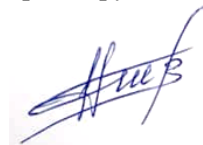


**РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН  
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УКД:51+517.11+004.4+63

На правах рукописи



**НАРЗУЛЛОЗОДА ПАРВИЗ ЛУТФУЛЛО**

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ  
МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ  
РАСТЕНИЙ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННО-ВОЗРАСТНОЙ  
СТРУКТУРЫ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) –  
доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060110 –  
Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ)

Душанбе – 2026

Научная работа выполнена на кафедре математического и компьютерного моделирования Таджикского национального университета.

**Научный  
руководитель:**

**Одинаев Раим Назарович** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования Таджикского национального университета.

**Официальные  
оппоненты:**

**Мухаммади Шоира Файзулло** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования, Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики.

**Хафизов Хасан Маджидович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими.

**Ведущая организация:**

**Институт математики имени А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана.**

Защита состоится «01» июля 2026 года в «14:00» ч. на заседании диссертационного совета 6D.KOA-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни – Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

E-mail: [alisher\\_gaforov@mail.ru](mailto:alisher_gaforov@mail.ru); номер мобильного телефона ученого секретаря +992900766603.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться на сайте [www.tnu.tj](http://www.tnu.tj) и в библиотеке Таджикского национального университета.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » « \_\_\_\_ » 2026 года.

**Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук**



**Гафоров А.Б.**

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** В Республике Таджикистан сельское хозяйство остаётся одной из ключевых отраслей экономики и поэтому разработка адаптированных математических моделей для оптимизации защиты растений приобретает здесь особую важность и практическую ценность. Климат в Республике Таджикистан континентальный, только малая часть пригодна для земледелия, так как значительная часть территории занята горами. Всё это создаёт сложные условия для возделывания сельскохозяйственных культур и выдвигает особые требования к системам их защиты. Быстрое развитие агротехнологий и всё более жёсткие экологические требования заставляют искать принципиально новые подходы к математическому моделированию и оптимизации защитных мероприятий. Особенно востребованы точные и гибкие системы, которые способны учитывать сразу множество факторов, таких как: биологические особенности вредителей, состояние растений, погодные условия и пространственную неоднородность полей.

В этом направлении методы математического моделирования позволяют глубже разобраться в сложных взаимосвязях между возрастной динамикой популяций вредных организмов, их пространственным распределением по полю и реальной эффективностью тех или иных защитных мероприятий.

Основу для решения таких задач составляют, классические работы по дифференциальным уравнениям и математической физике, на которые опираются практически все современные исследования в этой области. Исследования Тихонова А.Н. и Самарского А.А. в области уравнений математической физики создали теоретический базис для анализа динамических процессов в сложных системах. Важный вклад в моделирование биологических процессов внесли работы В. Вольтерра, разработавшего первые математические модели динамики популяций. Развитие этих идей применительно к биологическим системам нашло отражение в работах Полуэктова Р.А. и Моисеева Н.Н., разработавших принципы математического моделирования экологических процессов.

Особое значение для решения поставленных задач имеют работы Юнуса М.К., Нарзикулова М.Н. и Одинаева Р.Н. в которых детально разработаны математические методы анализа возрастной структуры популяций и предложены принципы оптимального управления системами защиты растений. Эти исследования позволили перейти от статических моделей к динамическим описаниям развития биологических систем, учитывающим этапы онтогенеза растений (развитие растительного организма) и их уязвимость к различным видам стрессов на разных фазах роста.

Современный этап развития математического моделирования в агробиологии характеризуется интеграцией временных и пространственных аспектов анализа. Ранние работы Мюррея Дж.Д. и Окубо А. по пространственному моделированию биологических процессов заложили основы для анализа неоднородности распределения растений и патогенов в агроценозах. Оптимизационные аспекты защиты растений получили

развитие в работах Тихомирова И.А. где были предложены математические методы поиска оптимальных стратегий защиты с учетом экономических и экологических ограничений. Однако существующие оптимизационные модели, как правило, не учитывают в полной мере ни возрастную динамику растений, ни пространственную неоднородность их распределения.

Актуальность настоящего исследования определяется необходимостью преодоления существующего разрыва между теоретическими разработками в области математического моделирования биологических систем и практическими задачами оптимизации защиты растений. Реализация результатов исследования позволит создать научную основу для цифровизации защиты растений в условиях Республики Таджикистан, что особенно важно при изменениях климата и роста антропогенной нагрузки на агроэкосистемы региона.

#### **Степень разработанности темы исследуемой проблемы.**

Математическое моделирование процессов защиты растений имеет глубокие исторические корни, восходящие к фундаментальным работам по динамике популяций. «Основы математического описания биологических взаимодействий были заложены в классических трудах Вольтерра В. и Лотки А.Т. разработавших первые модели межвидовой конкуренции. Эти работы создали теоретическую базу для последующего развития математических методов в агроэкологии» [2, 3, 8].

Значительный вклад в развитие математических моделей защиты растений внесли советские и российские исследователи. В работах Свиричева Ю.М. и Логофета О.Д. [36] были разработаны принципы анализа устойчивости биологических сообществ, а в исследованиях Юнуса М.К. [43-47] предложены специализированные модели борьбы с вредителями агроценозов. Особое внимание в этих работах уделялось вопросам стабильности экосистем и оптимизации защитных мероприятий.

«Современный этап развития математического моделирования в защите растений характеризуется возрастающим вниманием к учету временно-возрастных факторов. В работах Одинаева Р.Н. последовательно развивается подход, учитывающий возрастную структуру популяций вредных и полезных насекомых. Автором были предложены нелинейные математические модели защиты растений с возрастной структурой, методы решения интегро-дифференциальных уравнений защиты растений, а также модели с произвольными трофическими функциями и разработаны математические модели, учитывающие пространственное распределение популяций. Эти исследования демонстрируют возможность интеграции временных и пространственных факторов в единой модели» [15-30].

«Важным направлением стали работы по оптимизации защитных мероприятий. В совместных исследованиях Одинаева Р.Н. и Юнуса М.К. предложены оптимизационные модели интегрированного метода борьбы с вредителями» [15-30, 43-47].

Теоретической основой для решения оптимизационных задач стали методы, разработанные Л.С. Понтрягиным [34]. Применение этих подходов к

задачам защиты растений позволило создать строгий математический аппарат для поиска оптимальных стратегий.

Несмотря на значительные достижения в области математического моделирования защиты растений, остаются нерешенными проблемы недостаточной разработанности комплексных моделей, одновременно учитывающих временно-возрастную структуру и пространственное распределение, необходимости дальнейшего развития методов численного решения соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, а также адаптации существующих моделей к специфике горных агроценозов.

Настоящее диссертационное исследование направлено на преодоление этих ограничений путем разработки интегрированной математической и компьютерной модели, объединяющей анализ временно-возрастной динамики и пространственного распределения в едином методологическом подходе.

#### **Связь работы с научными программами, проектами и темам.**

Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета Таджикского национального университета на 2016-2020гг. по теме «Разработка математических моделей, алгоритмов и программ для решения прикладных задач» и на 2020-2025гг. по теме «Разработка математических и компьютерных моделей, алгоритмов, комплекс программ и методики преподавания информатики, математики и естественных наук».

#### **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Цель исследования** – заключается в построении математической и компьютерной модели позволяющей оптимизировать систему защиты растений на основе комплексного анализа временно-возрастной динамики роста растений и вредителей с учётом пространственного фактора.

**Задачи исследования:** Основные задачи исследования данной диссертационной работы заключаются в следующем:

- Разработка математической модели в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, отражающих изменения численности популяций насекомых в зависимости от возрастного состава, пространственного фактора и характера трофических связей;
- Проведение теоретического анализа модели, в ходе которого доказываемся существования единственности решений и обоснование выполнения принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления, возникающим в рамках данной модели;
- Оптимизация стратегий защиты растений с разработкой комбинированных методов и адаптацией модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенности агроценозов и специфики хлопководства;
- Создание и анализ численных методов решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей;

- Разработка программного комплекса на C++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов.

**Объект исследования.** Объектом исследования в диссертационной работе является динамическая система «растение-вредные насекомые-полезные насекомые» с учётом возрастной структуры популяций, пространственного распределения и трофических взаимодействий.

**Предмет исследования.** Предметом исследования выступают закономерности динамики численности популяций вредных и полезных насекомых, методы их математического моделирования с учётом возрастной структуры и пространственного распределения, а также алгоритмы оптимизации стратегий защиты хлопчатника.

**Научная новизна диссертационного исследования.** В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- Построены системы интегро-дифференциальных уравнений позволяющие описывать популяционную динамику насекомых с учетом возрастного состава, пространственного фактора и трофических связей;
- Выполнено теоретическое обоснование разработанных моделей включающее доказательство существования решения и проверку применимости принципа максимума Понтрягина для решаемых задач оптимального управления;
- Предложены интегрированные способы оптимизации защиты растений и адапционные модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенностей агроценозов и специфики хлопководства;
- Созданы и проанализированы численные методы решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей;
- Разработан программный комплекс на C++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов.

#### **Теоретическая и научно-практическая значимость исследования.**

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии математического аппарата для моделирования биологических систем с учетом возрастной структуры и пространственного распределения популяций, расширении теории оптимального управления для интегро-дифференциальных уравнений с произвольными трофическими функциями, а также в разработке новых численных методов анализа устойчивости агроэкологических систем.

Научно-практическая значимость состоит в создании адаптированного для условий Таджикистана программного комплекса, позволяющего оптимизировать стратегии защиты хлопчатника, разработке конкретных рекомендаций по комбинированному применению химических и биологических методов с учетом региональных особенностей, что обеспечит снижение экономических затрат и экологической нагрузки при сохранении урожайности. Полученные результаты могут быть использованы

сельхозпроизводителями, службами защиты растений и экологического мониторинга.

#### **Положение диссертации, выносимые на защиту:**

- Разработана математическая модель динамики популяций насекомых в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, учитывающая возрастную структуру, пространственную неоднородность и трофические взаимодействия;
- Установлены теоретические характеристики построенных моделей, то есть, получены доказательства существования и единственности решений, выполнен анализ равновесных состояний, а также обоснована корректность использования принципа максимума Понтрягина для постановки и решения задач оптимального управления. Представлены адаптированные для условий Республики Таджикистан стратегии защиты растений, которые построены на основе комбинированных оптимизационных методов с учётом региональной специфики агроценозов;
- Выполнена разработка и последующее исследование численных методов, применяемых для решения системы интегро-дифференциальных уравнений, включая модификации методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей. Создан программный комплекс на C++ для численного моделирования и визуализации пространственно-временной динамики популяций, включающий верификацию моделей на реальных данных.

**Степень достоверности результатов.** Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

**Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования).** Диссертационная работа выполнена в соответствии со следующими разделами паспорта специальности 6D060110 – Математическое и компьютерное моделирование обосновывает исследование математических и компьютерных моделирований, их численных методов, комплексов программ и прикладных проблем (пункты 2, 5, 7):

- ❖ **пункт 2.** Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;
- ❖ **пункт 5.** Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента;
- ❖ **пункт 7.** Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов, систем, процессов и явлений на основе данных натурного эксперимента.

**Личный вклад соискателя учёной степени.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты, опубликованные в работах с соавторами, получены лично автором. Соискателем самостоятельно проведён анализ научной литературы

по теме исследования, обоснована научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Особо следует отметить, что все компьютерные программы, использованные в рамках диссертационного исследования, включая алгоритмы численного моделирования, обработки данных и визуализации результатов, разработаны лично соискателем. В частности, в работе [1-А, 3-А, 7-А, 8-А] автором самостоятельно созданы программные средства, позволившие реализовать численные методы для решения задач оптимизации защиты растений с учётом возрастной структуры популяции насекомых. Остальные результаты диссертационной работы, полученные в ходе выполнения исследования и опубликованы в работах с соавторами, выполнены совместно с научным руководителем.

**Апробация и реализация результатов диссертации.** Материалы диссертации докладывались и обсуждались на международных и республиканских конференциях: Республиканская научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, 110-летию народного поэта Таджикистана, Героя Таджикистана Мирзо Турсунзода, 110-летию народного писателя Таджикистана Сотима Улугзода и «двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)» Душанбе 2021 год; Международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г. Душанбе 2023 год; Международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Нусрата г. Душанбе 2023 год; XII-международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе, 18 май 2024). Международной научно-практической конференции XIV ломоновские чтения «Роль филиала Московского государственного Университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». –Душанбе 2024.

**Публикации по теме диссертации.** Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 13 научных работах, из них 7 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и в трудах международных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка цитированной литературы из 173 наименования, занимает 145 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, следствий и формул. Они имеют

тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, следствий или формулы в данном параграфе.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Материал и методы исследования.** В диссертационной работе используются методы математического моделирования с учётом возрастной структуры и пространственного распределения, а также алгоритмы оптимизации стратегий защиты растений.

**Результаты исследования.** Приведём краткое изложение основных результатов диссертационной работы.

Во **введении** обосновывается своевременность и значимость темы диссертационного исследования, так же представлено содержание работы, приводится краткий обзор уже существующих научных источников и результатов, касающихся темы диссертационной работы.

**Первая глава** содержит аналитический обзор литературы по математическому и компьютерному моделированию оптимизации защиты растений учитывающий временно-возрастную динамику и пространственное распределение. В первом параграфе **первой главы** приводятся краткие исторические сведения о развитии математического и компьютерного моделирования и даётся обзор научной литературы непосредственно касающихся темы диссертационного исследования. Второй параграф **первой главы** содержит анализ публикаций, посвященных математическому моделированию процесса защиты растений. Третий параграф **первой главы** включает обзор научных работ в области математического моделирования оптимизационных задач защиты растений.

**Вторая глава** диссертационного исследования посвящена разработке математических моделей и методов оптимизации процессов защиты растений с привлечением трофических функций, временно-возрастной динамики и пространственных характеристик.

В первом параграфе **второй главы** проводится исследование математической модели защиты растений в нестационарном и стационарном режимах с произвольно задаваемыми трофическими функциями.

Динамика межвидовых взаимодействий в рассматриваемой биологической системе формализуется комбинированным уравнением, объединяющим вольтеровский подход с дополнительным функциональным откликом  $V(\cdot)$  в следующем виде: [15, 23-25]:

$$\begin{cases} Q - \alpha_0 V_0(N_0)N_1 = 0, \\ k_0 \alpha_0 V_0(N_0) - \alpha_1 \tilde{N}_2 - m_1 = 0, \quad \tilde{N}_i = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a) da \\ \frac{dN_2}{da} = N_2(k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \tilde{N}_3 - m_2), \quad N_2(0) = \int_0^{\infty} B_2(a) N_2(a) da, \\ \frac{dN_3}{da} = N_3(k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3), \quad N_3(0) = \int_0^{\infty} B_3(a) N_3(a) da. \end{cases} \quad (1)$$

Под допустимый диапазон значений биомассы сельскохозяйственной культуры  $N_1^p, N_1^r \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$  будем понимать заданный интервал допустимого уровня средней биомассы, отвечающий условию типа:

$$N_1^r \geq N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}] \quad (2)$$

Тогда, в данном случае задача защиты растений формулируется как определение критических значений  $N_2^p$  и  $N_3^p$  из системы уравнений (1) [23-25], при соблюдении следующих условий:

$$N_2^r \leq N_2^p, \quad N_3^r \geq N_3^p, \quad (3)$$

где

$N_1^p$  – целевой показатель урожайности биомассы хлопчатника,

$N_2^p$  – пороговое значение вредоносности вредителей,

$N_3^p$  – показатель эффективности энтомофагов (полезных насекомых).

Теоретическое обоснование существования стационарного решения системы защиты растений включает следующее доказанное утверждение.

**Теорема 2.1.1.** Для того, чтобы выполнялось условие

$$N_1^r \geq N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}], \quad N_1^{\min} = \frac{m_2}{k_1 \alpha_1}, \quad N_1^{\max} = \frac{k_0 Q}{m_1}$$

необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств

$$\begin{cases} V_0(N_0) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \\ \tilde{N}_2 \leq N_2^p, \quad N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \\ \tilde{N}_3 \geq N_3^p, \quad N_3^p = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2}. \end{cases} \quad (4)$$

«Математическое доказательство существования решений в нестационарной постановке задачи защиты растений основывается на следующем утверждении» [16, 26, 48].

**Теорема 2.1.2.** Для выполнения условия

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_1(t_k) \geq N_1^p(t_k \rightarrow \infty), \quad N_1^p \in \left[ \frac{m_2}{k_1 \alpha_1}, \frac{k_0 Q}{m_1} \right]$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \quad 0 \leq t \leq t_k \\ \lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_2(t_k) \leq N_2^p, \quad \lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_3(t_k) \geq N_3^p \\ \tilde{N}_i(t_k) = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} N_i(t) dt, \quad i = 2, 3 \\ N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^p = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Второй параграф диссертационного исследования посвящен математическому моделированию процесса защиты растений с привлечением временно-возрастного состава популяции насекомых и их пространственных характеристик с произвольным заданием трофических взаимодействий.

Ниже исследуется математическая модель агроценоза, построенная на трёхуровневом трофическом виде «растение – вредные насекомые – полезные насекомые». В модели отражены возрастная структура популяций и их пространственное размещение и произвольный вид трофических взаимодействий.

Динамика моделируемой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений [15, 19, 27, 35, 36, 47].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \frac{V_1(N_1)}{N_1} \tilde{N}_2 - m_1) \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} + \frac{\partial N_2}{\partial x} = N_2 (k_1 V_1(N_1) - \frac{V_2(N_2)}{N_2} \tilde{N}_3 - m_2) \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + \frac{\partial N_3}{\partial a} + \frac{\partial N_3}{\partial x} = N_3 (k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3), \end{array} \right. \quad (6)$$

с начальными и краевыми условиями

$$N_i(x, a, 0) = N_i^0(x, a), \quad x \in \bar{G}, \quad 0 \leq a < \infty, \quad i = 2, 3$$

$$N_2(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B_2(\xi, t, N_1) N_2(x, \xi, t) dt,$$

$$N_3(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B_3(\xi, t, \tilde{N}_2) N_3(x, \xi, t) dt, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

$$N_i|_s = 0, \quad i = 2, 3.$$

«Здесь  $Q$  – скорость поступления внешнего ресурса,  $N_0 = N_0(t)$  – масса внешнего ресурса (минеральные удобрения, вода для полива и солнечная энергия) в момент времени  $t$ ,  $N_1 = N_1(t)$  – биомасса растения в момент времени  $t$ ,  $N_i = N_i(x, a, t)$  – биомасса или численность вредных насекомых

( $i = 2$ ) и полезных насекомых ( $i = 3$ ) в момент времени  $t$ , возраста  $a$  и в точке  $x$ ,  $x$ -пространственная координата,  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau - const < \infty$ ,  $a \in [0, \infty)$ .  $B_2(\cdot), B_3(\cdot)$  коэффициенты рождаемости вредных и полезных насекомых, суммарная численность, соответственно вредных и полезных насекомых, сумма берётся по тем возрастам, которые наносят вред сельскохозяйственным культурам и уничтожают насекомых-вредителей» [15-30].

$$\tilde{N}_i = \tilde{N}_i(t) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_G \tilde{N}_i(x, a, t) da dx, \quad \alpha_i, \beta_i = const > 0, \quad i = 2, 3. \quad (7)$$

$m_i$  – средние коэффициенты естественной смертности,  $i = 1, 2, 3$ ;  $k_i$  – доля биомассы потребления,  $i = 0, 1, 2$ ;  $\alpha_i$  – коэффициент трофической функции,  $i = 0, 1, 2$ ;  $\varepsilon$  – коэффициент самоограничения роста полезных насекомых,  $V_i(\cdot) - i = 1, 2$  произвольная трофическая функция со свойствами:

$$\frac{dV(N)}{dN} > 0, \quad \frac{d^2V(N)}{dN^2} \leq 0.$$

Имеет место, следующая теорема.

**Теорема 2.2.1.** Пусть выполняются условия

$$V_i(\cdot) \geq 0, \quad \frac{dV_i}{dN} > 0, \quad \frac{d^2V_i}{dN^2} \leq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$0 < \min_t \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \bar{\alpha}_1 < \infty, \quad 0 < \max_a \frac{V_2(N_2(a, t))}{N_2(a, t)} = \bar{\alpha}_2 < \infty,$$

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 = const,$$

То для того, чтобы имело место следующее условие

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} N_1(t) dt \geq N_1^P, \quad N_1^P \in [N_1^{min}, N_1^{max}]$$

необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^P}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{N}_2(t) dt \leq N_2^P, \\ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{N}_3(t) dt \geq N_3^P. \end{cases} \quad (8)$$

здесь  $N_2^P, N_3^P$  – определяется по формулам:

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\bar{\alpha}_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{1}{\bar{\alpha}_1 \tau} \ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$N_3^P = \frac{k_2 \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} N_1^P - \frac{m_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\bar{\alpha}_2 \tau} \max_x \ln \frac{N_2(x, a, \tau)}{N_2(a, 0)}.$$

В третьем параграфе **второй главы** представлена оптимизационная модель интегрированного метода борьбы от вредных насекомых сельскохозяйственных культур для биологической системы типа «хищник–журтка» с произвольно заданными трофическими функциями. Обоснована актуальность математического моделирования для сохранения урожая и повышения качества планово-экономических расчетов в агроценозах. Рассмотрены фундаментальные модели Лотки–Вольтерра и их обобщения, а также вклад отечественных и зарубежных ученых в теорию популяционной динамики. Применительно к условиям Таджикистана показана необходимость внедрения интегрированной защиты хлопчатника, сочетающей биологические и химические методы. Сформулированы две взаимосвязанные задачи: подготовительная (определение порогов вредоносности и эффективности энтомофагов) и оптимизационная (выбор метода регуляции численности вредителя). На основании теории оптимального управления были получены ряд аналитических соотношений, которые позволяют выбирать биологический метод при превышении численности вредителя пороговых значений, а химический метод — при избыточной численности популяции хищников и паразитов.

Четвертый параграф **второй главы** посвящён оптимизации интегрированного подхода к защите растений с учётом временных и возрастных структур. В рамках данного параграфа исследуются вопросы оптимального управления модельным агроценозом. Для рассматриваемой биосистемы сформулированы и обоснованы ключевые условия, которые предоставляют возможность для решения оптимизационных задач по защите растений от вредных насекомых. «Кроме того, приведено доказательство принципа максимума Понтрягина» [34] применительно к задачам оптимального управления математических моделей в биологических системах. При разработке прогнозных моделей и планировании комплекса защитных мероприятий сельскохозяйственных культур от вредных насекомых существенную роль играет анализ взаимосвязей биологических параметров популяций в изучаемой экосистеме. Необходимо определить наилучшее соотношение биологических и химических мер защиты, а также найти способы перевода агроэкосистемы из существующего состояния в желаемое, более полезное для сельского хозяйства.

Биологический метод защиты растений основан на регуляции численности вредных организмов путём интродукции и акклиматизации их естественных энтомофагов, что позволяет поддерживать плотность популяции вредителей на экономически безопасном уровне. Химический метод, обеспечивая высокую эффективность подавления целевых видов, одновременно оказывает негативное воздействие на полезных насекомых, что требует тщательного обоснования применения пестицидов. «Вопросы оптимизации управления точечными моделями агроценозов и экосистем рассмотрены в исследованиях» [19, 22, 27, 29], тогда как учет «возрастной структуры подобных систем представлен в работе» [26]. Указанные исследования содержат доказательства модифицированного принципа

максимума Понтрягина, позволяющего вывести необходимые условия оптимальности.

«Исследование посвящено задачам оптимального управления для биологических систем с трехуровневой трофической структурой «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» при наличии внешнего ресурсного обеспечения. Формулировка проблемы защиты растений от вредителей в данном случае представляет собой задачу поиска оптимальных управляющих воздействий в рамках модификаций классических моделей «хищник-жертва» или «паразит-хозяин». Математическая постановка задачи включает определение трех ключевых параметров управления: оптимальной концентрации токсичного вещества  $D$ , интенсивности интродукции полезных видов насекомых  $P$  и скорости поступления внешних ресурсов  $Q$ . Критериями оптимальности могут служить либо минимизация численности вредных насекомых (с учетом экономических затрат на защитные мероприятия и потенциального ущерба), либо максимизация урожайности сельскохозяйственных культур» [15-30]. «Формальная математическая формулировка указанной задачи приведена в работах» [27].

Необходимо найти минимум функционала, который может интерпретироваться как суммарный экономический ущерб либо совокупные затраты на проведения биологических и химических мероприятий по защите растений:

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + \varphi(N_1, N_2, N_3, u)|_{t_k} \quad (9)$$

при условиях:

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = Q - F_0(N_0, N_1), & N_i|_{t=0} = N_i^0, & i = 0, 1, 2, 3. \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 F_1(N_0, N_1, \tilde{N}_2), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 F_2(N_1, N_2, \tilde{N}_3) - \mu(D) N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3 F_3(N_2, N_3) - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь:

- $F_i = F_i(\cdot)$  - удельная скорость прироста биомассы (или численности) для  $i$ -го трофического уровня, где  $i = \overline{0, 3}$ ;
- Символом  $u = (Q, P, D)$  обозначается вектор управляющих воздействий, причём  $u \in U$ ;
- $\varphi = \varphi(\cdot)$  - величина ущерба, фиксируемая в момент времени  $t = t_k$ ,  $\mu = \mu(D)$  - функция описывающая зависимость «доза – эффект» при внесении дозы химического препарата  $D$ ,  $\tilde{C}_{[0, t_k]}^1$  – пространства кусочно-непрерывных функций;
- $\alpha$  - означает долю гибели хищников и паразитов после химической обработки;

- $f^0 = f^0(\cdot)$  – функция, характеризующая ущерб наносимый вредителями, а также расходы на реализацию биологического и химического методов борьбы включая затраты на удобрения и орошение.

В дальнейшем принимается, что функции  $\varphi = \varphi(\cdot)$ ,  $f^0 = f^0(\cdot)$ ,  $F_i = F_i(\cdot)$  – обладают непрерывными частными производными первого порядка по совокупности своих аргументов причём выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \leq 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} = \begin{cases} \leq 0, & i < j, i = \overline{0,3} \\ \geq 0, & i > j, j = \overline{0,3} \end{cases} \quad (11)$$

Кроме того, справедливы неравенства  $F_i(\cdot) \geq 0$ ,  $\varphi(\cdot) \geq 0$ ,  $f^0(\cdot) \geq 0$ . Для функции  $\mu = \mu(D)$  отражающих зависимость «дозы-эффект» предполагается выполнения следующих условий:

$$\mu = \mu(D) \geq 0, \quad \frac{d\mu}{dD} \geq 0, \quad \frac{d^2\mu}{dD^2} \leq 0, \quad \text{при } D \geq 0.$$

Применительно к изложенной выше методике рассмотрим случай, когда межвидовое взаимодействие популяций описывается классическим законом Вито Вольтерра [8], то есть

$$\begin{cases} F_0(\cdot) = -\alpha_0 N_0 N_1, \\ F_1(\cdot) = k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1, \\ F_2(\cdot) = k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2, \\ F_3(\cdot) = k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3. \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha_i, m_i, k_i, \varepsilon$  – биологические параметры популяций, входящие в агроценоз.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.4.1.** Пусть справедливы условия (11), а функции  $f^0(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$  задаются выражениями

$$f^0(\cdot) = CN_2 + C_p PN_3 + C_D D + Q, \quad \varphi(\cdot) = CN_2 + C_p PN_3 + C_D D + Q.$$

Тогда для оптимального управления, доставляющего минимум функционалу в задаче (10)-(12) выполняются следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^* = \begin{cases} Q_{\max}, \psi_0 > 1 \\ 0, \psi_0 < 1 \end{cases}, \quad P^* = \begin{cases} P_{\max}, \psi_3 > C_P \\ 0, \psi_3 < C_P \end{cases}, \\ D^* = \begin{cases} D_{\max}, C_D + \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 < 0 \\ 0, C_D + \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 > 0, \mu(D) \equiv D \\ -\mu_0 + \sqrt{-\frac{\mu_0 \mu_1}{C_D} (\psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3)}, \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 < 0, \mu(D) = \frac{\mu_1 D}{\mu_0 + D}, \end{cases} \end{array} \right. \quad (13)$$

- через  $\psi_i = \psi_i(t)$ ,  $i = \overline{0,3}$  обозначены решения сопряженной системы соответствующей задаче (9);
- $\mu_0, \mu_1, Q_{\max}, P_{\max}, C, C_P, C_D$  – фиксированные положительные числовые параметры, (величины  $C, C_P, C_D$  означают соответственно цену единицы биомассы вредителя и издержки затраты на химические и биологические методы борьбы).

Кроме того, для стационарного режима системы (10) имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.4.2.** Пусть вектор  $N^* = (N_0^*, N_1^*, N_2^*, N_3^*)$  есть стационарное решение системы (10), тогда

$$N(t) \approx N^* + (N^0 - N^*) \sum_{i=0}^3 \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{i \neq j} (A_0 - \lambda_i I), \quad (14)$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы  $A_0 = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{0,3}$ ;  $j = \overline{0,3}$ ,  $N^0 = N(0)$ .

В последующей части данного параграфа исследуется вопрос оптимизации биологической системы с привлечением возрастной структуры популяции насекомых. Перейдём к постановке задачи оптимизации защиты растений учитывающий возрастную структуры следующим образом.

Необходимо найти минимум функционала, который может интерпретироваться как суммарный экономический ущерб либо совокупные затраты на проведения биологических и химических мероприятий по защите растений:

$$I(u) = \int_0^{t_k} \int_0^{\infty} f^0(a, N, u) da dt + \int_0^{\infty} f^1(a, N_2, u) \Big|_{t_k} da \quad (15)$$

при условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t < t_k, \\ N(a, 0) = N_0(a), \quad 0 \leq a < \infty, \\ N(0, t) = \int_0^{\infty} B(\xi) N(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq t \leq t_k, \end{array} \right. \quad (16)$$

- где  $B_i = B(N, a, t) \geq 0$  – функция рождаемости вредных и полезных насекомых,  $i=2,3$ ,  $a$ –возраст,  $t$ –время;
- $N_i = N_i(a, t)$  – численность вредных ( $i = 2$ ) и полезных ( $i = 3$ ) насекомых возраста  $a$ , в момент времени  $t$ ;
- $\partial_{ia} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}$ ,  $u = (u_0, u_1)$ ,  $u_0 = (Q, P, D)$ ,  $u \in U$ ,  $U$  – допустимое множество, то есть

$$U = \left\{ u : \begin{array}{l} 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad u_{\max} = \{Q_{\max}, P_{\max}, D_{\max}, \bar{u}\} \\ u = u(t). \text{ к.н.} \end{array} \right\}$$

И при этом,

$$F = (Q + F_0, N_1 F_1, N_2 F_2 - \mu(D) N_2, N_3 F_3 - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3),$$

$$N = (N_0, N_1, N_2, N_3), \quad N_0 = N_0(t), \quad N_1 = N_1(t), \quad N_i = N_i(a, t), \quad i = 2, 3,$$

$$B = (b_0(a), b_1(a), B_1(N), B_2(N)), \quad \text{причем} \quad \int_0^{\infty} b_i(a) da = 0, \quad i = 0, 1.$$

**Теорема 2.4.3.** *Предположим, что функции  $f^0(\cdot), f^1(\cdot), F(\cdot), N_0(\cdot), B(\cdot)$  являются достаточно гладкими и что для каждого управления  $u \in U$  системы (13) имеет единственное решение. Тогда для оптимальности управление  $u^* = u^*(t) \in U$  в задаче (13)-(14) необходимо выполнение неравенства:*

$$\int_0^{t_k} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial f^0}{\partial u_0} + \left( \frac{\partial F}{\partial u_0} \right)^* \right] \psi (u_0 - u_0^*) + \left[ \frac{\partial f^0}{\partial u_1} + \left( \frac{\partial F}{\partial u_1} \right)^* \right] \psi \Big|_{a=0} (u_1 - u_1^*) \right\} da dt \geq 0 \quad (17)$$

при всех допустимых  $u \in U$ .

Через  $\psi = \psi(a, t)$  обозначается решение следующей сопряженной системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_{ia})^* \psi = -\frac{\partial H}{\partial N}, \\ \psi(a, t_k) = -\frac{\partial f^1}{\partial N} \Big|_{t_k}, \quad \psi(\infty, t) = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

в которой  $H(\cdot) = (F, \phi) + (B, \psi \Big|_{a=0}) - f^0(\cdot)$ .

В пятом параграфе **второй главы** исследуется оптимизационная задача защиты растений с привлечением временно-возрастной структуры популяции насекомых и их пространственного распределения. Современные подходы к защите растений требуют комплексного учета биологических характеристик вредителей, таких как возрастные стадии развития, а также пространственных факторов, влияющих на распространение популяций. В этом параграфе разработана математическая модель, которая интегрирует эти аспекты для повышения эффективности применения методов защиты, таких как химическая обработка, биологическая борьба и агротехнические мероприятия. Предложенная модель позволяет достоверно оценивать динамику численности популяции насекомых и прогнозировать характер их пространственного размещения и на этой основе оптимизировать распределение защитных мероприятий по территории сельскохозяйственных полей или отдельных участков.

Перейдём к рассмотрению оптимизационной задачи процесса защиты растений с учётом временно-возрастной структуры популяций и пространственного распределения в биосистеме, функционирующей в виде «растение – вредные насекомые – полезные насекомые».

«Сформулируем оптимизационную задачу защиты растений следующим образом» [27, 28, 44]:

«Найти минимальной значения функционала

$$I(U) = \int_0^{t_1} \int_0^{\infty} \int_G f^0(x, a, t, N, u) dx da dt + \int_0^{\infty} \int_G f^1(x, a, t, N, u) dx da|_{t_k} \quad (19)$$

при условии

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), & x \in G, 0 < a < \infty, 0 \leq t \leq t_k \\ N(x, a, 0) = N_0(x, a), & x \in \bar{G}, 0 < a < \infty \\ N(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B(N, \xi, t, u_1) d\xi \\ N|_s = 0 \\ N = (N_1, \dots, N_m), & x = (x_1, x_2) \in \bar{G}, \bar{G} = G + S \\ \bar{G} = \{x: 0 \leq x_i \leq L_i\}, & u = (u_0, u_1), u_i = u_i(x, a, t) \end{cases} \quad (20)$$

где  $\left( \partial_{tax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^2 V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \right)$ ,  $u_0, u_1$  - кусочно - непрерывного управления, причем  $0 \leq u_i \leq u_i^{\max}$ ,  $i = 0, 1$ ,  $V_i, D_i$  - постоянные диагональные матрицы порядка  $m$ ,  $i = 1, 2$ . » [27, 28, 44]

«Пусть управление  $u$  соответствует решение  $\mathcal{N}$ , а управление  $u + \Delta u$  решение  $N + \Delta N$ , тогда легко видеть, что  $\Delta \mathcal{N}$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \partial_{tax} N &= \frac{\partial F}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial F}{\partial u_0} \Delta u_0 + R_0, \\ \Delta N|_{t=0} &= 0, \quad \Delta N|_{\xi=0} = 0, \\ \Delta N(x, 0, t) &= \int_0^\xi \left( \frac{\partial B}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial B}{\partial u_1} \Delta u_1 \right) d\xi + R_1 \end{aligned} \quad (21)$$

где  $R_i = O(|\Delta u|)$ ,  $i = 0, 1$ .

$$\Delta I = \int_0^{t_k} \int_0^\infty \int_G \left( \frac{\partial f^0}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial f^0}{\partial u} \Delta u \right) dx dadt + \int_0^\infty \int_G \left( \frac{\partial f^1}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial f^1}{\partial u} \Delta u \right) \Big|_{t_k} dx da + R_3 \quad (22)$$

где  $R_3 = O(|\Delta u|)$ .

Уравнение (22) приращение функционала (20)» [27, 28, 44].

В **третьей главе** исследуются численные методы решения задач оптимального управления для биологических систем и комплекс компьютерных программ. В первом параграфе разработан алгоритм решения задачи оптимального управления для системы трёх трофических уровней. Во втором параграфе **третьей главы** диссертационного исследования приведены численные методы исследования оптимизации защиты растений с привлечением возрастного состава популяции насекомых. Предложенные методы позволяют получить эффективные решения соответствующих задач управления.

Первый параграф **третьей главы** посвящён разработке и анализу численных методов оптимизации управления в трёхуровневой биологической системе «растение – вредные насекомые – полезные насекомые». Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику взаимодействия трофических уровней, и предлагаются подходы к её численному решению. В работе исследуются классические методы, такие как метод Эйлера [42] и метод Адамса, а также их применение для решения задач оптимального управления. Метод Эйлера, несмотря на свою простоту, используется для начального анализа системы, тогда как метод Адамса, обладающий более высокой точностью, применяется для более детального моделирования динамики популяций.

Требуется минимизировать функционал, который задаётся в виде [21, 27-29]:

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + \varphi(N_1, N_2, N_3, u)|_{t_k} \quad (23)$$

при условиях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1), \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} = N_2 (k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2) - \mu(D) N_2, \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + \frac{\partial N_3}{\partial a} = N_3 (k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3) - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3, \\ N_i|_{t < 0} = N_i^0, \quad i = \overline{0,3} \\ N_2|_{a=0} = \int_0^\infty B_2(\xi, t, N_1) N_2(\xi, t) d\xi, \quad 0 < t \leq t_k, \\ N_3|_{a=0} = \int_0^\infty B_3(\xi, t, \tilde{N}_2) N_3(\xi, t) d\xi, \quad 0 < a \leq \infty \\ \tilde{N}_i = \tilde{N}_i(t) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a, t) da, \quad \alpha_i, \beta_i - const > 0, \quad i = 2,3. \end{array} \right. \quad (24)$$

Для численного решения системы (24) используются два метода, а именно: численный метод Эйлера и численный метод Адамса. Эти методы предоставляют возможность получить приближённое решение системы дифференциальных уравнений, которые описывают модель динамики взаимодействия биологических видов. При сравнении численных методов установлено, что численный метод Адамса обеспечивает максимальную точность при интегрировании систем со сложной динамикой.

Однако следует учитывать, что простота алгоритма достигается за счёт существенных ограничений по шагу интегрирования - для обеспечения приемлемой точности требуется использование достаточно малых шагов, что увеличивает общий объём вычислений.

Ниже представлены результаты численного решения исследуемой задачи, полученные с применением метода Эйлера при различных значениях шага интегрирования, а также скриншоты программы «Метод Эйлера» и программы «Метод Адамса». Анализ этих данных позволяет оценить, как качественное поведение решения, так и характер накопления вычислительной погрешности.

Приближённое решение задачи оптимального управления в биосистеме включающих три трофических уровня «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с использованием численного метода Эйлера.

Для каждого шага  $n$  от  $0$  до  $M-1$  имеем:

$$\begin{aligned} N_{0,n+1} &= N_{0,n} + h(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}), \\ N_{1,n+1} &= N_{1,n} + h(N_{1,n} (k_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1)), \\ N_{2,n+1} &= N_{2,n} + h(N_{2,n} (k_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D) N_{2,n}), \end{aligned}$$

$$N_{3,n+1} = N_{3,n} + h(N_{3,n}(k_3\alpha_3N_{2,n} - \varepsilon N_{3,n} - m_3) - \alpha\mu(D)N_{3,n} + PN_{3,n}).$$

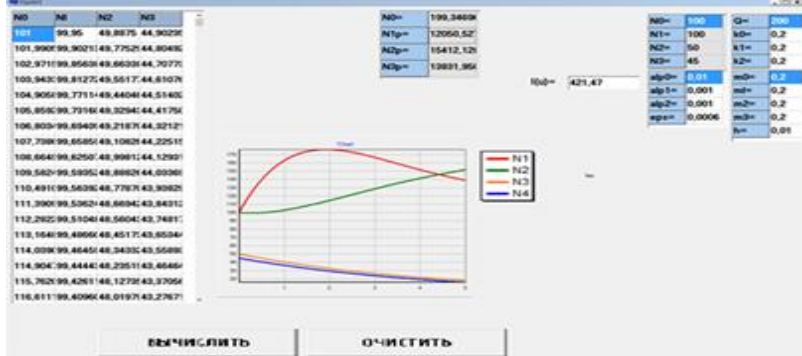


Рисунок 1. – Скриншот программы численного решения «Метод Эйлера»

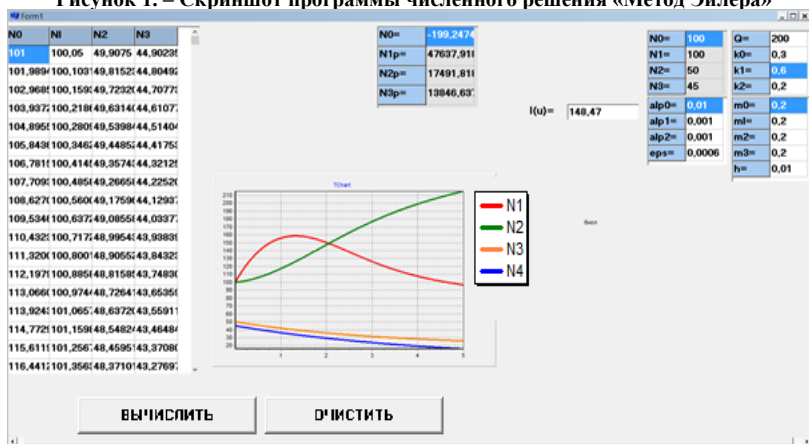


Рисунок 2. – Скриншот программы «Метод Эйлера»

Особенно наглядно преимущества метода Адамса проявляются при интегрировании на протяжённых интервалах, где накопление погрешности в методе Эйлера становится критическим.

Для каждого шага  $n$  от  $0$  до  $M-1$  имеем:

$$N_{0,n+1} = N_{0,n} + \frac{h}{2}(3(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}) - (Q - \alpha_0 N_{0,n-1} N_{1,n-1})),$$

$$N_{1,n+1} = N_{1,n} + \frac{h}{2}(3(N_{1,n}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1) - (N_{1,n-1}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n-1} - \alpha_1 N_{2,n-1} - m_1))),$$

$$N_{2,n+1} = N_{2,n} + \frac{h}{2}(3(N_{2,n}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D)N_{2,n}) - ((N_{2,n-1}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n-1} - \alpha_2 N_{3,n-1} - m_2) - \mu(D)N_{2,n-1}))),$$

$$N_{3,n+1} = N_{3,n} + \frac{h}{2}(3(N_{3,n}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n} - \epsilon N_{3,n} - m_3) - \alpha \mu(D)N_{3,n} + PN_{3,n}) - (N_{3,n-1}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n-1} - \epsilon N_{3,n-1} - m_3) - \alpha \mu(D)N_{3,n-1} + PN_{3,n-1})).$$



Рисунок 3. – Скриншот программы «Метод Адамса»

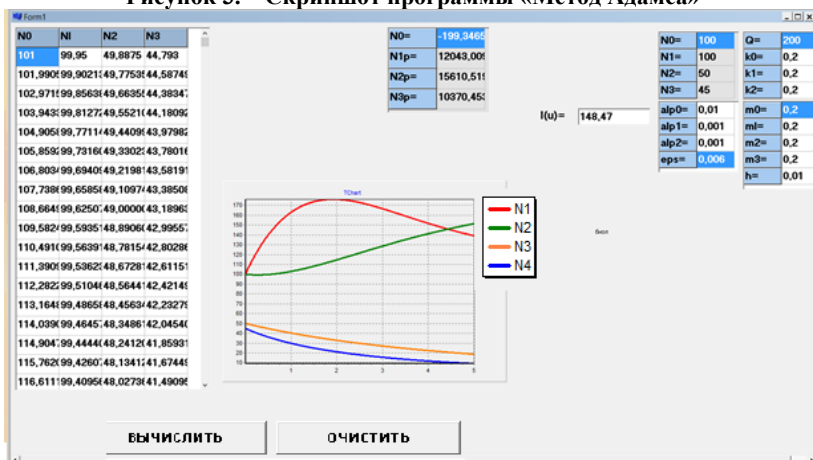


Рисунок 4. – Скриншот программы «Метод Адамса»

Полученные решения демонстрируют возможность эффективного управления популяциями с учётом экологических ограничений. Результаты

могут быть полезны при разработке стратегий биоконтроля в агроэкосистемах, позволяя минимизировать использование химических средств защиты растений.

Второй параграф **третьей главы** посвящен численные методы в исследовании оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых. В этом параграфе предложена математическая модель, описывающая динамику численности популяции на разных стадиях развития, а также влияние агротехнических и химических методов защиты. Для численного решения системы дифференциальных уравнений, лежащей в основе модели, применяются методы Эйлера и методы Адамса второго порядка, обеспечивающие баланс между точностью и вычислительной эффективностью.

Проведен анализ устойчивости численных схем, оценена их применимость в условиях различных сценариев обработки растений. На основе вычислительных экспериментов определены оптимальные стратегии применения средств защиты, минимизирующие экономический ущерб при заданных экологических ограничениях. Показано, что учет возрастной структуры популяции позволяет существенно повысить эффективность управления вредителями по сравнению с традиционными подходами.

Пусть задан функционал, характеризующий совокупный ущерб от вредителей и затраты на защитные мероприятия. Требуется определить такое допустимое управление, при котором данный функционал достигает минимального значения при заданных ограничениях на динамику популяций.

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + f^1(N_1, N_2, N_3, u) t_k \quad (25)$$

с учетом следующих соотношений:

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), & 0 < a < \infty, & 0 < t < t_k \\ N(a, 0) = N_0(a), & 0 \leq a < \infty \\ N(0, t) = \int_0^\infty B(N(\xi, t), \xi, t, u_1) d\xi, & 0 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (26)$$

здесь  $f^0(\cdot)$ ,  $f^1(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $N_0(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  – заданные функции своих аргументов, обладающие достаточной гладкостью. Управление представлено в виде  $u = (u_0, u_1)$ , где  $u_0 = (Q, P, D)$ , и предполагается, что  $u \in U$ . Здесь  $U$  множество допустимых управлений, то есть множество ограниченных кусочно-непрерывных функций, подчинённых ограничениям:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} u : 0 \leq u(t) \leq u_{\max} \\ u_{\max} = \{Q_{\max}, P_{\max}, D_{\max}\} \\ u = u(t) \end{array} \right\}$$

### Численное решение задачи минимизации функционала $I(u)$

Требуется минимизировать функционал:

$$I(u) = \int_0^{t_k} (CN_2(t) - C_p PN_3(t) + C_D \mathcal{D}(t) + Q) dt + (CN_2(t_k) - C_p PN_3(t_k) + C_D \mathcal{D}(t_k) + Q)$$

### Принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона – Понтрягина представляется в следующем

виде:

$$H = (CN_2 - C_p PN_3 + C_D \mathcal{D} + Q) + \psi_0(Q + \alpha_0 N_0 N_1) + \psi_1 N_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1) + \psi_2 (N_2 (k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2) - \mu(\mathcal{D}) N_2) + \psi_3 (N_3 (k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3) - \alpha \mu(\mathcal{D}) N_3 + PN_3).$$

Сопряженные переменные  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_0} = -\psi_0 \alpha_0 N_1 - \psi_1 k_0 \alpha_0 N_1,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\psi_0 \alpha_0 N_1 - \psi_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1) - \psi_2 k_1 \alpha_1 N_2,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = C - \psi_1 \alpha_1 N_1 - \psi_2 (k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2 - \mu(\mathcal{D})) - \psi_3 k_2 \alpha_2 N_3,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_3} = C_p P - \psi_2 \alpha_2 N_2 - \psi_3 (k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3 - \alpha \mu(\mathcal{D}) + P).$$

Численное решение системы (25) методом Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0^{n+1} = N_0^n + h(Q + \alpha_0 N_0^n N_1^n), \\ N_1^{n+1} = N_1^n + h(N_1^n (k_0 \alpha_0 N_0^n - \alpha_1 N_2^n - m_1)), \\ N_2^{n+1} = N_2^n + h(N_2^n (k_1 \alpha_1 N_1^n - \alpha_2 N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n) N_2^n), \\ N_3^{n+1} = N_3^n + h(N_3^n (k_2 \alpha_2 N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha \mu(\mathcal{D}^n) N_3^n + PN_3^n), \end{array} \right. \quad (27)$$

где  $\mu(\mathcal{D}^n) = k\mathcal{D}^n$ .

### Метод Адамс 2 – го порядка

Первый шаг (выполняется методом Эйлера):

$$N_i^1 = N_i^0 + h f_i^0, i = 0, 1, 2, 3.$$

Последующие шаги ( $n \geq 1$ ):

$$N_i^{n+1} = N_i^n + \frac{h}{2} (3f_i^n - f_i^{n-1}),$$

где:

$$f_0^n = Q + \alpha_0 N_0^n N_1^n,$$

$$f_1^n = N_1^n (k_0 \alpha_0 N_0^n - \alpha_1 N_2^n - m_1),$$

$$f_2^n = N_2^n (k_1 \alpha_1 N_1^n - \alpha_2 N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n) N_2^n,$$

$$f_3^n = N_3^n (k_2 \alpha_2 N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha \mu(\mathcal{D}^n) N_3^n + PN_3^n.$$

Оптимальное управление (из принципа максимума Понтрягина):

$$D^n = \frac{C_D}{k(\psi_2^n N_2^n + \alpha \psi_3^n N_3^n)}$$

где  $\psi_2^n$  и  $\psi_3^n$  – сопряженные переменные на  $n$  – ом шаге.

### Результаты численного решения

Ниже представлены результаты численного моделирования оптимизации защиты растений с учетом возрастной структуры популяций насекомых.

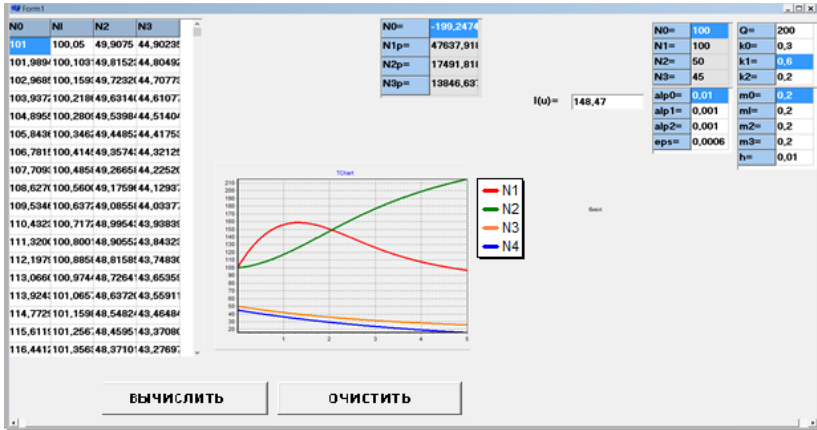


Рисунок 5. – Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых»

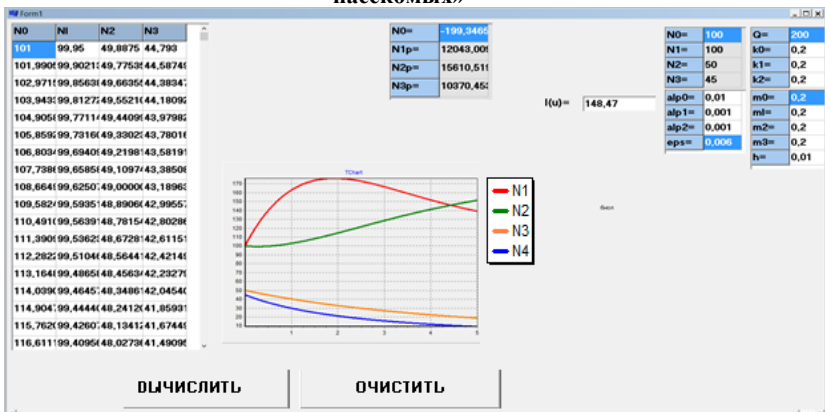


Рисунок 6. – Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых»

N0	N1	N2	N3
140	101,714	40,616	51,902
175,75	104,271	41,255	53,915
207,43	107,63	41,924	56,063
235,19	111,774	42,641	58,400
258,94	116,704	43,405	60,937
278,75	122,40	44,225	63,709
294,65	128,88	45,112	66,757
306,73	136,10	46,076	70,130
315,06	144,06	47,127	73,883

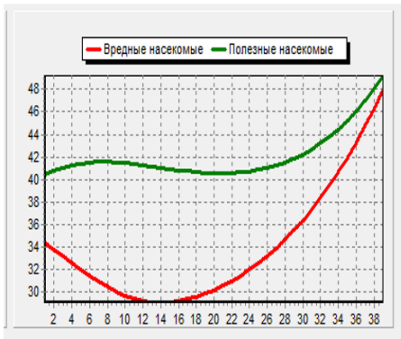


Рисунок 7. – Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых»

N0= 10	Q= 100
N1= 10	k0= 0.2
N2= 50	k1= 0.2
N3= 45	k2= 0.2
N4= 48	k3= 0.5
N5= 35	k4= 0.6
N6= 30	k5= 0.5
N7= 40	k6= 0.7
alp0= 0,01	m0= 0,2
alp1= 0,002	ml= 0,1
alp2= 0,001	m2= 0,1
alp3= 0,002	m3= 0,1

N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
10,989	9,9895	49,847	44,925	47,828	38,107	30,639	42,598
11,979	9,9793	49,684	44,851	47,652	41,480	31,291	45,354
12,967	9,9694	49,512	44,775	47,471	44,137	31,956	48,277
13,954	9,9596	49,328	44,700	47,284	49,125	32,633	51,384
14,940	9,9500	49,133	44,623	47,091	53,449	33,324	54,676
15,925	9,9407	48,924	44,546	46,892	58,130	34,027	58,163
16,909	9,9315	48,702	44,468	46,686	63,197	34,745	61,855
17,892	9,9226	48,464	44,390	46,473	68,678	35,475	65,761
18,875	9,9139	48,210	44,311	46,253	74,602	36,220	69,893

Рисунок 8. – Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых»

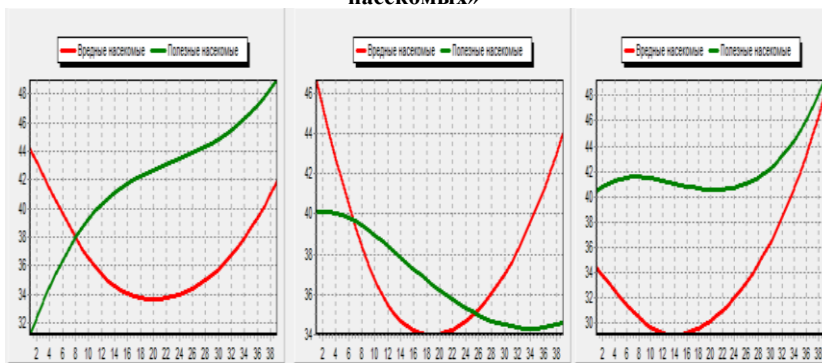


Рисунок 9. – Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых»

Заключительная **четвёртая глава** диссертационной работы состоит из двух параграфов и посвящена анализу полученных результатов, а также рассмотрению некоторых аспектов их практического использования.

### **Выводы**

#### **Основные научные результаты диссертационной работы**

- Построены системы интегро-дифференциальных уравнений позволяющие описывать популяционную динамику насекомых с учетом возрастного состава, пространственного фактора и трофических связей [6-А; 10-А];
- Выполнено теоретическое обоснование разработанных моделей включающее доказательство существования решения и проверку применимости принципа максимума Понтрягина для решаемых задач оптимального управления [3-А; 13-А];
- Предложены интегрированные способы оптимизации защиты растений и адаптационные модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенностей агроценозов и специфики хлопководства [4-А; 5-А];
- Созданы и проанализированы численные методы решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей [7-А; 8-А];
- Разработан программный комплекс на С++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов [10-А; 13-А];

#### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

В теоретическом плане значимость диссертационного исследования определяется развитием математического инструментария для описания биологических систем с включением возрастного состава и пространственной локализации популяций насекомых, так же обобщение методов теории оптимального управления на класс интегро-дифференциальных уравнений, содержащих трофические функции взаимодействия произвольного вида.

Научно-практическая значимость состоит в создании адаптированного для условий Таджикистана программного комплекса, позволяющего оптимизировать стратегии защиты хлопчатника, разработке конкретных рекомендаций по комбинированному применению химических и биологических методов с учетом региональных особенностей, что обеспечит снижение экономических затрат и экологической нагрузки при сохранении урожайности. Полученные результаты могут быть использованы сельхозпроизводителями, службами защиты растений и экологического мониторинга.

#### **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ СОИСКАТЕЛЯ**

##### **А) Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:**

- [1-А] П.Л. Нарзуллоев. Компьютерное моделирование задачи защиты растений с учётом возраста и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л.

Нарзуллоев, А.Б. Гаффоров // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2020. – №2. – С. 16-24.

- [2-A] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная модель интегрированного метода защиты растений от вредителей биосистемы типа «хищник – жертва» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2021. – №1. – С. 111-120.
- [3-A] П.Л. Нарзуллоев. Исследование математической и компьютерной модели защиты растений в стационарном и нестационарном случае с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев, К.Б. Юсуфзода // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2022. – №3. – С. 92-105.
- [4-A] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, Ф. Раимзода // Системы и средства информатики АН РФ. – 2022. – Том 32. – №3. – С. 134-144.
- [5-A] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная задача защиты растений с учётом временной, возрастной структуры насекомых и пространственных распределений / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Доклады НАН Таджикистан. – Душанбе. – 2025. – Том 68. – №3. – С. 218-224.
- [6-A] П.Л. Нарзуллоев. Численный метод решения задачи оптимального управления в биосистеме трёх трофических уровней «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Известия НАН Таджикистана. – Душанбе. – 2025. – №3 (200). – С. 47-58.
- [7-A] П.Л. Нарзуллоев. Численные методы в исследовании оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых / П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2025. – №4. – С. 25-34.
- Б) Статьи в материалах конференций:**
- [8-A] П.Л. Нарзуллоев. Компьютерное моделирование оптимизационного процесса защиты растений в биосистеме трёх трофических уровней «Растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно-теоретической конференции. – Душанбе. – 2018. – С. 203-208.
- [9-A] П.Л. Нарзуллоев. Структура взаимосвязей компонентов экосистемы хлопчатника и достаточное условие для качественной устойчивости / Ш. Косимов, А.Х. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно – теоретической конференции. – Душанбе. – 2018. – С. 195.
- [10-A] П.Л. Нарзуллоев. Математическая модель процесса защиты растений в стационарном случае с произвольной трофической функцией / Р.Н.

- Одинаев, Ф. Раимзода, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-теоретическая конференция. – Душанбе. – 2019. – С. 203.
- [11-А] П.Л. Нарзуллоев. Исследование процесса защиты растений с учётом пространственного распределения и его решение при произвольных трофических функциях / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-практическая конференция. – Душанбе. – 2021. – С. 121.
- [12-А] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная модель интегрированного метода борьбы с вредителями агроценоза / П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев // Республиканская научно-практическая конференция. – Душанбе. – 2023. – С. 221.
- [13-А] П.Л. Нарзуллоев. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф., Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий». – Душанбе. – 2023. – С. 298-302.

**ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН  
ДОНИШГОҲИ МИЛИИ ТОҶИКИСТОН**

ВБД:51+517.11+004.4+63

Бо ҳуқуқи дастнавис



**НАРЗУЛЛОЗОДА ПАРВИЗ ЛУТФУЛЛО**

**КОРКАРДИ МОДЕЛИ МАТЕМАТИКӢ ВА КОМПЮТЕРИИ  
РАВАНДИ ОПТИМИЗАТСИОНИИ МУҲОФИЗАТИ РАСТАНӢ  
БО НАЗАРДОШТИ СОҲТОРИ ВАҚТ-СИНУ СОЛ ВА  
ТАҚСИМОТИ ФАЗОӢ**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) –  
доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060110 –  
Моделсозии математикӣ, методҳои ададӣ ва комплекси барномаҳо)

Душанбе-2026

Кори илмӣ дар кафедраи моделсозии математикӣ ва компютери Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро гардидааст.

**Роҳбари илмӣ:** **Одинаев Раим Назарович** – доктори илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи моделсозии математикӣ ва компютери Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

**Муқаризони расмӣ:** **Мухаммадӣ Шоира Файзулло** – доктори илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи технологияҳои иттилоотию коммуникатсионӣ ва барномасозии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон.

**Ҳафизов Ҳасан Мачидович** – номзади илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи математикаи олии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ.

**Муассисаи пешбар:** **Институти математикаи ба номи А.Чураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон.**

Ҳимоя «01» июли соли 2026 соати «14:00» дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КАО-011 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки дар суроғаи: 734025, шаҳри Душанбе, кӯчаи Буни – Ҳисорак, бинои 17, аудиторияи 203 ҷойгир аст, баргузор мешавад.

E-mail: [alisher\\_gaforov@mail.ru](mailto:alisher_gaforov@mail.ru); рақами телефони мобилии котиби илмӣ +992900766603.

Бо диссертатсия ва автореферат дар сомонаи [www.tnu.tj](http://www.tnu.tj) ва китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи « \_\_\_\_ » « \_\_\_\_ » соли 2026 тавзеъ шудааст.

**Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ**  
**номзади илмҳои физика ва математика**



**Ғафоров А.Б.**

## МУҚАДДИМА

**Мубрамини мавзуй таҳқиқот.** Дар Ҷумҳурии Тоҷикистон кишоварзӣ ҳамчун як баҳши муҳими иқтисодӣ ба ҳисоб меравад ва аз ин рӯ, таҳияи моделҳои математикӣ мутобиқшуда барои беҳтар кардани муҳофизати растаниҳо муҳим аст. Тоҷикистон дорои иқлими континенталӣ буда, танҳо як қисми ками он барои кишоварзӣ мувофиқ аст, зеро қисми зиёди қаламрави кишварро қўхҳо ташкил медиҳанд. Ин шароити душворро барои парвариши зироатҳо фароҳам меорад ва ба системаҳои муҳофизати растаниҳо талаботи махсус мегузорад. Рушди босуръати технологияҳои кишоварзӣ ва талаботи торафт сахттари экологӣ, ҷустуҷӯи равишҳои комилан навро барои моделсозии математикӣ ва оптимизатсияи муҳофизати растаниҳо водор мекунад. Системаҳои дақиқ махсусан талабот мекунанд, ки кишоварзон метавонанд ҳамзамон омилҳои гуногунро, ба монанди хусусиятҳои биологӣ ҳашароти зараррасон, ҳолати растаниҳо, шароити обу ҳаво ва гуногунрангии фазои киштзорҳо ба назар гиранд.

Дар ин самт, усулҳои моделсозии математикӣ имкон медиҳанд, ки муносибатҳои мураккаби байни динамикаи синну соли популятсияҳои ҳашароти зараррасон, тақсмоти фазоии онҳо дар саросари майдон ва самаранокии воқеии баъзе усулҳои муҳофизатӣ амиқтар дарк карда шаванд.

Асоси ҳалли чунин масъалаҳо таҳқиқотҳои классикӣ оид ба муодилаҳои дифференциалӣ ва физикию математикӣ ташкил медиҳанд, ки асоси қариб ҳамаи таҳқиқоти муосир дар ин соҳа мебошанд. Таҳқиқоти А.Н. Тихонов ва А.А. Самарский дар соҳаи муодилаҳои физикию математикӣ асоси назарияро барои таҳлили равандҳои динамикӣ дар системаҳои мураккаб фароҳам овард. Таҳқиқотҳои В. Волтерра, ки аввалин моделҳои математикии динамикаи популятсияро таҳия карданд, саҳми муҳим дар моделсозии равандҳои биологӣ гузошанд. Рушди ин соҳаҳо дар татбиқи системаҳои биологӣ дар таҳқиқотҳои Р.А. Полуэктов ва Н.Н. Моисеев, ки принципҳои моделсозии математикии равандҳои муҳити зистро таҳия карданд, инъикос ёфтааст.

Барои ҳалли масъалаҳои ба миён гузошташуда таҳқиқотҳои Юнусӣ М.К., Нарзикулов М.Н. ва Одинаев Р.Н. аҳамияти хоса доранд, ки дар онҳо усулҳои математикии таҳлили сохтори синну солии популятсия муфассал таҳия ва принципҳои идоракунии оптималии системаҳои муҳофизати растаниҳо пешниҳод шудаанд. Ин таҳқиқот имкон доданд, ки аз моделҳои статистикӣ ба тавсифи динамикии рушди системаҳои биологӣ бо назардошти марҳилаҳои онтогенези растани (рушди организми растани) ва осебпазирии онҳо ба намудҳои гуногун дар марҳилаҳои гуногуни афзоиш гузарем.

Марҳилаи кунунии рушди моделсозии математикӣ дар агробиология бо ҳамгироии ҷанбаҳои замонӣ ва фазой таҳлил тавсиф мешавад. «Сарҳоли аввалини Мюррей Ч.Д. ва Окубо А. оид ба моделсозии тақсмоти фазой равандҳои биологӣ асоси таҳлили гетерогении тақсмоти растани ва патогенҳо дар агросеносҳо гузошт. Ҷанбаҳои оптимизатсияи ҳифзи растани дар таҳқиқотҳои Тихомиров И.А. таҳия шудаанд, ки дар онҳо усулҳои

математикӣ барои ёфтани стратегияҳои оптималии муҳофизат бо назардошти маҳдудиятҳои иқтисодӣ ва экологӣ пешниҳод шудаанд. Аммо, моделҳои мавҷудаи оптимизатсия, чун қоида, на динамикаи синну соли растаниҳо ва на тақсимои фазои онҳоро ба назар намегиранд.

Аҳамияти ин таҳқиқот бо зарурати баргараф кардани фосилаи мавҷуда байни таҳаввулоти назариявӣ дар соҳаи моделсозии математикии системаҳои биологӣ ва масъалаҳои амалии оптимизатсияи муҳофизати растаниҳо муайян карда мешавад. Татбиқи натиҷаҳои таҳқиқот заминаи илмиро барои рақамикунонии муҳофизати растаниҳо дар Ҷумҳурии Тоҷикистон фароҳам меорад, ки бо назардошти тағйирёбии иқлим ва афзоиши фишори антропогенӣ ба агроэкосистемаҳои минтақа муҳим аст.

**Дарачаи коркарди илми мавзӯи мавриди омӯзиш.** Моделсозии математикии равандҳои муҳофизати растани омӯзиши амиқи таърихӣ дорад, ки аз таҳқиқотҳои классикӣ оид ба динамикаи популятсия сарчашма мегирад. «Асосҳои тавсифи математикии таъсири мутақобилаи биологӣ дар таҳқиқотҳои классикии Волтерра В. ва Лотка А.Т. гузошта шудаанд, ки аввалин моделҳои баҳамтаъсиркунии намудҳоро таҳия кардаанд. Ин таҳқиқотҳо асоси назариявиро барои рушди минбаъдаи усулҳои математикӣ дар агроэкология фароҳам оварданд» [2, 3, 8].

Муҳаққиқони шӯравӣ ва рус саҳми назаррасе дар таҳияи моделҳои математикии муҳофизати растаниҳо гузоштанд. Свирежев Ю.М. ва Логофет [36] дар асарҳои худ принципҳои таҳлили устувории маҷмуъҳои биологиро таҳия карданд, дар ҳоле ки Юнусӣ М.К. [43-47] моделҳои махсуси мубориза бо ҳашароти зараррасон дар агросензоро пешниҳод карданд. Дар ин асарҳо ба масъалаҳои устувории экосистема ва беҳсозии усулҳои муҳофизатӣ диққати махсус дода шудааст.

«Марҳилаи кунунии рушди моделсозии математикӣ дар муҳофизати растани бо афзоиши тавачҷӯх ба баррасии омилҳои синну сол-вақт тавсиф мешавад. Дар қори Одинаев Р.Н. пайвасти усулҳои таҳия карда мешавад, ки сохтори синну соли популятсияҳои ҳашароти зараррасон ва фоидаоварро ба назар мегирад. Муаллиф моделҳои ғайрихаттии математикии муҳофизати растаниро бо сохтори синну солӣ, усулҳои ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ барои муҳофизати растани, инчунин моделҳо бо функсияҳои трофикии ихтиёрӣ пешниҳод кардааст ва моделҳои математикиро таҳия кардааст, ки тақсимои фазои популятсияҳоро ба назар мегиранд. Ин таҳқиқот имконияти муттаҳид кардани омилҳои вақт ва фазоро дар як модели ягона нишон медиҳанд» [15-30].

«Оптимизатсиякунонии усулҳои муҳофизатӣ ба самти муҳим тағйир ёфтааст. Дар таҳқиқоти муштараки худ, Одинаев Р.Н. ва Юнусӣ М.К. моделҳои оптимизатсионии идоракунии муҳофизати растани аз ҳашароти зараррасонро пешниҳод карданд» [15-30, 43-47].

Асоси назариявӣ ҳалли масъалаҳои оптимизатсия усулҳои мебошанд, ки аз ҷониби Понтрягин Л.С. [34] таҳия шудаанд. Татбиқи ин усулҳо барои

масъалаҳои муҳофизати растанӣ имкон дод, ки як дастгоҳи дақиқи математикӣ барои ёфтани стратегияҳои оптималӣ сохта шавад.

Бо вучуди пешрафтҳои назаррас дар соҳаи моделсозии математикӣ муҳофизати растаниҳо, мушкilotи таҳияи нокифояи моделҳои мураккабе, ки ҳамзамон сохтори вақт-синну сол ва тақсимои фазоиро ба назар мегиранд, зарурати таҳияи минбаъдаи усулҳои ҳалли рақамии муодилаҳои интегро-дифференсиалии мувофиқ, инчунин мутобиксозии моделҳои мавҷуда ба хусусиятҳои агросенозҳои кӯҳӣ ҳалношуда боқӣ мемонанд.

Ин рисола барои баргараф кардани ин маҳдудиятҳо тавассути таҳияи модели математикӣ ва компютерӣ, ки таҳлили динамикаи вақт-синну сол ва тақсимои фазой дар як равиши ягонаи методологӣ муттаҳид мекунад, равона шудааст.

**Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзӯҳои илмӣ.** Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои таҳқиқотии кафедраи моделсозии математикӣ ва компютерии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 дар мавзӯи «Таҳияи моделҳои математикӣ, алгоритмҳо ва барномаҳои ҳалли масъалаҳои амалӣ» ва барои солҳои 2020-2025 дар мавзӯи «Таҳияи моделҳои математикӣ ва компютерӣ, алгоритмҳо, комплекси барномаҳо ва усулҳои таълими илми компютерӣ, математика ва илмҳои табиӣ» анҷом дода шудааст.

#### **ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ**

**Мақсади таҳқиқот** – сохтани модели математикӣ ва компютерӣ мебошад, ки имкон медиҳад масъалаи муҳофизати растаниҳоро дар асоси таҳлили ҳамаҷонибаи динамикаи синну солии афзоиши растаниҳо ва ҳашароти зараррасон бо назардошти омили фазой беҳбуд бахшад.

**Вазифаҳои таҳқиқот:** Ҳадафҳои асосии таҳқиқоти ин диссертатсия инҳоянд:

- Таҳияи модели математикӣ дар шакли системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии, ки тағйирот дар андозаи популятсияҳои ҳашаротро вобаста ба таркиби синну сол, омилҳои фазой ва функцияҳои ихтиёрии трофикӣ инъикос мекунад;
- Гузаронидани таҳлили назариявии модел, ки дар он мавҷудияти роҳҳои ҳалли оптималӣ исбот карда мешавад ва асоснокии исботи принсипи максимуми Понтрягин барои масъалаҳои идоракунии оптималӣ, ки дар доираи ин модел ба миён меоянд, асоснок карда мешавад;
- Оптимизатсияи стратегияҳои муҳофизати растанӣ бо таҳияи усулҳои яқчоя ва мутобиксозии модел ба шароити Тоҷикистон, аз ҷумла бо назардошти хусусиятҳои минтақавии агросенозҳо ва хусусиятҳои парвариши пахта;
- Таҳия ва таҳлили усулҳои ададӣ барои ҳалли системаҳои муодилаҳо, аз ҷумла мутобиксозии усулҳои Эйлер ва Адамс бо арзёбии хатогиҳо;

- Таҳияи комплекси барномаҳо бо истифода аз забони барномасозии C++ барои моделсозии ададӣ, динамикаи популятсияҳои фазой ва вақт ва санчиши натиҷаҳо.

**Объекти таҳқиқот.** Объекти таҳқиқоти рисола, системаи динамикии «ҳашароти зараррасон-ҳашароти ғоидаовар» бо назардошти сохтори синну солии популятсияҳо, тақсимои фазой ва таъсири мутақобилаи функсияҳои трофикии мебошад.

**Предмети таҳқиқот.** Предмети таҳқиқот қонуниятҳои динамикаи популятсияи ҳашароти зараррасон ва ғоидаовар, усулҳои моделсозии математикии онҳо бо назардошти сохтори синну солии ва тақсимои фазой, инчунин алгоритмиҳо барои оптимизатсияи стратегияҳои муҳофизати пахта мебошанд.

**Навгони илмӣ таҳқиқот.** Дар рисола натиҷаҳои зерин ба даст оварда шуданд, ки бо навоари илмӣ тавсиф карда мешаванд:

- Системаҳои муодилаҳои интегро-дифференциалӣ сохта шудаанд, ки имкон медиҳанд динамикаи популятсияи ҳашарот бо назардошти таркиби синну солии, тақсимои фазой ва функсияҳои ихтиёрии трофикии тавсиф карда шаванд;
- Асоснокунии назарияи моделҳои таҳияшуда, аз ҷумла исботи мавҷудияти ҳалли масъала ва исботи принсипи максимуми Понтрягин барои масъалаҳои идоракунии оптималии ҳалшаванда, анҷом дода шуд;
- Усулҳои муттаҳид барои беҳтар кардани моделҳои муҳофизати растани ва мутобикшавӣ барои шароити Тоҷикистон, аз ҷумла бо назардошти хусусиятҳои минтақавии агросенсозҳо ва хусусиятҳои парвариши пахта пешниҳод карда шуданд;
- Усулҳои ададӣ барои ҳалли системаи муодилаҳо, аз ҷумла мутобиксозии усулҳои Эйлер ва Адамс бо арзёбии ҳатогиҳо, таҳия ва таҳлил карда шуданд;
- Комплекси барномаҳо бо истифода аз забони барномасозии C++ барои моделсозии ададӣ, бо назардошти динамикаи фазо ва вақт, инчунин тасдиқи натиҷаҳо, таҳия шудааст.

**Асосҳои назарияӣ ва илмию амалии таҳқиқот.** Асосҳои назарияи таҳқиқот дар таҳияи дастгоҳи математикии барои моделсозии системаҳои биологӣ бо назардошти сохтори синну солии ва тақсимои фазоии популятсияҳо, густариши назарияи идоракунии оптималии барои муодилаҳои интегро-дифференциалӣ бо функсияҳои трофикии ихтиёрий, инчунин таҳияи усулҳои нави ададӣ барои таҳлили устувори системаҳои агроэкологӣ мебошад.

Аҳамияти илмӣ ва амалӣ дар таҳияи маҷмуи барномаҳо мебошад, ки ба шароити Тоҷикистон мутобик карда шудааст, ки имкон медиҳад стратегияҳои муҳофизати пахта оптимизатсия шаванд ва тавсияҳои мушаххасро барои истифодаи якҷояи усулҳои кимиёвӣ ва биологӣ бо назардошти хусусиятҳои минтақавӣ таҳия кунанд. Ин хароҷоти иқтисодӣ ва

таъсири экологӣ ва ҳамзамон нигоҳ доштани ҳосилро кохиш медиҳад. Натиҷаҳои бадастовардари истеҳсолкунандагони кишоварзӣ, ҳадамоти ҳифзи растанӣ ва агентҳои мониторинги экологӣ метавонанд истифода баранд.

#### **Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:**

- Модели математикии динамикаи популятсияи ҳашарот дар шакли системаи муодилаҳои интегро-дифференциалӣ бо назардошти сохтори синну солӣ, тақсими фазой ва функсияи ихтиёрии трофикӣ таҳия шудааст;
- Хусусиятҳои назариявии моделҳои сохташуда муқаррар карда шуданд, яъне исботи мавҷудият ва ягонагии ҳал ба даст оварда шуданд, ҳолатҳои мувозинат таҳлил карда шуданд ва дурустии истифодаи принсипи максими Понтрягин барои таҳия ва ҳалли масъалаҳои оптималӣ асоснок карда шуд. Стратегияҳои муҳофизати растанӣ, ки ба шароити Ҷумҳурии Тоҷикистон мутобик карда шудаанд, дар асоси усулҳои яқҷояи оптимизатсия, бо назардошти хусусиятҳои минтақавии агросенозҳои пешниҳод карда мешаванд;
- Таҳия ва омӯзиши минбаъдаи усулҳои адабии истифодашаванда барои ҳалли системаи муодилаҳои интегро-дифференциалӣ, аз ҷумла тағир додани усулҳои Эйлер ва Адамс бо арзёбии ҳатогӣ, ба анҷом расид. Барои моделсозии адабии ва визуализатсияи динамикаи популятсия бо назардошти тақсими фазой ва вақт, аз ҷумла исботи модел бо маълумотҳои воқеӣ, маҷмуи барномаҳо бо истифодаи забонҳои барномасозии C++ таҳия карда шуд.

**Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳо.** Ҳамаи теоремаҳо, изҳорот ва формулаҳо дар таҳқиқоти диссертатсия бо далелҳои қатъӣ пешниҳод шудаанд, як қатор хулосаҳо бо таҳқиқоти дигар муаллифон мувофиқанд.

**Мутобикати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ.** Кори диссертатсионӣ мувофиқи бахшҳои зерини шиносномаи ихтисоси 6D060110 – Моделсозии математикӣ ва компютерӣ анҷом дода шудааст, ки омӯзиши моделсозии математикӣ ва компютерӣ, усулҳои адабии онҳо, комплекси барномаҳо ва масъалаҳои амалиро асоснок мекунад (бандҳои 2, 5, 7):

- ❖ **банди 2.** Инкишоф додани усулҳои таҳлилии сифатӣ ва тақрибии таҳқиқи амсилаҳои математикӣ;
- ❖ **банди 5.** Тағриқи усулҳои адабӣ ва алгоритмҳои самарабахш барои гузаронидани таҷрибаҳои ҳисоббарорӣ, дар намуди комплекси барномаҳои масъалагаро;
- ❖ **банди 7.** Коркарди усулҳои нави математикӣ ва алгоритмҳои санҷиши дурустии амсилаҳои математикии объектҳо, системаҳо, равандҳо ва ҳодисаҳо дар асоси додаҳои таҷрибавии воқеӣ.

**Саҳми шахсии доталаби дарёфти дарачаи илмӣ.** Мундариҷаи диссертатсия ва натиҷаҳои асосие, ки ба ҳимоя пешниҳод мешаванд, саҳми шахсии муаллифро дар қорҳои нашршуда инъикос менамоянд. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия овардашуда, ки дар ҳаммуаллифӣ нашр шудаанд,

шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд. Аз ҷониби довталаб таҳлили адабиёти илмӣ оид ба мавзӯи таҳқиқот мустақилона анҷом дода шуда, навгонии илмӣ ва аҳамияти амалии натиҷаҳои бадастомада асоснок гардидааст. Қайд намудан зарур аст, ки ҳамаи барномаҳои компютерие, ки дар доираи таҳқиқоти диссертатсионӣ истифода шудаанд, аз ҷумла алгоритмҳои моделсозии адабӣ, коркарди маълумот ва тасвирсозии натиҷаҳо, аз ҷониби довталаб мустақилона таҳия гардидаанд. Аз ҷумла, дар қорҳои [1-М, 3-М, 7-М, 8-М] воситаҳои барномавӣ шахсан аз ҷониби муаллиф сохта шудаанд, ки имконият медиҳанд усулҳои адабӣ барои ҳалли масъалаҳои оптимизатсияи ҳифзи растаниҳо бо дарназардошти сохтори синнусолии популясияи ҳашарот амалӣ гарданд. Қисми боқимондаи натиҷаҳои диссертатсионӣ, ки дар ҷараёни таҳқиқот ба даст оварда шуда, дар ҳаммуаллифӣ нашр гардидаанд, дар ҳамкорӣ бо роҳбари илмӣ иҷро шудаанд..

**Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия.** Маводҳои диссертатсия дар конфронсҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ муаррифӣ ва муҳокима гардиданд: Конференсияи ҷумҳуриявии илмию амалии ҳайати устодону кормандони ДМТ бахшида ба ҷашнҳои 30-солагии Истиқлоли давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 110 – солагии шоири халқии Тоҷикистон Мирзо Турсунзода (Душанбе, 2021); Конференсияи байналмилалии илмӣ, «Мушкилоти муосири математика ва барномаҳои он» бахшида ба 20-солаи рушди илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ солҳои 2020-2040 (Душанбе, 20-21 октябри соли 2022); Конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Таҳлили компютерии мушкилоти илму техника», бахшида ба «2020-2040, 20-солаи омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф» ва «75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон» Душанбе 2023; Конференсияи ҷумҳуриявии илмию амалии ҳайати устодону кормандони ДМТ бахшида ба «75-солагии ДМТ», «115-солагии академик Бобочон Ғафуров», «145-солагии бунёдгузори адабиёти муосири тоҷик Садриддин Айнӣ», «2023 – соли забони русӣ» ва «2025 – соли байналмилалии ҳифзи пиряхҳо» (Душанбе 2023); Конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 75-солагии ДМТ, 20-умин солгарди рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ 2020-2040 ва 85-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон Нусрат Раҷабов. Душанбе 2023; Конференсияи XII-байналмилалии илмию амалии «Мушкилоти муосири моделсозии математикӣ ва татбиқи он», бахшида ба «Эълон шудани солҳои 2020-2040, 20-солагии омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф» ва «75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон» (Душанбе, 18 майи соли 2024).

**Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия.** Натиҷаҳои таҳқиқоти муаллиф оид ба мавзӯи рисола дар 13 мақолаи илмӣ нашр шудаанд, ки аз он 7 мақола дар нашрияҳои, ки ба рӯйхати амалкунандаи Комиссияи олии аттестатсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон дохил шудаанд ва дар маводҳои конфронсҳои байналмилалӣ нашр шудаанд.

**Соҳтор ва ҳаҷми диссертатсия.** Рисола аз муқаддима, чор боб, рӯйхати адабиёти 173 истинод иборат буда, 145 саҳифаи чопшударо дар бар мегирад. Барои қулайӣ, теоремаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо дар тамоми рисола пайдарпай рақамгузорӣ шудаанд. Онҳо се маротиба рақамгузорӣ шудаанд, ки рақами аввал ба рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ва рақами сеюм рақами тартибии теоремаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои дохили он бахшро нишон медиҳад.

## ҚИСМҲОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

**Мавод ва методҳои таҳқиқот.** Дар рисола усулҳои моделсозии математикӣ бо назардошти соҳтори синну соли ва тақсимои фазой, инчунин алгоритмҳои барои оптимизатсияи стратегияҳои муҳофизати растанӣ истифода шудаанд.

**Натиҷаҳои таҳқиқот.** Хулосаи мухтасари натиҷаҳои асосии кори диссертатсияро пешниҳод мекунем.

Дар муқаддима аҳамияти илмӣ ва рӯзмарагии мавзӯи таҳқиқоти диссертатсионӣ асоснок карда шуда, инчунин мундариҷаи кор пешниҳод карда мешавад, шарҳи мухтасари манбаъҳои илмӣ мавҷуда ва натиҷаҳои марбут ба мавзӯи кори диссертатсионӣ оварда шудааст.

Дар **боби якум** баррасии таҳлилии адабиёт оид ба моделсозии математикӣ ва компютерӣ оптимизатсияи муҳофизати растанӣ бо назардошти динамикаи вақт-синну сол ва тақсимои фазой оварда шудааст. Дар параграфи якуми боби якум шарҳи мухтасари таърихӣ рушди моделсозии математикӣ ва компютерӣ ва шарҳи адабиёти илмӣ, ки мустақиман ба мавзӯи рисола алоқаманданд, оварда шудааст. Дар параграфи дуюми **боби якум** таҳлили нашрияҳои, ки ба моделсозии математикии равандҳои муҳофизати растанӣ бахшида шудаанд, оварда шудааст. Дар параграфи сеюми **боби якум** баррасии корҳои илмӣ дар соҳаи моделсозии математикии масъалаҳои оптимизатсияи муҳофизати растанӣ оварда шудааст.

**Боби дуюми** таҳқиқоти диссертатсия ба таҳияи моделҳои математикӣ ва усулҳои оптимизатсионии равандҳои муҳофизати растанӣ бо истифода аз функсияҳои трофикӣ, динамикаи вақт-синну сол ва тақсимои фазой бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми **боби дуюм** модели математикии муҳофизати растанӣ дар ҳолати статсионарӣ ва ғайрестатсионарӣ бо функсияҳои трофикии ихтиёрӣ оварда шудааст.

Динамикаи баҳамтаъсиркунии намудҳои биологӣ дар системаи биологӣ мавриди баррасӣ бо муодилаи яқҷояшуда, ки равиши Волтерраро бо воқуниши иловагии функционали А дар шакли зерин муттаҳид мекунанд, расмӣ карда мешавад: [15, 23-25]:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q - \alpha_0 V_0(N_0)N_1 = 0, \\ k_0 \alpha_0 V_0(N_0) - \alpha_1 \tilde{N}_2 - m_1 = 0, \quad \tilde{N}_i = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a) da \\ \frac{dN_2}{da} = N_2(k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \tilde{N}_3 - m_2), \quad N_2(0) = \int_0^{\infty} B_2(a) N_2(a) da, \\ \frac{dN_3}{da} = N_3(k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3), \quad N_3(0) = \int_0^{\infty} B_3(a) N_3(a) da. \end{array} \right. \quad (1)$$

Дар доираи диапазони қиматҳои биомассаи зироатҳои хоҷагии қишлоқ  $N_1^p, N_1^r \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$  мо фосилаи додашудаи сатҳи муайяни биомассаи миенаро мефаҳмем, ки ба шартҳои дода мешаванд:

$$N_1^r \geq N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}] \quad (2)$$

Он гоҳ, дар ин ҳолат масъалаи муҳофизати растани аз муайян қардани чунин қиматҳои критикии  $N_2^p$  ва  $N_3^p$  аз системаи муодилаҳои (1) [23-25], ҳангоми иҷрошавии шартҳои:

$$N_2^r \leq N_2^p, \quad N_3^r \geq N_3^p, \quad (3)$$

ибора аст, ки дар ин ҳо

$N_1^p$  — ҳосили банақшагирифташудаи биомассаи растаниҳо,

$N_2^p$  — ҳадди зараррасонии ҳашаротҳои зараррасон,

$N_3^p$  — сатҳи самаранокии ҳашаротҳои фоидаовар (энтомофагҳо).

Асосҳои назариявии мавҷудияти ҳалли статсионари системаи муҳофизати растани ин исботи теоремаи зеринро дар бар мегирад.

**Теорема 2.1.1.** Барои он ки шартҳои

$$N_1^r \geq N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}], \quad N_1^{\min} = \frac{m_2}{k_1 \alpha_1}, \quad N_1^{\max} = \frac{k_0 Q}{m_1}$$

иҷро гардад. Зарур ва кифоя аст, ки системаи нобаробариҳои зерин иҷро гардад.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0(N_0) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \\ \tilde{N}_2 \leq N_2^p, \quad N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \\ \tilde{N}_3 \geq N_3^p, \quad N_3^p = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

«Исботи математикии мавҷудияти ҳалли ғайрестатсионари муҳофизати растани ин исботи теоремаи зеринро дар бар мегирад» [16, 26, 48].

**Теорема 2.1.2.** Барои иҷрои шартҳои

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_1(t_k) \geq N_1^p(t_k \rightarrow \infty), \quad N_1^p \in \left[ \frac{m_2}{k_1 \alpha_1}, \frac{k_0 Q}{m_1} \right]$$

зарур ва кифоя аст, ки системаи нобаробариҳои зерин иҷро гардад

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \quad 0 \leq t \leq t_k \\ \lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_2(t_k) \leq N_2^p, \quad \lim_{t_k \rightarrow \infty} \tilde{N}_3(t_k) \geq N_3^p \\ \tilde{N}_i(t_k) = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} N_i(t) dt, \quad i = 2, 3 \\ N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^p = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Параграфи дуяи тахқиқоти диссертатсия ба моделсозии математикии раванди муҳофизати растаниҳо бо истифода аз сохтори вақт-сину солии популятсияи ҳашарот ва тақсимооти фазоии онҳо бо функсияи ихтиёрии трофикӣ бахшида шудааст.

Моделҳои математикии агросенотсия аз се сатҳи трофикӣ иборат будаи намуни «растанӣ - ҳашароти зараррасон - ҳашароти фондаовар» бо назардошти сину сол, тақсимооти фазоӣ ва бо функсияи ихтиёрии трофикиро дида мебароем.

«Фарз мекунем, ки ҳолати агросенотсия моделӣ ба воситаи муодилаҳои дифференсалии зерин навишта шуда бошад» [15, 19, 27, 35, 36, 47].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \frac{V_1(N_1)}{N_1} \tilde{N}_2 - m_1) \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} + \frac{\partial N_2}{\partial x} = N_2 (k_1 V_1(N_1) - \frac{V_2(N_2)}{N_2} \tilde{N}_3 - m_2) \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + \frac{\partial N_3}{\partial a} + \frac{\partial N_3}{\partial x} = N_3 (k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3), \end{array} \right. \quad (6)$$

бо шартҳои аввала ва канонии

$$N_i(x, a, 0) = N_i^0(x, a), \quad x \in \bar{G}, \quad 0 \leq a < \infty, \quad i = 2, 3$$

$$N_2(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B_2(\xi, t, N_1) N_2(x, \xi, t) dt,$$

$$N_3(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B_3(\xi, t, \tilde{N}_2) N_3(x, \xi, t) dt, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

$$N_i|_s = 0, \quad i = 2, 3.$$

«Дар ин ҷо  $Q$  – суръати дохилшавии манбаи беруна,  $N_0 = N_0(t)$  – массаи манбаи беруна (нуриҳои минералӣ ё об, ки барои обёри истифода мегардад ё энергияи офтоб) дар лаҳзаи вақти  $t$ ,  $N_1 = N_1(t)$  – биомассаи растани дар лаҳзаи вақти  $t$ ,  $N_i = N_i(x, a, t)$  – шумораи ҳашаротҳои

зараррасон ( $i = 2$ ) ва фоидаовар ( $i = 3$ ) дар сину солаи  $a$ , дар лаҳзаи вақти  $t$  ва дар нуктаи  $x$ ,  $x$  – координатаи фазой,  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau - const < \infty$ ,  $a \in [0, \infty)$ .  $B_2(\cdot)$ ,  $B_3(\cdot)$  –коэффитсиентҳои таваллудшавии ҳашаротҳои зараррасон ва фоидаовар.  $\tilde{N}_i = \tilde{N}_i(t)$ ,  $i = 2,3$  – суммаи шумораҳои мувофиқан ҳашаротҳои зараррасон ва фоидаовар, инчунин сумма аз рӯи ҳамон сину сол гирифта мешавад, ки ба зироатҳои хочагии кишлок зарар меоваранд ва ҳашаротҳои зараррасонро нобуд мекунанд»[15-30].

$$\tilde{N}_i = \tilde{N}_i(t) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_G \tilde{N}_i(x, a, t) da dx, \quad \alpha_i, \beta_i = const > 0, \quad i = 2,3. \quad (7)$$

$m_i$  – коэффитсиентҳои миёнаи муриши табиӣ,  $i = 1,2,3$ ;  $k_i$  – ҳиссаи биомассаи истеъмолшуда,  $i = 0,1,2$ ;  $\alpha_i$  – коэффитсиенти функсияи трофики,  $i = 0,1,2$ ;  $\varepsilon$  – коэффитсиенти худмахдудкунии афзоиши ҳашаротҳои фоидаовар,  $V_i(\cdot)$  –  $i = 1,2$  функсияи дилхоҳи трофики бо хосиятҳои:

$$\frac{dV(N)}{dN} > 0, \quad \frac{d^2V(N)}{dN^2} \leq 0.$$

Теоремаи зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 2.2.1.** *Бигузур*

$$V_i(\cdot) \geq 0, \quad \frac{dV_i}{dN} > 0, \quad \frac{d^2V_i}{dN^2} \leq 0, \quad i = 1,2.$$

$$0 < \min_t \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \bar{\alpha}_1 < \infty, \quad 0 < \max_a \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \bar{\alpha}_2 < \infty,$$

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 = const,$$

Он гоҳ барои он ки шартӣ

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} N_1(t) dt \geq N_1^P, \quad N_1^P \in [N_1^{min}, N_1^{max}]$$

ҷой дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки чунин нобаробариҳо иҷро гарданд:

$$\begin{cases} N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^P}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{N}_2(t) dt \leq N_2^P, \\ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{N}_3(t) dt \geq N_3^P. \end{cases} \quad (8)$$

ки дар ин ҷо  $N_2^P, N_3^P$  – аз формулаҳои:

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\bar{\alpha}_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{1}{\bar{\alpha}_1 \tau} \ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$N_3^P = \frac{k_2 \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} N_1^P - \frac{m_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\bar{\alpha}_2 \tau} \max_x \ln \frac{N_2(x, a, \tau)}{N_2(a, 0)}.$$

муайян карда мешаванд.

Дар **параграфи сеюми боби дуюм** модели оптимизатсионии мубориза бо ҳашароти зараррасон барои системаи биологии «дарранда-қурбонӣ» бо функсияҳои трофикии ихтиёри муайяншуда пешниҳод шудааст. Аҳамияти моделсозии математикӣ барои нигоҳдории зироатҳо ва беҳтар кардани сифати ҳисобҳои банақшагирий ва иқтисодӣ дар агросензҳо асоснок карда шудааст. Моделҳои асосии Лотка-Волterra ва умумиятҳои онҳо, инчунин саҳми олимони ватанӣ ва хоричӣ дар назарияи динамикаи аҳоли баррасӣ карда мешаванд. Вобаста ба шароити Тоҷикистон, зарурати қорӣ намудани системаи муттаҳидшудаи муҳофизати пахта, ки усулҳои биологӣ ва химиявиро муттаҳид мекунад, нишон дода шудааст. Ду вазифаи ба ҳам алоқаманд таҳия шудаанд: омодагӣ (муайян кардани сатҳи зараррасонӣ ва самаранокии энтомофагҳо) ва оптимизатсия (интиҳоби усули танзими шумораи ҳашароти зараррасон). Бар асоси назарияи назорати оптималӣ, як қатор робитаҳои таҳлилий ба даст оварда шуданд, ки имкон медиҳанд, ки усули биологӣ ҳангоми зиёд шудани шумораи ҳашароти зараррасон ва усули кимиёвӣ - вақте ки шумораи ҳашароти зараррасон ва паразитҳо аз ҳад зиёд аст, интиҳоб карда шавад.

**Параграфи чоруми боби дуюм** ба раванди оптимизатсионии муҳофизати растаниҳо бо назардошти сохтори вақт ва синну сол бахшида шудааст. Дар ин параграф масъалаҳои идоракунии оптималии агросензҳои моделӣ таҳқиқ карда мешаванд. Барои биосистемаи баррасишаванда шартҳои калидӣ таҳия ва асоснок карда шудаанд, ки имконияти ҳалли масъалаҳои оптимизатсионии муҳофизати растаниҳо аз ҳашароти зараррасон фароҳам меоранд. «Ғайр аз ин, исботи принципи максимуми Понтрягин оварда шудааст» [34], ки ба масъалаҳои назорати оптималии моделҳои математикӣ дар системаҳои биологӣ татбиқ мешавад. Дар таҳияи моделҳои пешгӯикунанда ва банақшагирии маҷмӯи усулҳои муҳофизатии зироатҳои кишоварзӣ аз ҳашароти зараррасон, таҳлили робитаҳои байниҳамдигарии параметрҳои биологии популятсияҳо дар экосистемаи омӯхташуда нақши муҳим дорад. Муайян кардани беҳтарин таносуби усулҳои муҳофизати биологӣ ва кимиёвӣ, инчунин ёфтани роҳҳои интиқоли агроэкосистема аз ҳолати мавҷуда ба ҳолати дилхоҳ, ки барои кишоварзӣ муфидтар аст, зарур аст.

Усули биологии муҳофизати растаниҳо ба танзими популятсияи ҳашаротҳои зараррасон тавассути ворид ва мутобик кардани энтомофагҳои табиӣ онҳо асос ёфтааст, ки имкон медиҳад зичии популятсияи ҳашарот дар сатҳи беҳтарини иқтисодӣ нигоҳ дошта шавад. Усули кимиёвӣ, дар ҳоле ки самаранокии баландро дар паҳш кардани намудҳои мақсаднок таъмин мекунад, ҳамзамон ба ҳашароти ғайриҳафза таъсири манфӣ мерасонад, ки ин

асосноккунии бодикқати истифодаи пеститсидҳоро талаб мекунад. «Масъалаҳои оптимизатсияи идоракунии моделҳои нуқтагии агросенозҳо ва экосистемаҳо дар таҳқиқот баррасӣ мешаванд» [19, 22, 27, 29], дар ҳоле ки «сохтори синну солии чунин системаҳо дар кори таҳқиқшаванда пешниҳод шудааст» [26]. Ин таҳқиқот далелҳои принципи максими Понтрягинро дар бар мегирад, ки имкон медиҳад шароити зарурии оптималӣ ба даст оварда шавад.

«Ин таҳқиқот ба масъалаҳои оптималӣ барои системаҳои биологӣ бо функсияи ихтиёрии трофикии сесатҳаи «растанӣ – ҳашароти зараррасон – ҳашароти ғайдаовар» ҳангоми воридшавии манбаи беруна бахшида шудааст. Тартиб додани масъалаи муҳофизати растаниҳо аз ҳашарот дар ин ҳолат вазифаи ёфтани идоракунии оптималӣ дар доираи тағйироти моделҳои классикии «дарранда-қурбонӣ» мебошад. Тартиб додани модели математикии масъала муайян кардани се параметри калидиро дар бар мегирад: консентратсияи оптималии моддаи захролуд  $D$ , шиддати воридшавии намудҳои ҳашароти ғайдаовар  $P$  ва суръати воридшавии манбаи беруна  $Q$ . Меъёрҳои оптималӣ метавонанд ё кам кардани шумораи ҳашароти зараровар (бо назардошти хароҷоти иқтисодии усулҳои муҳофизатӣ ва зарари эҳтимоли), ё ба ҳадди аксар расонидани ҳосилнокии зироатҳо бошанд» [15-30]. «Тасвир кардани модели математикии ин масъала дар таҳқиқотҳо оварда шудааст» [27].

Зарур аст, ки максими функционали зерин ёфта шавад, ки онро ҳамчун зарари умумии иқтисодӣ ё хароҷоти умумии анҷом додани усулҳои биологӣ ва кимиёвӣ барои муҳофизати растаниҳо тавсиф кардан мумкин аст:

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + \varphi(N_1, N_2, N_3, u)|_{t_k} \quad (9)$$

ҳангоми шартҳои:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q - F_0(N_0, N_1), \quad N_i|_{t=0} = N_i^0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 F_1(N_0, N_1, \tilde{N}_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 F_2(N_1, N_2, \tilde{N}_3) - \mu(D) N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3 F_3(N_2, N_3) - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3. \end{array} \right. \quad (10)$$

дар ин ҷо:

- $F_i = F_i(\cdot)$  - суръати мушаххаси афзоиши биомасса (ва фаровонӣ)

барои сатҳи трофикии  $i$ -ум, кучо  $i = \overline{0, 3}$ ;

- бо  $(Q, P, D)$  вектори идоракунии оптималӣ муайян карда шудааст ва  $u \in U$ ;

•  $\varphi = \varphi(\cdot)$  – ҳадди зарари дар лаҳзаи муайян сабтшуда  $t = t_k$ ,  $\mu = \mu(D)$  – функцияи «доза – эффеќта» ҳангоми ворид кардани миќдори як доруи кимиёвӣ  $D$ ,  $\tilde{C}_{[0,t_k]}^1$  – функцияи қисман бифосила;

•  $\alpha$  – ҳади ғавти ҳашаротҳои зараррасон баъди коркарди химиявӣ;

•  $f^0 = f^0(\cdot)$  – функцияе, ки зарари расонидашударо аз ҳашароти зараррасон, инчунин хароҷоти татбиқи усулҳои биологӣ ва кимиёвӣ, аз ҷумла хароҷоти нуриҳо ва обёриро тавсиф мекунад.

Дар оянда, фарз карда мешавад, ки функцияҳо  $\varphi = \varphi(\cdot)$ ,  $f^0 = f^0(\cdot)$ ,  $F_i = F_i(\cdot)$  – нисбат ба маҷмӯи аргументҳои худ ҳосилаҳои қисман бифосилаи тартиби якум доранд ва муносибатҳои зерин қонеъ карда мешаванд:

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \leq 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} = \begin{cases} \leq 0, & i < j, i = \overline{0,3} \\ \geq 0, & i > j, j = \overline{0,3} \end{cases} \quad (11)$$

Ғайр аз ин, нобаробариҳои зерин ҷой доранд:  $F_i(\cdot) \geq 0$ ,  $\varphi(\cdot) \geq 0$ ,  $f^0(\cdot) \geq 0$ . Барои функцияи  $\mu = \mu(D)$  «доза-эффеќт» фарз карда мешавад, ки шартҳои зерин риоя карда мешаванд:

$$\mu = \mu(D) \geq 0, \quad \frac{d\mu}{dD} \geq 0, \quad \frac{d^2\mu}{dD^2} \leq 0, \quad \text{ҳангоми } D \geq 0.$$

Дар робита ба методологияи дар боло зикршуда, ҳолатеро баррасӣ мекунем, ки таъсири мутақобилаи баҳамтаъсиркунии популятсияҳо бо қонуни классикии Вито Волterra [8] тавсиф карда мешавад, яъне

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(\cdot) = -\alpha_0 N_0 N_1, \\ F_1(\cdot) = k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1, \\ F_2(\cdot) = k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2, \\ F_3(\cdot) = k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3. \end{array} \right. \quad (12)$$

дар ин ҷо  $\alpha_i$ ,  $m_i$ ,  $k_i$ ,  $\varepsilon$  – параметрҳои популятсияҳои биологӣ ба агросенноза воридшаванда.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 2.4.1.** *Бигузур шартӣ (11) ҷой дорад, функцияҳои  $f^0(\cdot)$  ва  $\varphi(\cdot)$  ба таври зерин дода шудааст*

$$f^0(\cdot) = CN_2 + C_P PN_3 + C_D D + Q, \quad \varphi(\cdot) = CN_2 + C_P PN_3 + C_D D + Q.$$

Он гоҳ барои идоракунии оптималӣ, бо минимуми функцияи масъалаи (10)-(12), муносибатҳои зерин иҷро карда мешавад:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^* = \begin{cases} Q_{\max}, \psi_0 > 1 \\ 0, \psi_0 < 1 \end{cases}, \quad P^* = \begin{cases} P_{\max}, \psi_3 > C_P \\ 0, \psi_3 < C_P \end{cases}, \\ D^* = \begin{cases} D_{\max}, C_D + \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 < 0 \\ 0, C_D + \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 > 0, \mu(D) \equiv D \\ -\mu_0 + \sqrt{-\frac{\mu_0 \mu_1}{C_D} (\psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3)}, \psi_2 N_2 + \alpha \psi_3 N_3 < 0, \mu(D) = \frac{\mu_1 D}{\mu_0 + D}, \end{cases} \end{array} \right. \quad (13)$$

• бо воситаи  $\psi_i = \psi_i(t)$ ,  $i = \overline{0,3}$  ҳалли системаи пайвастанданда, ки ба масъалаи (9) мувофиқ аст, нишон дода шудаанд;

•  $\mu_0, \mu_1, Q_{\max}, P_{\max}, C, C_P, C_D$  – параметрҳои мусбати ададӣ, (бузургҳои  $C, C_P, C_D$  мувофиқан арзиши як воҳиди биомассаи ҳашароти зараррасон ва арзиши усулҳои муборизаи химиявӣ ва биологӣ мебошад).

Илова бар ин, барои ҳолати статсионарии системаи (10) теоремаи зерин иҷро мешавад.

**Теорема 2.4.2.** *Бигузур вектори  $N^* = (N_0^*, N_1^*, N_2^*, N_3^*)$  ҳалли статсионарии системаи (10) бошад, он гоҳ*

$$N(t) \approx N^* + (N^0 - N^*) \sum_{i=0}^3 \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{i \neq j} (A_0 - \lambda_i I), \quad (14)$$

дар ин ҷо  $\lambda_i$  – арзишҳои ҳосил матритса  $A_0 = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{0,3}$ ;  $j = \overline{0,3}$ ,  $N^0 = N(0)$ .

Дар параграфи зерин масъалаи оптималии системаи биологӣ бо истифода аз сохтори синну солии популятсияи ҳашарот баррасӣ мешавад. Акнун мо масъалаи оптималии муҳофизати растанихоро бо назардошти сохтори синну соли чунин тартиб медиҳем.

Зарур аст, ки минимуми функционали зерин ёфта шавад, ки онро ҳамчун зарари умумии иқтисодӣ ё хароҷоти умумии анҷом додани усулҳои муборизаи биологӣ ва химиявӣ барои муҳофизати растаниҳо тафсир кардан мумкин аст:

$$I(u) = \int_0^{t_k} \int_0^{\infty} f^0(a, N, u) da dt + \int_0^{\infty} f^1(a, N_2, u) \Big|_{t_k} da \quad (15)$$

ҳангоми шартҳои

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t < t_k, \\ N(a, 0) = N_0(a), \quad 0 \leq a < \infty, \\ N(0, t) = \int_0^{\infty} B(\xi) N(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq t \leq t_k, \end{array} \right. \quad (16)$$

• дар ин чо  $B_i = B(N, a, t) \geq 0$  – функцияи тавлиди хашаротҳои зараррасон ва фоидаовар,  $i=2,3$ ,  $a$ -сину сол,  $t$ -вақт;

•  $N_i = N_i(a, t)$  – шумораи хашаротҳои зараррасон ( $i = 2$ ) ва фоидаовар ( $i = 3$ ) бо сину соли  $a$ , дар вақти  $t$ ;

•  $\partial_{ia} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}$ ,  $u = (u_0, u_1)$ ,  $u_0 = (Q, P, D)$ ,  $u \in U$ ,  $U$  – маҷмуи ҷойдошта, яъне

$$U = \left\{ u : \begin{array}{l} 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, \\ u = u(t). \text{ к.н.} \end{array}, u_{\max} = \left\{ Q_{\max}, P_{\max}, D_{\max}, \bar{u} \right\} \right\}$$

ҳамин тавр,

$$F = (Q + F_0, N_1 F_1, N_2 F_2 - \mu(D) N_2, N_3 F_3 - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3),$$

$$N = (N_0, N_1, N_2, N_3), \quad N_0 = N_0(t), \quad N_1 = N_1(t),$$

$$N_i = N_i(a, t), \quad i = 2, 3,$$

$$B = (b_0(a), b_1(a), B_1(N), B_2(N)), \quad \text{причем} \quad \int_0^{\infty} b_i(a) da = 0, \quad i = 0, 1.$$

**Теоремаи 2.4.3.** *Фарз мекунем, ки функцияҳои  $f^0(\cdot), f^1(\cdot), F(\cdot), N_0(\cdot), B(\cdot)$  ба қадри кофӣ суфта ва барои ҳар як идоракуни  $u \in U$  системаи (13) ҳалли оптималӣ дорад. Он гоҳ барои идоракунии оптималии  $u^* = u^*(t) \in U$  дар масъалаи (13)-(14) зарур аст шарти зерин иҷро гардад:*

$$\int_0^{t_k} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial f^0}{\partial u_0} + \left( \frac{\partial F}{\partial u_0} \right)^* \right] \psi (u_0 - u_0^*) + \left[ \frac{\partial f^0}{\partial u_1} + \left( \frac{\partial F}{\partial u_1} \right)^* \right] \psi|_{a=0} (u_1 - u_1^*) \right\} da dt \geq 0 \quad (17)$$

барои ҳамаи  $u \in U$ .

Бо  $\psi = \psi(a, t)$  ҳалли системаи пайванди зеринро ифода мекунем:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_{ia})^* \psi = -\frac{\partial H}{\partial N}, \\ \psi(a, t_k) = -\frac{\partial f^1}{\partial N} \Big|_{t_k}, \quad \psi(\infty, t) = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

ки дар ин ҷо  $H(\cdot) = (F, \phi) + (B, \psi|_{a=0}) - f^0(\cdot)$ .

Дар **параграфи панҷуми боби дуюм** масъалаи оптимизатсияи муҳофизати растаниҳо бо истифода аз сохтори вақтӣ ва синну солии популятсияҳои ҳашарот ва тақсимои фазоии онҳо баррасӣ мешавад. Усулҳои муосири муҳофизати растаниҳо баррасии ҳамачонибаи хусусиятҳои биологӣ ҳашарот, аз қабилӣ марҳилаҳои синну солии рушд, инчунин тақсимои фазоие, ки ба тақсимои популятсия таъсир мерасонанд, талаб мекунад. Дар ин параграф модели математикӣ таҳия шудааст, ки ин усулҳоро барои оптимизатсияи самаранокии усулҳои муҳофизат, ба монанди коркарди кимиёвӣ, назорати биологӣ ва усулҳои агрономӣ муттаҳид мекунад. Модели пешниҳодшуда имкон медиҳад, ки динамикаи популятсияи ҳашарот ва пешгуи тақсимои фазоии онҳо баҳо дода шавад ва бо ин васила тақсимои усулҳои муҳофизатӣ дар байни майдонҳои кишоварзӣ ё китъаҳои алоҳида беҳтар карда шавад.

Ба баррасии масъалаи оптимизатсионии раванди муҳофизати растаниҳо бо дарназардошти сохтори вақт-синну солии популятсияҳо ва тақсимои фазоӣ дар биосистема мегузарем, ки дар шакли «растанӣ - ҳашароти зараррасон - ҳашароти ғайризаҳарон» амал мекунад.

«Масъалаи оптимизатсияи муҳофизати растаниро чунин тартиб медиҳем» [27, 28, 44]:

«Қимати минималии функционали зерин ёфта шавад

$$I(U) = \int_0^{t_1} \int_0^\infty \int_G f^0(x, a, t, N, u) dx da dt + \int_0^\infty \int_G f^1(x, a, t, N, u) dx da|_{t_k} \quad (19)$$

ҳангоми иҷрошавии шартҳои зерин

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), & x \in G, 0 < a < \infty, 0 \leq t \leq t_k \\ N(x, a, 0) = N_0(x, a), & x \in \bar{G}, 0 < a < \infty \\ N(x, 0, t) = \int_0^\infty B(N, \xi, t, u_1) d\xi \\ N|_S = 0 \\ N = (N_1, \dots, N_m), & x = (x_1, x_2) \in \bar{G}, \bar{G} = G + S \\ \bar{G} = \{x: 0 \leq x_i \leq L_i\}, & u = (u_0, u_1), u_i = u_i(x, a, t) \end{cases} \quad (20)$$

дар ин ҷо  $\left( \partial_{iax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^2 V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \right)$ ,  $u_0, u_1$  -

идоракунии қисман бефосила, ва  $0 \leq u_i \leq u_i^{\max}$ ,  $i = 0, 1$ ,  $V_i, D_i$  - матритсаи доимии диаганалӣ тартиби  $m$ ,  $i = 1, 2$ » [27, 28, 44]

«Бигузур идоракунии  $u$  ҳалли  $N$ , ва идоракунии  $u + \Delta u$  ҳалли  $N + \Delta N$  бошад, он гоҳ ба осони дидан мумкин аст, ки  $\Delta N$  шартҳои зеринро қаноат мекунад:

$$\begin{aligned} \partial_{tax} N &= \frac{\partial F}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial F}{\partial u_0} \Delta u_0 + R_0, \\ \Delta N|_{t=0} &= 0, \quad \Delta N|_{\xi=0} = 0, \\ \Delta N(x, 0, t) &= \int_0^\xi \left( \frac{\partial B}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial B}{\partial u_1} \Delta u_1 \right) d\xi + R_1 \end{aligned} \quad (21)$$

дар ин ҷо  $R_i = O(|\Delta u|)$ ,  $i = 0, 1$ .

$$\Delta I = \int_0^{t_k} \int_0^\infty \int_G \left( \frac{\partial f^0}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial f^0}{\partial u} \Delta u \right) dx dadt + \int_0^\infty \int_G \left( \frac{\partial f^1}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial f^1}{\partial u} \Delta u \right) \Big|_{t_k} dx da + R_3 \quad (22)$$

дар ин ҷо  $R_3 = O(|\Delta u|)$ .

Идоракунии (22) афзоиши функционали (20) мебошад» [27, 28, 44].

Дар **боби сеюм** таҳқиқоти диссертатсионӣ усулҳои ададӣ барои ҳалли масъалаҳои идоракунии оптималӣ барои системаҳои биологӣ ва маҷмӯи барномаҳои компютерӣ оварда мешаванд. Дар **параграфи якум** алгоритми ҳалли масъалаи идоракунии оптималӣ барои системаи се сатҳи трофики таҳия шудааст. Дар **параграфи дуюми боби сеюм** усулҳои ададӣ барои омӯзиши оптимизатсияи муҳофизати растаниҳо бо истифода аз таркиби синну солии популятсияҳои ҳашарот пешниҳод карда мешаванд. Усулҳои пешниҳодшуда имкон медиҳанд, ки барои масъалаҳои идоракунии ҳалли самаранок пайдо карда шавад.

Параграфи якуми **боби сеюм** ба таҳия ва таҳлили усулҳои ададӣ барои идоракунии оптималӣ дар системаи биологии «растанӣ - ҳашароти зараррасон-ҳашароти ғайризаҳаровар» бахшида шудааст. Системаи муодилаҳои дифференсиалӣ, ки динамикаи таъсири мутақобилаи байни сатҳҳои трофикиро тавсиф мекунад, баррасӣ шуда, усулҳо барои ҳалли ададии он пешниҳод карда мешаванд. Дар параграфи зерин усулҳои классикӣ, ба монанди усули Эйлер [42] ва усули Адамс, инчунин татбиқи онҳо барои ҳалли масъалаҳои идоракунии оптималӣ баррасӣ мешаванд. Усули Эйлер, сарфи назар аз соддагии худ, барои таҳлили ибтидоии системаи истифода мешавад, дар ҳоле ки усули Адамс, ки дақиқии баландтар дорад, барои моделсозии муфассалтари динамикаи популятсияи истифода мешавад.

Талаб карда мешавад, ки функционали зерин минимизатсия карда шавад [21, 27-29]:

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + \varphi(N_1, N_2, N_3, u)|_{t_k} \quad (23)$$

ҳангоми иҷрошавии шартҳои:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 (k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1), \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} = N_2 (k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2) - \mu(D) N_2, \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + \frac{\partial N_3}{\partial a} = N_3 (k_2 \alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3) - \alpha \mu(D) N_3 + P N_3, \\ N_i|_{t < 0} = N_i^0, \quad i = \overline{0, 3} \\ N_2|_{a=0} = \int_0^{\infty} B_2(\xi, t, N_1) N_2(\xi, t) d\xi, \quad 0 < t \leq t_k, \\ N_3|_{a=0} = \int_0^{\infty} B_3(\xi, t, \tilde{N}_2) N_3(\xi, t) d\xi, \quad 0 < a \leq \infty \\ \tilde{N}_i = \tilde{N}_i(t) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a, t) da, \quad \alpha_i, \beta_i - const > 0, \quad i = 2, 3. \end{array} \right. \quad (24)$$

Барои ҳалли ададии системаи (24) ду усул истифода мешаванд: усули ададии Эйлер ва усули ададии Адамс. Ин усулҳо ҳалли тақрибии системаи муодилаҳои дифференциалиро пешниҳод мекунанд, ки модели динамикаи таъсири мутақобилаи байни намудҳои биологиро тавсиф мекунанд. Муқоисаи усулҳои адабии нишон дод, ки усули адабии Адамс ҳангоми муттаҳид кардани системаҳо бо динамикаи мураккаб дақиқии баландтаринро таъмин мекунанд.

Аммо, бояд ба назар гирифт, ки содагии алгоритм аз сабаби маҳдудиятҳои назаррас дар қадами ҳамгирӣ ба даст оварда мешавад - барои таъмини дақиқии қобили қабул, истифодаи қадамҳои нисбатан хурд зарур аст, ки ҳаҷми умумии ҳисобҳо зиёд мекунанд.

Дар зер натиҷаҳои ҳалли адабии масъалаи мавриди омӯзиш оварда шудаанд, ки бо истифода аз усули Эйлер барои арзишҳои гуногуни қадамҳои интегратсия ба даст оварда шудаанд, инчунин натиҷаҳои барномаҳои Усули Эйлер ва Усули Адамс оварда шудаанд. Таҳлили ин маълумот ба мо имкон медиҳад, ки ҳам ҳолати ҳалли масъала ва ҳам хусусияти ҷамъшавии ҳамоҷиҳои ҳисобкуниро арзёбӣ кунем.

Ҳалли тақрибии масъалаи идоракунии оптималӣ дар биосистема, ки се сатҳи трофикии «растанӣ - ҳашароти зараррасон - ҳашароти фоидаовар»-ро дар бар мегирад, бо истифода аз усули адабии Эйлер меорем.

Барои ҳамаи қадамҳои  $n$  аз  $0$  то  $M-1$  дорем:

$$\begin{aligned}
 N_{0,n+1} &= N_{0,n} + h(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}), \\
 N_{1,n+1} &= N_{1,n} + h(N_{1,n}(k_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1)), \\
 N_{2,n+1} &= N_{2,n} + h(N_{2,n}(k_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D)N_{2,n}), \\
 N_{3,n+1} &= N_{3,n} + h(N_{3,n}(k_3 \alpha_3 N_{2,n} - \varepsilon N_{3,n} - m_3) - \alpha \mu(D)N_{3,n} + PN_{3,n}).
 \end{aligned}$$



Расми 1. – Натиҷаи барномаи ҳалли ададии «Усули Эйлер»



Расми 2. – Натиҷаи барномаи ҳалли ададии «Усули Эйлер»

Бартарихии усули Адамс махсусан ҳангоми интегратсия дар фосилаҳои тӯлонӣ, ки дар он чамъшавии хатогиҳо дар усули Эйлер хеле зиёд мегардад, равшантар ба назар мерасанд.

Барои ҳамаи қадамҳои  $n$  аз  $0$  то  $M-1$  дорем:

$$N_{0,n+1} = N_{0,n} + \frac{h}{2}(3(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}) - (Q - \alpha_0 N_{0,n-1} N_{1,n-1})),$$

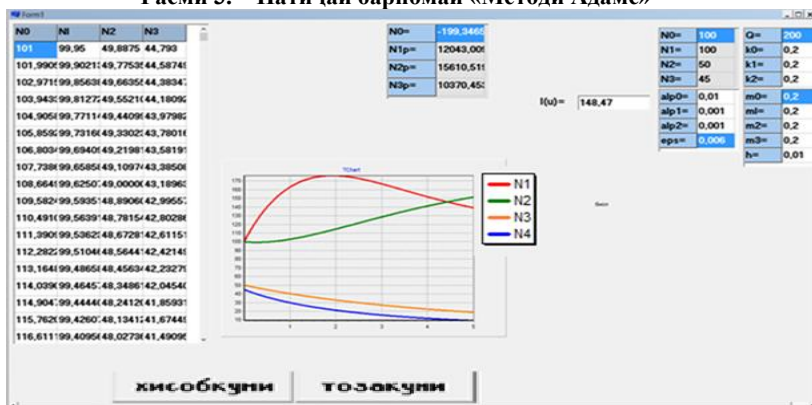
$$N_{1,n+1} = N_{1,n} + \frac{h}{2}(3(N_{1,n}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1) - (N_{1,n-1}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n-1} - \alpha_1 N_{2,n-1} - m_1))),$$

$$N_{2,n+1} = N_{2,n} + \frac{h}{2}(3(N_{2,n}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D)N_{2,n}) - ((N_{2,n-1}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n-1} - \alpha_2 N_{3,n-1} - m_2) - \mu(D)N_{2,n-1}))),$$

$$N_{3,n+1} = N_{3,n} + \frac{h}{2}(3(N_{3,n}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n} - \epsilon N_{3,n} - m_3) - \alpha\mu(D)N_{3,n} + PN_{3,n}) - (N_{3,n-1}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n-1} - \epsilon N_{3,n-1} - m_3) - \alpha\mu(D)N_{3,n-1} + PN_{3,n-1})).$$



Расми 3. – Натиҷаи барномаи «Методи Адамс»



Расми 4. Натиҷаи барномаи «Методи Адамс»

Ҳалли бадастомада имкониятҳои идоракунии оптималии популятсияҳо бо назардошти маҳдудиятҳои экологиро нишон медиҳад. Натиҷаҳо метавонанд барои таҳияи стратегияҳои биологии идоракунии дар

агроекосистемаҳо ва кам кардани истифодаи маҳсулоти кимиёвӣ муҳофизати растаниҳо муфид бошанд.

**Параграфи дуюм боби сеюм** ба усулҳои адади дар омӯзиши оптимизатсияи муҳофизати растаниҳо бо назардошти сохтори синну соли популятсияҳои ҳашаротҳо бахшида шудааст. Дар ин параграф модели математикӣ пешниҳод карда мешавад, ки динамикаи популятсияро дар марҳилаҳои гуногуни рушд, инчунин таъсири усулҳои агрономӣ ва муҳофизати кимиёвӣ тавсиф мекунад. Усулҳои Эйлер ва Адамси тартиби дуюм барои ҳалли рақамии системаи муодилаҳои дифференсиалии асоси модел истифода мешаванд ва тавозуни байни дақиқӣ ва самаранокии ҳисобкуниро таъмин мекунад.

Устувории моделҳои ададӣ таҳлил карда шуд ва татбиқи онҳо дар марҳилаҳои гуногуни коркарди растаниҳо арзёбӣ карда шуд. Дар асоси таҷрибаҳои ҳисоббарорӣ, стратегияҳои оптималии истифодаи пеститсидҳо барои кам кардани зарари иқтисодӣ дар шароити маҳдудиятҳои экологӣ муайян карда шуданд. Нишон дода шуд, ки ба назар гирифтани сохтори синну соли популятсияҳо самаранокии мубориза бо ҳашароти зараррасонро дар муқоиса бо усулҳои анъанавӣ ба таври назаррас беҳтар мекунад.

Бигзор функционал дода шавад, ки зарари умумии хароҷоти усулҳои муҳофизатиро тавсиф мекунад. Зарур аст, ки ҳамин ҳел идоракунии оптималӣ муайян карда шавад, ки функционал бо маҳдудиятҳои додашуда дар динамикаи популятсия ба арзиши минималӣ ноил гардад.

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u) dt + f^1(N_1, N_2, N_3, u) \Big|_{t_k} \quad (25)$$

бо назардошти муносибатҳои зерин:

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), & 0 < a < \infty, & 0 < t < t_k \\ N(a, 0) = N_0(a), & 0 \leq a < \infty \\ N(0, t) = \int_0^\infty B(N(\xi, t), \xi, t, u_1) d\xi, & 0 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (26)$$

дар ин ҷо  $f^0(\cdot)$ ,  $f^1(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $N_0(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  – функцияҳои додашудаи аргументҳои онҳо, ки ба кадри кофӣ суфтаанд. Идоракуни дар намуди зерин дода мешавад  $u = (u_0, u_1)$ , дар ин ҷо  $u_0 = (Q, P, D)$ , фарз карда мешавад, ки  $u \in U$ . Дар ин ҷо  $U$  маҷмӯи идоракунии оптималӣ, яъне маҷмӯи функцияҳои пайвастаи қисман маҳдудшуда, ки ба маҳдудиятҳо дучор мешаванд:

$$U = \begin{cases} u : 0 \leq u(t) \leq u_{\max} \\ u_{\max} = \{Q_{\max}, P_{\max}, D_{\max}\} \\ u = u(t) \end{cases}$$

## Ҳалли ададии масъалаи минимизатсиякунонии функционалӣ $I(u)$

Минимизатсиякунонии функционали зерин талаб карда мешавад:

$$I(u) = \int_0^{t_k} (CN_2(t) - C_pPN_3(t) + C_D\mathcal{D}(t) + Q)dt + (CN_2(t_k) - C_pPN_3(t_k) + C_D\mathcal{D}(t_k) + Q)$$

### Принсипи максимуми Понтрягин.

Функсияи Гамильтон – Понтрягин намуди зеринро мағирад:

$$H = (CN_2 - C_pPN_3 + C_D\mathcal{D} + Q) + \psi_0(Q + \alpha_0N_0N_1) + \psi_1N_1(k_0\alpha_0N_0 - \alpha_1N_2 - m_1) + \psi_2(N_2(k_1\alpha_1N_1 - \alpha_2N_3 - m_2) - \mu(\mathcal{D})N_2) + \psi_3(N_3(k_2\alpha_2N_2 - \varepsilon N_3 - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D})N_3 + PN_3).$$

Тағйирёбандаҳои ҳамроҳшуда  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ , ки баробариҳои зеринро конё мекунад:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_0} = -\psi_0\alpha_0N_1 - \psi_1k_0\alpha_0N_1,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\psi_0\alpha_0N_1 - \psi_1(k_0\alpha_0N_0 - \alpha_1N_2 - m_1) - \psi_2k_1\alpha_1N_2,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = C - \psi_1\alpha_1N_1 - \psi_2(k_1\alpha_1N_1 - \alpha_2N_3 - m_2 - \mu(\mathcal{D})) - \psi_3k_2\alpha_2N_3,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_3} = C_pP - \psi_2\alpha_2N_2 - \psi_3(k_2\alpha_2N_2 - \varepsilon N_3 - m_3 - \alpha\mu(\mathcal{D}) + P).$$

Ҳалли ададии системаи (25) бо методи Эйлер:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0^{n+1} = N_0^n + h(Q + \alpha_0N_0^nN_1^n), \\ N_1^{n+1} = N_1^n + h(N_1^n(k_0\alpha_0N_0^n - \alpha_1N_2^n - m_1)), \\ N_2^{n+1} = N_2^n + h(N_2^n(k_1\alpha_1N_1^n - \alpha_2N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n)N_2^n), \\ N_3^{n+1} = N_3^n + h(N_3^n(k_2\alpha_2N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D}^n)N_3^n + PN_3^n), \end{array} \right. \quad (27)$$

дар ин ҷо  $\mu(\mathcal{D}^n) = k\mathcal{D}^n$ .

### Методи Адамс тартиби 2

Қадами якум (бо методи Эйлер муайян карда мешавад):

$$N_i^1 = N_i^0 + hf_i^0, i = 0, 1, 2, 3.$$

Қадамҳои оянда ( $n \geq 1$ ):

$$N_i^{n+1} = N_i^n + \frac{h}{2}(3f_i^n - f_i^{n-1}),$$

дар ин ҷо:

$$f_0^n = Q + \alpha_0N_0^nN_1^n,$$

$$f_1^n = N_1^n(k_0\alpha_0N_0^n - \alpha_1N_2^n - m_1),$$

$$f_2^n = N_2^n(k_1\alpha_1N_1^n - \alpha_2N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n)N_2^n,$$

$$f_3^n = N_3^n(k_2\alpha_2N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D}^n)N_3^n + PN_3^n.$$

Идоракунии оптималӣ (аз принсипи максимуми Понтрягин):

$$D^n = \frac{C_D}{k(\psi_2^n N_2^n + \alpha \psi_3^n N_3^n)}$$

дар ин ҷо  $\psi_2^n$  и  $\psi_3^n$  – сопряженные переменные дар  $n$  – ум қадам.

### Натиҷаи ҳалли ададӣ

Дар зер натиҷаҳои моделсозии ададии оптимизатсияи муҳофизати растаӣ бо назардошти сохтори синну солии популятсияҳои ҳашарот оварда шудаанд.

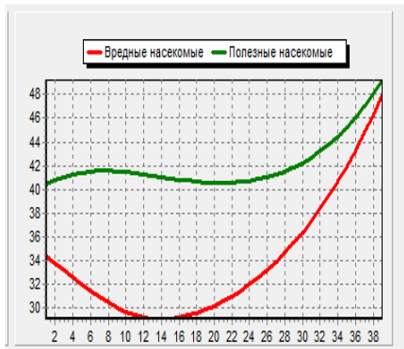


Расми 5. – Натиҷаи барномаи компютери «Оптимизатсияи муҳофизати растаӣ бо назардошти сохтори синну солии популятсияҳои ҳашарот»



Расми 6. – Натиҷаи барномаи компютери «Оптимизатсияи муҳофизати растаӣ бо назардошти сохтори синну солии популятсияҳои ҳашарот»

N0	N1	N2	N3
140	101,714	40,616	51,902
175,75	104,271	41,255	53,915
207,43	107,63	41,924	56,063
235,191	111,774	42,641	58,400
258,942	116,704	43,405	60,937
278,752	122,40	44,225	63,709
294,65	128,88	45,112	66,757
306,73	136,10	46,076	70,130
315,064	144,06	47,127	73,883

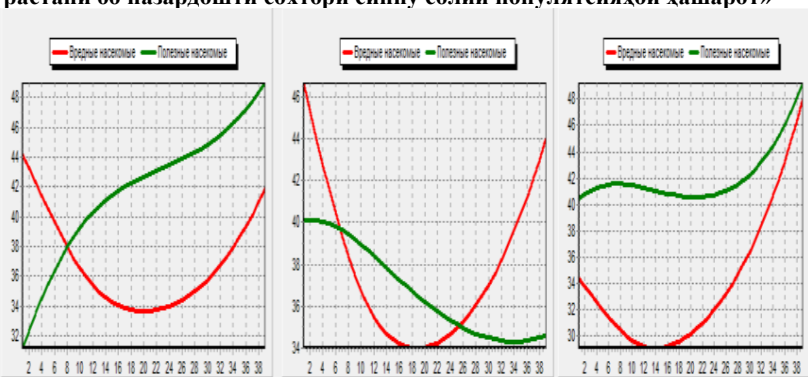


Расми 7. – Натиҷаи барномаи компютери «Оптимизатсияи муҳофизати растаиҳо бо назардошти сохтори синну соли популятсияҳои ҳашарот»

N0=	10	Q=	100
N1=	10	k0=	0,2
N2=	50	k1=	0,2
N3=	45	k2=	0,2
N4=	48	k3=	0,5
N5=	35	k4=	0,6
N6=	30	k5=	0,5
N7=	40	k6=	0,7
alp0=	0,01	m0=	0,2
alp1=	0,002	m1=	0,1
alp2=	0,001	m2=	0,1
alp3=	0,002	m3=	0,1

N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
10,989	9,9895	49,847	44,925	47,828	38,107	30,639	42,598
11,979	9,9793	49,684	44,851	47,652	41,480	31,291	45,354
12,967	9,9694	49,512	44,775	47,471	44,513	31,956	48,277
13,954	9,9596	49,328	44,700	47,284	49,125	32,633	51,384
14,940	9,9500	49,133	44,623	47,091	53,449	33,324	54,676
15,925	9,9407	48,924	44,546	46,892	58,130	34,027	58,163
16,909	9,9315	48,702	44,468	46,686	63,197	34,745	61,851
17,892	9,9226	48,464	44,390	46,473	68,678	35,475	65,761
18,875	9,9139	48,210	44,311	46,253	74,602	36,220	69,893

Расми 8. – Натиҷаи барномаи компютери «Оптимизатсияи муҳофизати растаиҳо бо назардошти сохтори синну соли популятсияҳои ҳашарот»



Расми 9. – Натиҷаи барномаи компютери «Оптимизатсияи муҳофизати растаиҳо бо назардошти сохтори синну соли популятсияҳои ҳашарот»

**Боби хулосавии чоруми** рисола аз ду параграф иборат буда, ба таҳлили натиҷаҳои бадастоварда, инчунин ба баррасии баъзе ҷанбаҳои истифодаи амалии онҳо бахшида шудааст.

### **Хулосаҳо**

#### **Натиҷаҳои асосии илмӣ диссертатсия**

- Системаҳои муодилаҳои интегро-дифференциалӣ сохта шудаанд, ки имкон медиҳанд динамикаи популятсияи ҳашарот бо назардошти таркиби синну сол, тақсими фазой ва функсияҳои ихтиёрии трофикӣ тавсиф карда шаванд [6-М; 10-М];
- Асосноккунии назариявии моделҳои таҳияшуда, аз ҷумла исботи мавҷудияти ҳалли масъала ва исботи принсипи максимуми Понтрягин барои масъалаҳои идоракунии оптималии ҳалшаванда, анҷом дода шуд [3-М; 13-М];
- Усулҳои интеграторони барои беҳтар кардани моделҳои муҳофизати растанӣ ва мутобиқшавӣ барои шароити Тоҷикистон, аз ҷумла бо назардошти хусусиятҳои минтақавии агросензҳо ва хусусиятҳои парвариши пахта пешниҳод карда шуданд [4-М; 5-М];
- Усулҳои ададӣ барои ҳалли системаи муодилаҳо, аз ҷумла мутобиқсозии усулҳои Эйлер ва Адамс бо арзёбии ҳатогиҳо, таҳия ва таҳлил карда шуданд [7-М; 8-М];
- Комплекси барномаҳо бо истифода аз забони C++ барои моделсозии ададӣ, бо назардошти динамикаи фазо ва вақт, инчунин тасдиқи натиҷаҳо, таҳия шудааст [10-М; 13-М].

#### **Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо**

Аз нигоҳи назариявӣ, аҳамияти таҳқиқоти диссертатсияро таҳияи абзорҳои математикӣ барои тавсифи системаҳои биологӣ бо дарназардошти таркиби синну солӣ ва тақсими фазои популятсияҳои ҳашарот, инчунин умумӣ кардани усулҳои назарияи оптималии идоракунии ба синфи муодилаҳои интегро-дифференциалӣ, ки дорои функсияҳои трофикии ихтиёрӣ мебошанд, муайян мекунад.

Аҳамияти илмӣ ва амалӣ дар таҳияи бастан барномаҳое мебошад, ки ба шароити Тоҷикистон мутобиқ карда шудааст, ки имкон медиҳад стратегияҳои муҳофизати пахта беҳтар карда шаванд ва тавсияҳои мушаххас барои истифодаи якҷояи усулҳои кимиёвӣ ва биологӣ бо назардошти хусусиятҳои минтақавӣ таҳия карда шаванд. Ин хароҷоти иқтисодӣ, таъсири экологӣ ва ҳамзамон нигоҳ доштани ҳосилро коҳиш медиҳад. Натиҷаҳои бадастоварда метавонанд аз ҷониби истеҳсолкунандагони кишоварзӣ, ҳадамоти ҳифзи растанӣ ва агентҳои мониторинги экологӣ истифода шаванд.

### **АДАБИЁТ**

1. Liu B., Zhang Y., Chen I. The dynamical behaviors of Lotka–Volterra predator-prey model concerning integrated pest management. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2005, Vol. 6, No. 2, pp. 227–243. doi: 10.1016/j.nonrwa.2004.08.001.

2. Lotka A.T. Theoric analytique des associations biologiques. Principes, Paris, 1939, 218 p.
3. Lotka A.T. Elements of physical biology. Dover Publications, New York, 1956, 460 p.
4. May R.M. Simple mathematical model with very complicated dynamics. Nature, 1976, Vol. 261, No. 560, pp. 459–467.
5. Murray J.D. Mathematical biology. I. An introduction. Springer, 2002.
6. Murray J.D. Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications. Springer, 2003.
7. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Институт компьютерных технологий, Москва–Ижевск, 2003, 368 с.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Наука, Москва, 1976, 286 с.
9. Горбова Т.В. Численный алгоритм для модели популяционной динамики дробного порядка с запаздыванием. Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета, 2021, Т. 57, С. 91–103. Логофет Д.О. Исследование системы пар «хищник—жертва», связанных по конкуренции. Доклады АН СССР, 1975, Т. 224, № 3, С. 529–531.
10. Логофет Д.О., Юнусов М.К. Вопросы качественной устойчивости и регуляризации в динамических моделях агроценоза хлопчатника. Вопросы кибернетики, 1979, Вып. 52, С. 60–72.
11. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Мир, Москва, 1983, 397 с.
12. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.
13. Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. Наука, Москва, 1978, 320 с.
14. Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2013, № 1/3 (110), С. 7–11.
15. Одинаев, Р. Н. Таджик модели математикӣ ва компютери масъалаи мухофизати растани дар системаи биологии намуди «дарранда-қурбонӣ» / Р. Н. Одинаев, С. С. Мусоев, М. Т. Муродова // Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. Бахши илмҳои табиӣ. – 2021. – №. 1. – Р. 19-32. – DOI 10.51884/2413-452X\_2021\_1\_19. – EDN XPGCIS.
16. Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, Т. 58, Вып. 10, С. 879–866.
17. Одинаев Р.Н. Об одной нелинейной математической модели защиты растений с учетом возрастной структуры. Вестник Таджикского

- национального университета. Серия естественных наук, 2016, № 1-2 (196), С. 13–17.
18. Одинаев Р.Н., Юнуси М.К. Оптимизационные модели интегрированного метода борьбы с вредителями биосистем трех трофических уровней. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2016, № 1/3 (200), С. 46–52. doi: 10.14357/08696527365216.
  19. Одинаев Р.Н. Об одном необходимом и достаточном условии существования решения задачи защиты растений. Евразийское научное объединение, 2017, Т. 1, № 12 (34), С. 20–25.
  20. Одинаев Р.Н. Исследование оптимизационного процесса задачи защиты растений с учетом возрастной структуры насекомых. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1/3, С. 6–9.
  21. Одинаев Р.Н. Численный метод решения интегро-дифференциальной задачи защиты растений. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1/5, С. 112–116.
  22. Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений с учетом пространственного распределения и её решение при произвольных трофических функциях. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2018, № 1, С. 5–11.
  23. Одинаев Р.Н. Математическая модель процесса защиты растений с учетом возрастной структуры насекомых. Известия ВУЗов Кыргызстана, 2018, № 2, С. 3–7.
  24. Одинаев Р.Н. Компьютерный анализ и алгоритм определения неизвестных параметров в задаче защиты растений. Известия ВУЗов Кыргызстана, 2018, № 1, С. 11–14.
  25. Одинаев Р.Н. Разработка математических моделей процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры в биосистеме типа «вредные насекомые - полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2018, № 2, С. 24–28.
  26. Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений в биосистеме типа «вредные насекомые – полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями. Системы и средства информатики, 2019, Т. 29, Вып. 1, С. 96–108. doi: 10.14357/08696527190109.
  27. Одинаев Р.Н. Математическое и компьютерное моделирование агроценоза хлопчатника с учетом возрастной структуры и с произвольными трофическими функциями. Системы и средства информатики, 2021, Т. 31, № 2, С. 173–183. doi: 10.14357/08696527210216.
  28. Одинаев Р.Н. Методы оптимизации. ТНУ, Душанбе, 2021, 246 с.

29. Одинаев Р.Н., Назруллоев П.Л., Раимзода Ф. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей. Системы и средства информатики, 2021, Т. 32, № 4, С. 134–144. doi: 10.14357/08696527220413.
30. Окубо А. Проблемы диффузии и экологии: математические модели. - Берлин: Springer, 1980.
31. Пискунов Н.С. Разностный метод приближённого решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса. В кн.: Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. Т. II, Интеграл-Пресс, Москва, 2001, С. 123–129.
32. Полуэктов Р.А. (ред.) Динамическая теория биологических популяций. Наука, Москва, 1974, 455 с.
33. Понтягин Л.С., Болтынский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Наука, Москва, 1969, 393 с.
34. Свирижев Ю.М., Елизаров Е.Я. Математическое моделирование биологических систем. Наука, Москва, 1972, 159 с.
35. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. Наука, Москва, 1978, 352 с.
36. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. Наука, Москва, 1987, 368 с.
37. Смит Дж.М. Модели в экологии. Мир, Москва, 1976, 183 с.
38. Тузинкевич А.В. Интегральные модели пространственно-временной динамики экосистем. ИАПУ ДВО АН СССР, Владивосток, 1989, 184 с.
39. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.
40. Тихомиров И.А. Оптимизационные задачи сельского хозяйства. - М.: Наука, 1991.
41. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Том 1. Гостехиздат, Москва, 1956, 415 с.
42. Юнуси (ов) М.К. Оптимальное управление в биосистеме «хищник-жертва». Известия АН ТаджССР, 1981, № 2, С. 81–86.
43. Юнуси М.К., Одинаев Р.Н. Исследование системы типа «Полезные насекомые – вредные насекомые» с учетом возрастного состава и пространственного распределения. Вестник Таджикского технического университета, 2012, № 1 (17), С. 26–32.
44. Юнуси (ов) М.К. О задачах оптимального управления, связанных с моделями агроценозов. Доклады АН ТаджССР, 1978, Т. 21, № 4, С. 10–14.
45. Юнусов М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных. Доклады АН ТаджССР, 1989, Т. 32, № 2, С. 87–92.
46. Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. Дониш, Душанбе, 1991, 146 с.

47. Юнуси М.К О математическом моделировании хлопковых экосистем / М.Н.Нарзикулов, Ш.Умаров, М. Юнуси // Книга: Численные методы в экологии животных. - Ленинград, 1980. С. 94-95.
48. Юнуси М.К Об определении критических значений насекомых интегрированного метода защиты планируемого урожая / М.Н. Нарзикулов, М.К. Юнуси // Доклады ВАСХНИЛ. - 1981. - №2. - С.22-23.
49. Юлдашев, Т. К. О точных решениях одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / Т. К. Юлдашев, Р. Н. Одинаев, С. К. Зарифзода // Математический журнал им. Лобачевского. – 2021. – Том 42, № 3. – С. 676-684. – DOI 10.1134/S1995080221030240. – РЕД. ABFCNQ.

## **РҶҶҲАТИ МАҚОЛАҲОИ НАШРШУДАИ ДОВТАЛАБ**

### **А) Мақолаҳо дар нашрияхое, ки Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия додааст:**

- [1-М] П.Л. Нарзуллоев. Компьютерное моделирование задачи защиты растений с учётом возраста и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, А.Б. Гаффоров // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2020. – №2. – С. 16-24.
- [2-М] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная модель интегрированного метода защиты растений от вредителей биосистемы типа «хищник-жертва» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2021. – №1. – С. 111-120.
- [3-М] П.Л. Нарзуллоев. Исследование математической и компьютерной модели защиты растений в стационарном и нестационарном случае с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев, К.Б. Юсуфзода // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2022. – №3. – С. 92-105.
- [4-М] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, Ф. Раимзода // Системы и средства информатики АН РФ. – 2022. – Том 32. – №3. – С. 134-144.
- [5-М] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная задача защиты растений с учётом временной, возрастной структуры насекомых и пространственных распределений / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Доклады НАН Таджикистан. – Душанбе. – 2025. – Том 68. – №3. – С. 218-224.
- [6-М] П.Л. Нарзуллоев. Численный метод решения задачи оптимального управления в биосистеме трёх трофических уровней «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Известия НАН Таджикистана. — Душанбе. – 2025. – №3 (200). – С. 47-58.

[7-М] П.Л. Нарзуллоев. Численные методы в исследовании оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых / П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе. – 2025. – №4. – С. 25-34.

### **Мақолаҳо дар маводҳои конференция:**

[8-М] П.Л. Нарзуллоев. Компьютерное моделирование оптимизационного процесса защиты растений в биосистеме трёх трофических уровней «Растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно-теоретической конференции. – Душанбе. – 2018. – С. 203-208.

[9-М] П.Л. Нарзуллоев. Структура взаимосвязей компонентов экосистемы хлопчатника и достаточное условие для качественной устойчивости / Ш. Косимов, А.Х. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно-теоретической конференции. – Душанбе. – 2018. – С. 195.

[10-М] П.Л. Нарзуллоев. Математическая модель процесса защиты растений в стационарном случае с произвольной трофической функцией / Р.Н. Одинаев, Ф. Раимзода, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-теоретическая конференция. – Душанбе. – 2019. – С. 203.

[11-М] П.Л. Нарзуллоев. Исследование процесса защиты растений с учётом пространственного распределения и его решение при произвольных трофических функциях / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-практическая конференция. – Душанбе. – 2021. – С. 121.

[12-М] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная модель интегрированного метода борьбы с вредителями агроценоза / П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев // Республиканская научно-практическая конференция. – Душанбе. – 2023. – С. 221.

[13-М] П.Л. Нарзуллоев. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф., Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий». – Душанбе. – 2023. – С. 298-302.

## АННОТАЦИЯ

диссертации Нарзуллозода Парвиз Лутфулло на тему «Разработка математических и компьютерных моделей оптимизации процесса защиты растений с учётом временно-возрастной структуры и пространственного распределения», представленной на соискание учёной степени доктора философии (PhD), доктора по специальности 6D060100 – Математика (6D060110– Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ)

**Ключевые слова:** математическое моделирование, защита растений, интегро-дифференциальная задача, дифференциальные уравнения в частных производных, краевые условия, функциональные начальные условия, временно-возрастная структура, пространственное распределение, трофические функции, принцип максимума Понтрягина, оптимальное управление, численные методы, метод Эйлера, метод Адамса, хлопководство, агроценоз.

**Цель исследования.** Разработка математической и компьютерной модели оптимизации защиты сельскохозяйственных растений, интегрирующей анализ временно-возрастной динамики растений и вредных насекомых с учётом пространственного распределения.

**Объект исследования.** Динамическая система «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с учётом возрастной структуры популяций, пространственного распределения и трофических взаимодействий.

**Предмет исследования.** Закономерности динамики численности популяций вредных и полезных насекомых, методы их математического моделирования с учётом возрастной структуры и пространственного распределения, а также алгоритмы оптимизации стратегий защиты хлопчатника.

**Методы исследования.** Методы теории интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями и функциональными начальными условиями, принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с возрастной структурой, численные методы, методы вычислительного эксперимента и объектно-ориентированного программирования (C++).

**Научная новизна.** Разработана система интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику популяций насекомых с учётом возрастной структуры, пространственного распределения и трофических взаимодействий; доказаны теоремы существования и единственности решений; доказан принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с возрастной структурой; разработаны комбинированные методы оптимизации стратегий защиты растений для условий Таджикистана; создан программный комплекс на C++ для численного моделирования пространственно-временной динамики популяций.

## АННОТАТСИЯ

диссертатсияи Нарзуллозода Парвиз Лутфулло дар мавзӯи «Коркарди модели математикӣ ва компютери равади оптимизатсионии муҳофизати растанӣ бо назардошти сохтори вақт-сину сол ва тақсимои фазой», ки барои дарёфти дараҷаи илми доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060110 – Моделсозии математикӣ, методҳои ададӣ ва комплекси барномаҳо) пешниҳод шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** моделсозии математикӣ, ҳифзи растаниҳо, масъалаи интегралӣ-дифференциалӣ, муодилаҳои дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, шароитҳои канорӣ, шароитҳои ибтидоии функционалӣ, сохтори вақт-синусоӣ, тақсимои фазой, принсипи максимуми Понтрягин, идоракунии оптималӣ, усулҳои ададӣ, усули Эйлер, усули Адамс, пахтакорӣ.

**Ҳадафи тадқиқот.** Таҳияи модели математикӣ ва компютери оптимизатсияи муҳофизати растаниҳои кишоварзӣ, ки таҳлили динамикаи вақт-синусолии растаниҳо ва ҳашароти зараррасонро бо назардошти тақсимои фазой муттаҳид мекунад.

**Объекти тадқиқот.** Системаи динамикии «растанӣ – ҳашароти зараррасон – ҳашароти ғоидаовар» бо назардошти сохтори синусолии популятсияҳо, тақсимои фазой ва функсияи ихтиёрии трофикӣ.

**Мавзӯи тадқиқот.** Қонуниятҳои динамикаи шумораи популятсияҳои ҳашароти зараррасон ва ғоидаовар, усулҳои моделсозии математикии онҳо бо назардошти сохтори синусоӣ ва тақсимои фазой, инчунин алгоритмҳои оптимизатсияи стратегияҳои муҳофизати пахта.

**Усулҳои тадқиқот.** Усулҳои назарияи муодилаҳои интегралӣ-дифференциалӣ, муодилаҳои дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо шароитҳои канорӣ ва шартҳои ибтидоии функционалӣ, принсипи максимуми Понтрягин барои масъалаҳои идоракунии оптималӣ бо сохтори синусоӣ, усулҳои ададӣ, усулҳои таҷрибаи ҳисоббарорӣ ва барномасозии ба объектигаридашуда (C++).

**Навоари илмӣ.** Системаи муодилаҳои интегро-дифференциалӣ барои динамикаи популятсияҳои ҳашарот бо назардошти сохтори синусоӣ, тақсимои фазой ва функсияи ихтиёрии трофикӣ таҳия шудааст; теоремаҳои мавҷудият ва ягонагӣ исбот шудаанд; принсипи максимуми Понтрягин барои масъалаҳои идоракунии оптималӣ бо сохтори синусоӣ исбот шудааст; усулҳои комбинатсионии оптимизатсияи стратегияҳои ҳифзи растаниҳо барои шароити Тоҷикистон таҳия шудаанд; комплекси барномавии C++ барои моделсозии динамикаи фазой-вақтии популятсияҳо таҳия шудааст.

## ANNOTATION

**of the dissertation of Narzulozoda Parviz Lutfullo on the theme «Development of mathematical and computer models for optimization of plant protection process taking into account time-age structure and spatial distribution», submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD), Doctor in specialty 6D060100 – Mathematica (6D060110 – Mathematical modeling, numerical methods and software packages).**

**Key words:** mathematical modeling, plant protection, integro-differential problem, partial differential equations, boundary conditions, functional initial conditions, time-age structure, spatial distribution, Pontryagin's maximum principle, optimal control, numerical methods, Euler's method, Adams' method, cotton farming.

**Purpose of the study.** To develop a mathematical and computer model for optimizing the protection of agricultural plants, integrating the analysis of time-age dynamics of plants and harmful insects taking into account spatial distribution.

**Object of the study.** The dynamic system «plant – harmful insects – beneficial insects» taking into account the age structure of populations, spatial distribution and trophic interactions.

**Subject of the study.** Patterns of population dynamics of harmful and beneficial insects, methods of their mathematical modeling taking into account age structure and spatial distribution, as well as algorithms for optimizing cotton protection strategies.

**Research methods.** Methods of the theory of integro-differential equations, partial differential equations with boundary conditions and functional initial conditions, Pontryagin's maximum principle for optimal control problems with age structure, numerical methods, methods of computational experiment and object-oriented programming (C++).

**Scientific novelty.** A system of integro-differential equations describing the dynamics of insect populations taking into account age structure, spatial distribution and trophic interactions is developed; theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved; Pontryagin's maximum principle for optimal control problems with age structure is proved; combined methods for optimizing plant protection strategies for the conditions of Tajikistan are developed; a software package in C++ for numerical modeling of spatio-temporal population dynamics is developed.