решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

В случае $a_0 \notin \Gamma$, для нахождения $w(z_k)$, согласно представлению решения получается система алгебраических уравнений из n уравнений. Решение находится методом Крамера.

В случае $a_0 \in \Gamma$ задача аналогично исследуется с условием переопределения как в случае постоянных коэффициентов.

Теорема 2.3.1. Пусть в уравнении (2.3.1) $a_0 \notin \Gamma$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ выполнялось условие

$$B(z_1) \neq 1. \quad (2.3.2)$$

При этом единственное решение уравнения (2.3.1) из класса C_*^1 представляется в виде

$$w(z) = \frac{F(z_1)}{1 - B(z_1)} B(z) + F(z), \quad (2.3.3)$$

в котором $B(z), F(z)$ соответственно имеют вид

$$B(z) = e^{-T_{\zeta} a(z)} T_{\sigma} [b(z) e^{T_{\zeta} a(z)}], F(z) = e^{-T_{\zeta} a(z)} T_{\sigma} [f(z) e^{T_{\zeta} a(z)}], a(z) = b(z).$$

При $n > 1$ и $a_0 \notin \Gamma$ задача сводится к решению системы алгебраических уравнений из n неизвестных $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$.

Показано, что когда $\text{rang} B = n$, задачи однозначно разрешима и решение находится в явном виде.

А при $a_0 \in \Gamma$ и $n > 1$ решение задачи сводится к решению алгебраических уравнений с $n + s$ неизвестными. Показано, что при $s = 1$ и $\text{rang} A = n + 1$ задача однозначно разрешима и решение выписывается в явном виде с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho(z)$ и $T_\sigma \rho(z)$.

В 2.4 исследуются для уравнения (2.3.1) двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций со многими нагруженными членами и с переменными коэффициентами, $n > 1$.

Теорема 2.4.1. Пусть в уравнении (2.4.1) $a_0 \in \Gamma$. Тогда для его однозначной разрешимости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det A \neq 0, A = E - B.$$

При этом единственное его решение имеет вид

$$w(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) w(z_j) + F(z),$$

где

$$B_j(z) = \exp(-T_\zeta a(z)) T_\sigma [a_j(z) \exp T_\zeta a(z)],$$

$$F(z) = \exp(-T_\zeta a(z)) T_\sigma [f(z) \exp T_\zeta a(z)],$$

$$w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta = \det A,$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1(z_1) & B_2(z_1) & \dots & B_n(z_1) \\ B_1(z_2) & B_2(z_2) & \dots & B_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(z_n) & B_2(z_n) & \dots & B_n(z_n) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = (c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T$$

$$A \tilde{w} = \tilde{b}, \quad \tilde{b} = (F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n))^T.$$

Аналогично исследуется случай $a_0 \in \Gamma$.

В 2.5 исследуется задача нахождения решения уравнения

$$w_{\bar{z}} + a w(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (2.5.1)$$

удовлетворяющего условиям

$$w(z_j) = d_j, \quad j = \overline{1, s}. \quad (2.5.2)$$

Теорема 2.5.1. Пусть в уравнении (2.5.1) $a \in \Gamma_1, f(z), f_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Тогда для его однозначной разрешимости в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы $s = n$ и $\text{rang} A = n$, где A матрица коэффициентов: $A = (a_{jk})$ в системе уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = d_j + b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.3)$$

При этом единственное решение задачи (2.5.1), (2.5.2) представимо в виде

$$w(z) = F(z) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} F_k(z), \quad (2.5.4)$$

где

$$a_{jk} = F_k(z_j), b_j = -F(z_j), j = \overline{1, n},$$

$F(z_j) = T_\sigma[f_j(z)e^{a\bar{z}-dz}]e^{-a\bar{z}+dz}, \Delta = \det A, \Delta_k$ - определитель, полученный из определителя заменой k -го столбца столбцом «Свободных членов» вектора $(d_1 + b_1, d_2 + b_2, \dots, d_n + b_n)^T$.

В случае $a \in \Gamma_1$ как выше при $s = n + 1$ получим систему алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными. Из полученной системы находятся все неизвестные и вместе с тем и решение задачи уравнения (2.5.1), (2.5.2).

В 2.6 изучается квазилинейное уравнение с неизвестными коэффициентами, а именно уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (2.6.1)$$

с условием

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s} \quad (2.6.2)$$

с неизвестным $w(z), c_k$.

Рассматривая случай $n = 2$, заменой

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \quad (2.6.3)$$

задача (2.6.1), (2.6.2) сводится к решению уравнения

$$\varphi_{\bar{z}} - a\varphi(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z), \quad (2.6.4)$$

с условием

$$\varphi(t_j) = \frac{1}{d_j}, j = \overline{1, s}. \quad (2.6.5)$$

В зависимости от случая $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, решая эту задачу как в §2.5, затем по формуле (2.6.3) получим решение задачи (2.6.1), (2.6.2).

Теорема 2.6.1. Пусть в уравнении (2.6.1) $a \notin \Gamma_1, b_0(z), b_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$ и в условии (2.5.1) все $d_j \neq 0, j = \overline{1, s}$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.6.1), (2.5.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$s = n \text{ и } \text{rang} B = n, \text{ где } B = (b_{jk}).$$

При этом единственное его решение имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)}, \varphi(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{\Delta} B_k(z), \quad (2.6.2)$$

Δ_j — определитель, полученный из определителя $\Delta = \det B$ заменой j -го столбца, столбцом «Свободных членов»

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} - b_1 \\ \frac{1}{d_2} - b_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{d_n} - b_n \end{pmatrix}.$$

Если $s \neq n$ то задача неразрешима или нарушается её единственность решения.

В зависимости от условия $a \notin \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$ находится единственное решение задачи (2.6.1), (2.5.1) по формуле (2.6.2).

В 2.7 исследуется задача нахождения двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части и дополнительными условиями

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(z), \quad (2.7.1)$$

$$w(z_j) = d_j, j = \overline{1, s}. \quad (2.7.2).$$

Сперва эта задача исследуется в случае $m = n = 1$, то есть для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) = f(z)e, \quad (2.7.1')$$

с условиями

$$w(z_1) = e_1, w(z_2) = e_2. \quad (2.7.2')$$

Теорема 2.7.1. Пусть в уравнении (2.7.1) $a, b, f \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$ и $a_0 \notin \Gamma$. Тогда для его однозначной разрешимости должно выполняться условие

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0,$$

где

$$F_1(z) = -\exp(-T_\zeta a(z))T_\sigma[b(z)\exp T_\zeta a(z)],$$

$$F_2(z) = \exp(-T_\zeta a(z))T_\sigma[f(z)\exp T_\zeta a(z)].$$

При этом единственное решение задачи (2.7.1'), (2.7.2') представимо в виде

$$w(z) = F_1(z)w(z_0) + F_2(z)e,$$

здесь

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta}[e_1 F_2(z_1) + e_2 F_2(z_1)],$$

$$e = \frac{1}{\Delta}[e_2 F_1(z_1) + e_1 F_1(z_2)].$$

Аналогично исследуется случай $a_0 \in \Gamma$. В этом случае к условию (2.7.2') добавляется ещё условие $w(z_3) = e_3$ и находятся условия однозначной разрешимости задачи и явный вид решения.

В случае $m > 1, n > 1$ будем считать, что

$$s \geq m + n \text{ и } t_j = z_{j+m}, j = \overline{1, s}.$$

Тогда разбираем случаи $a_0 \in \Gamma$ и $a_0 \notin \Gamma$.

В случае $a_0 \in \Gamma$ получим систему уравнений с $m + n + 1$ неизвестными и $s > m + n$ уравнениями. Тогда при $s = m + n + 1$ и $\text{rang} B = m + n + 1$, B - основная матрица системы, находим единственное решение задачи.

Заметим, что при $s > m + n + 1$ единственность решения нарушается.

Теорема 2.7.2. Пусть в уравнении (2.7.1) $a_k(z), f_j(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$ и $a_0 \in \Gamma$.

Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.7.1), (2.0.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$s = m + n \text{ и } \text{rang} B = m + n.$$

При этом единственное решение задачи (2.7.1), (2.0.2) представляется формулой

$$w(z) = -\sum_{k=1}^m a_k(z) \frac{\Delta_j}{\Delta} + \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ_j - определитель, полученный из определителя $\Delta = \det B$ заменой k - го столбца и j - го столбца соответственно столбцами «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \dots \\ \tilde{e}_{m+n} \end{pmatrix}.$$

Если $s \neq m + n$, то задача

$$\varphi(z) = \psi(z)e^{a\bar{z} - \bar{a}z} \quad (2.7.1)$$

и

$$\psi_{\bar{z}}(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} b(z), \quad (2.7.2)$$

либо вообще неразрешимо или не имеет единственное решение.

Аналогичным образом исследуется случай $a_0 \in \Gamma$. В этом случае получим систему уравнений из $m + n$ неизвестных и $s \geq m + n$ уравнений. Тогда при $s = m + n$ и $\text{rang} A = m + n$, A - основная матрица находится единственное решение задачи.

В 2.8 исследуется уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (2.8.1)$$

когда коэффициенты постоянные. Справедлива следующая.

Теорема 2.8.1. Пусть в уравнении (2.8.1) $a = 0$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = |b|^2 - |d|^2 \neq 0$ и решение в точке z_0 принимало значение

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta\Omega_0} [f_0\bar{b} - \bar{f}_0d] = E.$$

При этом единственное решение уравнения (2.8.1) представимо в виде

$$w(z) = E + A(\bar{z} - \bar{z}_0) + B(z - z_0) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) [\zeta(t - z) - \zeta(t - z_0)] d\Omega,$$

где

$$A = \frac{1}{\Delta\Omega_0} [b(\bar{f}_0d - f_0\bar{b}) + d(f_0\bar{d} - \bar{f}_0b)],$$

$$B = \frac{f_0}{\Omega_0} [\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1],$$

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{h_j}{2}\right), j = 1, 2.$$

Аналогично исследуется случай $a \in \Gamma_1$ и $a \in \Gamma_1$,

где постоянные A, B вычислены формулами (2.8.8), (2.8.8').

В третьей главе изучаются двоякопериодические решения для эллиптической системы уравнений с оператором Бельтрами с нагруженными членами.

В 3.1, который носит поучительный характер, находится двоякопериодическое решение в классе C_*^1 для неоднородного уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - qw_z = f(z), \quad (3.1.1)$$

где q – постоянная и $|q| \neq 1$, $f(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Лемма 3.3.1. Если $w(z) \in C_*^1$ – решение уравнения (3.1.1), то необходимо, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0. \quad (3.1.2)$$

Теорема 3.1.1. Для разрешимости уравнения (3.1.1) класса C_*^1 необходимо и достаточно выполнение условия (3.1.2).

Если это условие выполняется, решение уравнения (3.1.1) из может быть выражено как

$$w(z) = c + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_\zeta f(z),$$

$$\tilde{T}_\zeta f(z) = - \iint_{\Omega} f(z) \zeta(\tau - q\bar{\tau} - z + q\bar{z}) d_\tau \Omega,$$

$$\zeta(z + q\bar{z}) = \frac{1}{z + q\bar{z}} + \sum' \left(\frac{1}{z + q\bar{z} - h - q\bar{h}} + \frac{1}{h} + \frac{z + q\bar{z}}{h^2} \right)$$

$$h = m_1(h_1 + q\bar{h}_1) + m_2(h_2 + q\bar{h}_2), \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В 3.2 исследовано уравнение вида

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z_1) = f(z), \quad (3.2.1)$$

с одним нагруженным членом, где q $|q| \neq 1$, a – постоянная, z_1 – фиксированная точка из области Ω .

Условие разрешимости уравнения (3.2.1) совпадает с условием разрешимости для случая $q = 0$:

$$w(z_1) = \frac{1}{\pi|\Omega_0|} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = \frac{f_0}{\pi|\Omega_0|}, \quad |\Omega_0| = \text{mes}\Omega. \quad (3.2.2)$$

При выполнении этого условия найдены решения уравнения с помощью интегрального оператора $\tilde{T}_\zeta \rho(\omega)$, где $\omega = z + q\bar{z}$, $|z| \neq 1$, как в §3.1.

Теорема 3.2.1. Пусть в уравнении (3.2.1) $a \neq 0$ и

$$f_0 = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы решение в $z = z_1$ принимало значение (3.2.2).

При этом единственное его решение $w(z)$ представляется в виде

$$w(z) = w(z_1) - \frac{1}{1 - |q|^2} [aw(z_1)(\overline{z + q\bar{z} - z_1 - q\bar{z}_1}) + b(z + q\bar{z} - z_1 - q\bar{z}_1) + T_\zeta^\omega f(z) - T_\zeta^\omega f(z_1)], \quad (3.2.3)$$

постоянная b – вычислена формулой $b = \frac{\tilde{f}_0}{2\pi i |\Omega_0|} (\overline{h_1^1} \eta_2^1 - \overline{h_2^1} \eta_1^1)$.

В 3.3 изучены двоякопериодические решения обобщенного нагруженного уравнения Бельтрами с постоянными коэффициентами

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (3.3.1)$$

где $|z| \neq 1$.

В зависимости от условия

$$a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ или } a \in \overline{(1 - |q|^2)\Gamma^1},$$

где $\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma}$, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ найдены условия однозначной разрешимости уравнения. Показано, что при $a \in \overline{(1 - |q|^2)\Gamma^1}$ для однозначной разрешимости уравнения (3.2.1) необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$ и $w(z_1)$ принимало определенное значение, выражающее через интегральные операторы $T_\sigma^\omega \rho(z)$ с ядром сигма-функции $\sigma(\omega)$, построенной на плоскости переменных $\omega = z + q\bar{z}$, $\sigma^1(\omega) = \sigma(\omega)\zeta(\omega)$, с периодами $h^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h^2 = h_2 + q\bar{h}_2$, $|z| \neq 1$.

Решение уравнения выписано через интегральный оператор $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$, причём ядро интеграла зависит от значения a .

В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение уравнения с дополнительным условием

$$w(z_0) = e_1, z_0 \neq z_1. \quad (3.3.2)$$

Выписано условие разрешимости и найдено решение при помощи интегрального оператора $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$, $\omega = z + q\bar{z}$, $\zeta(\omega)$ – как в §§3.1-3.2.

В 3.4 найдено условие однозначной разрешимости уравнения

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) \quad (3.4.1)$$

с многими нагруженными членами и с постоянными коэффициентами, удовлетворяющими условию (3.3.1).

В случае, когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение уравнения (3.4.1) без дополнительного условия.

Теорема 3.4.1. Пусть в уравнении (3.4.1)

$$0 < |q| < 1 \text{ и } a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ и } f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Тогда для его однозначной разрешимости в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} B = n. \quad (3.4.2)$$

Матрица B_1 имеет одинаковые строки, следовательно, $\det B_1 = 0$, и теорему можно выразить следующим образом: при условии теоремы, для того чтобы уравнение (3.4.1) было однозначно разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы число $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ не совпадало с собственными значениями матрицы B_1 , так как $a \neq 0$.

Если условия теоремы выполнены, то единственное решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + \frac{1}{a} \exp(-a\bar{\omega} + d\omega) T_\sigma^\omega [\tilde{f}(\omega) \exp(a\bar{\omega} + d\omega)], \quad (3.4.3)$$

где $\omega = z + q\bar{z}$, интегральный оператор T_σ^ω , как в (3.4.4¹), постоянные

$$w(z_k) = \varphi(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

находятся из системы уравнений

$$B\varphi^0 = A_1^0. \quad (3.4.4)$$

Когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение задачи (3.3.2), (3.4.1) при выполнении условия разрешимости. Результаты приведены в теореме 3.4.2.

В 3.5 исследована задача нахождения двоякопериодические решения обобщенного неоднородного уравнения Бельтрами с неизвестными параметрами и условиями переопределения

$$w_z - qw_{\bar{z}} + aw(z) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (3.5.1)$$

удовлетворяющие условию переопределения

$$w(z_j) = e_j, j = \overline{1, s}, \quad (3.5.2)$$

где $|z| \neq 1, a, e_j$ - известные постоянные, а c_k - неизвестные.

Показано, что если в уравнении (3.5.1) $0 < |q| < 1$ и $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$, то для однозначной разрешимости задачи (3.5.1) и (3.5.2) необходимо и достаточно, чтобы $j = n, rang A = n$, A - основная матрица системы алгебраических уравнений, к которой сводится задача.

A при $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ задача разрешима однозначно, когда $j = n + 1$ и $rang A = n + 1$. Результаты приведены в теореме 3.5.1.

Теорема 3.5.1. Пусть в уравнении (3.5.1)

$$0 < |q| < 1 \text{ и } a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1^1, f_k(z) \in H_*^\alpha.$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (3.5.1), (3.5.2) необходимо и достаточно чтобы $j = n$ и $rang A = n$.

При этом единственное решение задачи (3.5.1), (3.5.2) представляется в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^n c_k E_k(z + q\bar{z}),$$

$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\Delta = \det A$, Δ - определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$E_k(\omega) = E(z + q\bar{z})$ имеет вид (6), в котором $\omega, \bar{\omega}$ заменены на $\omega = z + q\bar{z}$,
 $\bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z$.

В 3.6 изучаются двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с переменными коэффициентами и нагруженными членами

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n b_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (3.6.1)$$

где $q(z) \in C_*^1 \cap H_*^\alpha$, $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и $a(z), b_k(z), f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$.

Сперва как поучительно изучается случай $n = 1$ и $w(z_1) = 0$, то есть уравнение

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = f(z). \quad (3.6.2)$$

Все решения этого уравнения выписаны с помощью интегральных операторов:

$$1. \tilde{T}_\zeta \rho(z) = T_\zeta^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, z) d_z \Omega, \quad (A)$$

где ядро интеграла имеет вид

$$H(t, z) = \omega_t(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) = \omega_t(t) \tilde{\zeta}(t - z),$$

здесь $\omega(z)$ - основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)w_z = 0, |q(z)| \leq 0 < 1$$

удовлетворяющего условию

$$\omega(0) = 0, \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, \quad j = 1, 2$$

$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ —зависят как функционал от $q(z)$ и удовлетворяют условию $Im\left(\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}\right) \neq 0$.

На плоскости $\mathbb{C}_\omega$ построены обобщенные функции Вейерштрасса

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z)), \quad \tilde{\wp}(z) = \wp(\omega(z)), \quad \tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z)).$$

$$2. \tilde{T}_\sigma \rho(z) = T_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H_0(t, z) d_z \Omega,$$

где ядро интеграла имеет вид

$$H_0(t, z) = \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - D)}{\sigma(-D)\sigma(\omega(t) - \omega(z))}, D \in \Gamma^1,$$

Γ^1 – решетка $\Gamma^1 = \{m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Разрешимость уравнения (3.6.2) зависит от свойства числа $\tilde{a}_0: \tilde{a}_0 \in \Gamma^1$,

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) dz,$$

причём $\omega_{\bar{z}}(z) \in C_*^1$.

Когда $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ – решение получается исключительно, только через $\tilde{T}_\zeta \rho$, А, при $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ решение находится с помощью $\tilde{T}_\zeta \rho$ и $\tilde{T}_\sigma \rho$, причём для интегрального оператора ядро содержит $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$.

Затем изучается случай уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + b(z)w(z_1) = f(z), \quad (3.6.3)$$

с одним нагруженным членом.

Разрешимость уравнения (3.6.3) в классе C_*^1 зависит от свойств числа b_0

$$b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z b(z) d\Omega \neq 0 \text{ или } b_0 = 0.$$

В случае $b_0 \neq 0$ необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.6.3) имеет вид

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}, f_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) d\Omega. \quad (3.6.4)$$

Это означает, что решение в точке $z = z_1$ принимало значение, равное $\frac{f_0}{b_0}$.

Теорема 3.6.1. Пусть в уравнении (3.6.3) $q(z) \in C_*^1, b(z), f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$ и $\omega(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (3.6.3) при $b_0 \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ решение принимало значение вида (3.6.4). При этом единственное решение уравнения представляется формулой

$$w(z) = \frac{f_0}{b_0} - \frac{f_0}{b_0} (T_\zeta^\omega[b(z)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)]) + T_\zeta^\omega[f(z)] - T_\zeta^\omega[f(z_1)], \quad (3.6.5)$$

где $T_\zeta^\omega \rho(z)$ имеет вид (A).

В случае $b_0 = 0$ для получения единственного решения налагается условие переопределения

$$w(z_0) = e_0, \quad z_0 \neq z_1, \quad (3.6.6)$$

e_0 – некоторое известное число.

Показано, что при выполнении условия

$$1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] \neq T_\zeta^\omega[b(z_1)],$$

задача (3.6.1), (3.6.5) имеет единственное решение вида

$$w(z) = c + T_\zeta^\omega[b(z)w(z_1)] + T_\zeta^\omega[f(z)] = c + w(z_1)T_\zeta^\omega[b(z)] + T_\zeta^\omega[f(z)],$$

причём постоянные c и $w(z_1)$ однозначно находятся из системы уравнений с детерминантом Δ :

$$\Delta = 1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)] \neq 0.$$

Далее, находится решение уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (3.6.7)$$

Основные результаты этого параграфа отражены в теореме 3.6.2.

В 3.7 исследована задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w(z) + (f_0(z) + bf_1(z))w^n(z) = 0. \quad (3.7.1)$$

Обратная задача: найти функцию $w(z)$ из класса C_*^1 и число b такое, что в области Ω связаны комплексным уравнением (3.7.1) и для функции $w(z)$ выполняется условие

$$w(z_0) = A, z_0 \in \Omega, \quad (3.7.2)$$

где z_0 – фиксированная точка, $n \geq 1, A$ – постоянная, функции $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z)$ – известные, $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z) \in H_*^\alpha$, причем

$$|q(z)| \leq q_0 < 1. \quad (3.7.3)$$

Условие (3.7.3) является условием равномерной эллиптичности системы уравнений (3.7.1) на плоскости [27].

В данной обратной задаче условие (3.7.2) является условием переопределения, необходимое для нахождения неизвестного параметра b .

Заметим, что вместо условия (3.7.2) можно задавать интегральное условие вида

$$\iint_{\Omega} \Psi(z)w(z)d\Omega = E,$$

где $\Psi(z)$ - функция класса C_*^1 , E - некоторое число.

Если $w(z) \neq 0$ и b удовлетворяют уравнению (3.7.1), то функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{w^{n-1}(z)} \quad (3.7.4)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (1-n)a(z)\varphi(z) = (n-1)(f_0(z) + bf_1(z)). \quad (3.7.4')$$

Чтобы между решениями уравнения (3.7.1) и уравнения (3.7.4') иметь взаимно однозначное соответствие, надо чтобы

$$0 > \arg w(z) > -\frac{2\pi}{n-1}.$$

Будем предполагать, что аргумент решения уравнения (3.7.1) лежит в указанном секторе. Ключевые результаты этого параграфа изложены в теоремах 3.7.1-3.7.5 диссертации.

В четвёртой главе проведены анализ и обобщение полученных результатов, рассмотрены возможности их практического применения и определена их научная значимость.

ВЫВОДЫ

1. Основные научные результаты диссертации

В диссертации исследованы задачи об однозначной разрешимости уравнения обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций, с нагруженными членами и неизвестными параметрами при заданных точечных условиях переопределения.

Также изучается равномерно эллиптическое уравнение с оператором Бельтрами с нагруженными членами и дополнительными условиями в классе регулярных двоякопериодических функций.

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для уравнения (2.1.1) в случае, когда все $c_k = 0$, в классе C_*^1 найдены условия однозначной разрешимости и выписаны все решения с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho$ и $T_\sigma \rho$ [3-A, 5-A];

В одном случае решение находится без условия (2.0.2), а в другом случае с условием (2.1.2) при $s = 1$.

- для уравнения (4.1), когда все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$ найдено условие однозначной разрешимости задачи (2.1.1), (2.1.2) в терминах коэффициентов уравнения и известных постоянных в условии (2.1.2) [2-A, 6-A];

- исследование задачи (2.1.2), (2.6.1) при $n = 2$ сведено к решению обратной задачи с неизвестными параметрами в правой части. Найдено условие однозначной разрешимости задачи и вычислены все входящие неизвестные постоянные [1-A, 4-A];

- проведено исследование задачи (2.1.1), (2.1.2) в общем виде, найдены условия однозначной разрешимости и выписаны решения задачи в явном виде [2-A, 7-A];

- дано полное исследование решения задачи (2.8.1), (2.8.2). Найдены условия однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения [3-А, 8-А];

- найдены условия однозначной разрешимости нагруженного уравнения (3.4.1) с оператором Бельтрами, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Решение находится с помощью интегральных операторов $T_{\zeta}^{\omega} \rho$ и $T_{\sigma}^{\omega} \rho$ на плоскости основного квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами [4-А, 9-А].

2. Рекомендации по практическому использованию результатов

1. Результаты, полученные в диссертационной работе могут быть использованы при дальнейшем исследовании нагруженных обобщенных аналитических функций с дополнительными интегральными условиями;

2. Разработанные методы можно применять и нагруженным уравнениям метааналитических функций высокого порядка как для постоянных коэффициентов, так и для переменных коэффициентов, с точечными и интегральными условиями (переопределения);

3. Результаты работы могут найти применения при математического моделирования нелокальных, в том числе периодические, а также фрактальных процессов и явлений. Так как математической физики фракталов, в особенности дробной динамики, стали нагруженные дифференциальные уравнения, демонстрирующие роль этих уравнений в различных отраслях современной науки, в частности математической биологии;

4. Материалы диссертации и методы исследования могут быть рекомендованы для использования в учебном процессе при чтении специальных курсов и проведения исследовательской работы для студентов, аспирантов и магистрантов по направлению комплексного анализа и дифференциальных уравнений.

ПЕРЕЧЕНЬ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ

а) Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях КОА при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2019.-№3.- С.51-56.

[2-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодическое решение одной нагруженной квазилинейной системы уравнений первого порядка / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2021.-№1.- С.102-110.

[3-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости S нагруженным членом / Сафаров Д.С., Кулобиев М.А. // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/1(96). С. 14-18.

[4-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций нагруженным членом / Д. Сафаров, М. Кулобиев // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/3(102). С. 5-8.

[5-А]. Кулобиев М.А. Задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров., , М.А. Кулобиев // Известия национальной академии наук Таджикистан.-2023.-№1 (190) .-С.15-25.

б) Статьи, опубликованные в других изданиях:

[6-А]. Кулобиев М. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д. Сафаров // Вестник Бохтарского

государственного университета. Серия естественных наук. -2019. - №2/3(66). - С.5-8.

[7-А]. Кулобиев М. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и методика её преподавания» посвященная 25-летию Конституции Республики Таджикистан и 80-летию доктора педагогических наук, профессора Шарифзода Джумъа Шариф. Бохтар, (18-19 октября 2019 г)- С.132-134.

[8-А]. Кулобиев М. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы республиканской научно-практической конференции посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора Рахмат Акбаров. (г.Куляб., 2019). -С.89-92.

[9-А]. Кулобиев М.А. Функсияҳои умумикардашудаи аналитики дудаврдошта бо сарбории иловагӣ / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // маводи конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Масоили мубрами математика ва таълими он» бахшида ба бистсолаи омузиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзи дар соҳаи илму маориф (2020-2040) ва 70-солагии корманди шоистаи Тоҷикистон, доктори илмҳои педагогӣ, профессор А.Э. Сатторов, Донишгоҳи давлатии Бохтар, соли 2020, саҳ. 55-57

[10-А]. Кулобиев М.А. Задача определения неизвестного коэффициента в уравнении обобщенных аналитических функций типа Риккати / М.А. Кулобиев // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию независимости Республики Таджикистан и 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета, “Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий” (Душанбе. - 28 мая 2021г.).— С.181-184.

[11-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости С

нагруженными членами / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // Сборник статей II международной научно-практической конференции на тему “О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач” 4 ноября 2021г. С.-160-164, Душанбе – 2021

[12-А]. Кулобиев М.А. Задача определения неизвестного параметра в уравнении обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // “Актуальные проблемы современной математики”, Сборник статей республиканской научно-практической конференции посвященной “20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)” и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ. (Душанбе, 14 октября 2022 года), стр. 83-85.

[13-А]. Кулобиев М.А. Задача нахождения Двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженным членом и неизвестным параметром, содержащее в свободной правой части / М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённой “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. Корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноября 2022г.). - С.-102-103.

[14-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами /М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) -С. 245-248.

[15-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами /М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической

конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) -С. 245-248.

[16-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения обобщённых аналитических функций со многими нагруженными членами /М.А. Кулобиев // Материалы международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джурваева Национальной академии наук Таджикистана, (Душанбе, 26-27 мая 2023 года) –С. 110-111.

**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ КҶҶЛОБ БА НОМИ АБУАБДУЛЛОҲИ
РҶДАКӢ**

Бо ҳуқуқи дастнавис

ВБД: 517.95



КУЛОБИЗОДА МИРЗО АШУРМАД

**ҲАЛҲОИ ДУДАВРДОШТА БАРОИ МУОДИЛАҲОИ САРБОРИДОШТАИ
ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКИИ УМУМИКАРДАШУДА БО ШАРТҲОИ
ИЛОВАӢ**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика
аз рӯи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференциалӣ, системаҳои динамикӣ ва
идоракунии оптималӣ

Душанбе – 2026

Рисола дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои
Донишгоҳи давлатии Кӯлоб ба номи Абуабдуллоҳи Рӯдакӣ иҷро карда шудааст

Рохбари илмӣ: **Сафаров Чумабой** - доктори илмҳои физикаю
математика, профессор.

Муқарризони расмӣ: **Чангибеков Гулҳоча** - доктори илмҳои физикаю
математика, профессор, мудири шуъбаи
муодилаҳои дифференсиалии Институти
математикаи Академияи миллии илмҳои
Тоҷикистон;

Чумаев Эрач Ҳакназарович - номзоди илмҳои
физикаю математика, дотсенти кафедраи
математика ва илмҳои табиӣ филиали Донишгоҳи
давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар
шаҳри Душанбе.

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи (Славянии) Русияву Тоҷикистон.

Ҳимоя санаи «30» сентябри соли 2026 соати 14:00 дар ҷаласаи шурои
диссертатсионии 6D.KAO-011 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки дар
суроғай: 734025, Шаҳри Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, корпуси 17, аудиторияи
203 ҷойгир аст, баргузор мешавад.

Е-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони котиби илмӣ
+992900766603.

Бо диссертатсия ва автореферати он тавассути сомонаи [http://www. tnu.tj](http://www.tnu.tj). ва
дар китобхонаи илмӣ Донишгоҳи миллии Тоҷикистон шинос шудан мумкин аст.

Автореферат фиристода шудааст «_____» «_____» 2026с.

Котиби илмӣ шурои диссертатсионии 6D.KAO-011,
номзоди илмҳои физикаю математика



Ғафоров А.Б.

МУҚАДДИМА

Мубрамияти мавзуи таҳқиқот. Дар назарияи муосири функцияҳои аналитикии умумикардашуда таҳқиқи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои сарборидошта яке аз самтҳои муҳими таҳқиқот ба ҳисоб меравад. Таваҷҷуҳи махсус ба ин масъалаҳо аз он бармеояд, ки онҳо на танҳо аҳамияти назариявӣ доранд, балки дар моделсозии равандҳои физикӣ, механикӣ ва дигар масъалаҳои илмҳои табиатшиносӣ низ истифода мешаванд.

Бо вучуди натиҷаҳои муҳими бадастомада, масъалаҳои вобаста ба якқимата ҳалшавандагии муодилаҳои сарборидоштаи функцияҳои аналитикии умумикардашуда бо шартҳои иловагӣ ва барзиёдмуайяншуда, инчунин ҳосил намудани шаклҳои ошқори ҳал барои онҳо ҳанӯз ба таври пурра таҳқиқ нашудаанд. Аз ин рӯ, таҳқиқи ҳалҳои дуаврдошта барои чунин синфи муодилаҳо, исботи теоремаҳои нав оид ба якқимата ҳалшавандагӣ ва ҳосил намудани формулаҳои ошқори ҳал аҳамияти назариявӣ дошта, мубрамияти мавзӯи диссертатсияи мазкурро муайян менамояд.

Дарачаи таҳқиқи мавзуи илмӣ. «Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ яке аз қисматҳои хеле муҳимро муодилаҳои дифференсиалии сарборидошта ташкил медиҳанд. Дар адабиёт қорҳои аввалин оид ба муодилаҳои интегрاليи сарборидошта ба вучуд омаданд. Ба ин навъи классҳои муодилаҳои сарборидошта қорҳои [27,28], А. Кнесер., Л. Личтенштейн., Н.М. Гюнтер, Н.Н. Назаров бахшида шудаанд. Муҳимияти омӯзиши чунин намуди муодилаҳо дар қорҳои А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский қайд намуда, намунаҳои масъалаҳои амалиро аз техника ва физика, ки ба муодилаҳои интегрاليи сарборидошта оварда мешаванд, пешниҳод намуданд.

Ҳалли аксар масъалаҳои муҳими физикаи математикӣ, биологияи математикӣ, экология ва химия маълумотрасониҳои дарозмуддат, идоракунии оптималӣ ба омӯзиши чунин муодилаҳо оварда мерасонанд.

Саҳми назаррасро дар қоркарди назарияи муодилаҳои дифференсиалии сарборидоштаро олимони зерин гузоштаанд: [8,19], А.М. Нахушев, В.М.

Будак, А.Д. Искандеров, А.В. Бородин, В.М.Казиев, А.М. Krall, А.А. Кереев [3, 4, 9, 10, 19, 25].

Солҳои охир бо шарофати корҳои А.М. Нахушев ва шогирдони ӯ, инчунин М.Т. Ченалиев ва пайравони ӯ муодилаҳои дифференсиалии сарборидошта инкишофи минбаъдаи худро пайдо намуданд.

Солҳои 1969 А.М. Нахушев ҳангоми ҳалли масъалаи гузоштаи А.В. Битсадзе чустуҷӯи «масъалаҳои канории гузошташуда барои муодилаҳои навъи омехтаи тартиби дуюм муқаррар намуд, ки ҳалли масъалаҳои омехта бо муодилаҳои дифференсиалии сарборидошта алоқаманданд мебошанд» [12, 13, 14, 15].

«Қайд намудан лозим аст, ки масъалаҳои ба муодилаҳои сарборидошта алоқаманд классикӣ нестанд. Мавҷудияти ҷамъшавандаи сарборидошта имкон намедиханд, ки методҳои таҳқиқотии гузошта истифода бурда шаванд. Ин мушкилотҳои навро ҳангоми ҳалли масъалаҳо ба вучуд оварда, талаботҳоро дар коркарди методҳои нави таҳқиқотӣ пеш мегузорад. Муҳимияти таҳқиқоти гузаронидашуда ба ҳамин классии муодилаҳо асос меёбад» [8,19].

Муқаррар гардид, ки муодилаҳои сарборидошта ҳангоми ҳалли масъалаҳои ғайрилокалӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода бурда мешаванд. Таҳқиқотҳои системаноки масъалаҳои канории ғайрилокалӣ аз ёфтани ҳалҳои даврӣ барои муодилаҳои эллиптикӣ [13] аз корҳои А.В. Битсадзе ва А.А. Самарский оғоз ёфт. Оиди ин масъала корҳои В.А. Стеклов [20], А.И. Кожанов [11] ва Л.С. Пулькина [22], А.М. Нахушев [16]-ро қайд намудан мумкин аст. Дар ин корҳо нишон дода шудаанд, ки «мавҷудияти шартҳои ғайрилокалӣ имконияти истифодабарӣ ва таҳқиқи ҳалшавандагии масъаларо бо методҳои классикӣ, ки барои коркарди масъалаҳои аввалаи канорӣ лозиманд, фароҳам намеоранд» [11,16,20,22].

«Дар асоси қайдҳои боло масъала оид ба ёфтани ҳалли муодилаҳои қаноаткунандаи шартҳои ғайрилокалӣ ё масъалаи ёфтани ҳалли муодилаҳои сарборидошта, ки шартҳои сарҳадии классикиро таъмин мекунанд, муҳим арзёбӣ мешаванд» [19,20].

Дар монографияҳои М.Т. Ченалиев ва А.М. Нахушев «масъалаҳои канорӣ барои системаҳои сарборидоштаи навъи эллиптикӣ» [7,19,20] омӯхта шудаанд. А.Б. Бородин, Хо Хон Сун бо истифода аз пешниҳоди ҳалҳо барои муодилаҳои эллиптикии сарборидоштаи чинси дуюм, ҳангоме ки коэффисиентҳои муодилаҳо аз теъдоди ками тағйирёбандаҳои новобаста вобастаанд, исбот намуданд, ки масъалаи Дирихле дорои ҳалли ягона мебошад» [3,26].

Натиҷаҳои А.Б. Бородин барои муодилаҳои бештар умумӣ тавсеа ёфтанд. Инчунин ӯ масъалаи Дирихле ва масъалаи умумишудаи Риман-Гилбертро барои системаҳои моделии умумишудаи сарборидоштаи Коши-Риман таҳқиқ намуд [27].

Дар алоқамандӣ бо далелҳои дар боло овардашуда таҳқиқи масъалаҳои ҳалшавандагии системаҳои умумишудаи сарборидоштаи Коши-Риман, инчунин системаҳои эллиптикии мунтазами муодилаҳои сарборидоштаи тартиби якум дар классҳои функсияҳои дудаврдошта муҳим ва актуалӣ мебошанд.

Дар қорҳои И.Н. Векуа [5] В.С. Виноградов [6], Э. Муҳаммадиев [10], В.И. Показев [21], С. Байзоев [2], Ҷ.С. Сафаров [24,25] ва дигарон «барои муодилаҳои умумикардашудаи функсияҳои аналитикӣ масъалаҳои мавҷудият ва ёфтани ҳалҳо дар классҳои функсияҳои даврӣ ва дудаврдошта маҳдуд» таҳқиқ карда шудаанд.

Функсияҳои аналитикии умумикардашуда бо татбиқоти зиёд дар монографияи академик И.Н. Векуа ва математики америкоӣ Л. Берс сохта шудаанд.

Назарияи функсияҳои аналитикии умумикардашудаи дудаврдошта бо баъзе татбиқоти он дар монографияи Ҷ.С. Сафаров [25] сохта шудаанд. Барои сохтани чунин функсияҳо ҳамчун васеъшавии классҳои функсияҳои эллиптикӣ операторҳои интегралӣ $T_{\zeta}\rho(z)$ ва $T_{\sigma}\rho(z)$ мувофиқ бо ядроҳои функсияҳои Вейерштрасс $\zeta(z)$ – дзета ва $\sigma(z)$ – сигма тартиб дода шудаанд. Хосиятҳои ин операторҳо имконият медиҳад, ки функсияҳои аналитикии умумикардашудаи дудаврдоштаи навишта шуда, баъзе татбиқоти онҳо ёфта шавад.

Барои системаҳои эллиптикии мунтазами тартиби якум бо оператори Белтрам баъзе гомеоморфизмҳои квазидаврӣ, ки онҳо даврҳои параллелограмми асосиро дар чоркунҷаи ҳамвории гомеоморфизм ба таври квазиконформӣ инъикос мекунад, сохта шудаанд. Бо ёрии чунин гомеоморфизм омӯзиши чунин муодилаҳо ба муодилаи функсияҳои аналитикии умумикардасуда оварда мешаванд. Бо ҳамин тарз дар ҳамвории гомеоморфизм функсияҳои аналитикии умумикардасудаи Вейерштрасс дохил карда мешаванд

$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$, $\tilde{\rho}(z) = \rho(\omega(z))$, $\omega(z)$ – гомеоморфизми асосии квазидаврӣ муодилаи Белтрам мебошад. Ин муодила муодилаи функсияҳои аналитикии умумикардасуда мебошад.

Дар корҳои А.М. Нахушев [15,16], М.Т. Ҷоналиев [5], А.В. Бородин [2], М.И. Рамазонов [6,21], Хо Хон Сун [25,26] ва дигарон «масъалаҳои канории гуногун барои системаҳои эллиптикии умумӣ бо аъзоҳои сарборидошта» омӯхта шудаанд. Қисми асосии онҳоро операторҳои Лаплас, Коши-Риман ташкил медиҳанд [3,7,8,23,27,28].

Функсияҳои аналитикии умумикардасудаи сарборидошта, ба ғайр аз мақолаи тулонии [18] кам таҳқиқ шудаанд.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва ё мавзӯҳои илмӣ. Муҳтаво ва самти таҳқиқотии қори диссертатсионии мазкур бо барномаҳои стратегии давлатӣ ва нақшаҳои илмию кофтуковии Ҷумҳуриявӣ робитаи зич дорад. Аз ҷумла, низоми концептуалӣ ва пажӯҳиши амалии қор дар меҳвари татбиқи Фармони Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон аз 31 январӣ соли 2020, №1445 Дар бораи "Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф" эълон намудани солҳои 2020-2040 сурат гирифта, ба рушди тафаккури техникӣ ва рақамикунории равандҳои таълимӣ нигаронида шудааст. Ҳамзамон, таҳқиқоти диссертатсионии мазкур дар доираи амалӣ гардидани нақшаи дурнамои қорҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои факултети физика, математика ва информатикаи Донишгоҳи давлатии Кӯлоб ба номи Абуабдуллоҳи Рӯдакӣ дар давраи солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзӯи «Ҳалҳои дуадрдошта барои

муодилаҳои сарборидоштаи функсияҳои аналитикии умумикардасуда бо шартҳои иловагӣ» иҷро гардидааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши проблемаи ҳалшавандагии системаҳои умумикардасудаи сарборидоштаи Коши – Риман, инчунин системаҳои эллиптикии мунтазами сарборидоштаи тартиби якуми ҳамворӣ дар классҳои функсияҳои дудаврдошта.

Вазифаҳои таҳқиқот.

- ба воситаи C_*^1 маҷмӯи дудаврдоштаро бо даврҳои $h_1, h_2, \text{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ –и функсияҳо аз классҳои $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω – параллелограмми асосии даврҳо, ки ибтидои координатро дарбар мегирад;

- дар классҳои C_*^1 ёфтани ҳалли муодилаи функсияҳои аналитикии умумикардасуда бо аъзоҳои сарборидоштаи

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (0.0.1)$$

дар ин ҷо $z = x + iy$ $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператори Коши – Риман

$a = a(z), a_k = a_k(z), f(z)$ – функсияҳои дудаврдоштаи додасуда бо даврҳои $h_1, h_2, z_k \in \bar{\Omega}, k=1, 2, \dots, n$;

- дар классҳои C_*^1 ёфтани ҳалҳои муодилаҳои функсияҳои аналитикии умумикардасуда бо аъзоҳои сарборидошта ва параметрҳои номаълум дар тарафи рост

$$w_{\bar{z}} - aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(z), \quad (0.0.2)$$

бо шартҳои барзиёдмуайянкунии

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s}, \quad (0.0.3)$$

дар ин ҷо a_k, d_j – маълумҳо, c_k – ададҳои номаълум бо яққоягӣ бо $w(z)$ ва $w(z_k)$;

- дар классии C_*^1 ёфтани ҳалли ягонаи муодилаҳои сарборидоштаи функсияҳои аналитикии умумишудаи

$$w_{\bar{z}} + aw + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (0.0.4)$$

$a = a(z), b = b(z), d = d(z), f(z)$ – функсияҳои дудаврдошта бо даврҳои h_1, h_2 ;

- ёфтани решаи ягона аз классии C_*^1 барои муодилаи сарборидоштаи

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (0.0.5)$$

ки дар ин ҷо $q(z) \in C_*^1$ ва $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $Bw = w_{\bar{z}} - q(z)w_z$ – оператори дифференсиалии Белтрама мебошад, $w(z), w(z_k)$ – номаълумҳо;

- дар классии C_*^1 ёфтани ҳалли муодилаи квазихаттии сарборидоштаи намуди

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \left(\sum_{k=1}^n a_k f(z) \right) w^n = 0, \quad (0.0.6)$$

дар ин ҷо $n \geq 1$ – адади бутун, $|q(z)| \leq q_0 < 1$,

$$w(t_j) = d_j, \quad j = \overline{1, s}. \quad (0.0.7)$$

Объекти таҳқиқот. Объекти таҳқиқот муодилаҳои функсияҳои аналитикии умумикардасудаи сарборидошта ва муодилаҳои умумикардасудаи сарборидоштаи Белтрам бо аъзоҳои зиёди сарборидошта мебошад.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот муқарар намудани теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии яққимата ва ҳосил намудани формулаҳо барои ҳалли муодилаҳои дар боло нишондодашуда дар классии функсияҳои дудаврдошта бо шартҳои иловагии барзиёдмуайянкунӣ.

Навгони илмӣ таҳқиқот.

Дар рисола натиҷаҳои зерин ҳосил шудааст, ки онҳо барои илм нав мебошанд:

1. барои муодилаҳои сарборидоштаи функсияҳои аналитикии умумикардасудаи (0.0.1) шартҳои ҳалшавандагии яққимата дар классии C_*^1 ёфта шуда, формулаҳои муайян барои ҳалли онҳо ҳосил шудаанд;

2. шартӣ якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои (0.0.2), (0.0.3) ёфт шуда, формулаҳои ҳал дар классӣ C_*^1 ҳосил шудаанд;

3. барои муодилаҳои сарборидоштаи функцияҳои аналитикии умумикардшудаи намуди (0.0.4) шартӣ якқимата ҳалшавандагӣ ёфта шуда, шакли ошқори ҳал дар классӣ C_*^1 бо шартҳои иловагии нуқтагӣ ҳосил шуданд;

4. барои муодилаи сарборидоштаи умумикардшудаи Белтрама (0.0.5) шартӣ якқимата ҳалшавандагӣ ёфт шуда, шаклҳои ошқори ҳал дар классӣ C_*^1 ҳосил шуданд;

5. шартӣ якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои (0.0.6), (0.0.7) ҳангоми $n = 2$ ёфта шуда, формулаҳои ҳалли ягона дар классӣ C_*^1 ҳосил шуданд.

Аҳамияти назариявӣ ва илмӣ-амалии рисола. Рисола характери назариявӣ дошта, ба рушди назарияи муодилаҳои сарборидоштаи функцияҳои аналитикии умумикардшуда ва масъалаҳои канорӣ бо шартҳои иловагӣ бахшида шудааст. Дар рафти таҳқиқот теоремаҳои нав оид ба якқимата ҳалшавандагии муодилаҳои сарборидошта дар синфи C_*^1 исбот гардида, барои як қатор масъалаҳои баррасишуда шаклҳои ошқори ҳал ба даст оварда шудаанд. Натиҷаҳои ҳосилшуда метавонанд барои рушди минбаъдаи назарияи масъалаҳои канорӣ, таҳқиқи муодилаҳои функцияҳои аналитикии умумикардшуда ва муодилаҳои умумикардшудаи Белтрама бо шартҳои иловагӣ ҳамчун асоси назариявӣ хизмат намоянд.

Аҳамияти амалии рисола дар он ифода меёбад, ки усулҳо ва натиҷаҳои бадастомада метавонанд ҳангоми таҳқиқи масъалаҳои ба онҳо монанд, аз ҷумла муодилаҳои функцияҳои метааналитикии тартиби олӣ, системаҳои муодилаҳои эллиптикии бисёрченака бо аъзоҳои сарборидошта, масъалаҳои дорои шартҳои барзиёдмуайяншуда ва интегралӣ, инчунин дигар масъалаҳои назарияи муодилаҳои дифференциалӣ ва таҳлили комплексӣ истифода шаванд.

Натиҷаҳои диссертатсия инчунин метавонанд дар раванди таълим ҳангоми таҳияи курсҳои махсус, хондани лексияҳо ва гузаронидани машғулиятҳои амалӣ аз ҷанҳои таҳлили комплексӣ, функцияҳои аналитикии умумикардшуда, муодилаҳои дифференциалӣ ва масъалаҳои канорӣ барои донишҷӯёни курсҳои

болой, магистрантон, докторантон (PhD) ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ истифода гарданд.

Татбиқи натиҷаҳои таҳқиқот дар масъалаҳои таҳлили математикӣ, таҳлили комплексӣ, геометрия, механика ва дигар самтҳои математикаи амалӣ аҳамияти назариявӣ ва илмӣ-амалии диссертатсияро тасдиқ намуда, имконияти истифодаи онҳоро дар таҳқиқоти минбаъдаи илмӣ фароҳам меорад.

Нуктаҳои асосии ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

1. Муқаррар карда шудааст, ки барои муодилаҳои сарборидоштаи функсияҳои аналитикии умумикардасудаи (0.0.1) ва (0.0.4) дар синфи C_*^1 шартҳои зарурӣ ва кофӣи яққимата ҳалшавандагӣ ҳам дар мавҷудияти шартҳои иловагии барзиёдмуайяншуда ва ҳам бе онҳо ҷой дошта, дар асоси онҳо формулаҳои ошқори ҳалли ин муодилаҳо ҳосил карда шудаанд.

2. Исбот карда шудааст, ки масъалаҳои (0.0.2) ва (0.0.3) дар синфи C_*^1 яққимата ҳалшаванда буда, сохтори ҳалли онҳо дар шакли формулаҳои ошқор муайян карда шудааст, ки имконияти таҳлили мустақими мавҷудият, ягонагӣ ва вобастагии ҳалро аз маълумоти ибтидоӣ фароҳам меорад.

3. Муайян карда шудааст, ки барои муодилаи сарборидоштаи умумикардасудаи Белтрама (0.0.5) бо шартҳои нуктагии барзиёдмуайяншуда дар синфи C_*^1 шартҳои яққимата ҳалшавандагӣ муқаррар гардида, инчунин исбот карда шудааст, ки барои муодилаи умумикардасудаи Белтрама бо коэффисиентҳои номаълум ва шартҳои нуктагии иловагӣ теоремаҳои яққимата ҳалшавандагӣ ҷой дошта, ҳангоми $n=2$ формулаи ошқори ҳалли ягона ҳосил карда шудааст.

Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳои таҳқиқот. Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳои таҳқиқот бо истифодаи усулҳои муосири назарияи функсияҳои аналитикии умумӣ, таҳлили комплексӣ ва таҳлили функционалӣ таъмин гардидааст. Ҳамаи теоремаҳо, леммаҳо ва хулосаҳои дар диссертатсия пешниҳодшуда ба таври қатъӣ исбот гардида, бо натиҷаҳои илмии маъруфи олимони ватанӣ ва хориҷӣ мувофиқат доранд. Эътимоднокии натиҷаҳо инчунин бо нашри мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшавандаи илмӣ, муҳокимаи онҳо дар

конференсияҳои илмӣ ва истифодаи натиҷаҳои бадастомада дар рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои боршуда ва функсияҳои аналитикии умумӣ тасдиқ мегардад.

Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ (бо шарҳ ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикии идоракунии оптималӣ анҷом дода шудааст. Он инчунин ба бандҳои зерини шиносномаи ихтисос мувофиқат мекунад:

Банди 1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаи дифференсиалӣ

Банди 2. Масъалаҳои аввалаю канорӣ ва спектралӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ

Банди 3. Таҳлили сифатии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ

Банди 5. Муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ.

Саҳми шахсии доктарабони дараҷаи илмӣ. Саҳми шахсии доктарабони дараҷаи илмӣ дар интихоби самти таҳқиқот, таҳлили қорҳои илмии вобаста ба мавзӯ, гузориши масъалаҳои илмӣ, исботи теоремаҳои нав оид ба яққимата ҳалшавандагии муодилаҳои сарборидоштаи функсияҳои аналитикии умумикардшуда дар синфи C_*^1 , ҳосил намудани формулаҳои ошқори ҳал барои як қатор масъалаҳои баррасишуда, таҳқиқи муодилаи умумикардшудаи Белтрама бо шартҳои иловагӣ ва ҷамъбасти натиҷаҳои илмии таҳқиқот ифода меёбад. Ҳамаи натиҷаҳои асосии илмӣ, хулосаҳо ва тавсияҳои дар диссертатсия пешниҳодшуда аз ҷониби муаллиф мустақилона ба даст оварда ва асоснок карда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии рисола дар конференсияҳои сатҳи гуногун муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- дар семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав зери роҳбарии д.и.ф-м, профессор Ҷ. С. Сафаров (Бохтар, солҳои 2019-2025);

- семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияҳои функсияҳои Донишгоҳи давлатии Кӯлоб ба номи Абуабдуллоҳи Рӯдакӣ, зери роҳбарии н.и.ф.-и, дотсент Каримова Н.Ш., ва н.и.ф.-м, Абдулазизов А.Х. (Кӯлоб, солҳои 2019-2025);

-конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ «Проблемаҳои муосири математика ва методикаи таълими он» бахшида ба 25-солагии Конститутсияи Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 80-солагии д.и.п., профессор Шарифзода Ҷумъа Шариф (Бохтар, 18-19 октябри соли 2019);

-конференсияи ҷумҳуриявӣ илмӣ-амалӣ бахшида ба 80-солагии д.и.ф.-м., профессор Р. Акбаров (Кӯлоб, 2019);

-конференсияи ҷумҳуриявӣ илмӣ-амалӣ бахшида ба 30-солагии Истиқлолияти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 25-солагии Донишгоҳи Славиянии Россия-Тоҷикистон «Проблемаҳои актуалии илмҳои дақиқ ва технологияҳои иттилоотӣ» (Душанбе. - 28 май соли 2021);

-конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Татбиқи муодилаҳои дифференциалӣ ҳангоми ҳалли масъалаҳои амалӣ» (Душанбе, 4 ноябри соли 2021);

-конференсияи ҷумҳуриявӣ илмӣ-амалӣ «20-солагии омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф (солҳои 2020-2040)» ва 50-солагии кафедраи математикаи олии ДМТ (Душанбе, 14 октябри соли 2022);

-конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Таҳлили комплексӣ ва татбиқи он» бахшида ба «20-солагии омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф», 75-солагии ходими шоистаи Ҷумҳурии Тоҷикистон, аъзо-корспанденти. АИҚТ, д.и.ф.-м, профессор И.К. Қурбонов ва 70-солагии д.и.ф.-м, профессор Ҷ.С. Сафаров, (ш.Бохтар, 19 ноябри соли 2022);

-конференсияи байналмилалӣ илмӣ-амалӣ «Рушди илмҳои риёзӣ, дақиқ ва табиатшиносӣ дар шароити муосир: Мушкилотҳо ва дурнамоҳо» (Данғара, 28-29 апрели соли 2023);

-конференсияи байналмилалӣ «Масъалаҳои муосири математика» бахшида ба 50-солагии Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон (Душанбе, 26-27 май соли 2023).

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосӣ аз рӯи мавзӯи рисолаи илмӣ дар 16 мақолаҳои ҷопнамудаи муаллиф пешниҳод шудаанд. Аз ҷумла, 5 мақолаи илмӣ дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон як мақола дар нашриҳои хориҷӣ ва боқимонда мақолаҳо дар маводҳои конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмиллалӣ ба таърифи расидаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, 4 боб, хулоса ва номгӯи адабиёт, ки таърифи ба 134-то мебошад, иборат аст. Ҳаҷми умумии рисола 176 саҳифаи ҷопи компютерӣ мебошад. Барои мураббаъи рақамгузори теоремаҳо, қайдҳо ва формулаҳо аз се рақам иборат ишора шудаанд, ки якумаш рақами боб, дуюмаш рақами параграф ва сеюмаш рақами тартибии теорема, қайдҳо ва формулаҳо нишон медиҳанд.

МУҲТАВОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Дар муқаддима маълумотномаи мухтасари таърихӣ натиҷаҳои таҳқиқотҳо аз рӯи мавзӯи рисола оварда шуда, моҳияти мавзӯи интихобшуда асоснок карда шудааст. Мақсад ва масъалаҳои таҳқиқот муайян шуда, нағзҳои илмӣ ва аҳамияти амалӣ натиҷаҳои ҳосилшуда пешниҳод гардидаанд. Натиҷаҳои асосии рисола баррасӣ шудаанд.

Боби аввал ба гузориши умумӣ ва таҳлили адабиёт аз рӯи мавзӯи таҳқиқоти бахшида шудааст. Асосан, таҳлили қорҳо доир ба мавзӯи муодилаҳои дифференсиалӣ ва сарборидошта бо ҳосилаҳои хусусӣ, дар ҳолати хусусӣ бо оператори Коши-Риман, инчунин баъзе маълумотҳо оид ба функсияҳои аналитикии умумикардшудаи дудаврдошта оварда шудаанд.

Дар боби дуюм қор масъалаҳои ёфтани ҳалҳои дудаврдошта бо даврҳои асосии $h_1, h_2, \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0$ -и муодилаи сарборидоштаи намуди

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k + f(z), \quad (2.0.1)$$

таҳқиқ шудаанд, ки дар ин ҷо $a = a(z), a_k(z), f(z), f_k(z)$ – функцияҳои дунаврдоштаи додашуда бо даврҳои h_1, h_2, z_k – нуқтаҳои бақайдгирифташудаи параллелограмми асосии Ω бо қуллаҳои

$z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$ – и ибтидои координатро дарбаргиранда, z_0 – нуқтаи ихтиёрии ҳамвории $\mathbb{C}$. $w(z_k)$ – номаълумҳо ва $c_l, l = \overline{1, m}$ – доимиҳо мебошанд.

Масъалаи додашударо ҳамчун масъалаи баръаксӣ бо параметрҳои номаълум шарҳ додан мумкин аст. Барои муайян кардани параметрҳои номаълум, чӣ хеле ки дар назарияи он қабул шудааст шартҳои барзиёдмуайяншударо гузоштан лозим аст.

Талаб мекунем, ки ҳалли $w(z)$ – и муодилаи (2.0.1) шартҳои

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad t_j \neq z_j, \quad (2.0.2)$$

ро қаноат намояд, дар ин ҷо t_j – нуқта аз Ω , e_j – баъзе ададҳои маълум.

Дар зербобҳои 2.1 ва 2.2 муодилаи намуди

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (2.1.1)$$

омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо a, a_k – доимиҳо, $w(z), w(z_k)$ – функцияи матлуб ҳангоми $n \geq 1$.

1. Аввал ҳалли муодиларо ҳангоми $n = 1$ барои муодилаи

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (2.1.2)$$

меёбем. Ҳалли ин муодила аз қимати $a = 0, a \neq 0$ вобаста аст.

Теоремаи 2.1.1. *Бигуздор дар муодилаи (2.1.1) $a = 0$, яъне $n = 1$ бошад. Пас, барои якқимата ҳақиқатандагӣ зарур ва кифоя аст, ки ҳал дар нуқтаи $z = z_1$ қимати зеринро қабул кунад*

$$w(z_1) = \frac{f_0 \pi}{b \Omega_0} \quad (2.1.3)$$

ки дар ин ҷо $f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad \Omega_0 = \text{mes} \Omega |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right), d\Omega = dx dy$

Дар ин маврид ҳалли ягона аз классии C_*^1 бо формулаи

$$w(z) = c + dz - bw(z_1)\bar{z} + T_{\bar{z}} f(z), \quad (2.1.4)$$

Ифода карда мешавад, ки дар он доимиҳои c ва d намуди зеринро мегиранд

$$c = \frac{f_0}{\Omega_0} + f_0 \bar{z}_1 - dz_1 - T_\zeta f(z_1), d = \frac{\pi}{2i\Omega_0} (\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1) f_0.$$

$$T_\zeta f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) \zeta(t-z) d_t \Omega.$$

$\zeta(z)$ – дзетта функсияи Вейерштрасс.

2. Агар $a \neq 0$ бошад, пас ҳолатҳои $a \in \Gamma_1$ ё $a \notin \Gamma_1$,

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{бутун}\},$$

Теоремаи 2.1.2. Бигузур дар муодилаи (2.1.1) $a \notin \Gamma_1$ бошад. Пас, барои якқимата ҳалшавандагии он зарур ва кифоя аст, ки $a + b \neq 0$ бошад. Дар ин маврид ҳалли ягонаи он бо формулаи зерин ифода карда мешавад

$$w(z) = -\frac{b}{a+b} F(z_1) + F(z), \quad (2.1.5)$$

ки дар ин ҷо $F(z)$ ва $F(z_1)$ намуди зеринро доранд

$$f_1(z) = \exp(-a\bar{z} - dz) f(z).$$

$$F(z) = \exp(-a\bar{z} - dz) T_\sigma[f_1(z)], \quad w(z_1) = \frac{a}{a+b} F(z_1).$$

3. Дар мавриди $a \in \Gamma_1$ муодилаи якҷинса ҳалли ғайритривалӣ дорад ва барои ҳалшавандагии муодилаи ғайриякҷинса бояд шартҳои ортогоналӣ дар $f(z)$ бо шартҳои

$$w(z_0) = e_1 \quad (2.1.6)$$

ичро шавад.

Теоремаи 2.1.3. Бигузур дар муодилаи (2.1.1) $a \in \Gamma$ бошад. Пас, барои якқимата ҳалшавандагии муодилаи (2.1.2) бо шартҳои иловагии (2.0.2) зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шавад

$$(a+b)e^{-a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0} \neq be^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1}, \quad \iint_{\Omega} f(z) \exp(a\bar{z} - \bar{a}z) d\Omega = 0. \quad (2.1.7)$$

Дар ин маврид ҳалли ягонаи масъалаҳои (2.1.2) ва (2.0.2) дар намуди зерин ифода карда мешавад

$$w(z) c e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} + \frac{b}{a} w(z_1) + e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} T_\zeta[f_1(z)], \quad (2.1.8)$$

доимиҳои $w(z_1)$ ва c аз рӯи системаи муодилаҳои зерин муайян карда мешаванд

$$\begin{cases} ce^{-a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0} - \frac{b}{a}w(z_1) = e_1, \\ ce^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1} - \left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Дар зербоби 2.2 барои муодилаи (2.1.1) ҳалҳои дудаврдоштаи муодилаи аналитикии умумикардасуда бо аъзоҳои зиёди сарборидошта таҳқиқот бурда шудааст.

Чун дар мавриди $n = 1$ таҳқиқотро дар ҳолатҳои $a \in \Gamma_1, a \neq 0$ ва $a = 0$ мегузаронем.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузур дар муодилаи (2.1.1) $a \in \Gamma_1, a \neq 0$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалишавандагии (2.1.1) зарур ва кифоя аст, ки*

$$\det B \neq 0$$

бошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодилаи (2.1.1) чунин намудро мегирад

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + F(z), \quad (2.2.1)$$

$w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ бо формулаҳои

$$w(z_j) = B^{-1}b_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.2)$$

ҳисоб карда мешаванд, ки дар ин ҷо

$$B = aE + A, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad E\text{-матрицаи воҳидӣ, } b_j = aF(z_j), j = \overline{1, n}$$

Акнун мавриди $a \in \Gamma_1$ ва $a \neq 0$ – ро дида мебароем

Теоремаи 2.2.2. *Бигузур дар муодилаи (2.2.1) $a \in \Gamma_1, a \neq 0$ буда ва шартҳои зерин иҷро шаванд*

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0. \quad (2.2.3)$$

Пас, барои яққимата ҳалишавандагии (2.1.1), (2.0.1) дар классии C_^1 зарур ва кифоя аст, ки*

$$\text{rang} A = n + 1$$

бошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи масъалаҳо дар чунин шакл ифода карда мешаванд

$$w(z) = ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + P(z), \quad (2.2.4)$$

ки дар ин ҷо $P(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} T_{\zeta}[f_1(z)]$, $f_1(z) = f(z)e^{a\bar{z} - \bar{a}z}$ доимиҳо буда $c, w(z_1), \dots, w(z_n)$ бо формулаҳои зерин ёфта мешаванд

$$\tilde{w} = A^{-1}\tilde{b}, \quad \tilde{w} = (c, w(z_1), \dots, w(z_n))^T,$$

A^{-1} – матрисаи баръаксии матрисаи A ,

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ d_1 & (a + a_1) & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & a_1 & a_2 & \dots & (a + a_n) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = a(b_1 - c_1, b_2, b_3, \dots, b_n), d_j = -e^{-a\bar{z}_j + \bar{a}z_j}, b_j = -P(z_j), j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Теоремаи 2.2.3. Бигуздор дар муодилаи (2.1.1) $a = 0, n \geq 2$ бошад. Пас, барои яққимата ҳашиавандагии он зарур ва кифоя аст, ки

$$\text{rang} \tilde{B} = n + 1$$

бошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодилаи (2.1.1) аз класс C_*^1 дар намуди

$$w(z) = -c - \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) \bar{z} + dz + T_{\zeta} f(z), \quad (2.2.5)$$

Ифода карда мешавад, ки дар ин ҷо $c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ бо формулаи мавриди $a = 0$, ки аз теоремаи (2.2.1) бармеояд, ёфта мешаванд

$$\tilde{w} = b^{-1}\tilde{b}$$

B^{-1} – матрисаи баръаксии матрисаи B . Ё

$$c = \frac{\Delta_0}{\Delta}, w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n$$

Δ_j – муайянкунандаи аз муайянкунандаи $\Delta = \det B$ дар натиҷаи ивази сутуни j -юм бо «аъзоҳои озод» ҳосил мешавад.

Дар зербобҳои 2.3 ва 2.4 масъалаҳои (2.0.1), (2.0.2) барои муодилаи

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (2.3.1)$$

Дар мавриди ҳамаи коэффисиентҳои $a(z), a_k(z)$ ва функсияи тарафи рости класс $H_*^{\alpha}, \alpha \in (0, 1)$ таҳқиқ карда шудааст. Ҳашиавандагии муодилаи (2.3.1) аз хосияти адади $a_0 \in \Gamma$ ё $a_0 \notin \Gamma$, ки дар ин ҷо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega$$

аст вобаста аст, Γ - панҷараи даврҳо мебошад, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{бутун}\}$.

Дар мавриди $a_0 \in \Gamma$ ёфтани $w(z_k)$ дар асоси ҳалҳои пешниҳодшуда системаи муодилаҳои алгебравии n -муодиладор ҳосил карда мешавад. Ҳал бо методи Крамер ёфта мешавад.

Дар мавриди $a_0 \in \Gamma$ масъала аз рӯи шarti барзиёдмуайянкунӣ чун дар мавриди коэффициентҳои доимӣ таҳқиқ карда мешавад.

Теоремаи 2.3.1. *Бигуздор дар муодилаи (2.3.1) $a_0 \in \Gamma$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалшавандагии он зарур ва кифоя аст, ки дар нуқтаи $z = z_1$ шarti*

$$B(z_1) \neq 1 \quad (2.3.2)$$

иҷро шавад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодилаи (2.3.1) аз классии C_^1 дар намуди зерин ифода карда мешавад*

$$w(z) = \frac{F(z_1)}{1 - B(z_1)} B(z) + F(z), \quad (2.3.3)$$

ки дар он $B(z), F(z)$ мувофиқан намуди зеринро мегиранд

$$B(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma [b(z) e^{T_\zeta a(z)}], F(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma [f(z) e^{T_\zeta a(z)}], a(z) = b(z).$$

Ҳангоми $n > 1$ ва $a_0 \in \Gamma$ будан масъала ба ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии аз n номаълумҳои $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ вобаста оварда мешавад.

Нишон дода шуда аст, ки ҳангоми $\text{rang} B = n$ будан масъала яққимата ҳалшаванда буда, ҳалли он дар намуди ошкор ёфта мешавад.

Ҳангоми $a_0 \in \Gamma$ ва $n > 1$ будан ҳалли масъала ба ҳалли муодилаҳои алгебравии бо $n + s$ номаълумҳо оварда мешавад. Нишон дода шудааст, ки ҳангоми $s = 1$ ва $\text{rang} A = n + 1$ будан масъала яққимата ҳалшаванда аст ва ҳалли он дар намуди ошкор бо ёрии операторҳои интегралӣ $T_\zeta \rho(z)$ ва $T_\sigma \rho(z)$ навишта мешавад

Дар зербоби 2.4 барои муодилаи (2.3.1) ҳалҳои дудаврдошати муодилаҳои функсияҳои аналитикии умуикардашуда бо аъзоҳои зиёди сарборидошта ва бо коэффициентҳои тағйирёбандаи $n > 1$ таҳқиқот гузаронида шуд.

Теоремаи 2.4.1. *Бигуздор дар муодилаи (2.4.1) $a_0 \in \Gamma$ бошад. Пас, барои ҳалшавандагии яққиматаи он зарур ва кифоя аст, ки*

$$\det A \neq 0, A = E - B.$$

Дар ин маврид ҳалли ягонаи он намуди зеринро мегирад

$$w(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) w(z_j) + F(z),$$

ки дар ин ҷо

$$B_j(z) = \exp(-T_\zeta a(z)) T_\sigma[a_j(z) \exp T_\zeta a(z)],$$

$$F(z) = \exp(-T_\zeta a(z)) T_\sigma[f(z) \exp T_\zeta a(z)],$$

$$w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta = \det A,$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1(z_1) & B_2(z_1) & \dots & B_n(z_1) \\ B_1(z_2) & B_2(z_2) & \dots & B_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(z_n) & B_2(z_n) & \dots & B_n(z_n) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = (c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T$$

$$A\tilde{w} = \tilde{b}, \quad \tilde{b} = (F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n))^T.$$

Ба ҳамин монанд мавриди $a_0 \in \Gamma$ таҳқиқ карда мешавад.

Дар зербоби 2.5 масъалаи ёфтани ҳалли муодилаи

$$w_{\bar{z}} + aw(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z). \quad (2.5.1)$$

шарти

$$w(z_j) = d_j, \quad j = \overline{1, s} \quad (2.5.2)$$

-ро қаноаткунанда таҳқиқ карда шудааст.

Теоремаи 2.5.1. *Бигузор дар муодилаи (2.5.1) $a \in \Gamma_1, f(z), f_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалшавандагии он дар классҳои C_*^1 зарур ва кифоя аст, ки $s = n$ ва $\text{rang} A = n$ бошад, ки дар ин ҳолат A матрисаи коэффисиентҳои $A = (a_{jk})$ дар системаи муодилаҳои*

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = d_j + b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.5.3)$$

мебошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи масъалаҳои (2.5.1), (2.5.2) дар намуди зерин ёфта мешаванд

$$w(z) = F(z) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} F_k(z), \quad (2.5.4)$$

ки дар ин ҳолат

$$a_{jk} = F_k(z_j), \quad b_j = -F(z_j), \quad j = \overline{1, n},$$

$F(z_j) = T_\sigma[f_j(z) e^{a\bar{z}-dz}] e^{-a\bar{z}+dz}, \Delta = \det A, \Delta_k$ - муайянкунандаи мебошад, ки аз муайянкунандаи вектори

$$(d_1 + b_1, d_2 + b_2, \dots, d_n + b_n)^T.$$

дар натиҷаи иваз намудани сутуни k —ум бо сутуни «аъзоҳои озод» ҳосил карда шудааст.

Дар мавриди $a \in \Gamma_1$ чун дар мавриди боло ҳангоми $s = n + 1$ будан системаи муодилаҳои алгебравиро бо $n + 1$ номаълумҳо ҳосил мекунем. Аз системаи ҳосилшуда ҳамаи номаълумҳо ва дар якҷоягӣ бо онҳо ҳалли масъалаҳои муодилаҳои (2.5.1), (2.5.2) ёфта мешаванд.

Дар зербоби 2.6 муодилаҳои квазихаттӣ бо коэффисиентҳои номаълум ва маҳз муодилаҳои намуди

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (2.6.1)$$

бо шarti

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s} \quad (2.6.2)$$

бо номаълумҳои $w(z)$, c_k омӯхта шудаанд.

Мавриди $n = 2$ гузориши

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \quad (2.6.3)$$

-ро дида мебароем.

Масъалаҳои (2.6.1), (2.6.2) ба ҳалли муодилаҳои

$$\varphi_{\bar{z}} - a\varphi(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z), \quad (2.6.4)$$

бо шarti

$$\varphi(t_j) = \frac{1}{d_j}, j = \overline{1, s}, \quad (2.6.5)$$

оварда мешаванд.

Дар вобастагӣ аз мавриди $a \in \Gamma_1$ ё $a \notin \Gamma_1$ ин масъаларо чун дар мавриди §2.5 ҳал намуда, пас аз рӯи формулаи (2.6.3) ҳалли масъалаҳои (2.6.1), (2.6.2)-ро меёбем.

Теоремаи 2.6.1. Бигузор дар муодилаи (2.6.1) $a \notin \Gamma_1$, $b_0(z), b_k(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ ва дар шarti (2.5.1) ҳамаи $d_j \neq 0$, $j = \overline{1, s}$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалшавандагии (2.6.1), (2.5.1) зарур ва кифоя аст, ки

$$s = n \text{ и } \text{rang} B = n,$$

бошад, ки дар ин ҷо $B = (b_{jk})$.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи он намуди зеринро мегирад

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)}, \varphi(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{\Delta} B_k(z), \quad (2.6.2)$$

Δ_j – муайянкунандае мебошад, ки аз муайянкунандаи $\Delta = \det B$ ҳангоми иваз намудани сутуни j – юми он бо сутуни «аъзоҳои озод» ҳосил шудааст,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} - b_1 \\ \frac{1}{d_2} - b_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{d_n} - b_n \end{pmatrix}.$$

Агар $s \neq n$ бошад, масъала ҳалнашаванда аст ё решаи ягона доштани он ҳалалдор мешавад.

Дар вобастагӣ аз шарт $a \in \Gamma_1$ ё $a \in \Gamma_1$ ҳалҳои ягонаи масъалаҳои (2.6.1), (2.5.1) аз рӯи формулаи (2.6.2) ёфта мешаванд.

Дар зербоби 2.7 масъалаи ёфтани ҳалҳои дудаврдошта барои муодилаи функсияҳои аналитикии умумикардасуда бо аъзоҳои сарборидошта ва параметрҳои номаълум дар тарафи рост ва шартҳои иловагии

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(z). \quad (2.7.1)$$

$$w(z_j) = d_j, j = 1, s \quad (2.7.2).$$

Дар аввал ин масъала дар мавридҳои $m = n = 1$, яъне барои муодилаи

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) = f(z). \quad (2.7.1')$$

бо шартҳои

$$w(z_1) = e_1, w(z_2) = e_2 \quad (2.7.2')$$

таҳқиқ карда мешавад.

Теоремаи 2.7.1. Бизузор дар муодилаи (2.7.1) $a, b, f \in H^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$ ва $a_0 \in \Gamma$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалшавандагӣ шартҳои зеринро қаноат намояд

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0$$

ки дар ин ҷо

$$F_1(z) = -\exp(-T_{\bar{z}}a(z))T_{\sigma}[b(z)\exp T_{\bar{z}}a(z)]$$

$$F_2(z) = \exp(-T_{\bar{z}}a(z))T_{\sigma}[f(z)\exp T_{\bar{z}}a(z)]$$

Барои ягонагии ҳалли масъалаҳои (2.7.1'), (2.7.2'), намуди зеринро мегирад

$$w(z) = F_1(z)w(z_0) + F_2(z)e,$$

ки дар ин ҷо

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta}[e_1 F_2(z_1) + e_2 F_1(z_1),]$$

$$e = \frac{1}{\Delta} [e_2 F_1(z_1) + e_1 F_1(z_2)]$$

мебошад.

Ба ҳамин монанд мавриди $a_0 \in \Gamma$ таҳқиқ карда мешавад. Дар ин маврид шарт (2.7.1') боз шарт $w(z_3) = e_3$ ҳамроҳ шуда, шарт якқимата ҳалшавандагӣ ва шакли ошкори ҳалли он ёфта мешавад.

Дар мавриди $m > 1, n > 1$ чунин меҳисобем, ки

$$s \geq m + n \text{ ва } t_j = z_{j+m}, j = \overline{1, s}.$$

Пас, мавриди $a_0 \in \Gamma$ ё $a_0 \notin \Gamma$ —ро муоина мекунем.

Дар мавриди $a_0 \in \Gamma$ системаи муодилаҳоро бо $m + n + 1$ номаълум ва $s > m + n$ муодилаҳо ҳосил мекунем. Пас, ҳангоми $s = m + n + 1$ ва $\text{rang} B = m + n + 1$, ки дар ин ҷо B — матрикаи асосии система мебошад, ҳалли ягонаи масъаларо меёбем.

Қайд мекунем, ки ҳангоми $s > m + n + 1$ будан ҳангоми ҳал ҳалалдор мешавад.

Теоремаи 2.7.2. Бигуздор дар муодилаи (2.7.1) $a_k(z), f_j(z) \in H^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ ва $a_0 \in \Gamma$ бошад. Пас, барои якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои (2.7.1), (2.0.2) зарур ва кифоя аст, ки

$$s = m + n \text{ ва } \text{rang} B = m + n$$

бошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи масъалаҳои (2.7.1), (2.0.2) бо формулаи зерин ёфта мешаванд

$$w(z) = - \sum_{k=1}^m a_k(z) \frac{\Delta_j}{\Delta} + \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

ки дар ин ҷо Δ_j — муайянкунандае мебошад, ки аз муайянкунандаи $\Delta = \det B$ дар натиҷаи иваз намудани сутуни k — ум ва j — юм бо сутунҳои мувофиқи сутунҳои «аъзоҳои озод» ҳосил шудаанд

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \dots \\ \tilde{e}_{m+n} \end{pmatrix}.$$

Агар $s \neq m + n$ бошад, пас масъалаҳои

$$\varphi(z) = \psi(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}, \quad (2.7.3)$$

ва

$$\psi_{\bar{z}}(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} b(z), \quad (2.7.4)$$

ё ҳалнашавандаанд ё ҳалли ягона надоранд.

Ба ҳамин монанд мавриди $a_0 \in \Gamma$ таҳқиқ намуда, системаи муодилаҳои аз $m + n$ номаълумҳо ва $s \geq m + n$ муодилаҳоро ҳосил мекунем пас, ҳангоми. $s = m + n$ ва $\text{rang} A = m + n$, ки A – матрицаи асосӣ мебошад, ҳалли ягонаи масъала ёфта мешавад.

Дар зербоби 2.8 муодилаи намуди

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (2.8.1)$$

ҳангоми коэффисиентҳои доимии a дуруст будан таҳқиқ карда шудааст.

Теорема 2.8.1. Бигуздор дар муодилаи (2.8.1) $a = 0$ бошад. Пас, барои яққимата ҳалнашавандагии он зарур ва кифоя аст, ки

$$\Delta = |b|^2 - |d|^2 \neq 0$$

ва ҳал дар нуқтаи z_0 қимати зеринро қабул кунад

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta \Omega_0} [f_0 \bar{b} - \bar{f}_0 d] = E.$$

Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодилаи (2.8.1) дар намуди зерин ёфта мешавад

$$w(z) = E + A(\bar{z} - \bar{z}_0) + B(z - z_0) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) [\zeta(t - z) - \zeta(t - z_0)] d\Omega,$$

ки дар ин ҷо

$$A = \frac{1}{\Delta \Omega_0} [b(\bar{f}_0 d - f_0 \bar{b}) + d(f_0 \bar{d} - \bar{f}_0 b)],$$

$$B = \frac{f_0}{\Omega_0} [\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1],$$

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{h_j}{2}\right), j = 1, 2.$$

Ба ҳамин монанд мавридҳои $a \in \Gamma_1$ ва $a \in \Gamma_1$, ки доимииҳои A, B бо формулаҳои (2.8.8), (2.8.8') ҳисоб карда мешаванд, таҳқиқ карда мешаванд.

Дар боби сеюм ҳалли дудаврдошта барои системаи муодилаҳои аъзои сарборидоштаи эллиптикӣ бо оператори Белтрам омӯхта шудааст.

Дар зербоби 3.1 ҳалҳои дудаврдошта барои системаҳои муодилаҳои эллиптикӣ бо операторҳои Бельтрами C_*^1 для неоднородного уравнения

$$w_{\bar{z}} - qw_z = f(z), \quad (3.1.1)$$

дар ин ҷо q – доимӣ ва $|q| \neq 1$, $f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$ аст.

Лемма 3.3.1. Агар $w(z) \in C_*^1$ ҳалли муодилаи (3.1.1) бошад, пас зарур ва кифоя аст, ки

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0. \quad (3.1.2)$$

Теорема 3.1.1. барои ҳалшавандагии муодилаи класс C_*^1 зарур ва кифоя аст, ки шарт (3.1.2) иҷро шавад.

Агар ин шарт иҷро шавад, ҳалли муодилаи (3.1.1) бо формулаҳои зерин ифода карда мешаванд

$$w(z) = c + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_{\zeta} f(z),$$

$$\tilde{T}_{\zeta} f(z) = - \iint_{\Omega} f(z) \zeta(\tau - q\bar{\tau} - z + q\bar{z}) d_{\tau} \Omega,$$

$$\zeta(z + q\bar{z}) = \frac{1}{z + q\bar{z}} + \sum' \left(\frac{1}{z + q\bar{z} - h - q\bar{h}} + \frac{1}{h} + \frac{z + q\bar{z}}{h^2} \right)$$

$$h = m_1(h_1 + q\bar{h}_1) + m_2(h_2 + q\bar{h}_2), \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Дар зербоби 3.2 муодилаи намуди

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z_1) = f(z), \quad (3.2.1)$$

бо як аъзои сарборидошта, ки дар ин ҷо $q, |q| \neq 1, a$ – доимӣ, z_1 – нуқтаи бақайдгирифташудаи соҳаи Ω мебошад, таҳқиқ карда шудааст.

Шарти ҳалшавандагии муодилаи (3.2.1) бо шarti ҳалшавандагӣ барои мавриди $q = 0$ ҳамчун мешавад

$$w(z_1) = \frac{1}{\pi|\Omega_0|} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = \frac{f_0}{\pi|\Omega_0|}, \quad |\Omega_0| = \text{mes}\Omega. \quad (3.2.2)$$

Ҳангоми иҷрошавии ин шарт ҳалҳои муодила бо ёрии оператори интегралӣ $\tilde{T}_{\zeta} \rho(\omega)$, ки дар ин ҷо $\omega = z + q\bar{z}$, $|z| \neq 1$ аст, чун дар мавриди §3.1 ёфта мешаванд.

Теорема 3.2.1. Бигуздор дар муодилаи (3.2.1) $a \neq 0$ ва

$$f_0 = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad f(z) \in H_*^{\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Пас, барои яққимата ҳалшавандагии он зарур ва кифоя аст, ки ҳал дар $z = z_1$ қимати (3.2.2) –ро қабул мекунад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи он $w(z)$ дар намуди зерин пешниҳод карда мешавад

$$w(z) = w(z_1) - \frac{1}{1 - |q|^2} [aw(z_1)(z + q\bar{z} - z_1 - q\bar{z}_1) + b(z + q\bar{z} - z_1 - q\bar{z}_1) + T_\zeta^\omega f(z) - T_\zeta^\omega f(z_1)], \quad (3.2.3)$$

Доими b аз рӯи формулаи $b = \frac{\tilde{f}_0}{2\pi i |\Omega_0|} (\bar{h}_1^1 \eta_2^1 - \bar{h}_2^1 \eta_1^1)$ ҳисоб карда мешавад.

Дар зербоби 3.3 ҳалҳои дудаврдоштаи муодилаи сарборидоштаи умумикардашудаи Белтрам бо коэффисиентҳои доимии

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (3.3.1)$$

ки дар ин ҷо $|z| \neq 1$ аст, омӯхта шудаанд.

Дар вобастагӣ аз шarti

$$a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ или } a \in \bar{\Gamma}^1 (1 - |q|^2),$$

ки дар ин ҷо $\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma}$, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{ададҳои бутун}\}$ бо шarti якқимата ҳалшавандагии муодила ёфта мешаванд. Нишон дода шудааст, ки ҳангоми $a \in \bar{\Gamma}^1 (1 - |q|^2)$ якқимата ҳалшавандагии муодилаи (3.2.1) зарур ва кифоя аст, ки $a + b \neq 0$ ва $w(z_1)$ қимати муайянеро қабул кунад, ки ба воситаи операторҳои интегралҳои $T_\sigma^\omega \rho(z)$ бо ядро сигма-функсия $\sigma(\omega)$, ки дар ҳамвории тағйирёбандаҳои $\omega = z + q\bar{z}$, $\sigma^1(\omega) = \sigma(\omega)\zeta(\omega)$ бо даврҳои $h^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h^2 = h_2 + q\bar{h}_2$, $|z| \neq 1$ сохта шудаанд, ифода карда мешаванд.

Ҳалҳои муодила ба воситаи оператори интегралҳои $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$, ки дар он ядрои интеграл аз қимати a вобаста аст, навишта мешавад.

Дар мавриди $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ ҳалли ягонаи муодила бо шartҳои иловагии

$$w(z_0) = e_1, z_0 \neq z_1. \quad (3.3.2)$$

ёфта шудааст.

Шarti ҳалшавандагӣ навишта шуда, ҳалҳо бо ёрии оператори

$$T_\sigma^\omega \rho(\omega), \omega = z + q\bar{z}, \zeta(\omega)$$

чун дар §§3.1-3.2 ёфта мешаванд.

Дар зербоби 3.4 якқимата ҳалшавандагии муодилаи

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (3.4.1)$$

бо аъзоҳои зиёди сарборидошта бо коэффисиентҳои доимии шarti (3.3.1)-ро қаноаткунанда ёфта шудаанд.

Дар мавриде ки $a \in \bar{\Gamma}^1 (1 - |q|^2)$ ҳалли ягонаи муодилаи (3.4.1) бе шartҳои иловагӣ ёфта шуданд.

Теоремаи 3.4.1. Бигуздор дар муодилаи (3.4.1)

$$0 < |q| < 1 \text{ ва } a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ ва } f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

бошад. Пас, барои ҳалшавандагии ягонаи он дар классии C_*^1 шарт ва зарур аст, ки

$$\text{rang} B = n. \quad (3.4.2)$$

Матрисаи B_1 дорои сатрҳои якхела мебошад. Аз ин бармеояд, ки, $\det B_1 = 0$ ва теоремаро бо тарзи зерин ифода кардан мумкин аст: ҳангоми шартҳои теоремаҳо барои он ки муодилаи (3.4.1) ба таври ягона ҳалшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки адади- $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ бо қиматҳои хусусии матрисаҳои B_1 ҳамчун нашоавад, зеро ки $a \neq 0$ аст.

Агар шартҳои теоремаҳо иҷро шаванд, ҳалли ягонаи муодилаи (3.4.1) намуди зеринро мегирад

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + \frac{1}{a} \exp(-a\bar{\omega} + d\omega) T_\sigma^\omega [\tilde{f}(\omega) \exp(a\bar{\omega} + d\omega)]. \quad (3.4.3)$$

ки дар ин ҷо $\omega = z + q\bar{z}$ оператори интегралӣ T_σ^ω чун дар мавриди (3.4.4') намуди зеринро мегирад

$$w(z_k) = \varphi(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

дар системаи муодилаҳои

$$B\varphi^0 = A_1^0, \quad (3.4.4)$$

доимӣ мебошад.

Ҳангоми $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ ҳалли ягонаи масъалаҳои (3.3.2), (3.4.1) ҳангми иҷрои шартҳои ҳалшавандагии натиҷаҳо дар теоремаи 3.4.2 оварда шудаанд.

Дар зербоби 3.5 масъалаи ёфтани ҳалҳои дудаврдоштаи муодилаи умумикардасудаи ғайриякҷинсаи Белтрам бо параметрҳои номаълум ва шартҳои барзиёдмуайяншуда

$$w_z - qw_z + aw(z) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (3.5.1)$$

Қаноаткунандаи шартҳои барзиёдмуайяншудаи

$$w(z_j) = \overline{e_j}, j = \overline{1, s}, \quad (3.5.2)$$

Ки дар ин ҷо $|z| \neq 1$, a, e_j - доимӣҳои номаълум, a, c_k - номаълумҳо мебошанд, таҳқиқ шудааст.

Нишон дода шудааст, ки агар дар муодилаи (3.5.1) $0 < |q| < 1$ ва $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ бошад, пас барои якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои (3.5.1) ва (3.5.2) зарур ва кифоя аст, ки $j = n, \text{rang} A = n$ бошад. Дар ин ҷо A – матрисаи асосии системаи муодилаҳои алгебравӣ мебошад, ки масъала ба он оварда мешавад. Ва

ҳангоми $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ масъала ҳамон гоҳ яққимата ҳалшаванда аст, ки агар $j = n + 1$ ва $\text{rang} A = n + 1$ бошад. Натиҷаҳо дар теоремаи 3.5.1 оварда шудаанд.

Теоремаи 3.5.1. *Бигуздор дар муодилаи*

$$(1) \quad 0 < |q| < 1 \text{ и } a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1^1, f_k(z) \in H_*^\alpha$$

бошад.

Пас, барои яққимата ҳалшавандагии масъалаҳои (3.5.1), (3.5.2) зарур ва кифоя аст, ки $j = n$ ва $\text{rang} A = n$ бошад.

Дар ин маврид ҳалли ягонаи масъалаҳои (3.5.1), (3.5.2) дар намуди зерин ёфта мешаванд

$$w(z) = \sum_{k=1}^n c_k E_k(z + q\bar{z}),$$

$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\Delta = \det A$, Δ - муайянкунандае мебошад, ки аз муайянкунандаи Δ бо иваз намудани сутуни j - юм бо сутуни «аъзоҳои озод» аз (3.5.10) ҳосил мешавад

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$E_k(\omega) = E(z + q\bar{z})$ намуди (6) -ро дорад, ки дар он $\omega, \bar{\omega}$ бо $\omega = z + q\bar{z}$,

$\bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z$ иваз шудаанд.

Дар зербоби 3.6 ҳалҳои дунаврдоштаи муодилаи умумикардасудан Белтрам бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ва аъзоҳои сарборидошта

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n b_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (3.6.1)$$

ки дар ин ҷо $q(z) \in C_*^1 \cap H_*^\alpha$, $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и $a(z), b_k(z), f(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ мебошад, омӯхта шудаанд.

Дар навбати аввал ҳамчун санҷиш мавридҳои $n = 1$ ва $w(z_1) = 0$ яъне муодилаи

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = f(z), \quad (3.6.2)$$

омӯхта мешавад.

Ҳамаи ҳалҳои ин муодила бо ёрии операторҳои интегралӣ:

$$1. \quad \tilde{T}_\zeta \rho(z) = T_\zeta^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, z) d_z \Omega, \quad (A)$$

ки дар ин ҷо ядрои интеграл намуди зеринро дорад

$$H(t, z) = \omega_t(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) = \omega_t(t) \tilde{\zeta}(t - z),$$

ва $\omega(z)$ - гомеоморфизми асосии квазидаврии муодилаи Белтрам

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)w_z = 0, |q(z)| \leq 0 < 1$$

шарти

$$\omega(0) = 0, \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, \quad j = 1, 2$$

қаноаткунанда, $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ – ҳамчун функционал вобаста аз $q(z)$ ва қаноаткунандаи шарти $Im\left(\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}\right) \neq 0$ навишта мешаванд.

Дар ҳамвории $\mathbb{C}_\omega$ функсияи умумикардасудай Вейерштрасс сохта мешавад

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z)), \quad \tilde{\wp}(z) = \wp(\omega(z)), \quad \tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z)).$$

$$2. \quad \tilde{T}_\sigma \rho(z) = T_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H_0(t, z) d_z \Omega,$$

ки дар ин ҷо ядрои интеграл намуди зеринро дорад

$$H_0(t, z) = \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - D)}{\sigma(-D)\sigma(\omega(t) - \omega(z))}, D \in \Gamma^1,$$

Γ^1 – панҷара, $\Gamma^1 = \{m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2, m_1, m_2 - \text{бутун}\}$.

Ҳалшавандагии муодилаи (3.6.2) аз хосияти ададҳои $\tilde{a}_0: \tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ вобаста аст

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) dz,$$

ба ғайр аз ин $\omega_{\bar{z}}(z) \in C_*^1$.

Ҳангоми $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ – будан ҳал фақат ба воситаи $\tilde{T}_\zeta \rho$ ва ҳангоми $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ будан ҳал бо ёрии $\tilde{T}_\zeta \rho$ ва $\tilde{T}_\sigma \rho$ ёфта мешавад. Ба ғайр аз ин, барои оператори интегралӣ ядро $\tilde{a}_0, \tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ – ро дарбар мегирад.

Баъд мавриди муодилаи

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + b(z)w(z_1) = f(z), \quad (3.6.3)$$

Бо як аъзои сарборидошта омӯхта мешавад.

Ҳалшавандагии муодилаи (3.6.3) дар классии C_*^1 аз хосияти адади b_0 вобаста аст

$$b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z b(z) d\Omega \neq 0 \text{ или } b_0 = 0.$$

Дар мавриди $b_0 \neq 0$ будан шарти зарурӣ ва кифоягии ҳалшавандагии муодилаи (3.6.3) намуди зеринро мегирад

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}, f_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) d\Omega. \quad (3.6.4)$$

Ин маънои онро дорад, ки ҳал дар нуқтаи $z = z_1$ қимати ба $\frac{f_0}{b_0}$ баробарро қабул мекунад.

Теоремаи 3.6.1. *бигузур дар муодилаи (3.6.3)*

$$q(z) \in C_*^1, b(z), f(z) \in H_*^\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$$

ва $\omega(z)$ –гомеоморфизми асосии квазидаври муодилаи Белтрам бошад. Пас, барои якқимата ҳалишавандагии муодилаи. (3.6.3) ҳангоми $b_0 \neq 0$ зарур ва кифоя аст, ки дар нуқтаи $z = z_1$ ҳал қимати намуди (3.6.4) –ро қабул мекунад. Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодила намуди зеринро мегирад

$$w(z) = \frac{f_0}{b_0} - \frac{f_0}{b_0} (T_\zeta^\omega[b(z)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)]) + T_\zeta^\omega[f(z)] - T_\zeta^\omega[f(z_1)], \quad (3.6.5)$$

дар ин ҷо $T_\zeta^\omega \rho(z)$ намуди (A) –ро мегирад.

Дар мавриди $b_0 = 0$ будан барои ҳосил кардани ҳалли ягона шarti барзиёдмуайяншуда талаб карда мешавад

$$w(z_0) = e_0, \quad z_0 \neq z_1, \quad (3.6.6)$$

e_0 – баъзе адади маълум.

Нишон дода шудааст, ки ҳангоми иҷрои шarti

$$1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] \neq T_\zeta^\omega[b(z_1)],$$

масъалаҳои (3.6.1), (3.6.5) дорои ҳалли ягонаи намуди

$$w(z) = c + T_\zeta^\omega[b(z)w(z_1)] + T_\zeta^\omega[f(z)] = c + w(z_1)T_\zeta^\omega[b(z)] + T_\zeta^\omega[f(z)]$$

мешавад. Ба ғайр аз ин, доимии c ва $w(z_1)$ ба таври якқимата аз системаи муодилаҳо бо детерминанти Δ баробар ба

$$\Delta = 1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)] \neq 0$$

ёфта мешавад.

Баъд ҳалли муодилаи

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (3.6.7)$$

ёфта мешавад.

Натиҷаҳои асосии ин параграф дар теоремаи 3.6.2 инъикос ёфтааст.

Дар зербоби 3.7 масъалаи муайян кардани баъзе параметрҳои номаълум барои системаҳои муодилаҳои эллиптикии мунтазами квазихаттии тартиби якум дар ҳамворӣ омӯхта шуд, ки он намуди зеринро дорад

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w(z) + (f_0(z) + bf_1(z))w^n(z) = 0, \quad (3.7.1)$$

Масъалаи баръакс: чун функсияи $w(z)$ ва адади b –ро дар соҳаи Ω –и бо муодилаи комплексии (3.7.1) –и вобаста ёбед, ки барои функсияи $w(z)$ дар классии C_*^1 шarti

$$w(z_0) = A, z_0 \in \Omega, \quad (3.7.2)$$

иҷро шавад. Дар ин ҷо z_0 - нуқтаи бақайдгирифташуда, $n \geq 1, A$ - доимӣ, функсияҳои $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z)$ - маълумҳо, $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z) \in H_*^\alpha$, буда, ба ғайр аз ин

$$|q(z)| \leq q_0 < 1. \quad (3.7.3)$$

Шарти (3.7.3) шарт мунтазам эллиптикии системаи муодилаҳои (3.7.1) дар ҳамвори мебошад [27].

Дар масъалаи баръаксии додашуда шарт (3.7.2) шарт барзиёдмуайяншудаи зарурӣ барои ёфтани параметри номаълуми b мебошад.

Қайд мекунем, ки ба ҷои шарт (3.7.2) шарт интегралӣ намуди

$$\iint_{\Omega} \Psi(z)w(z)d\Omega = E,$$

-ро татбиқ кардан мумкин аст. Дар ин ҷо $\Psi(z)$ функсияи класс C_*^1 , E - баъзе ададҳо мебошад.

Агар $w(z) \neq 0$ буда, b муодилаи (3.7.1) –ро қаноат намояд, пас функсияи

$$\varphi(z) = \frac{1}{w^{n-1}(z)}, \quad (3.7.4)$$

ҳалли муодилаи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (1-n)a(z)\varphi(z) = (n-1)(f_0(z) + bf_1(z)). \quad (3.7.4')$$

мешавад.

Барои он ки ҳалли муодилаи (3.7.1) ва муодилаи (3.7.4') мувофиқати байниҳам яққимата дошта бошанд, бояд

$$0 > \arg w(z) > -\frac{2\pi}{n-1}.$$

бошад.

Фарз мекунем, ки аргументи ҳалли муодилаи (3.7.1) дар сектори додашуда ҷойгир бошад. Натиҷаҳои калидии параграф дар теоремаҳои 3.7.1,2,3,4,5 баён ёфтаанд.

Дар боби чорум таҳлил ва ҷамъбасти натиҷаҳои бадастомада анҷом дода шуда, имкониятҳои татбиқи амалии онҳо баррасӣ гардида, аҳамияти илмӣ онҳо муайян карда шудааст.

ХУЛОСА

1. Натиҷаҳои асосии илмӣ рисола

Дар рисола масъалаҳо оид ба якқимата ҳалшавандагии муодилаҳои функсияҳои аналитикии умумикардашуда дар классҳои функсияҳои дудаврдошта бо аъзоҳои сарборидошта ва параметрҳои номаълум ҳангоми иҷрои шартҳои нуқтагии барзиёдмуайяншуда таҳқиқ шудаанд.

Инчунин дар қор муодилаҳои эллиптикии мунтаззам бо оператори Белтрам бо аъзоҳои сарборидошта ва шартҳои иловагӣ дар классҳои функсияҳои дудаврдоштаи регулярий омӯхта шудаанд.

- барои муодилаи (2.1.1) дар мавриди ҳамаи $c_k = 0$ будан дар классҳои C_*^1 шартҳои якқимата ҳалшавандагӣ ёфта шуда, ҳамаи ҳалҳо бо ёрии операторҳои интегралҳои $T_\zeta \rho$ ва $T_\sigma \rho$ бо ядроҳои функсияҳои эллиптикӣ навишта шудаанд [3-М, 5-М];

Мо муодилаҳои эллиптикиро бо оператори Белтрам бо шартҳои сарборидошта ва шартҳои иловагӣ дар классҳои функсияҳои дучандаи даври регулярий омӯхтем.

Дар муодилаи (2.1.1) ҳангоме ки ҳамаи $c_k = 0$ мешавад, ҳалшавандагии ягона дар классҳои C_*^1 ба вуҷуд меояд. Ҳамаи ҳалҳо бо истифодаи операторҳои интегралҳои $T_\zeta \rho$ ва $T_\sigma \rho$ бо ядроҳои функсияҳои эллиптикӣ навишта мешаванд.

Дар як марид ҳал бе шарт (2.0.2) ва дигар маврид бо шарт (2.1.2) ҳангоми $s = 1$ будан ёфта мешаванд

-барои муодилаи (2.1.1) ҳангми ҳамаи $a_k = 0$, $c_k \neq 0$ будан, шартҳои якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои (2.1.1), (2.1.2) дар истилоҳоти коэффисиентҳои муодила ва доимӣҳои маълум дар шарт (2.1.2) ёфта шудаанд [2-М, 6-М];

-таҳқиқи масъалаҳои (2.1.2), (2.6.1) ҳангоми $n = 2$ будан ба ҳалли масъалаи баръакс бо параметрҳои номаълум дар тарафи рост оварда мешавад. Шартҳои якқимата ҳалшавандагии масъалаҳо ёфта шуда, ҳамаи доимӣҳои номаълуми дар масъала дохилшуда ҳисоб карда шуданд [1-М, 4-М];

- таҳқиқи масъалаҳои (2.1.1), (2.1.2) гузаронида, шартҳои якқимата ҳалшавандагӣ ёфта шуда, ҳамаи ҳалҳои масъалаҳо бо тарзи ошкор навишта шуданд [2-М, 7-М];

- таҳқиқи пурраи ҳалли масъалаҳои (2.8.1), (2.8.2) гузаронида шуданд. Шартҳои якқимата ҳалшавандагии масъалаҳо ёфта шуда, ҳамаи ҳалҳои ошқори онҳо оварда шуданд [3-М, 8-М];

- шартҳои якқимата ҳалшавандагии муодилаи сарборидоштаи (3.4.1) бо оператори Белтрам бо коэффисиентҳои доимӣ ва тағйирёбанда ёфта шуданд. Ҳалҳо бо ёрии операторҳои интегралҳои $T_\zeta^\omega \rho$ ва $T_\sigma^\omega \rho$ дар ҳамвории гомеоморфизми асосии квазидаври муодилаи Белтрам ёфта шуданд [4-М, 9-М].

2. Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот

1. Натиҷаҳоеро ки дар кори диссертатсионии мазкур ҳосил шудаанд, метавон ҳангоми таҳқиқотҳои ояндаи функсияҳои аналитикии умумикардашудаи сарборидошта бо шартҳои интегралӣ иловагӣ истифода бурд;

2. Методҳои ҳангоми таҳқиқот коркаршударо дар тадқиқи муодилаҳои функсияҳои аналитикии сарборидоштаи дараҷаҳои олӣ ҳам бо коэффисиентҳои доимӣ ва ҳам бо коэффисиентҳои тағйирёбанда бо шартҳои нуқтагӣ ва интегралӣ (барзиёдмуайяншуда) истифода бурдан мумкин аст;

3. Натиҷаҳои кори таҳқиқотӣ татбиқи худро дар моделиронии математикии ғайрилокалӣ, аз ҷумла равандҳо ва падидаҳои даврӣ ва фракталӣ пайдо карда метавонад. Азбаски асоси физикаи математикӣ, махсусан динамикаи касриро муодилаҳои дифференсиалии сарборидошта ташкил мекунанд, онҳо дар соҳаҳои гуногуни илмҳои муосир, аз ҷумла биологияи математикӣ татбиқшаванд;

4. Маводҳои диссертатсия ва методҳои таҳқиқотии ҳангоми кор истифодашударо дар раванди таълим-хондани лексияҳо барои донишҷӯён, аспирантҳо, магистрантон, ки дар самти таҳлили комплексӣ ва муодилаҳои дифференсиали таҳсил доранд тавсия намудан мумкин аст.

РҶҶХАТИ АДАБИЁТ

1. Акбаров Р. Нагруженная краевая задача сопряжения обобщенных аналитических функций с дополнительными заданиями граничных моментов [Текст] / Р. Акбаров // ДАН РТ, 2008- Т. 51. № 9-С. 633 - 637.

2. Байзаев С. Об ограниченных решениях одного класса переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст] / С.Байзаев, М.А.Рахимова // Ученые записки Худжандского государственного Университета им. академика Б.Гафурова. серия: Естественные и экономические науки. 2016. Т. 38. №3. – С. 8-15.

3. Бородин А.В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка. I // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №1. - С. 18-25.

4. Будак Б.М., Искендеров, А.Д. Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами [Текст] / Б.М. Будак, А.Д. Искендеров, // Докл. АН СССР. - 1967. - Т. 176. -№ 1. - С. 20 – 24.

5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. - М.: Наука, 1988. –С. 512.

6. Виноградов В.С. Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка: автореферат дис. на учёной степени д.ф.-м., наук [Текст] / В.С. Виноградов. - Москва: МИ им. В.А. Стеклова АН СССР. -1972. – С. 24.

7. Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений [Текст] / М.Т. Дженалиев - Алматы: Гылым, 2010. –С. 336.

8. Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями [Текст] / М.Т. Дженалиев// Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. - 2001.-Т. 10. – С. 45 - 49.

9. Казиев В.М. Краевые задачи для нагруженных гиперболического и смешанного типов уравнений: дис. канд. физ.-мат. наук. [Текст] / В.М. Казиев // Нальчик, 1980. – С. 81.

10. Керефов А.А. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений // Сборник научных трудов (межвуз). «Нелокальные задачи и их применения к автоматизированным системам». Нальчик: КБГУ, 1989. С. 136.
11. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2004. Т. 44. №4. -С. 694-716.
12. Мухамадиев Э. М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1972. –Т.205. – С. 1292-1295.
13. Мухаммадиев Э.М. Избранные труды [Текст] / Э. Мухаммадиев // Вологда: ВОТГУ, 2011. – С. 550.
14. Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений [Текст] / Н.Н. Назаров // Труды Института математики и механики АН УЗССР. -Ташкент, 1948. Вып. № 4. -С. 77-106.
15. Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды Ин-та мат. и мех. АН Уз ССР. 1948. Вып.4. -С. 77-106.
16. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений в частных производных [Текст] / А.М. Нахушев // Short communication (Abstracts). Section 11 Partial Differential Equations. Warszawa, 1982. - Р. 52.
17. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст] / А.М Нахушев. // Дифференц. уравнения. – 1979. - Т. 15. - № 1. - С. 96 – 105.
18. Нахушев А.М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст] / А.М. Нахушев // Докл. АН СССР. 1978. - Т. 242. - № 5. - С. 1008 – 1011.
19. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М., 1995. –С. 301.
20. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10, №2.

21. Показеев В.И. Аналитические функции Аппеля в случае двоякопериодической группы [Текст] / В.И. Показеев // Деп., ВИНТИ 18.07.1983. –Т.43. - №40. -С. 25-33.

22. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений [Текст] / Л.С. Пулькина // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 7. – С. 887–892.

23. Рамазанов М.И. О нелокальной задаче для нагруженного гипербола эллиптического типа в прямоугольной области [Текст] / М.И Рамазанов.// Математический журнал. 2002. - Т. 2. - № 4(6). - С. 75 – 81.

24. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения: дис. д.ф.-м., наук [Текст] / Д.С. Сафаров. – Душанбе, 2010. –С 294.

25. Сафаров Д.С. Периодические решения эллиптических систем первого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров //Дифферен. уравнения. –1981.– Т.17. - № 8 – С. 1468-1477.

26. Хо Хон Сун Задача Дирихле для одной системы нагруженных уравнений первого порядка. Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам // Межвуз. Сборник. Нальчик: КБГУ, 1989. С. 258-264.

27. Хо Хон Сун Задача Трикоми для нагруженной системы Эйлера-Дарбу-Пуассона. Нальчик, 1989. 16 с. Деп. в ВИНТИ 31.10.90 г., №546-890.

28. Хо Хон Сун Линейные краевые задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений первого порядка: Дис... канд.ф.-мат. наук. Нальчик, 1990. –С.87

29. Krall A.M. The development of general differtial and general differential boundary systems // Rock. Moun. J. Math. 1975. V. 5, №4. -Р. 493-542.

ФЕҲРИСТИ ИНТИШОРОТИ ИЛМИИ ДОВТАЛАБИ ДАРЁФИ ДАРАҶАИ ИЛМӢ

а) Мақолаҳое, ки дар нашрияҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ҷоп шудаанд:

[1-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2019.-№3.- С.51-56.

[2-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодическое решение одной нагруженной квазилинейной системы уравнений первого порядка / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2021.-№1.- С.102-110.

[3-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости С нагруженным членом / Сафаров Д.С., Кулобиев М.А. // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/1(96). С. 14-18.

[4-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций нагруженным членом / Д. Сафаров, М. Кулобиев // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/3(102). С. 5-8.

[5-М] Кулобиев, М.А. Задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров., , М.А. Кулобиев // Известия национальной академии наук Таджикистан.-2023.-№1 (190) .-С.15-25.

б) Мақолаҳое, ки дар дигар нашрияҳо ба таърифи расидаанд:

[6-М] Кулобиев, М. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д. Сафаров // Вестник Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. -2019. - №2/3(66). - С.5-8.

[7-М] Кулобиев, М. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и методика её преподавания» посвященная 25-летию Конституции Республики Таджикистан и 80-летию доктора педагогических наук, профессора Шарифзода Джумъа Шариф. Бохтар, (18-19 октября 2019 г)- С.132-134.

[8-М] Кулобиев, М. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы республиканской научно-практической конференции посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора Рахмат Акбаров. (г.Куляб., 2019). – С.89-92.

[9-М] Кулобиев, М.А. Функсияҳои умумикардашудаи аналитики дудаврдошта бо сарбории иловагӣ / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // маводи конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Масоили мубрами математика ва таълими он» бахшида ба бистсолаи омузиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзи дар соҳаи илму маориф (2020-2040) ва 70-солагии корманди шоистаи Тоҷикистон, доктори илмҳои педагогӣ, профессор А.Э. Сатторов, Донишгоҳи давлатии Бохтар, соли 2020, сах. 55-57

[10-М] Кулобиев, М.А. Задача определения неизвестного коэффициента в уравнении обобщенных аналитических функций типа Риккати / М.А. Кулобиев // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию независимости Республики Таджикистан и 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета, “Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий” (Душанбе. - 28 мая 2021г.). – С.181-184.

[11-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости с нагруженными членами / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // Сборник статей II международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» 4 ноября 2021г. С.-160-164, Душанбе – 2021

[12-М] Кулобиев, М.А. Задача определения неизвестного параметра в уравнении обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // «Актуальные проблемы современной математики», Сборник статей республиканской научно-практической конференции посвященной «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)» и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ. (Душанбе, 14 октября 2022 года), стр. 83-85.

[13-М] Кулобиев, М.А. Задача нахождения Двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженным членом и неизвестным параметром, содержащее в свободной правой части / М.А. Кулобиев // Материалы международной научно-практической конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. Корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноября 2022г.). – С.-102-103.

[14-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами / М.А. Кулобиев // Материалы международной научно-практической конференции, «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы», (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) –С. 245-248.

[15-М] Кулобиев, М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами

/ М.А. Кулобиев // Материалы международной научно-практической конференции, «Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы», (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) –С. 245-248.

[16-М] Кулобиев, М.А. Двойкопериодические решения обобщённых аналитических функций со многими нагруженными членами / М.А. Кулобиев // Материалы международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джурваева Национальной академии наук Таджикистана, (Душанбе, 26-27 мая 2023 года) –С. 110-111.

АННОТАЦИЯ

диссертации Кулобизода Мирзо Ашурмад на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций с дополнительными условиями», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3.

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: нагруженные уравнения, двоякопериодическая функция, обобщенное решение, регулярные решения, эллиптическая функция Вейерштрасса, аналитическая функция, двоякопериодическое решение, антианалитическая функция.

Цель работы. В диссертации исследуется задача нахождения двоякопериодических решений для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций с дополнительными условиями и получаются двоякопериодические решения в явном виде.

Методика исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа, методы теории функций комплексного переменного, метод теории обобщённых аналитических функций Векуа, а также методы двоякопериодических обобщённых аналитических функций с применением аппарата эллиптических функций Вейерштрасса.

Научная новизна. Результаты диссертационной работы являются новыми и получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций вида (1) найдены условия однозначной разрешимости в классе S_*^1 и получены явные формулы решения;
- найдены условия однозначной разрешимости задачи (2), (3) и получены формулы решения в классе S_*^1 ;
- для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций вида (4) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе S_*^1 , с дополнительными точечными условиями;
- для нагруженного обобщённого уравнения Бельтрами (5) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе S_*^1 ;
- найдены условия однозначной разрешимости задачи (6), (7) при $n = 2$ и формула единственного решения в классе S_*^1 .

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Прикладное и теоретическое значение полученных результатов определяются степенью применения теории обобщённых аналитических функций и эллиптических функций и исследующих уравнений в задачах механики, физики, геометрии и других.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Кулобизода Мирзо Ашурмад дар мавзуи «Ҳалҳои дудаврдошта барои муодилаҳои сарборидоштаи функцияҳои аналитикии умумикардасуда бо шартҳои иловагӣ» барои дарёфти дараҷаи илмӣ номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ пешниҳод шудааст

Калидвожаҳо: муодилаҳои сарборидошта, функцияи дудаврдошта, ҳалли умумӣ, ҳалли мунтазам, функцияи эллиптикии Вейерштрас, функцияи аналитикӣ, ҳалли дудаврдошта, функцияи антианалитикӣ.

Мақсади ин рисола таҳқиқи масъалаи ёфтани ҳалли дудаврдошта барои муодилаҳои сарборидоштаи функцияҳои умумикардасуда бо шартҳои иловагӣ ва ба даст овардани ҳалли дудаврдошта дар шакли возеҳ мебошад.

Методологияи тадқиқот. Дар мақола усулҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва таҳлили функционалӣ, усулҳои назарияи функцияҳои тағирёбандаи мураккаб, методи Векуа дар бораи функцияҳои умумикардасуда ва усулҳои функцияҳои умумикардасуда дудаврдошта бо истифода аз дастгоҳи эллиптикии Вейерштрас истифода мешаванд.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои ин рисола нав буда, мустақилона аз ҷониби муаллиф гирифта шудаанд ва инҳоянд:

- барои функцияҳои тартибибаш пасти шакли (1) шартҳои ҳалли ягона дар синфи C_*^1 пайдо карда, формулаҳои аниқи ҳал гирифта мешаванд;
- шартҳои ҳалшавандагии ягонаи масъала (2), (3) ва формулаҳои ҳалли дар синфи C_*^1 ба даст оварда шудаанд;
- барои функцияҳои тартибибаш пасти шакли (4) шартҳои ҳалшавандагии ягона ва ҳалли аниқ дар синфи C_*^1 бо шартҳои иловагии нукта пайдо мешаванд;
- шартҳои ҳалшавандагии яқимата ва ҳалли возеҳ дар синфи C_*^1 барои муодилаи умумии Белтрами сарборидоштаи (5) ёфт шуд;
- шартҳои ҳалшавандагии ягонаи масъала (6), (7) барои $n=2$ ва формулаҳои ҳалли ягона дар синфи C_*^1 пайдо шуданд.

Натиҷаҳои назариявӣ ва амалӣ. Ин кор характери назариявӣ дорад. Аҳамияти амалӣ ва назариявии натиҷаҳои ба даст овардашуда аз руи дараҷаи татбиқ намудани назарияи функцияҳои умумии аналитикӣ ва функцияҳои эллиптикӣ ва муодилаҳои асосӣ ба масъалаҳои механика, физика, геометрия ва дигар соҳаҳои дигар муайян карда мешавад.

ABSTRACT

of the dissertation by Kulobizoda Mirzo Ashurmad entitled "Doubly Periodic Solutions of Loaded Equations of Generalized Analytic Functions with Additional Conditions", submitted for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 1.1.3. Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control

Keywords: loaded equations, doubly periodic function, generalized solution, regular solutions, Weierstrass elliptic function, analytic function, doubly periodic solution, anti-analytic function.

Purpose of the research. The dissertation is devoted to the study of the problem of constructing doubly periodic solutions for loaded equations of generalized analytic functions with additional conditions. The main objective is to establish conditions for their unique solvability and to obtain explicit formulas for doubly periodic solutions.

Research methodology. The research is based on the methods of the theory of differential equations and functional analysis, the theory of functions of a complex variable, Vekua's theory of generalized analytic functions, as well as the theory of doubly periodic generalized analytic functions using the apparatus of Weierstrass elliptic functions.

Scientific novelty. The scientific results obtained in the dissertation are original, have been achieved independently by the author, and are summarized as follows:

- necessary and sufficient conditions for the unique solvability of loaded equations of generalized analytic functions of type (1) in the class C_*^1 conditions for the unique solvability of problems (2) and (3) have been derived, and explicit solution formulas in the class C_*^1 have been constructed;

- for loaded equations of generalized analytic functions of type (4), conditions for unique solvability and explicit solutions in the class C_*^1 with additional pointwise conditions have been obtained;

- for the loaded generalized Beltrami equation (5), conditions for unique solvability and explicit solutions in the class C_*^1 have been established;

- conditions for the unique solvability of problems (6) and (7) for $n=2$ have been derived, and an explicit formula for the unique solution in the class C_*^1 has been obtained.

Theoretical and practical significance. The dissertation is of a theoretical nature. The obtained results contribute to the further development of the theory of generalized analytic functions, elliptic functions, and loaded differential equations. The proposed methods and results can be applied in the study of related problems in complex analysis, differential equations, functional analysis, as well as in mathematical models arising in mechanics, physics, geometry, and other branches of applied mathematics. Moreover, the results may serve as a theoretical foundation for further investigations in the theory of generalized analytic functions and its applications.