

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
ТАДЖИКИСТАН  
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. САДРИДДИНА АЙНИ

УДК-517.2(575.3)  
ББК-22.1(2 до 7)  
Н-17

На правах рукописи



НАДИРОВА МОХРУХСОР ИНОЯТУЛЛОЕВНА

СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА С  
НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертатсия на соискание ученой степени доктора философии  
(PhD), доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102 –  
Дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление)

ДУШАНБЕ-2025

Диссертация выполнена на кафедре математического анализа  
Таджикского государственного педагогического университета  
имени Садриддина Айни

**Научный руководитель:** **Усмонов Нурулло**  
доктор физико-математических  
наук, профессор кафедры высшей  
математики Таджикский Государственный  
финансово-экономический университет.

**Официальные оппоненты:** **Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич**  
доктор физико-математических наук, и.о.  
профессор кафедры математического  
анализа и дифференциальных уравнений  
Бохтарского государственного  
университета имени Н.Хусрава  
**Одабеков Джасур Музофирович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры МЕН, филиала  
Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова в  
городе Душанбе.

**Оппонирующая организация:** Международный университет туризма и  
предпринимательства Таджикистана

Защита состоится 7 января 2026 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 6Д.КОА-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734025, г.Душанбе, улица Буни-Хисорак, студенический городок, учебный корпус 17, аудитория 203. E-mail: [alisher\\_gafarov@mail.ru](mailto:alisher_gafarov@mail.ru); телефон ученого секретаря: (+992) 900 76-66-03

С диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке университета и на официальном сайте Таджикского национального университета <http://www.tnu.tj>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_ 2025г.

**Учёный секретарь диссертационного  
совета 6Д.КОА-011, кандидат  
физико-математических наук**



**Гафоров А.Б.**

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Краевым задачам теории функций комплексного переменного посвящено большое количество научных работ. Особенно это касается краевых задач Римана. Однако до настоящего времени краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, а также для эллиптических уравнений первого порядка, остаются недостаточно исследованными.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами в случае, когда коэффициенты обладают нулями, полюсами, нулями и полюсами сопряжённого вида, а также в случае, когда коэффициенты характеризуют особенности модульного порядка для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа.

**Степень научной разработанности изучаемой проблемы.** В этом направлении основополагающими являются научные работы: И.Н. Векуа [1-2], Л.Г. Михайлова [3-4], Н. Усмонова [5] и других авторов. Задачи о решениях эллиптических уравнений, а также краевые задачи Римана с коэффициентами из класса Гёльдера и их сингулярные случаи были предметом исследований в научных трудах И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова и ряда других математиков.

И.Н. Векуа исследовал обобщённые аналитические функции для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

или в комплексном переменном:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W} + F, \quad (0.0.2)$$

где

$$W = u + iv, \quad \bar{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

и

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib), \quad F = \frac{1}{2}(f + ig).$$

В данной системе уравнений (0.0.1) И.Н. Векуа рассматривал краевую задачу типа Гильберта. И.Н. Векуа не исследовал задачу Римана, задача Римана для данной системы была исследована Л.Г. Михайловым. Отметим, что коэффициент задачи Римана в работе Л.Г. Михайлова удовлетворял условиям Гёльдера.

Кроме того, Л.Г. Михайловым была поставлена и исследована задача Римана–Газемана:

$$W^+(t)[\alpha(t)] = A(t)W^-(t) + c(t),$$

он исследовал для системы уравнений:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W}.$$

Для указанной системы рассматривается следующая граничная задача:

$$W^+(t) = a(t)W^-(t) + b(t)\bar{W}^-(t) + c(t);$$

$$W^+(t) = a(t)\frac{\partial W^-(t)}{\partial t} + b(t)\frac{\partial \bar{W}^-(t)}{\partial t} + p(t)W^-(t) + q(t)\bar{W}^-(t) + c(t).$$

В дальнейшем Н. Усмоновым и С. Шавкатзода [6-7], были исследованы сингулярные случаи этих задач. Настоящая работа посвящена изучению сингулярных случаев задачи Римана для обобщённых систем уравнений Коши–Римана. При этом коэффициент задачи Римана  $A(t)$  является непрерывной функцией.

**Связь работы с научными программами (проектами), темами.**  
Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического анализа, Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни на 2021-2025 годы по теме «Исследования по теории дифференциальных уравнений и ее приложениям».

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

**Цель исследования.** Целью диссертационной работы является решение сингулярной краевой задачи Римана для эллиптического уравнения в случае, когда коэффициент задачи является непрерывной функцией:

- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов аналитического вида;
- когда коэффициент задачи Римана характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида;
- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью модульного порядка.

**Задачи исследования.** В соответствии с поставленной целью исследуется ряд задач при условиях:

- В первом случае изучаются задачи Римана для эллиптических уравнений вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  с непрерывными коэффициентами, при которых коэффициент характеризуется наличием нулей и полюсов целого порядка, нулей и полюсов сопряжённого вида, а также особенностями, связанными с нулями и полюсами модульного порядка.
- Затем исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , при которых коэффициент задачи Римана представляет собой непрерывную функцию и характеризуется наличием нулей и полюсов аналитической структуры, нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида, а также особенностями модульного характера.
- Далее исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

когда коэффициент задачи является непрерывной функцией и характеризуется особенностями в виде нулей и полюсов аналитического, сопряжённо-аналитического характера, а также особенностями дробного порядка.

**Объект исследования.** Объектом исследования является изучение сингулярных краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами для систем уравнений первого порядка эллиптического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} &= \psi(z), & \frac{\partial W}{\partial z} &= A(z) \cdot W(z), \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} &= A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z). \end{aligned}$$

**Предмет исследования.** Предметом исследования является доказательство теорем, определяющих число решений однородной задачи  $l$  и число условий разрешимости неоднородной задачи  $p$ .

**Научная новизна исследования.** Научная новизна диссертационной работы заключается в получении новых результатов, связанных с решением краевых однородных и неоднородных задач Римана. В частности, новизна проявляется в следующем:

**ЗАДАЧА R<sub>1</sub>.** Потребовалось найти две аналитические функции:  $W^\pm(x, y)$  – которые удовлетворяют регулярное решение настоящего уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , принадлежащего к областям  $D^\pm$ , по следующему однородному граничному условию:

$$W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  – является коэффициентом задачи Римана и непрерывная функция, которая имеет конечный порядок на бесконечности на границе, где  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$ ,  $\eta_j$  – различные точки контура, причем  $d_r, q_j > 0$ .

**ЗАДАЧА R<sub>2</sub>.** Надо найти пару аналитических функций:  $W^\pm(z)$  являющихся регулярным решением эллиптического уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , принадлежащего областям  $D^\pm$ , и в конечной точке контура стремящегося на бесконечности по следующему граничному условию, вида:

$$W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

в этом случае, коэффициент задачи Римана,  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}$  – везде непрерывная функция, где  $c(t) \in H(\Gamma)$  и  $\xi_r, \eta_j$  – находящие точки контура, причём,  $d_r, q_j > 0$ .

**ЗАДАЧА R<sub>3</sub>.** Потребуется найти две аналитические функции:  $W^\pm(z)$ , которые являются регулярными решениями эллиптического

уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , находящие в областях  $D^\pm$ , по следующему неоднородному граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

в данной задаче, где  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – разные точки из  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – целые числа,  $A_l(t)$  – отличная от нуля, причем непрерывная функция и  $c(t) \in H(\Gamma)$ . Поскольку данная задача имеет модульный характер, и решение находится в классе функций, интегрируемой на контуре.

**ЗАДАЧА R<sub>4</sub>.** Необходимо найти две аналитические функции,  $W^\pm(x, y)$ , которые являются регулярным решением настоящего уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , принадлежащие к областям  $D^\pm$ , подчиняющиеся следующим граничным условиям, на контуре  $\Gamma$ :

$$\text{а) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{б) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{в) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

где  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – различные точки контура,  $d_r, q_j > 0$  и коэффициент задачи Римана,  $A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0$ , причем, непрерывная функция,  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ .

Поскольку данная задача представлена в общем виде, её решения в случаях **а)** и **б)** найдены в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ , тогда как в случае **в)** решение задачи Римана принадлежит классу функций, интегрируемых на этом контуре.

**ЗАДАЧА R<sub>5</sub>.** Потребовалось найти две аналитические функции:  $W^{\pm}(x, y)$ , регулярного решения уравнения, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right),$$

принадлежащих к областям  $D^{\pm}$ , которые удовлетворяют следующие краевые условиям:

$$\mathbf{a)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь

$$A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j},$$

$$\mathbf{б)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь

$$A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)^{d_r}} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)^{-q_j}},$$

$$\mathbf{в)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь

$$A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j},$$

где  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – точки, лежащие на контуре и здесь  $d_r, q_j > 0$ ,  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ . Решение задачи **а)** и **б)** наблюдается в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ , а, в случае **в)** решение наблюдается в классе функций, интегрируемых на границе.

**Теоретическая и научно-практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Методы, разработанные в диссертации, а также полученные результаты могут быть использованы при исследовании краевых задач теории гармонических функций, теории аналитических функций и теории обобщённых аналитических функций.

### Положения, выносимые на защиту:

1. Нахождение теорем о краевой задаче Римана для эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , когда коэффициент непрерывной функции характеризуется особенностью аналитического вида.

2. Теорема о краевой задаче Римана для уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , с непрерывными коэффициентами, имеющими нули и полюса сопряжённо-аналитического вида.

3. Теорема о сингулярной граничной задаче Римана, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка, для уравнений первого порядка, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ .

4. Нахождение новой теоремы, определяющей число решений однородной сингулярной граничной задачи Римана для эллиптических дифференциальных уравнений, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$

с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью аналитического вида.

5. Нахождение новой теоремы о неоднородной сингулярной граничной задаче Римана для эллиптических уравнений,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , когда коэффициент, характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического порядка.

**6.** Нахождение новой теоремы о граничной краевой задаче Римана для системы дифференциальных эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , когда коэффициент является непрерывной функцией и имеет особенность модульного порядка.

**7.** Теорема о сингулярной краевой задаче Римана для системы уравнений, эллиптического типа, в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right)$$

с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью целого порядка.

**8.** Теорема о сингулярной граничной задаче Римана для системы эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

когда коэффициент задачи Римана непрерывная функция, и она обладает нулями и полюсами сопряжённо-аналитического порядка.

**9.** Теорема о получении результатов для краевой задачи Римана для уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z) \overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right),$$

когда коэффициент задачи Римана имеет особенность модульного характера.

**Степень достоверности результатов.** Все теоремы, утверждения и формулы, представленные в диссертационном исследовании, снабжены строгими математическими доказательствами. Ряд полученных выводов согласуется с результатами, полученными другими авторами.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования).** Диссертационная работа выполнена по специальности ученой степени доктора философии (PhD), доктор

по специальности 6D060100 – Математика (6D060102-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), и является разделом дифференциальным уравнениям указанной в пункте III параграфа 3, паспорта научной специальности.

**Апробация и реализация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- на республиканской научно-практической конференции «Подготовка современных специалистов по математике в отрасли науки и образования вузов и средних учреждений». (2020 г.) г.Дангаре;
- на Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собира. (25-26 июня, 2021г.) г.Душанбе;
- на республиканской научно-методической конференции «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвящен «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)», празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. (2021г.) г.Душанбе;
- на Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова НАНТ. Институт математики им. А. Джураева и ТНУ. (29-30 апреля, 2022г.) г.Душанбе;
- на Международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков. (20-21 октября, 2022г.) г.Душанбе;
- на республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях», посвященной «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040». (29 ноября, 2022г.) г.Душанбе;

- на Международной научно-теоретической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) г.Душанбе;
- на Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам – 27 мая 2025г. –г.Уфа;
- на Международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)». - 2025г. –г. Душанбе.

**Публикации по теме диссертации.** По материалам диссертационного исследования опубликовано 15 научных статей, в том числе 4 статьи — в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан, и 11 статей — в сборниках трудов республиканских и международных конференций.

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, включающего 142 наименования. В диссертации применяется тройная нумерация формул и параграфов: первый номер соответствует номеру главы, второй — номеру параграфа, третий — порядковому номеру формулы. Общий объём диссертации составляет 142 страницы машинописного текста и набрана на Microsoft word.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Материалы и методы исследования.** В диссертационной работе исследуются сингулярные краевые задачи Римана для систем уравнений первого порядка эллиптического типа с непрерывными коэффициентами. В исследовании применяются методы теории краевых задач аналитических функций, теории обобщённо-аналитических функций, а также элементы функционального анализа.

**Результаты исследования.** Приведём краткое изложение результатов диссертационной работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, кратко изложено её содержание, а также приведён обзор существующих результатов, относящихся к теме настоящего исследования.

Первая глава диссертационной работы посвящена анализу литературных источников по теме исследования, а также постановке нерешённых краевых задач Римана.

Во второй главе диссертации, состоящей из трёх параграфов, изучается граничная задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений эллиптического типа в сингулярном случае.

В параграфе 1.1 второй главы диссертационной работы исследуются краевые задачи Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с непрерывными коэффициентами, содержащими особенности целого порядка.

Рассматривается:  $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  аналитические и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = h(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g(x, y) \end{cases},$$

эту систему уравнения запишем виды комплексного переменного следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z),$$

здесь рассматривается краевая задача типа Римана.

**ЗАДАЧА R<sub>2.1</sub>.** Надо найти функцию  $W^+(z)$  – регулярное решение уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , в области  $D^+$ , функцию  $W^-(z)$  – аналитическую в области  $D^-$ , которые имеют конечный порядок на бесконечности, удовлетворяющей следующее условие:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_l(t) \neq 0$  на границе и  $A_l(t)$  – непрерывная функция,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – точки, лежащие на контуре,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – целые числа.

**ТЕОРЕМА 2.1.1.** Когда индекс задачи Римана  $\alpha - \delta = 0$ , то граничная задача сопряжения имеет единственное решение. Если  $\alpha - \delta > 0$ , рассматриваемая граничная задача сопряжения, также имеет  $\alpha - \delta$  решений. Когда  $\alpha - \delta < 0$ , рассматриваемая задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для разрешимости требуем дополнительное условие разрешимости  $|\alpha - \delta|$ :

$$\int_{\Gamma} (t - z_0)^{\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_1(t)] dt = 0.$$

Во 2.2., второй главы диссертационной работы изучается краевая задача типа Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , имеющими в конечных точках контура нули и полюса сопряженно-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R<sub>2.2</sub>.** Необходимо найти пару аналитических функций  $W^{\pm}(x, y)$ , регулярного решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ ,

принадлежащие к областям  $D^\pm$ , которым удовлетворяет следующее краевое условие:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь:  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A(t) \neq 0$ , в этом случае функция непрерывная и  $c(t)$  из класса Гёльдера,  $\xi_r, \eta_j$  – точки, лежащие на контуре  $\Gamma$ ,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – целые числа.

**ТЕОРЕМА 2.2.1.** *Допустим, что  $A_1(t)$  – является коэффициентом задачи Римана и она непрерывная функция,  $c(t)$  – удовлетворяет условию Гёльдера,  $Ind A_1(t) = \alpha$  – есть индекс задачи Римана,*

*Тогда, данная задача разрешима и имеет единственное решение, при  $\alpha - \delta = 0$ . Когда  $\alpha - \delta > 0$ , тогда рассматриваемая однородная задача сопряжения имеет  $\alpha - \delta$  решений. В случае, индекс  $\alpha - \delta < 0$ , задача будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняется  $|\alpha - \delta|$  условие разрешимости, вида:*

$$\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) \frac{c_1(t)}{(t - z_0)^{\alpha}} dt = 0.$$

В параграфе 2.3 второй главы исследуется граничная задача типа Римана для уравнений вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , при условии, что коэффициент имеет особенности модульного характера.

**ЗАДАЧА R<sub>2.3</sub>.** Требуется найти аналитическую функцию:  $W^+(z)$  – регулярного решения для уравнения,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  в области  $D^+$  и  $W^-(z)$  – аналитическую вне области, по следующему граничному условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ ) - точки, лежащие на  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j > 0$ ,  $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) \neq 0$  и  $c(t)$  - из класса  $H(\Gamma)$ .

Решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре.

**ТЕОРЕМА 2.3.1.** Пусть в задаче  $\varphi_3(t) = A_4(t) \varphi_3^*(t) + c_2(t)$ ,  $A_4(t) \neq 0$  и является непрерывная функция,  $c_2(t)$  из класса Гёльдера: ( $\alpha = \text{Ind}A_4(t)$ ) индекс задачи Римана.

Тогда:

Когда индекс  $\alpha = 0$ , задача сопряжения вида:

$\varphi_3(t) = A_4(t) \varphi_3^*(t) + c_2(t)$  (2.3.14), имеет единственное решение, а в случае  $\alpha > 0$  данная задача сопряжения имеет  $\alpha$  решений. Когда  $\alpha < 0$ , задача сопряжения Римана неразрешима. Для решения задачи

$\varphi_3(t) = A_4(t) \varphi_3^*(t) + c_2(t)$ , требуется дополнительное условие разрешимости  $|\alpha|$ :

$$\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) \left[ (t - z_0)^{-\alpha} c_2(t) \right] dt = 0.$$

В третьей главе диссертации, которая состоит из трёх параграфов, исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае для уравнений, вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ .

В параграфе 3.1 третьей главы изучается сингулярная граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами, один из которых обладает особенностью аналитического характера, для системы дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y).$$

В этом параграфе диссертационной работы, изучается сингулярная граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического вида, в случае, когда

коэффициент задачи имеет особенности аналитического характера, т.е. для системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = ab\left(\frac{u}{b} + \frac{v}{a}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a(u + v). \end{cases}$$

**ЗАДАЧА R<sub>3.1</sub>.** Требуется найти аналитические функции:  $W^\pm(x, y)$ , являющие регулярным решением уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  принадлежащими к областям  $D^\pm$ , удовлетворяют следующему условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \cdot A_1(t) \cdot W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t)$  – непрерывная функция,  $c(t)$  – свободный член задачи из класса Гёльдера,  $\xi_r, \eta_j$  – различные точки контура,  $d_r, q_j$  – положительные числа.

**ТЕОРЕМА 3.1.1.** *Когда индекс задачи Римана  $\alpha - d - 1 = 0$ , тогда, краевая задача:  $\varphi_1^+(t) = A_1^*(t) \varphi_1^-(t) + \psi_1^*(t)$  в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ , имеет единственное решение.*

*Когда:  $\alpha - d - 1 > 0$ , тогда искомая задача имеет  $\alpha - d - 1$  решение. Тогда, при индексе:  $\alpha - d - 1 < 0$ , задача Римана неразрешима. Для её разрешимости требуется  $|\alpha - d - 1|$  дополнительное условие,*

$$\text{вика: } \int_{\Gamma} \frac{R^+(t)}{(t - z_0)^\alpha} \left[ \frac{\psi_1^-(t)}{(t - z_0)^\alpha} \right] dt = 0.$$

Во 3.2., третьей главы диссертационной работы, исследуется краевая задача Римана для уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , с коэффициентом, имеющим нулей и полюсов следующего сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R<sub>3.2</sub>.** Необходимо найти пару аналитических функций:  $W^\pm(x, y)$ , регулярного решения дифференциального уравнения, вида,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , лежащего в областях  $D^\pm$ , которые удовлетворяют следующему граничному условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \cdot A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r, \eta_j$  – точки, лежащие на контуре  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – целые положительные числа.

**ТЕОРЕМА 3.2.1.** Пусть в задаче:  $\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t) \varphi_1^-(t) + c_2(t)$ , а вместо равенства:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , где  $A_2(t)$  – отличная от нуля и непрерывная функция,  $c_2(t)$  – из класса Гёльдера, она дифференцируема в любом порядке.

Тогда, имеет место следующий результат:

В случае, индекса  $\alpha - d = 0$ , рассматриваемая граничная задача сопряжения Римана имеет единственное решение. В случае,  $\alpha - d > 0$ , задача сопряжения Римана имеет  $\alpha - d$  решений в классе, ограниченном на контуре.

В параграфе 3.3 третьей главы диссертационной работы исследуется краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами, один из которых в конечной точке обладает особенностью модульного характера, для уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y).$$

**ЗАДАЧА R<sub>3.3</sub>.** Необходимо найти пару аналитических функций  $W^\pm(x, y)$ , регулярного решения уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$

принадлежащей внутри области и вне области  $D$ , удовлетворяющую граничному условию, вида:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь:  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – произвольные числа. Коэффициент задачи

$$A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0 \text{ и непрерывная функция, } c(t) – \text{ из}$$

класса  $H(\Gamma)$ . В искомой задаче Римана, решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре  $\Gamma$ .

**ТЕОРЕМА 3.3.1.** *В случае индекса задачи  $\alpha = 0$ , тогда рассматриваемая задача сопряжения в искомом классе функции, будет разрешима. Тогда, когда индекс кappa больше нуля, задача имеет kappa линейно-независимых решений. Если индекс кappa меньше нуля, тогда задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для её разрешимости требуется дополнительное условие разрешимости  $|\alpha|$ .*

В четвертой главе настоящей диссертации, которая состоит из 6-и параграфов, изучается граничная задача типа задачи Римана для системы уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$  с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае.

В 1.1., настоящей главы диссертационной работы изучается сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент задачи Римана, характеризует особенности целого порядка для системы эллиптического уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$ .

**ЗАДАЧА R<sub>4.1</sub>.** Требуется найти аналитическую функцию  $W^+(x, y)$  – регулярного решения уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  в области  $D^+$  и функцию  $W^-(x, y)$  – аналитическую во внешней области, по следующему граничному условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция,

$c(t) \in H$ ,  $\xi_r$ ,  $\eta_j$  – несовпадающие точки контура,  $d_r$ ,  $q_j$  – целые числа,

$$\delta = \sum_{r=1}^{\mu} \delta_r, \quad S = \sum_{j=1}^{\gamma} s_j.$$

**ТЕОРЕМА 4.1.1.** Если  $A_4(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  и

$A_4(t)$  – непрерывная функция,  $c_2(t)$ , удовлетворяет условию  $H$ , тогда имеет место следующее:

Когда индекс задачи  $\alpha = 0$ , тогда рассматриваемая краевая задача сопряжения имеет единственное решение. Когда индекс каппа больше нуля, тогда задача сопряжения разрешима и имеет каппа решение. В случае, индекс задачи, каппа меньше нуля, в этом случае, задача будет разрешима тогда и только тогда, когда требуются  $|\alpha|$  дополнительные условия разрешимости:

$$\int \frac{R^+(t)}{\Gamma(t - z_0)^{\alpha}} \left[ (t - z_0)^{-\alpha} c_2(t) \right] dt = 0.$$

Во втором параграфе четвёртой главы диссертационной работы изучается сингулярная краевая задача Римана для эллиптических уравнений вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$ , когда коэффициент задачи Римана характеризует особенностями нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R<sub>4.2</sub>.** Требуем найти аналитическую функцию:  $W^+(x, y)$ , регулярного решения дифференциальных уравнений,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left[ W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right]$  в области  $D^+$ , и  $W^-(x, y)$  – аналитическую во внешней области, по граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция на контуре  $\Gamma$ ,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$  и  $\eta_j$  – точки, лежащие на контуре,  $d_r$ ,  $q_j$  – натуральные числа, где  $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$ ,  $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$ .

**ТЕОРЕМА 4.2.1.** *Если  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  непрерывная функция, здесь  $c(t) \in H$  индекс задачи Римана  $\alpha = \text{Ind}A_1(t) - \text{Ind}t^{-q} A_2(t) = \alpha - d$ .*

*Тогда, когда  $\alpha - d \geq 0$ , задача разрешима и имеет единственное решение, рассматриваемая задача сопряжения, имеет  $\alpha - \delta$  решения.*

*Когда,  $\alpha - d < 0$ , задача в общем виде неразрешима. Для существования её решения, необходимо выполнение условий разрешимости, вида  $|\alpha - d|$ .*

В параграфе 3 четвёртой главы диссертационной работы изучаются результаты решения задачи Римана для системы эллиптических уравнений вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$$

в случае, когда коэффициент является непрерывной функцией и обладает особенностями модульного характера.

**ЗАДАЧА R<sub>4.3</sub>.** Требуется, найти пару аналитических функций  $W^+(x, y)$  – регулярное решение эллиптического уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$ , принадлежащего ко всей области  $D$ , которая удовлетворяет следующие условия:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

где  $A_1(t)$  – непрерывная функция, и она не равна нулю, здесь  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$ ,  $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$ ,  $d_r, q_j$  – любые действительные числа.

**ТЕОРЕМА 4.3.1.** Пусть  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0$ , и непрерывная функция на контуре  $\Gamma$  и  $Ind A_1(t) = \alpha$ , здесь  $c(t)$  из класса Гёльдера.

Тогда, когда индексом задачи  $\alpha - q^{(2)} = 0$  в этом случае, однородная задача является разрешимой. При  $\alpha - q^{(2)} > 0$  рассматриваемая неоднородная краевая задача сопряжения, безусловно разрешима. Когда индекс задачи Римана  $\alpha - q^{(2)} < 0$ , тогда рассматриваемая неоднородная задача неразрешима, для разрешимости неоднородной задачи требуем  $|\alpha - q^{(2)}|$  условия разрешимости (4.3.10).

В параграфе 4.4 этой главы исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, один из которых характеризуется особенностью целого порядка.

Пусть дан контур  $-\Gamma$ , состоящий из  $m+1$  простых замкнутых контуров Ляпунова  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ , ограничивающих односвязную область  $D^+$ , дополнительную к ней часть плоскости, состоящую из суммы  $m$  конечных односвязных областей  $D_k^-$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) и бесконечной области  $D_k^-$ , будем в дальнейшем для краткости называть также областью и обозначим через  $D^-$ .

**ЗАДАЧА R<sub>4.4</sub>.** Необходимо найти функции  $W^{\pm}(z)$ , аналитические в областях  $D^{\pm}$ , имеющие почти всюду на контуре  $\Gamma$ , предельные угловые значения,  $W^{\pm}(t)$  удовлетворяющие граничные условия:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r, \eta_j$  – некоторые точки контура  $\Gamma$  и  $\xi_r$  – являются нулями функции  $A_l(t)$ ,  $\eta_j$  – являются полюсами функции  $A_l(t)$ ,  $d_r, q_j$  – натуральные числа,  $A_l(t)$  – непрерывная функция,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .

**ТЕОРЕМА 4.4.1.** *Краевая задача Римана в случае  $\alpha - p = 0$ , безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача также, в случае  $\alpha - p > 0$ , безусловно, разрешима и имеет  $\alpha - p$  линейно независимых решений. Задача разрешима лишь в случае,  $\alpha - p < 0$ , при выполнении  $|\alpha - p|$  условий разрешимости. При выполнении условий разрешимости, решение существует и единственно.*

В параграфе 4.5 настоящей главы диссертационной работы исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, один из которых характеризуется особенностями нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R<sub>4.5</sub>.** Найти функции  $W^\pm(z)$ , аналитические в областях  $D^\pm$  имеющие почти всюду на контуре  $\Gamma$ , предельные значения,  $W^\pm(t)$  удовлетворяющие граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r, \eta_j$  – некоторые точки контура  $\Gamma$  и  $\xi_r$  – являются нулями функции  $A_l(t)$ ,  $\eta_j$  – являются полюсами функции  $A_l(t)$ ,  $d_r, q_j$  – натуральные числа,  $A_l(t)$  – непрерывная функция,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .

**ТЕОРЕМА 4.5.1.** *Краевая задача Римана в случае  $\alpha - p = 0$ , безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача также, в случае,  $\alpha - p > 0$ , безусловно, разрешима и имеет  $\alpha - p$  линейно –*

независимые решения. Задача разрешима лишь, в случае,  $\alpha - p < 0$ , при выполнении  $|\alpha - p|$  условий разрешимости  $S_k g = 0$ . При выполнении условий разрешимости, решение существует, и оно единственное.

В параграфе 4.6 этой главы диссертационной работы исследуется задача сопряжения обобщённых аналитических функций в сингулярном случае. Установлено, что число решений задачи в классе функций, ограниченных на контуре, не зависит от наличия нулей у коэффициента задачи и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов.

**ТЕОРЕМА 4.6.1.** Пусть  $a(t)$  непрерывная функция,  $Inda(t) \cdot t^{-m} = \alpha - m$ ,  $\alpha = Ind_{\Gamma} a(t)$ ,  $b(t)$  - ограничена и измерима,  $c(t) \in L_p$ ,  $p > 1$ .

И пусть:

$$\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + s_p},$$

где  $s_p$  - норма в  $L_p$  сингулярного оператора

$$s_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Тогда:

при  $\alpha - m \geq 0$ ,  $l = 2(\alpha - m)$ ,  $p = 0$ ;

при  $\alpha - m < 0$ ,  $l = 0$ ,  $p = 2(\alpha - m)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### 1. Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- Найдены решения уравнения вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  в случае, когда коэффициент задачи непрерывная функция, но в конечной точке контура, характеризует особенность аналитического порядка [1-А];
- Найдены решения эллиптических уравнений вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , коэффициенты которых являются непрерывной функцией, отметим, что непрерывность функции в конечной точке стремится на бесконечность, либо нарушается условие нормальной разрешимости [14-А];

- Найдены решения эллиптического уравнения первого порядка, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка [7-А];
  - Найдены решение уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность аналитического характера [11-А];
    - Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи имеет особенность сопряжённо-аналитического характера [12-А];
      - Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи характеризует особенность модульного характера [2-А];
        - Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , в случае, когда коэффициент обладает нулями и полюсами аналитического характера [15-А];
          - Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи Римана имеет особенность сопряжённо-аналитического вида [13-А];
            - Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициенты имеют особенности модульного характера [3-А].

## **2. Рекомендации по практическому использованию результатов.**

Данная диссертация имеет теоритическую и практическую ценность, а результаты полученные в диссертационной работы и методы их доказательства могут быть применены в теории краевых задач, теории аналитических функций, обобщённо-аналитических функций и гармонических функций, а также в теории упругости и электродинамики.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### 1. В журналах, зарегистрированных в ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник Таджикского национального университета. – 27 декабря 2021. –г. Душанбе. №4. – С. 74-86.

[2-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$ , когда коэффициент имеет особенность нецелого порядка и не голоморфной структуры [Текст] / М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2022. –Том 1. №3(25). – С. 22-31.

[3-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет особенность нецелого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z) + B(z)$  [Текст] / М.И. Надирова // Вестник Хорогского университета. – 2023. – №3(27). – С. 262-267.

[4-А]. Надирова М.И. Границная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. –Том 1, №2(47). – С.33-40.

### 2. В других изданиях:

[5-А]. Надирова М.И. Сингулярные граничные задачи сопряжения [Текст] / М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы республиканской научно-теорической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ-Душанбе, 02 апреля 2016 г. –С.136-139.

[6-А]. Надирова М.И. Задача сопряжения аналитических функций с нулями и полюсами коэффициента модульного характера [Текст] /М.Б. Холикова, М.И. Надирова// Материалы Международной научно-практической конференции «Современные

проблемы обучения математике, физике и информатике в средней и высшей школе»- ДДОТ, - Душанбе, 2016. – С.109-111.

[7-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре [Текст] / Холикова М.Б., Усмонов М.А., Надирова М.И. // Материалы республиканской научно-практической конференции, «посвященные 2020-2040гг. «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования республики Таджикистан», Дангаре. – 2020. – с.26-30.

[8-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. Душанбе. 25-26 июня 2021. – с.233-237.

[9-А]. Надирова М.И. Общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости в сингулярном случае [Текст] /М.Б. Холикова, М.А. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы республиканской научно-методической конференции на тему: «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)». Празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. Душанбе. – 2021. –с.92-95.

[10-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z)$  [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Додожона Исмоилова. НАНТ, Инст. математики им. А. Джураева, ТНУ –Душанбе. 29-30 апреля 2022. – с. 223-226.

[11-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического

типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы Международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы «Современные проблемы математики и её приложения». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков –г.Душанбе. 20-21 октября 2022г. – с.232-236.

[12-А]. Надирова М.И. Сингулярная краевая задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции на тему: «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». Посвященной «Развитию естественных, точных и математических наук» (2020-2040). – 29 ноября 2022. -г. Душанбе. – С. 187-193.

[13-А]. Надирова М.И. Границная задача Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения первого порядка эллиптического типа в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова //Сборник научных статей Международной научно-теоретической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук». (2020-2040 годы) –30-31 мая 2023г. г.Душанбе. – Стр. 251-254.

[14-А]. Надирова М.И. Сингулярная граничная задача Римана для эллиптических уравнений вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи непрерывная функция [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова //НИЦ Вестник науки. «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции – 27 мая 2025г. –г.Уфа № К-554. – С. 18-29.

[15-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно – аналитического вида [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Международная научно-практическая конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере

науки и образования (2020-2040 годы)».- 2025г. –г. Душанбе, – С. 312-317.

**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН  
ДОНИШГОХИ ДАВЛАТИИ ОМӮЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН БА  
НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ**

УДК-517.2(575.3)  
ББК-22.1(2 то 7)  
Н-17

*Бо ҳуқуқи дастнавис*



**НАДИРОВА МОҲРУХСОР ИНОЯТУЛЛОЕВНА**

**МАСЪАЛАИ КАНОРИИ СИНГУЛЯРИИ РИМАН БО  
КОЭФФИЦИЕНТИ БЕФОСИЛА БАРОИ СИСТЕМАИ  
МУОДИЛАҲОИ ТИПИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ЯКУМ**

**АВТОРЕФЕРАТИ**

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии  
доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯи ихтисоси  
6D060100-Математика (6D060102-Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои  
динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

Душанбе – 2025

Диссертатсия дар кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ иҷро шудааст

**Роҳбари илмӣ:**

**Усмонов Нурулло** - доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисодӣ Тоҷикистон,

**Муқарризони расмӣ:**

**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевиҷ** доктори илмҳои физикаю математика, и.в. профессори кафедраи анализи математикий ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Боҳтар ба номи Н. Ҳусрав

**Муассисаи пешбар:**

**Одинабеков Ҷасур Музоғирович** – номзади илмҳои физикаю-математика, дотсенти кафедраи математика ва илмҳои табиатшиносии филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе.

Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия 7 январи соли 2026 соати 14:00 дар ҷаласаи Шуруи диссертационии 6Д.КОА-011-и факултети меҳаникаю математикаи назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргузор мегардад. Суроғ: Ҷумҳурии Тоҷикистон, 734025, ш.Душанбе, Буни Ҳисорак, бинои 17, утқи 203 E-mail: [alisher\\_gafarov@mail.ru](mailto:alisher_gafarov@mail.ru); телефони котиби илмӣ: (+992) 900 76-66-03

Бо диссертатсия дар қитобхонаи илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва сомонаи расмии он <http://www.tnu.tj> шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи «\_\_» «\_\_\_\_» соли 2025 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

**Котиби илмии Шуруи диссертационии 6Д.КОА-011,**

**номзади илмҳои физикаю математика**



**Фафоров А.Б.**

## МУҚАДДИМА

**Мубраммияти мавзӯи тадқиқот.** Ба масъалаҳои канории функцияҳои тағиирёбандашон комплексӣ асарҳои илмии тадқиқшуда бениҳоят зиёд мебошанд, аз ҷумла, барои масъалаи канории Риман. Кори диссертатсионӣ ба мавзӯи масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила барои муодилаи эллиптикий тартиби якум бахшида шудааст, ки дар он коэффициентҳои масъала сифр, қутб, сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи аналитикӣ ва инчунин, ҳангоми коэффициент ҳарактерӣ модулдоштаро барои системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми намуди эллиптикий бахшида шудааст.

**Дараҷаи коркарда баромадани мавзӯи тадқиқот.** Дар равияи мазкур асосан дохил мешаванд асарҳои илмии И.Н. Векуа [1-2], Л.Г. Михайлов [3-4], Н. Усмонов [5] ва дигарон. Ҳалли масъалаи муодилаҳои эллиптикий ва масъалаи Риман бо коэффициентҳои шарти Гёлдерро қаноатқунанда ва ҳолатҳои сингулярии масъалаи Риман дар асарҳои илмии И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлов, Н. Усмонов ва якқатор олимони дигар омӯхта шудааст.

И.Н.Векуа оид ба функцияҳои аналитикии умуникардашуда, барои системаи муодилаҳои дифференсиалии зеринро тадқиқ намудааст:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Системаи (0.0.1) дар намуди комплексӣ шакли зеринро дорад:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W} + F, \quad (0.0.2)$$

ки дар ин ҷо

$$W = u + iv, \quad \bar{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

ва

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic - ib), \quad F = \frac{1}{2}(f + iq),$$

дода шудааст.

Дар системаи муодилаи додашудаи (0.0.1) И.Н. Векуа масъалаи канории Гилбертро тадқиқ кардааст. Ў дар ин кор масъалаи Риманро наомӯхтааст.

Масъалаи Риман барои системаи (0.0.1) аз тарафи Л.Г. Михайлов омӯхта шудааст. Бояд қайд намуд, ки коэффициенти масъалаи Риман дар тадқиқотҳои Л.Г. Михайлов шарти Гёлдерро қаноат менамуданд.

Баъдан, Л.Г. Михайлов масъалаи канории Риман-Газеманро омӯхтааст, ки шакли зеринро дорад:

$$W^+(t)[\alpha(t)] = A(t)W^-(t) + c(t)$$

ё ки дар намуди комплексӣ чунин навишта мешавад,

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W}.$$

Инчунин, барои ин муодила масъалаи канории зеринро низ тадқиқ намудааст.

$$W^+(t) = a(t)W^-(t) + b(t)\bar{W}^-(t) + c(t);$$

$$W^+(t) = a(t) \frac{\partial W^-(t)}{\partial t} + b(t) \frac{\partial \bar{W}^-(t)}{\partial t} + p(t)W^-(t) + q(t)\bar{W}^-(t) + c(t).$$

Баъдан, аз тарафи профессор Н.Усмонов ва шогирдаш С.Шавкатзода [6-7], ҳолати дигари сингулярнокии ин масъалаҳо омӯхта шудаанд. Диссертатсияи мазкур бошад, ба ҳолатҳои сингулярии масъалаи Риман барои системаи муодилаҳои умумикардашудаи Кошӣ-Риман баҳшида шудааст. Дар ин ҷо, фарз карда мешавад, ки коэффициенти масъала, яъне  $A(t)$  функсияи бефосила аст.

**Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва ё мавзухои илмӣ.** Кори диссертатсиони дар дирай татбиқи дурнамоии илмӣ-тадқиқотии кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ, барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзуи «Тадқиқот оид ба назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва татбиқи он» иҷро карда шудааст.

## ТАСНИФОТИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

**Мақсади таҳқиқот.** Мақсади кори диссертатсионӣ аз, омӯзиши масъалаи сингулярии Риман барои системаи муодилаҳои эллиптикийи

тартиби якум мебошад, ки коэффиценти масъала дар нуқтаҳои охирнок маҳсусиятҳои зеринро доранд:

- ҳолате, ки коэффиценти масъалаи канории Риман сифр ва қутбӣ тартиби бутунро дорад;
- ҳолате, ки коэффиценти масъалаи канории Риман сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи анализатори дорад;
- инчунин маҳсусияти характеристи модулиро доранд.

**Вазифаҳои таҳқиқот.** Аз рӯи масъалаҳои гузошташуда тадқиқотҳои зерин гузаронида шудаанд:

- Дар аввал ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффиценти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , омӯхта шудааст, ки дар ин чо коэффиценти масъала сифр ва қутбӣ тартиби бутун, сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи анализаторӣ ва инчунин маҳсусияти характеристи модулиро доранд;
- Баъдан, ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффиценти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , омӯхта шудааст, ки дар ин чо коэффиценти масъала низ сифр ва қутбӣ тартиби бутун, сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи намуди анализаторӣ ва инчунин маҳсусияти характеристи модулиро доранд;
- Ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффиценти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  омӯхта шудааст, ки дар ин чо коэффиценти масъалаи Риман сифр ва қутбӣ тартиби анализаторӣ, сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи намуди анализаторӣ ва инчунин маҳсусияти характеристи тартиби касриро доранд.

**Объекти таҳқиқот.** Объекти тадқиқот, ин омӯзиши ҳолати сингулярнокии масъалаи Риман бо коэффицентҳои бефосила барои муодилаҳои зерин мебошад:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z).$$

**Предмети таҳқиқот.** Предмети тадқиқот аз исботи теоремаҳое, ки дар онҳо шумораи ҳалҳои масъалаи якчинсаи  $l$  ва шартҳои бо ичро шудани онҳо масъалаи ғайриякчинсаи  $p$  ҳал доранд, омӯхта шудааст.

**Навғонии илмии таҳқиқот.** Натиҷаи диссертатсия нав буда, ба масъалаҳои зерин бахшида шудааст:

**МАСЪАЛАИ R<sub>1</sub>.** Функцияи  $W^+(z)$  ҷустуҷӯ карда шавад, ки вай ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , дар доҳили соҳаи  $D^+$  ва функцияи  $W^-(z)$  аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$ , ҷойгир бошанд ва дар беохирӣ тартиби охирнок дошта, шарти канории зеринро қаноат кунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t)$  функцияи бефосила буда ва он ғайри нули аст,  $c(t)$  шарти Гёлдерро қаноат мекунонанд, инчунин  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r$ ,  $q_j$  – ададҳои бутуни мусбат мебошанд.

**МАСЪАЛАИ R<sub>2</sub>.** Функцияҳои аналитикии  $W^\pm(z)$  ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар соҳаҳои  $D^\pm$  ҷойгир буда ва шарти канории зеринро қаноат кунанда бошанд:

$$W^+(t) = A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо,  $A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}$ , инчунин  $c(t) \in H(\Gamma)$ , нуқтаҳои  $\xi_r$ ,  $\eta_j$  – дар контур меҳобанд,  $d_r$ ,  $q_j$  – ададҳои натуралий мебошанд.

**МАСЪАЛАИ R<sub>3</sub>.** Ҷуфти функцияҳои  $W^\pm(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаҳои  $D^\pm$  аналитикӣ мебошанд, ёфта шаванд, ки онҳо шарти канории зеринро қаноат кунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин чо  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои бутун,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $A_l(t) \neq 0$  ва функсияи бефосила мебошад.

Инчунин, ҳалли масъала дар синфи функсияҳои дар контури  $\Gamma$  интегронидашаванд ҷустуҷӯ карда мешавад.

**МАСЪАЛАИ R4.** Талаб карда шудааст, ки функсияи  $W^+(z)$ , ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи дифференсиалии намуди эллиптикӣ дар соҳаи  $D^+$  ва  $W^-(z)$  – функсияи аналитикӣ берун аз соҳа, яъне дар  $D^-$  ҷойгир бошад ва шартҳои канории зеринро қаноат кунонанд:

$$\mathbf{a)} W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\mathbf{b)} W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\mathbf{b)} W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

дар масъалаҳои **а)** ва **б)** бошад, ҳал дар синфҳое кофтуков карда мешаванд, ки дар контур маҳдуд мебошад. Дар ҳолати **в)** бошад, ҳали масъала дар синфи функсияҳои дар контур интегронидашаванд кофтуков карда мешавад.

**МАСЪАЛАИ R5.** Талаб карда мешавад, ки функсияи  $W^+(z)$ , ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи дифференсиалии тартиби якуми намуди эллиптикӣ дар соҳаи  $D^+$  ҷойгир буда ва функсияи

$W^-(z)$  дар соҳаи  $D^-$  анализикӣ мебошад ва шартҳои канории зеринро қаноаткунонанд:

$$\mathbf{a)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j}$ .

$$\mathbf{b)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}$ .

$$\mathbf{b)} W^+(t) = A_l(t)W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |(t - \xi_r)|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  – функсиияи

безосила ва  $\xi_r (r=1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j=1, 2, \dots, \gamma)$  – нуқтаҳои контур буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралий ва  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошанд.

Ҳалли масъалаҳои **а)** ва **б)** дар синфи функсиҳои дар контур маҳдуд ва ҳолати **в)** бошад, ҳал дар синфи функсиҳои дар контур интегронидашаванда ҷустуҷӯ карда мешаванд.

**Аҳаммияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот.** Методе, ки дар кори диссертационӣ истифода шудааст, натиҷаҳои онро дар татбиқи масъалаҳои канорӣ, назарияи функсиҳои гармоникӣ, назарияи функсиҳои канории умумикардашудаи анализикӣ ва анализи функционалий истифода бурдан мумкин аст.

### Нуқтаҳои ба ҳимояи пешниҳодшаванда:

**1.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила дар ҳолате, ки коэффициенти масъала сифр ва қутбӣ тартиби бутунро доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  оварда шудааст.

**2.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила, ки коэффициенти масъала сифр ва қутбӣ ҳамроҳшударо доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  оварда шудааст.

**3.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман дар ҳолати коэффиценти масъала махсусияти характери модулиро дорад, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  оварда шудааст.

**4.** Теорема оид ба масъалаи сингулярнокии Риман бо коэффицентҳои бефосила ҳангоми коэффиценти масъала махсусияти тартиби бутунро доранд барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

**5.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффицентҳои бефосила, ки коэффиценти он сифр ва қутбӣ характери ҳамроҳшудаи аналитикро доранд, барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

**6.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман ҳангоме, ки коэффиценти масъала махсусияти характери модулиро доранд, барои муодилаи дифференсиалии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

**7.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффицентҳои бефосила, ки махсусияти характери аналитикро дорад, барои системаи муодилаҳои эллипткии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

оварда шудааст.

**8.** Теорема оид ба масъалаи канории Риман ҳангоми коэффиценти масъала сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи аналитикро доранд барои муодилаи дифференсиалии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

оварда шудааст.

**9.** Теорема оид ба масъали канории Риман бо коэффициенти бефосила дар ҳолате, ки коэффициенти масъала маҳсусияти характерӣ модулиро доранд, барои системаи муодилаҳои дифференциалии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right)$$

оварда шудааст.

**Дараҷаи эътиимонкӣ натиҷаҳо.** Ҳама теоремаҳо, тасдиқотҳо ва формулаҳо дар таҳқиқоти диссертатсия бо далелҳои дақиқ тасдиқ карда шудааст, як қатор хулосаҳо бо таҳқиқоти муаллифони дигар мувофиқанд.

**Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ (бо шарҳ ва самти таҳқиқот).** Кори диссертационӣ мувофиқи баҳшҳои зерини шиносномаи ихтисоси дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100-Математика (6D060102- муодилаҳои дифференциалий, системаи динамикӣ ва идоракуни оптималий) иҷро карда шуда, кисмате аз фасли муодилаҳои дифференциалий мебошад, ки дар банди Ш-и параграфи 3-и шиносномаи ихтисоси илмӣ зикр шудааст.

**Саҳми шаҳсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот.** Гузориш ва методи исботи теоремаҳо ба роҳбари илмӣ мутааллук буда, ҳамаи натиҷаҳои дар қисмати «**Навғонии илмии таҳқиқот**» овардашуда ба унвонҷӯ тааллук дорад.

**Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия.** Маводҳои диссертатсия дар конференсияҳои байналмиллалий ва ҷумҳурияйӣ муаррифӣ ва муҳокима гардиданд:

- дар конференсияи илмию амалии ҷумҳурияйӣ «Тайёр кардани мутахассисони муосири математика дар соҳаи илму маорифи мактабҳои олӣ ва миёна». (2020) ш. Дангаре;
- дар конференсияи Байналмиллалии «Масъалаҳои актуалии математикаи муосир», баҳшида ба 80-солагии зодрӯзи доктори илмҳои физикаю математика, профессор Темур Собир (25-26 июни 2021), ш.Душанбе;
- дар конференсияи илмӣ- методии ҷумҳуриявии дар мавзӯи «Татбиқи алгебра ва назарияи ададҳо дар ҳалли масъалаҳои муосир», баҳшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи маориф (солҳои 2020-2040)», 90-солагии таъсисёбии ДДОТ ба номи Садриддин Айнӣ ва таҷлили 30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон;

- дар конференсияи Байналмиллалии «Проблемаҳои мусоири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Додоҷон Исмоилов (Душанбе, 29-30 апрели соли 2022);
- дар конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Масъалаҳои мубрами рушди илми риёзӣ дар замони мусоир» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва илми математика дар солҳои 2020-2040». ДМТ ва Занони кумитаи иттиҳодии умумиҷаҳонии математикҳо. (20-21 октябри 2022с.) ш.Душанбе;
- дар конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Масъалаҳои мубрами рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар замони мусоир» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (2020-2040). (29 ноября, 2022г.) ш.Душанбе;
- дар конференсияҳои Байналмиллалии имлӣ-назариявӣ дар мавзӯи «Саҳми математика дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ», бахшида ба омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ (солҳои 2020-2040), –30-31 май 2023с. ш.Душанбе;
- дар конференсияи Байналмиллалии илмӣ-амалӣ бахшида ба «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Маҷмӯи мақолаҳои илмӣ – 27-майи 2025с. –ш.Уфа;
- дар конференсияи Байналмиллалии илмӣ-методӣ дар мавзуи «Математика ва татбиқи он дар амалия», бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (Солҳои 2020-2040), ш.Душанбе;

**Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия.** Тибқи маводҳои таҳқиқоти диссертационӣ 15 мақолаи илмӣ, аз ҷумла 4 мақола дар нашрияҳои аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тақризшаванд ва 11 мақола дар маводҳои конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмиллалий нашр шудаанд.

**Соҳтор ва ҳаҷми диссертатсия.** Кори диссертационӣ аз муқаддима, ҷор боб, хулоса ва рӯйхати адабиёти истифодашуда иборат аз 142 номгӯй. Дар диссертатсия барои формулаҳо ва параграфҳо нумератсияи серақама истифода шудааст, ки дар он рақами якум, рақами боб, дуюм рақами параграф ва рақами сеюми кор бошад ба формула тааллук дорад. Ҳаҷми умумии диссертатсия 142 саҳифаи чопӣ компьютериро дар бар гирифта, дар барномаи Microsoft word ҳуруфчинӣ шудааст.

## МУХТАВОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

**Мавод ва усулҳои таҳқиқот.** Дар диссертатсияи мазкур ҳолати сингулярии масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила барои муодилаи дифференсиалии тартиби якуми эллиптикӣ татбиқ карда шудааст. Дар диссертатсия методи масъалаи канории функцияҳои аналитикӣ, аналитикии умумикардашуда ва элементҳои анализи функционалий истифода шудаанд.

**Натиҷаҳои таҳқиқот.** Натиҷаҳои кори диссертатсиониро муҳтасар шарҳ медиҳем.

Дар муқаддима маълумоти муҳтасари таърихии натиҷаҳо аз рӯи масъалаҳои даҳлдор ва муҳиммияти мавзуи интихобшуда асоснок карда шуда, мақсад ва масъалаи таҳқиқот муайян карда шудааст. Инчунин, навғониҳои илмӣ ва муҳиммияти масъалаи натиҷаҳои ҳосилгардида, нишон дода мешавад. Натиҷаҳои асосии диссертатсия оварда шудаанд.

Боби якуми кори диссертатсионӣ аз таҳлили сарчашмаҳои библиографӣ шуруъ шудааст ва ба ҷамъоварии маводҳое, ки баъдан дар диссертатсия истифода мешаванд, баҳшида шудааст.

Дар боби дуюми диссертатсия, ки аз се параграф иборат аст, дар он масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила барои системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ, омӯҳта шудааст.

Дар параграфи якуми боби дуюм оид ба масъалаи канории Риман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ бо коэффициенти бефосила, ки дорои маҳсусияти тартиби бутунро доранд, омӯҳта шудааст.

Функцияи  $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , ки дар ин ҷо  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = h(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g(x, y) \end{cases}$$

-ро қаноаткунанда мебошад. Ин система дар ададҳои комплексӣ намуди зеринро  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дошта, дар он масъалаи канории Риман дида баромада мешавад.

**МАСЪАЛАИ R<sub>2.1</sub>.** Талаб карда мешавад, ки  $W^+(z)$  – ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаи  $D^+$  ва функсияи  $W^-(z)$  – анализикӣ дар соҳаи  $D^-$  ҷойгир буда, дар беохирӣ тартиби охирнокро доранд ва шарти канории зеринро қаноат кунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t) \neq 0$  ва функсияи бефосила буда,  $c(t) \in H$ , инчунин  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – ададҳои бутун мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 2.1.1.** *Агар  $\alpha - \delta = 0$ , бошад, он ғоҳ масъалаи канории ҳамроҳшудаи Риман ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\alpha - \delta > 0$ , бошад, он ғоҳ масъалаи канории ҳамроҳшуда  $\alpha - \delta$  - ҳалро дорад. Агар  $\alpha - \delta < 0$ , бошад, он ғоҳ масъала дар ҳолати умуми ҳал надошта бо иҷро шудани шарти иловагии  $|\alpha - \delta|$  масъала ҳалли худро пайдо мекунад.*

Дар параграфи дуюми боби дуюми кори диссертационӣ бошад, оид ба масъалаҳои канории Риман, бо коэффициентҳои бефосила, ки сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи тартиби бутунро доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  омӯхта шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>2.2</sub>.** Ёфта шавад, функсияи  $W^+(z)$  – ки ҳалли регулярии системаи муодилаи дифференсиалии  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаи  $D^+$ , инчунин  $W^-(z)$  – функсияи анализикӣ дар соҳаи  $D^-$ , ҷойгир

бошад ва дар беохирӣ, маҳсусияти тартиби охирнокро доранд, шарти канории  $W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_l(t) W^-(t) + c(t)$  -ро қаноат кунонанд. Ки дар ин масъала  $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_l(t)$  буда, дар ин ҳолат  $A_l(t) \neq 0$  ва функцияи бефосила аст,  $c(t)$  - ба синфи Гёльдер тааллук дошта,  $\xi_r, \eta_j$  - нуқтаҳои контури  $\Gamma$  ва  $d_r > 0, q_j > 0$  ададҳои бутун мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 2.2.1.** *Фарз мекунем, ки  $A_l(t)$  - функцияи бефосила аст,  $c(t) \in H$  ва  $Ind A_l(t) = \infty$ ,*

*Он гоҳ:*

*Агар  $\infty - \delta = 0$  бошад, пас масъалаи канории Риман ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\infty - \delta > 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда  $\infty - \delta$  ҳал дорад. Агар  $\infty - \delta < 0$  масъала факат ва факат ҳалли худро пайдо мекунад бо илова намудани шарти иловагии  $|\infty - \delta|$  ва шарти ҳалишавандагии  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\infty} R^+(t) \frac{c_1(t)}{(t - z_0)^{\infty}} dt = 0$  иҷро гардад.*

Параграфи сеюми боби дуюм ба масъалаи канории Риман ҳангоми коэффиценти масъала маҳсусияти характеристи модулиро дорад, барои системаи муодилаҳои эллиптикии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  бахшида шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>2.3</sub>.** Талаб карда шудааст, ки функцияи  $W^+(z)$ -ҳалли регулярии системаи муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , ки дар соҳаи  $D^+$  ва функцияи аналитикии  $W^-(z)$  дар соҳаи  $D^-$ , ҷойгиранд ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин масъала  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ ) - нуқтаҳо, ки дар контури  $\Gamma$  меҳобанд,  $d_r, q_j$  - ихтиёри, адади бутун аст,  $A_l(t)$  - функцияи бефосила ва  $A_l(t) \neq 0$ ,  $c(t)$  аз синфи Гёльдер мебошад.

Ҳалли масъала дар синфи функцияҳои интегронидашаванда ёфта шудааст.

## ТЕОРЕМАИ

### 2.3.1.

Бигузор

дар

масъалаи

$\varphi_3(t) = A_4(t)\varphi_3^+(t) + c_2(t)$ , функсияи  $A_4(t) \neq 0$  ва бефосила мебошад,  $c_2(t)$  аз синфи Гёльдер буда, ( $\alpha = \text{Ind}A_4(t)$  – индекси масъала) – мебошад.

Барояш натиҷаҳои зерин ҷой дорад:

Агар  $\alpha = 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha > 0$  бошад, масъала  $\alpha$  ҳал дорад. Агар  $\alpha < 0$ , бошад, масъала ғақат ва ғақат ҳалли худро пайдо карда, бо илова намудани  $|\alpha|$  ва  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$ . шарти ҳалшавандагӣ иҷро гардад.

Дар боби сеюми диссертатсия, ки аз се параграф иборат мебошад, дар он сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила барои муодилаи дифференсиалии  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби сеюми кор, оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила, ҳангоми коэффициенти масъала сифр ва қутбӣ анализи тартиби бутунро дорад, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида, тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>3.1</sub>.** Ёфта шавад, функсияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар соҳаи  $D^+$ , ва функсия  $W^-(z)$  – анализӣ дар соҳаи  $D^-$  буда, барояш шарти канории зерин ҷой дорад:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \cdot A_l(t) \cdot W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_l(t)$  – функсияи бефосила буда,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r, \eta_j$  – нуқтаҳо, ки дар контури  $\Gamma$  ҷойгиранд ва  $d_r, q_j$  – ададҳои бутуни мусбат мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 3.1.1.** Агар  $\alpha - d - 1 = 0$  бошад, пас масъалаи ҳамроҳшудаи якчинсаи Риман дар синфи функсияҳои дар контур маҳдуд, ҳалли ягона дорад;

Барои  $\alpha - d - 1 > 0$  масъалаи мазкур ҳалли  $\alpha - d - 1$ -ро дорад. Барои  $\alpha - d - 1 < 0$  бошад, шарти иловагии  $|\alpha - d - 1|$  барои ҳалишаванда будани масъалаи якчинса талаб карда мешавад.

Дар параграфи дуюми боби сеюми кори диссертационӣ доир ба масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила, ки дорои сифр ва кутбӣ ҳамроҳшударо доранд, барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида шуда, оид ба ин масъала тадқиқот карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>3.2</sub>.** Талаб карда шудааст, ки функсияи  $W^+(z)$ -ро ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар дохили соҳа, яъне  $D^+$ , ва функсияи аналитикии  $W^-(z)$ , ки дар соҳаи  $D^-$  меҳобанд ва шарти канории зеринро қаноаткунанда мебошанд ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \cdot A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$ -функсияи бефосила,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r$ ,  $\eta_j$ -нуқтаҳои дар контури  $\Gamma$  ҷойгир буда,  $d_r$ ,  $q_j$ -ададҳои бутуни манғӣ мебошад.

**ТЕОРЕМАИ 3.2.1.** *Бигзор дар масъалаи*  
 $\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t) \varphi_1^-(t) + c_2(t)$  *ва масъалаи*  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , *ки дар он*  
 $A_2(t)$ -аз нол фарқкунанда буда, функсияи бефосила аст, инчунин  $c_2(t)$ -тааллуқи синфи Гёльдер бошад.

*Он гоҳ натиҷаи зеринро ба даст меорем:*

*Агар  $\alpha - d = 0$ , бошад, он гоҳ масъала ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha - d > 0$ , бошад, он гоҳ масъала ба синфи функсияҳои дар контур маҳдуд тааллуқ дошта, ҳалли  $\alpha - d$ -ро дорад.*

Дар параграфи сеюми боби сеюми кори диссертационӣ бошад оид ба масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила, ки барояш масъалаи зерин:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  ҳангоми коэффициенти масъала маҳсусияти модулиро дорад, тадқиқ шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>3.3</sub>.** Ёфта шавад, функцияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , дар дохили соҳаи  $D^+$  ва функцияи  $W^-(z)$ -аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$  меҳобанд, инчунин, шарти канории зеринро қаноаткунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$  буда,  $d_r, q_j$ -иҳтиёри адади мусбат, функцияҳои  $A_1(t)$  ва  $c(t)$  ба синфи Гёльдер тааллук доранд. Ҳалли масъала дар синфи функцияҳои дар контури  $\Gamma$  интегронидашаванд аёфт шудааст.

**ТЕОРЕМАИ 3.3.1.** Агар  $\alpha = 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда дар синфи функцияҳои ҷусташаванд ҳалшаванд буда ҳалли он ягона мебошад. Агар  $\alpha > 0$  бошад, он гоҳ масъала ҳалли ҳаттӣ новобастаи  $\alpha$ -ро дорад. Агар  $\alpha < 0$ , бошад, он гоҳ масъала ҳал надошта, агар бо талаб намудани шарти иловагии  $|\alpha|$  масъала ҳалли ҳудро пайдо мекунад.

Боби чоруми кори диссертационӣ аз шаш параграф иборат буда, дар он оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэфитсиенти бефосила барои системаи муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби чоруми кори диссертационӣ доир ба масъалаи канории Риман бо коэфитсиенти бефосила, ҳангоми коэфитсиент сифр ва қутбӣ анализикии тартиби бутунро доранд, барои муодилаи эллиптикий намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>4.1</sub>.** Талаб карда шудааст, ки функцияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар соҳаи  $D^+$  ва  $W^-(z)$ -функцияи анализикий аз соҳа берун ҷойгир аст ва муносибати канории зеринро қаноат мекунанд, ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин чо  $A_l(t)$  – функцияи бефосила,  $A_l(t) \neq 0$  ва  $c(t) \in H$ , инчунин,  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ ) – нүктахой гуногуни контур буда,  $d_r$ ,  $q_j$  – ададхой бутун мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 4.1.1.** *Бигзор  $A_4(t)$  – функцияи бефосила, инчунин ба сифр баробар нест ва  $c_2(t)$  шарти Гёльдерро қаноаткунанда бошад.*

Он гоҳ:

агар  $\alpha = 0$  ( $\alpha = \text{Ind}A_4(t)$ ) бошад, пас масъала ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\alpha > 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли  $\alpha$ -ро дорад. Агар  $\alpha < 0$  бошад, масъала ҳалишаванд мешавад фақат ва фақат агар бо илова намудани  $|\alpha|$  ва шарти ҳалишавандагии  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$  ичро гардад.

Дар параграфи дуюми боби чоруми диссертатсия оид ба масъалаи канории Риман, бо коэффициенти бефосила, ки ҳангоми коэффициенти масъала дорои сифр ва қутбӣ ҳамроҳшударо, барои системаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$ , татбиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>4.2</sub>.** Талаб карда шудааст, функцияи  $W^+(z)$  – ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар соҳаи  $D^+$  буда,  $W^-(z)$  – функцияи аналитикӣ дар соҳаи берунӣ ҷойгир мебошад, инчунин шарти канории

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{q_j}} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

-ро қаноатқунонанд, чустуңүү карда шаванд. Дар ин чо  $A_l(t)$  – функцияи бефосила буда,  $A_l(t) \neq 0$  аст,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$  ( $r=1, 2, \dots, \mu$ ) ва  $\eta_j$  ( $j=1, 2, \dots, \gamma$ ) – нүктахой фарқунаандай контур,  $d_r$ ,  $q_j$  – ададхой натуралы мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 4.2.1.** *Бигзор  $A_l(t)$  функцияи бефосила ва  $A_l(t) \neq 0$ ,  $c(t) \in H$  бошад,  $\alpha = \text{Ind}A_l(t) - \text{Ind}t^{-q}A_2(t) = \alpha - d$  – индекси масъала мебошад.*

Агар  $\alpha - d = 0$ , бошад, пас масъала ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha - d > 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли  $\alpha - d$  –ро дорад. Агар  $\alpha - d < 0$ , бошад, дар ин ҳолат масъала ҳал надошта, барои ҳалшаванда будани он шарти иловагии  $|\alpha - d|$  талаб карда мешавад.

Параграфи сеюми боби мазкур оид ба масъалаи канории Риман, ҳангоми коэффициенти масъала маҳсусияти модулиро дорад, барои муодилаи дифференсиалии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  тадқиқ намуда, натижаҳои нав ба даст оварда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R<sub>4.3</sub>.** Ёфта шавад, функцияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  дар дохили соҳа ва функцияи аналитикии  $W^-(z)$ , ки аз соҳа берун ҷойгир бошад, шарти канории зеринро қаноат кунанд:

$$W^+(z) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_l(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин чо  $A_l(t)$  – функцияи бефосила ва нобаробари нол аст,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$ ,  $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$ ,  $d_r, q_j$  – ихтиёрий адади ҳақиқӣ мебошад.

**ТЕОРЕМАИ 4.3.1.** *Бигзор  $A_l(t)$  – функцияи бефосила дар контури  $\Gamma$  ва  $\text{Ind}A_l(t) = \alpha$ , ки  $c(t)$  аз синфи Гёльдер дода шуда бошад. Пас:*

Агар  $\alpha - q^{(2)} = 0$  бошад, он гоҳ масъала ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\alpha - q^{(2)} > 0$  бошад, пас масъала ҳалшаванд буда, дорои ҳалли  $\alpha - q^{(2)}$  мебошад. Агар  $\alpha - q^{(2)} < 0$  бошад, масъалаи гайриякчинсаи ҳалли ягона надорад. Барои ҳалшаванд будани масъалаи гайриякчинса шарти иловагии ҳалшаванд будани масъала  $|\alpha - q^{(2)}|$  талаб карда мешавад.

Дар параграфи чоруми боби чоруми рисолаи диссертационӣ доир ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила татбиқ карда шудааст, ки коэффициенти масъала характерӣ анализиридоранд.

**Гузориши масъала.** Бигузор контури  $\Gamma$  аз  $m+1$  контурҳои соддаи сарбаси типи Ляпунов  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  гирифта шуда, соҳаи  $D^+$  –ро маҳдуд мекунад ва илова ба он  $m$  соҳаҳои як алоқаи  $D_k^-$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) ва соҳаи беохирӣ  $D_k^-$  иҳота карда шудааст. Дар оянда барои кутоҳ шудани тарзи навишт бо  $D^-$  соҳаро ишора мекунем.

**МАСЪАЛАИ R<sub>4.4</sub>.** Функцияҳои анализири  $W^\pm(z)$  ёфта шаванд, ки онҳо дар соҳаҳои  $D^\pm$ , ки нуқтаҳои контурро дарбар гирифта ҷойгиранд ва шарти канории зеринро қаноаткунонанд, яъне

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j$  баъзе нуқтаҳои контури  $\Gamma$  буда,  $\xi_r$  – сифри функцияи  $A_1(t)$  ва  $\eta_j$  – қутбӣ функцияи  $A_1(t)$  мебошад. Аз ин ҷо  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралиӣ, худи  $A_1(t)$  – бошад, функцияи бефосила,  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошад.

Индекси масъаларо бо  $\alpha = \text{Ind}A_1(t)$  ишора мекунем ва  $q = \sum_{j=1}^{\gamma} q_j, d = \sum_{r=1}^{\mu} d_r$  мебошад. Ҳамин тарик, ҳалли масъала дар синфи функцияҳои дар контури  $\Gamma$  маҳдуд ҷустуҷӯй карда мешавад.

**ТЕОРЕМАИ 4.4.1.** *Масъалаи канории Риман дар ҳолате, ки индексаи  $\alpha - p = 0$  будан ҳалшаванд буда ҳалли ягонаро дорад. Ва дар ҳолати индекси масъала  $\alpha - p > 0$  будан масъала ҳалли ҳаттии*

новобастаи тартиби  $\alpha - p$ -ро дорад. Инчунин, дар ҳолати  $\alpha - p < 0$  будан масъалаи канории Риман ҳал надошта, барои ҳалишавандагии масъалаи додашуда талаб карда мешавад, ки шарти ҳалишавандагии  $|\alpha - p|$  ичро шавад ва бо иҷроиши шарти талаб кардашуда масъала ҳалли ягонаро пайдо мекунад.

Дар параграфи панҷуми боби чоруми кори диссертационӣ бошад оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффиценти бефосила, ҳангоми коэффиценти масъалаи канори сифр ва қутбӣ типи ҳамроҳшудаи аналитикро доранд, тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ  $R_{4.5}$ .** Ёфта шаванд, функцияҳои аналитикии  $W^\pm(z)$ -ро дар соҳои  $D^\pm$  ҷойгир мебошанд ва қариб, ки дар ҳама нуқтаҳои контури  $\Gamma$  қимати лимитиро доранд ва  $W^\pm(t)$  шарти канории

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

-ро қаноат кунонанда мебошад. Дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j$  баъзе нуқтаҳо аз контури  $\Gamma$  буда,  $A_1(t)$ -коэффициенти масъалаи канории Риман мебошад ва он функцияи бефосилааст. Инчунин  $d_r, q_j$  ададҳои натуралий ва  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошад.

**ТЕОРЕМАИ 4.5.1.** *Масъалаи ҳамроҳшудаи канории Риман дар ҳолате, ки индексаш  $\alpha - p = 0$  будан, ҳалишаванда буда ҳалли ягонаро дорад. Ва дар ҳолати индекси масъала  $\alpha - p > 0$  будан, масъалаи ҳамроҳшудаи гайриякчинсаи Риман ҳалли ҳаттии новобастаи тартиби  $\alpha - p$ -ро дорад. Инчунин, дар ҳолати  $\alpha - p < 0$  будан масъалаи ҳамроҳшудаи канории Риман ҳал надошта, барои ҳалишавандагии масъалаи додашуда талаб карда мешавад, ки шарти иловагии ҳалишавандагии  $|\alpha - p|$  ичро шавад ва бо иҷроиши шарти талаб кардашуда, ки дар ин ҷо  $S_k g = 0$  ва  $S_k$  функцияҳои ҳаттии новобастаанд, масъала ҳалишавандаанд ва ҳалли ягонаро дорад.*

Дар параграфи шашуми боби чоруми кори диссертационӣ бошад, оиди ҳолатҳои сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффициенти бефосила, тадқиқ карда шудааст.

Тасдиқ карда шудааст, ки шумораи ҳалҳои масъалаи канорӣ Риман аз синфи функцияҳои дар контур маҳдуд мебошанд, дар он миқдори шумораи нулҳои коэффициент тағиیر наёфта ва дар натиҷа шумораи тартиби суммаи қутбҳо кам мешаванд.

**ТЕОРЕМАИ 4.6.1.** Бигзор  $a(t)$  функцияи бефосила буда,  $Ind a(t) \cdot t^{-m} = \mathfrak{A} - m$ ,  $\mathfrak{A} = Ind_{\Gamma} a(t)$  ва  $b(t)$  – функцияи маҳдуд ва ҷенишаванда аст,  $c(t) \in L_p$  ҳангоми  $p > 1$  будан.

Ва бигузор  $\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + s_p}$ , ки дар ин ҷо  $s_p$  - норма дар фазои  $L_p$

$s_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau$  – оператори сингулярӣ мебошад.

Аз ин ҷо бар меояд, ки ҳангоми  $\mathfrak{A} - m \geq 0$ ,  $l = 2(\mathfrak{A} - m)$ , ва  $p = 0$

Ва ҳангоми  $\mathfrak{A} - m < 0$  будан,  $l = 0$ ,  $p = 2(\mathfrak{A} - m)$  мешавад.

## ХУЛОСА

### 1. Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертационӣ

Дар рисолаи диссертационӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудааст:

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате, ки коэффициент махсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [1-М];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате исбот карда шудааст, ки коэффициенти масъала махсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [14-М];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате, ки коэффициенти масъала махсусияти тартиби касриро дорад, ёфта шудааст [7-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффициенти масъала маҳсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [11-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффициенти масъала маҳсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [12-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффициенти масъала маҳсусияти тартиби модулиро дорад, ёфта шудааст [2-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате, ки коэффициент масъала маҳсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [15-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате, омӯхта шудааст, ки коэффициенти масъала маҳсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [13-М];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате омӯхта шудааст, ки коэффициенти он маҳсусияти тартиби касриро доранд, ёфта шудааст [3-М].

**2. Тавсияҳо оид ба истифодай амалии натиҷаҳои таҳқиқот.** Натиҷаҳо, ки дар кори диссертационӣ ба даст овардашудаанд дар назарияи масъалаҳои канории функцияҳои аналитикӣ, функцияҳои аналитикии умумикардашуда ва функцияҳои гармоникӣ ва инчунин барои назарияи чандирӣ ва электродинамика татбиқ кардан мумкин аст.

## ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РӮИ МАВЗУИ ДИССЕРТАЦИЯ

**1. Мақолаҳо, ки дар маҷалаҳои тақризшавандай аз ҷониби Комиссияи олии аттестационии назди Президенти ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия шудаанд:**

[1-М]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений

эллиптического типа. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник Таджикского национального университета. – 27 декабря 2021. –г. Душанбе №4. – С. 74-86.

[2-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$ , когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры. [Матн] / М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2022. –Том 1. №3(25). – С. 22-31.

[3-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z) + B(z)$  [Матн] / М.И. Надирова // Вестник Хорогского университета. – 2023. – №3(27). – С. 262-267.

[4-М]. Надирова М.И. Границная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. –Том 1. №2(47). – С. 33-40.

## 2. Дар дигар нашрияҳо:

[5-М]. Надирова М.И. Сингулярные граничные задачи сопряжения. [Матн] / М.Б. Холиқова, М.И. Надирова // Материалы республиканской научно-теорической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ-Душанбе, 02-апреля 2016 г. –С.136-139.

[6-М]. Надирова М.И. Задача сопряжения аналитических функций с нулями и полюсами коэффициента модульного характера. [Матн] /М.Б. Холиқова, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы обучения математике, физике и информатике в средней и высшей школе»- ДДОТ, -Душанбе, 2016. – С.109-111.

[7-М]. Надирова М.И. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре. [Матн] / Холиқова М.Б., Усмонов М.А., Надирова М.И. // Материалы республиканской научно-практической конференции, «Посвященные 2020-2040гг. «двадцатилетие обучения

и развития естественных, и математики в области науки и образования республики Таджикистан», Дангаре. – 2020. – с.26-30.

[8-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа. [Матн] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темурова Собира. Душанбе. 25-26 июня 2021. – с.233-237.

[9-М]. Надирова М.И. Общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости в сингулярном случае. [Матн] /М.Б. Холикова, М.А. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы республиканской научно-методической конференции на тему: «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)». Празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. Душанбе.-2021. –с.92-95.

[10-М]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z)$ . [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Додожона Исмоилова. НАНТ, Инст. математики им. А. Джураева, ТНУ –Душанбе. 29-30 апреля 2022. – с. 223-226.

[11-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы Международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы «Современные проблемы математики и её приложения». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков –г.Душанбе. 20-21 октября 2022г. – с.232-236.

[12-М]. Надирова М.И. Сингулярная краевая задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы.

[Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции на тему: «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». Посвященной «Развитию естественных, точных и математических наук» (2020-2040). – 29 ноября 2022. -г. Душанбе. – С. 187-193.

[13-М]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения первого порядка эллиптического типа в сингулярном случае [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник научных статей Международной научно-теоритической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) –30-31 мая 2023г. г.Душанбе. – Стр. 251-254.

[14-М]. Надирова М.И. Сингулярная граничная задача Римана для эллиптических уравнений вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи непрерывная функция. [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // НИЦ Вестник науки. «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции – 27 мая 2025г. – г.Уфа № К-554-16. – С. 18-29.

[15-М]. Надирова М.И. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно – аналитического вида. [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Международная научно-практическая конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)». - 2025г. –г. Душанбе, – С. 312-317.

## АДАБИЁТ

[1]. Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. /И.Н. Векуа // - Матем.сб. 1952.Т31(73), 217 – 314с.

[2]. Векуа И.Н. Новые методы решение эллиптических уравнений [Текст] /И.Н. Векуа // М.: - Гостехиздат. – 1948. – С.296

[3]. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа. /Л.Г. Михайлов // Уч. зап. Тадж. ун-та X, 1957, – С.32-79.

[4]. Михайлов Л.Г. Исследование обобщённой системы Коши-Римана, когда коэффициенты имеют особенности первого порядка [Текст] /Л.Г. Михайлов, Н. Усмонов // Доклады Российской академии наук. 2002г. Т.387, №3, – С.309-313.

[5]. Усмонов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения. / Н. Усмонов // Мат. заметки. Якутск. 2001. т.8, выпуск №2, – С.46-47.

[6]. Усмонов Н. Сайхуна Шавкатзода. Сингулярная краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа. / Н.Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «ДАН Республики Таджикистан», том 59, №9-10, 2016г, Душанбе, – С.373-379.

[7]. Усмонов Н. Сингулярная граничная задача линейного сопряжения для системы уравнений эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «Известия Академии наук Республики Таджикистан», №3 (164), 2016г. – С.32-43.

## АННОТАЦИЯ

диссертационной работе Надировой Мохрухсор Иноятуллоевны на тему «Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа», представленную на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100-Математика (6D060102-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное уравнение).

**Ключевые слова:** эллиптический уравнения, аналитическая функция, ноль, полюс, функция из класса Гёльдера, непрерывная функция, интерполяционный многочлен.

**Цель исследования.** Целью диссертационной работы являются решение сингулярной краевой задачи Римана для эллиптического уравнения в случае, когда коэффициент задачи является непрерывной функцией:

➤ когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов аналитического вида;

➤ когда коэффициент задачи Римана характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида;

➤ когда коэффициент задачи характеризуется особенностью модульного порядка.

**Объект исследования.** Объектом исследования являются изучение сингулярных краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial z} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Предмет исследования.** Предметом исследования являются доказательство теорем, определяющие число решений однородной задачи  $l$  и число условий разрешимости неоднородной задачи  $P$ .

**Методы исследования.** В диссертационной работе используются методы краевых задач теории аналитических функций, обобщённо - аналитических функций и элементы функционального анализа

**Научная новизна исследования.** Результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующих решениях краевых однородных и неоднородных задач Римана, т.е.:

○ Изучаются сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , когда коэффициент задачи Римана характеризуется нулями и полюсами целого порядка, нулей и полюсов сопряжённого вида, также, особенности модульного порядка.

○ Изучается сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , когда коэффициент задачи Римана обладает нули и полюсы аналитического вида, нулей и полюсов сопряжённо-аналитического характера, а также имеет особенность модульного порядка.

○ Изучается сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи Римана характеризуется нулей и полюсов целого порядка, нули и полюса сопряжённо-аналитического вида, также, особенность дробного порядка.

**Теоретическая и научно-практическая значимость работы.** Работа имеет теоретического характера. Методы развития в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании краевых задач теории гармонических функций, краевых задач теории аналитических функций и теории обобщённых аналитических функций.

## АННОТАЦИЯ

диссертатсияи Надирова Мохрухсор Иноятуллоевна дар мавзуи «Масъалаи канории сингулярии Риман бо коэффиценти бефосила барои системаи муодилаҳои типи эллиптикии тартиби якум», барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)-доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100-Математика (6D060102- Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ).

**Калимаҳои қалидӣ:** Муодилаҳои эллиптикӣ, функцияҳои аналитикӣ, нул, қутб, функцияи шарти Гёльдерро қаноаткунанда, функцияи бефосила, бисёраъзогии интерполяцисионӣ.

**Мақсади таҳқиқот.** Мақсади кори диссертатсионӣ аз таҳқиқоти масъалаи канории Риман бо коэффиценти бефосила барои муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикии тартиби якум иборат мебошад, ки коэффиценти масъалаи Риман дорои маҳсусиятҳои зерин мебошад:

- сифр ва қутбӣ характери аналитикро дорад;
- сифр ва қутбӣ аналитикии ҳамроҳшударо дорад;
- инчунин маҳсусияти модулиро дорад;

**Объекти таҳқиқот.** Объекти тадқиқот, ин омӯзиши ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффиценти бефосила барои муодилаҳои зерин мебошад:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial z} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Усулҳои таҳқиқот.** Дар диссертатсия методҳои назарияи функцияҳои комплексӣ ва элементҳои анализи функционалӣ истифода шудаанд.

**Предмети таҳқиқот.** Предмети тадқиқот аз исботи теоремаҳое, ки дар онҳо шумораи ҳалҳои масъалаи якчинсаи  $l$  ва шартҳои бо ичро шудани онҳо масъалаи гайриякчинсаи  $p$  ҳал доранд, омӯхта шудааст.

**Навғониҳои илмии таҳқиқот.** Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шудаанд:

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффиценти масъалаи канории Риман сифр ва қутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва қутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда, инчунин, маҳсусияти тартиби модулиро дорад;
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффиценти масъалаи канории Риман сифр ва қутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва қутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда, инчунин, маҳсусияти тартиби модулиро дорад;
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффиценти масъалаи канории Риман, сифр ва қутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва қутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда ва маҳсусияти тартиби касриро дорад.

**Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот.** Кори диссертатсионӣ ҷанбаи назариявӣ дорад. Усулҳои тадқиқот дар кори диссертатсионӣ ва натиҷаҳои бадастоварда шударо барои масъалаҳои канории функцияҳои аналитикӣ, масъалаҳои канории функцияҳои аналитикии умумикардашуда ва масъалаҳои канории гармоникӣ истифода бурдан мумкин аст.

## ANNOTATION

for the dissertation of Nadirova Mohrukhsor Inoyatulloevna on the topic of “Singular Riemann boundary value problems with continuous coefficients for a system of first-order elliptic equations” for the academic degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 - Mathematics 6D060102 - Differential equations, dynamical systems, and optimal control.

**Keywords:** elliptic equations, analytic function, zero, pole, Hölder continuous function, continuous function, interpolation polynomial.

**Research objective.** The aim of the dissertation is to solve singular Riemann boundary value problems for a system of first-order elliptic differential equations in the case where the coefficient is a continuous function but has a singularity of the following type at a finite point:

- when the coefficient has zeros and poles of integer order;
- when the coefficient has zeros and poles of conjugate-analytic type;
- a singularity of a modular nature.

**Research methods.** Methods of boundary value problems in the theory of analytic, generalized analytic functions, and elements of functional analysis are used in this dissertation.

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial z} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Subject of the study.** The subject of the research is the proofs of theorems that define the number of solutions to the homogeneous problem and the number of solvability conditions for the non-homogeneous problem.

**Research methods.** The dissertation uses methods from boundary value problems of the theory of analytic functions, generalised analytic functions, and elements of functional analysis.

**Scientific novelty of the research.** The results of the dissertation are new and consist in solving the following problems:

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has zeros and poles of integer order, zeros and poles of conjugate type, and a singularity of a modular nature.

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = A(z) \cdot W(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has zeros and poles of analytic structure, zeros and poles of conjugate-analytic type, and also a singularity of a modular nature.

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has a fractional-order singularity, zeros and poles of an analytic nature, and a singularity of a conjugate-analytic type.

**Theoretical and practical significance of the work.** The work is primarily theoretical. The methods developed in the dissertation and the obtained results can be applied in the study of boundary value problems in the theory of harmonic functions, boundary value problems in the theory of analytic functions, and the theory of generalized analytic functions.