ГОУ «БОХТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ НОСИРА ХУСРАВА»

УДК 517.95

ББК 22.161

В-15

На правах рукописи

Вализода Рузибой Сангимурод

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102
– Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление)

Душанбе - 2025

Работа выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава

Научный руководитель:	**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич,** доктор физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава.
Официальные оппоненты:	**Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Таджикского национального университета; **Джумаев Эрадж Хакназарович,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественных наук Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
Ведущая организация:	Российско-Таджикский (Славянский) университет.

Защита состоится «4» марта 2026 года в «14:00» ч. на заседании диссертационного совета 6D.KOA-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория №.203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона ученого секретаря +992900766603.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться на сайте www.tnu.tj и в библиотеке Таджикского национального университета.

Автореферат разослан «____» «_____» 2026 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук **Гафоров А.Б.**

Введение

Актуальность темы исследования. Теория переопределённых систем уравнений в частных производных с регулярными коэффициентами является достаточно развитой областью исследования. Данная теория, связанная с именем Якоби и рядом других учёных, охватывает линейные однородные и неоднородные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией, зависящей от произвольного числа независимых переменных. Теория Фробениуса для систем в полных дифференциалах, применимая как к одной, так и к множеству неизвестных функций, представляющая собой дальнейшее развитие теории Коши-Ковалевской и охватывающая определённые классы аналитических переопределённых систем уравнений в частных производных, направлена на построение многообразий решений с регулярными и сингулярными коэффициентами. Дальнейшее развитие данной теории получено в работах П. Аппеля [29], Л.Г. Михайлова [8], [10], Н.Р. Раджабова [13], [15], Ж.Н. Тасмамбетова [23], А. Хасанова [25] и их научных последователей.

В связи с этим значительное количество научных исследований [1]–[156] посвящено изучению указанных уравнений и систем. Фундаментальные результаты в данном направлении представлены в монографиях и научных трудах таких авторов, как А.В. Бицадзе [1], М.М. Смирнов [21], А.М. Нахушев [11], В.И. Жегалов [4], К.Б. Сабитов [19], Т.Д. Джураев [2], М.С. Салахиддинов [31], Т.Ш. Кальменов [6], Л.Г. Михайлов [9], З.Д. Усманов [24], Н. Раджабов [16] - [17], N. Begehr [30], А.Д. Джурев [3], А.С. Исхоков [5], Л.Н. Раджабова [17], А.М. Самойленко [20] а также их научных школ.

Простейшая переопределённая система дифференциальных уравнений в частных производных имеет вид:

$$u_x = P(x,y), u_y = Q(x,y)$$

условие $P_y = Q_x$ является необходимым и достаточным для совместности данной системы.

При выполнении этого условия дифференциальная форма

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

представляет собой полный дифференциал, и функция $u(x,y)$ может быть восстановлена путём интегрирования. Аналогичный подход применим к случаям полного дифференциала в трёхмерном и n-мерном пространствах.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Одним из актуальных направлений в теории дифференциальных уравнений с частными производными является исследование переопределённых систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.

Отдельные классы переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследованы в работах П. Аппеля, Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, Э. Рузметова, С. Байзаева, Р. Пирова, Б. Шарипова, Д.С. Сафарова, Ф.М. Шамсудинова, Б. Шоимкулова и ряда других авторов.

Изучению переопределённых систем дифференциальных уравнений с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы Л.Г. Михайлова [8], Н. Раджабова [12] - [13], Э.Р. Рузметова [18], Ж.Н. Тасмамбетова [23], Ф.М. Шамсудинова [26] - [27], М.В. Коровина [7], Б.М. Шоимкулова [28] и их научных школ.

Исследование переопределённых систем первоначально проводилось на примере систем с регулярными коэффициентами, после чего внимание было уделено системам с сингулярными коэффициентами.

Монография Л.Г. Михайлова [9] посвящена изучению переопределённых систем с регулярными коэффициентами.

Монография Н. Раджабова и М.Э. Абдель-Аал-Гхани Гхареба [12] посвящена исследованию линейных переопределённых систем дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями.

Монография Н. Раджабова [16] посвящена исследованию краевых задач для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка, а также некоторых линейных переопределённых систем первого и второго порядка с одной или двумя сверхсингулярными линиями либо сверхсингулярными точками. В данной работе также рассматриваются некоторые многомерные линейные системы первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными точками, а также со сверхсингулярными областями.

В монографии Э. Рузметова [18] представлены интегральные представления множества решений ряда переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка с сингулярными точками, а также с сингулярными линиями и плоскостями.

В монографии казахского математика Ж.Н. Тасмамбетова [23] представлены нормальные и нормально-регулярные решения переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, преимущественно с полиномиальными коэффициентами двух переменных. Основным методом построения решений является обобщённый автором метод Фробениуса - Латышевой, основанный на использовании понятий ранга и антиранга. Эти понятия применяются для классификации видов нормальных и нормально-регулярных решений рассматриваемых систем, а также для доказательства их сходимости.

Вопросы, связанные с исследованием переопределённых систем дифференциальных уравнений, особенно в случаях наличия сингулярных коэффициентов и внутренних сингулярных линий, остаются актуальными и до настоящего времени. Несмотря на наличие значительного числа работ, посвящённых различным аспектам таких систем, проблема описания поведения решений в окрестности внутренних сингулярностей остаётся недостаточно изученной.

Определённые результаты при исследовании переопределённых систем дифференциальных уравнений с двумя внутренними сингулярными линиями были получены автором. Эти результаты опубликованы в научных статьях автора [1-A] – [26-A], где представлены как аналитические подходы к описанию решений, так и примеры с начальными условиями типа Коши.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации государственных планов и программ: «Двадцатилетие изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» на 2020–2040 годы, «Государственная целевая программа развития математических, точных и естественных наук на 2021–2025 годы», а также плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава на 2021–2025 годы по темам: «Исследовании линейных и нелинейных эллиптических систем уравнений на плоскости», «Качественное изучение систем уравнений электромагнитоупругости и получение их точных решений» и «Получение явных решений для некоторых классов переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с сингулярными коэффициентами и исследование их свойств».

Общая характеристика исследования

Цель исследования. Основная цель данной работы заключается в исследовании четырёх переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка, содержащих две внутренние сингулярные линии.

Задачи исследования в диссертационной работе являются:

- исследование одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка, а также ряда переопределённых линейных систем второго порядка, состоящих из двух и трёх уравнений, с двумя внутренними сингулярными линиями;

- найти интегральные представления многообразия решений для исследуемых систем;

- изучение свойств полученных решений;

- исследование задачи типа Коши для интегральных представлении решений рассматриваемых систем.

Отмечается, что указанные системы изучаются впервые.

Объект исследования. Объектом исследования являются переопределенные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями.

Предмет исследования. Предметом исследования являлось поведение изучаемых систем в окрестности внутренних сингулярных линий

Методы исследования. В диссертационной работе применены современные методы, разработанные для переопределённых систем сингулярных и сверхсингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, включая общие методы теории дифференциальных уравнений, метод факторизации и метод решения интегральных уравнений. Особое внимание уделено использованию методов, разработанных Н. Раджабовым.

Научная новизна исследований. Диссертационная работа содержит результаты, обладающие научной новизной, полученные автором самостоятельно. Содержание этих результатов заключается в следующем:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними особенностями - сингулярной и сверхсингулярной линиями - в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также решены задачи с начальными условиями;

- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе. Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями;

- построены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда основным (базовым) уравнением выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями.

Теоретическая и научно-практическая работы. Материалы диссертации в значительной степени имеют теоретический характер. Разработанные методы и полученные результаты могут быть применены в различных задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, проективной дифференциальной геометрии, а также в прикладных областях, таких как электродинамика, механика, математическая физика и другие.

Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при преподавании специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов (PhD) высших учебных заведений, обучающихся по направлениям математика, прикладная математика и физика.

Положения, выносимые на защиту:

- доказательство теорем о нахождении интегрального представления многообразия решений для переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями;

- теоремы о нахождении интегрального представления многообразия решений для переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями;

- изучение свойства полученных интегральных представлений решений в окрестности внутренних сингулярных линий;

- доказательство теорем о разрешимости задач с начальными условиями типа Коши для переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка, содержащих две внутренние сингулярные линии.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, обеспечивается обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, основанными на методах теории переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения), а также трём основным направлениям области исследования:

1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

3) теория дифференциально-операторных уравнений.

Указанные направления относятся к разделу «Дифференциальные уравнения», предусмотренному в пункте III, параграфе 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные научные работы. В совместных публикациях с Ф. М. Шамсудиновым [1-А], [3-А], [4-А], [5-А], [7-А] соавтору принадлежит обсуждение полученных результатов. Все результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно.

Апробация результаты диссертации. Основные результаты диссертации неоднократно представлялись и обсуждались на:

• семинары кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава под руководством д.ф.-м.н., профессора Сафарова Д. С. (Бохтар, 2021-2025 г.);

• международной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры» (г. Актобе, 24-28 мая 2022 г.);

• международной конференции «Теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений» (г. Бишкек, 23-25 июня 2022г.);

• международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022» (г. Уфа, 28 сентября -1 октября 2022г.);

• международной научно-практической конференции, посвящённой 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы, ТНУ (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.);

• международной научно-практической конференции, «Комплексный анализ и его приложения» БГУ им. Н. Хусрав (Бохтар, 19 ноября 2022 г.);

• международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева НАНТ (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);

• XVI – ой международной Казанской школа-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22 – 27 августа 2023 г.);

• международной научно – практической конференции «Междисциплинарное синхронное и асинхронное использование инновационных образовательных технологий в контексте развития креативной активности учащихся и студентов» (Денау,29-30 сентября 2023 г.);

• международной научной конференции, посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат (Душанбе, 5 - октября 2023 г.);

• международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2023» (г. Уфа, 4 - 8 октября 2023г.);

• международной научно-практической конференции, «Активные вопросы преподавания технических, точных и математических наук» БГУ им. Н. Хусрав (Бохтар, 17 - 18 мая 2024 г.);

• международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения» ТНУ (Душанбе, 18 - мая 2024 г.);

• международной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" НАНТ Институт математики им. А. Джураева (Душанбе, 30-31 мая 2024 г.);

• республиканской конференции "Интегративный подход к развитию креативной деятельности учащихся соединяя синхронно и асинхронно общеобразовательные дисциплины" (Ташкент, 25-26 октября 2024 г.);

• международной научно – практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования» (22–23 ноября 2024 г.);

• всероссийской школа-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 27 ноября – 2 декабря 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 26 печатных работах автора, список которых приведён в конце автореферата. Из них 9 статей опубликованы в изданиях, включённых в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, остальные - в материалах международных и республиканских конференций.

Структура и объём диссертации. Работа включает введение, четыре главы, обсуждение полученных результатов, заключение и список использованной литературы, содержащей 156 наименований. Общий объём диссертации составляет 192 страницы машинописного текста, оформленного с использованием текстового редактора Microsoft Word. Для удобства восприятия в работе применена сквозная нумерация теорем, следствий и формул, реализованная тройной системой: первая цифра соответствует номеру главы, вторая - номеру параграфа, третья - порядковому номеру теоремы, замечания, следствия или формулы в пределах данного параграфа.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Во введении диссертационной работы обоснована актуальность рассматриваемых задач, представлена краткая история их изучения и осуществлён обзор соответствующих научных источников. Сформулированы цель и задачи исследования, определены объект и предмет, а также изложены применяемые методы. Кроме того, в сжатой форме представлено содержание основных разделов диссертации.

Следом за введением представлен анализ научной литературы, посвящённой рассматриваемому направлению исследования.

В кратком изложении содержания диссертационной работы сохраняется нумерация разделов, теорем и формул, использованных в основном тексте исследования.

Пусть D обозначает прямоугольную область, заданную следующим образом:

$$D=\{(x,y):-a<x<a, 0<y<a\}.$$

Далее, будем использовать также обозначения

$$\Gamma_1=\{y=0,-a<x<a\},\quad \Gamma_2=\{x=0,0<y<a\},$$

$$\Gamma_1^0=\{y=x,0\le x\le a\},\ \ \Gamma_2^0=\{y=-x,-a\le x\le 0\}.$$

В дальнейшем класс $C^1\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ рассматривается как множество функций, которые обладают непрерывными производными первого порядка в области D за исключением множеств Γ_0^1 и Γ_0^2.

Под классом $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ будем понимать множество функций, имеющих непрерывные производные второго порядка в области D, при этом смешанная производная $u_{xy}(x,y)$ является непрерывной на множестве $D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)$.

В D исследованы следующие переопределённые системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b(x,y)}{(x^2-y^2)^n}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^n}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a(x,y), b(x,y), f_j(x,y), j = \overline{1,2}$ − заданные функции в области $D, m = const. > 0, n = const. > 0, u(x,y) -$ искомая функция;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}u = \dfrac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a_i(x,y), b_i(x,y), c_1(x,y), f_j(x,y), i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}$ − заданные функции в области $D, m = const. > 0, n = const. > 0, u(x,y) -$ искомая функция.

Для системы (1.1), в зависимости от того какие значения принимают параметры m, n (при случаях $m = n = 1;\ m = 1, n \geq 2;\ m \geq 2, n = 1;\ m \geq 2, n \geq 2$) и какие знаки имеют коэффициенты $a(0,0), b(0,0)$, найдены условия для коэффициентов и правых частей при выполнении которых находится многообразие решений. Если выполняются найденные условия, то многообразия решений представляется в явном аналитическом виде, который содержит одну произвольную функцию от одного независимого переменного.

Найдены условия совместности на коэффициенты и правые части системы (2.1) в зависимости от значений параметров m, n, p $(m = n = p = 1;\ m = n = 1, p \geq 2;\ m \geq 2, n \geq 2, p = 1;\ m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2)$. При выполнении этих условий всякое решение изучаемой системы может быть найдено в явном аналитическом виде.

Сходные результаты также получены для систем (2.2) и (3.1).

В рамках исследования основное внимание уделяется тем случаям, когда между коэффициентами первого уравнения систем (2.1), (2.2) и (3.1) имеется определённая взаимосвязь

$$c_1(x,y) = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2 - y^2}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y),$$

а также

$$c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2 - y^2}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0.$$

Следует подчеркнуть, что при выполнении условия $c_2(x,y) \neq 0$ задача построения общего решения систем (2.1) и (2.2), при различных значениях параметров m, n, p, k, рассматривается в случаях, когда второе уравнение соответствующей системы принимается в качестве исходного (базового)

В случае выполнения условия $c_2(x,y) \neq 0$ исследование системы уравнений (3.1) осуществляется в тех постановках, при которых второе и третье уравнения данной системы принимаются в качестве базовых.

В первой главе проведён анализ литературы, связанной с исследованием некоторых уравнений с регулярными и сингулярными коэффициентами, переопределенных систем с сингулярной точкой, а также с сингулярными и сверхсингулярными линиями.

Вторая глава диссертации посвящена в области D рассмотрению переопределённой системы (1.1). В данной главе основное внимание уделяется получению представления многообразия решений одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей две внутренние сингулярные линии. Рассматриваемая система анализируется в двух различных случаях:

1) первое уравнение рассматривается в качестве базового;
2) второе уравнение принимается за исходное.

В ходе проведённого анализа рассматриваемой системы уравнений при выполнении условий взаимосвязи между её коэффициентами получено явное выражение общего решения, зависящих от одной произвольной константы. Более того, проведено рассмотрение и решение задач с начальными условиями $K_2^1 - K_2^8$, основанных на полученных интегральных представлениях изучаемой системы уравнений.

В §2.1 главы 2 изучается система (1.1) при условии $m = n = 1$. При этом для системы (1.1) получены соответствующие утверждения и сформулированы некоторые свойства полученного решения. В теореме 2.1.1 изложены основные результаты для случая, когда первое уравнение системы (1.1) является исходным. В теореме 2.1.2 рассматривается случай, когда исходным считается второе уравнение.

В §2.2 диссертации проводится исследование системы (1.1) при случае $m = 1, n \geq 2$. Для рассматриваемой системы найдены явные представления многообразия решений посредством одной произвольной константы. Отмечены некоторые свойства полученного решения.

Третьей параграф второй главы посвящён рассмотрению системы (1.1), в которой $m \geq 2, n = 1$. Полученные в результате исследования утверждения изложены ниже.

Теорема 2.3.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (1.1)* $m \geq 2, n = 1$ *и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

1) $a(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$;
2) $a(y,y) > 0,\ b(0,0) < 0$;
3) $a(x,y) - a(y,y) = o\big((x-y)^{\lambda_1}\big),\ \lambda_1 > m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
   $a(x,y) - a(y,y) = o\big((x+y)^{\lambda_2}\big),\ \lambda_2 > m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
   $|b(0,y) - b(0,0)| \leq H_1 y^{\lambda_3},\ H_1 = const,\quad \lambda_3 > 1$;
4) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,y)}{x^2-y^2}\right)$ *в* D,

$b)\ (x^2-y^2)^{m+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right)+a(x,y)f_2(x,y)=$

$$=(x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)+b(x,y)f_1(x,y)\ \text{ в } D;$$

5) $f_1(x,y)=o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1>m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$f_1(x,y)=o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2>m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$f_1(x,y)=o(y^{\mu_3}),\ \mu_3>1$.

Тогда всякое решение (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ *можно представить в виде*

$$u(x,y)\equiv\chi_1\big(\psi_1(y),f_1(x,y)\big),\qquad(1)$$

$$\psi_1(y)\equiv N_1\big(c_5,f_2(0,y)\big),\qquad(2)$$

где $\chi_1\big(\psi_1(y),f_1(x,y)\big),N_1\big(c_5,f_2(0,y)\big)-$ *известные интегральные операторы,* c_5- *произвольная постоянная.*

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x\to 0$, то имеем:

$$\lim_{x\to 0}u(x,y)=\psi_1(y).$$

2°. При $x\to 0$ и $y\to 0$ имеем оценку:

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=O(exp[-b(0,0)W_1(y)]).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=c_5$.

4°. Если $y\to 0$, и $x\neq 0$, то

$$u(x,y)=O\left(exp\Big[a(y,y)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\Big]\right).$$

Предположим, что второе уравнение системы (1.1) есть исходное. Имеет место следующая

Теорема 2.3.2. *Пусть в (1.1)* $m\geq 2,n=1$. *Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:*

1) $b(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),\ a(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),\ f_1(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),f_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D})$;

2) $\frac{b(x,x)}{2x}<0$ *в окрестности* Γ_1^0,
$\frac{b(x,x)}{2x}>0$ *в окрестности* Γ_2^0,
$a(0,0)>0$;

3) $|b(x,y)-b(x,x)|\leq H_1|x-y|^{\lambda_1},\ H_1=const,\ \ 0<\lambda_1<1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$|b(x,y)-b(x,x)|\leq H_1|x+y|^{\lambda_2},\ H_1=const,\ \ 0<\lambda_2<1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|a(x,0)-a(0,0)|\leq H_3x^{\lambda_3},\ H_3=const,\ \ \lambda_3>2m-1$;

4) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,y)}{x^2-y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)$ *в* D,

$b)\ (x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)+b(x,y)f_1(x,y)=$

$$=(x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right)+a(x,y)f_2(x,y)\ \text{ в } D;$$

5) $f_2(x,y)=o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1>\frac{b(x,x)}{2x}$ *в окрестности* Γ_1^0,
$f_2(x,y)=o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2>-\frac{b(x,x)}{2x}$ *в окрестности* Γ_2^0,
$f_1(x,0)=o(x^{\mu_1}),\ \mu_1>2m-1$.

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (1.1), принадлежащее классу $C^1(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ *можно представить в виде*

$$u(x,y)\equiv\chi_2\big(\varphi_1(x),f_2(x,y)\big),\qquad(3)$$

$$\varphi_1(x)\equiv N_2\big(c_6,f_1(x,0)\big),\qquad(4)$$

где $\chi_2(\varphi_1(x), f_2(x,y)), N_2(c_6, f_1(x,0))$ *– известные интегральные операторы,* c_6 *– произвольная постоянная.*

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \to 0$, то имеем

$$u(x,0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \to 0$ и $x \to 0$ имеем оценку

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O(exp[a(0,0)W_{2m-1}(x)]).$$

3°. $\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_6.$

4°. Если $y \to x$, то

$$u(x,y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \to -x$, то

$$u(x,y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

В §4 главы 2 рассматривается система уравнений (1.1), в которой $m \geq 2, n \geq 2$. Найдены интегральные представления решений, содержащие одну произвольную константу. Основные выводы настоящего параграфа отражены в теоремах 2.4.1 и 2.4.2, в которых рассматриваются случаи, когда в качестве базового принимается соответственно первое или второе уравнение системы (1.1).

В параграфе 2.5, опираясь на полученные интегральные представления решений системы уравнений (1.1), проводится постановка и решение задач с начальными условиями $K_2^1 - K_2^8$, изложенными ниже.

Задача K_2^1. Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_1,$$

$p_1 = const.$

Задача K_2^2. Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D, для которого выполняется условие

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_2,$$

в котором p_2 –заданно известное постоянное.

Задача K_2^3. При выполнении условий $m = 1, n \geq 2$. Найти решение системы (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_3,$$

в котором предполагается, что p_3 –есть заданное известное постоянное.

Задача K_2^4. Найти решение системы (1.1) $m = 1, n \geq 2$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_4,$$

$p_4 = const.$

Задача K_2^5. Найти решение системы (1.1) $m \geq 2, n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D, для которого выполняется условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_5,$$

в котором p_5 –заданно известное постоянное.

Задача K_2^6. При выполнении условий $m \geq 2, n = 1$. Найти решение системы (1.1), которое принадлежит классу $C^1\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{x \to 0} u(x,y)\right\} = \ p_6,$$

в котором предполагается, что p_6 —есть заданное известное постоянное.

Задача K_2^7. Найти решение системы (1.1) $m \geq 2, n \geq 2$, принадлежащее классу $C^1\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \to 0}\left\{exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)]\lim_{x \to 0} u(x,y)\right\} = \ p_7,$$

$p_7 = const.$

Задача K_2^8. Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D, для которого выполняется условие

$$\lim_{x \to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{y \to 0} u(x,y)\right\} = \ p_8,$$

в котором p_8 —заданно известное постоянное.

Решение задачи K_2^1. Для решения задачи K_2^1 применяется интегральное представление, заданное формулами (2.1.1) и (2.1.7), а также рассматриваются его основные свойства. Из анализа данных свойств и условий задачи K_2^1 следует, что

$$c_1 = p_1. \qquad (2.5.1)$$

Подставляя найденное значение c_1 из (2.5.1) в (2.1.1) и (2.1.7), получим решение задачи K_2^1.

Итак, доказана следующая

Теорема 2.5.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда у задачи K_2^1 есть единственное решение, определяющее формулами (2.1.1), (2.1.7) и (2.5.1).*

Решение задачи K_2^2. Для решения задачи K_2^2 применяется интегральное представление, заданное формулами (2.1.9) и (2.1.14), а также рассматриваются его основные свойства. Из анализа этих свойств и условий задачи K_2^2 следует, что

$$c_2 = p_2. \qquad (2.5.2)$$

Подставляя найденное значение c_2 из (2.5.2) в (2.1.9) и (2.1.14), получим решение задачи K_2^2.

Итак, доказана

Теорема 2.5.2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1.2. Тогда у задачи K_2^2 есть единственное решение, определяющее формулами (2.1.9), (2.1.14) и (2.5.2).*

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_2^3 - K_2^8$ справедливы следующие

Теорема 2.5.3. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (1.1) выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда у задачи K_2^3 существует единственное решение, находящееся соотношениями (2.1.1) и (2.2.1), в которых $c_3 = p_3$.*

Теорема 2.5.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.2 для системы (1.1) у задачи K_2^4 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (2.2.2) и (2.1.14), в которых $c_4 = p_4$.*

Теорема 2.5.5. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.3.1. Тогда у задачи K_2^5 есть единственное решение, определяющее формулами (2.3.1) и (2.3.2), в которых $c_5 = p_5$.*

Теорема 2.5.6. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (1.1) выполнены условия теоремы 2.3.2. Тогда у задачи K_2^6 существует единственное решение, находящееся соотношениями (2.1.9) и (2.3.3), в которых $c_6 = p_6$.*

Теорема 2.5.7. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.4.1. Тогда у задачи K_2^7 есть единственное решение, определяющее формулами (2.3.1) и (2.4.7), в которых $c_7 = p_7$.*

Теорема 2.5.8. *При выполнении условий теоремы 2.4.2 для системы (1.1) у задачи* K_2^8 *существует единственное решение, которое находится по соотношениям (2.2.2) и (2.4.13), в которых* $c_8 = p_8$.

В третьей главе проводится исследование системы двух дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2), заданных в области D.

В §3.1 главы 3 исследуется система (2.1) при условии $m = n = p = 1$. Выводы, сделанные в настоящем параграфе, представлены в теоремах 3.1.1 и 3.1.2.

Второй параграф главы 3 посвящён анализу системы (2.1) при условии $m = n = 1, p \geq 2$. В данном случае для рассматриваемой системы найдены решения в явном виде, в который входит одна произвольная функция, зависшая от одного независимого переменного. Для полученных решений сформулированы некоторые свойства.

В параграфе 3.3 третьей главы проводится исследование системы (2.1) при параметрах $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p = 1$. В теореме 3.3.1 сформулированы основные выводы данного параграфа, которые соответствуют случаю, когда первое уравнение системы (2.1) является базовым. Аналогичный результат для случая, когда основным считается второе уравнение, приведён в теореме 3.3.2.

В параграфе 3.4 третьей главы для системы (2.1) при условиях $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$, получены интегральные представления общего решения, выраженного через одну произвольную константу. Выводы, сделанные в данном параграфе, изложены в виде следующей теоремы.

Пусть первое уравнение является основным, тогда получена следующая

Теорема 3.4.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.1)* $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ *и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_1(x,y) = (x^2-y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $a_1(x,x) < 0,\ b_1(y,y) < 0,\quad a_2(0,0) > 0$;
4) $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\left((x-y)^{\beta_1}\right),\ \beta_1 > n-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\left((x+y)^{\beta_2}\right), \beta_2 > n-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_1 x^{\mu_1},\ H_1 = const,\ \mu_1 > 2p-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *в* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + (x^2-y^2)^n a_1(x,y) f_2(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^{m+n+p}\left((x^2-y^2)^{-m}a_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-n}b_1(x,y)\right) \times$$
$$\times\, exp\left[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right] \times$$
$$\times \left(F_1(y) + \int\limits_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\right]dt\right) +$$
$$+ (x^2-y^2)^p f_1(x,y) \text{ в } D;$$

6) $f_1(x,y) = o\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > m+n-1$

в окрестности Γ_1^0,

$$f_1(x,y) = o\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > m+n-1$$

в окрестности Γ_2^0,

$$f_2(x,0) = O(x^{\mu_3}), \mu_3 > 2p-1.$$

Тогда всякое решение (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$u(x,y) \equiv \Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), \tag{5}$$

$$\varphi_1(x) \equiv N_1\big(c_7, f_2(x,0)\big), \tag{6}$$

$$\psi_1(y) \equiv F_1(y), \tag{7}$$

где $\Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), N_1\big(c_7, f_2(x,0)\big), F_1(y)$ *−известные интегральные операторы,* c_7 *−произвольная постоянная.*

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \to 0$, то получим

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \to 0$ и $x \to 0$ имеем оценку

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\big(exp\big[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\big).$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{exp\big[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_7.$

4°. Если $x \to 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Если $y \to x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

6°. Если $y \to -x$, то

$$u(x,y) = 0.$$

При условии, что в качестве исходного рассматривается второе уравнение системы (2.1), формулируется следующая

Теорема 3.4.2. *Пусть в (2.1)* $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. *Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\bar{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), a_2(x,y), f_2(x,y) \in C(\bar{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0$;
3) $a_2(y,y) > 0, B_1(y,y) < 0$;
4) $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \ \mu_1 > p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
   $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \ \mu_2 > p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
   $|B_1(0,y) - B_1(y,y)\,| \leq H_3 y^{\mu_3}, H_3 = const, \mu_3 > 2(m+n+p)-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)$ *в* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\big((x^2-y^2)^{-p}a_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-\ n}b_1(x,y)\big) \times$$

$$\times\, exp\big[-W_{b_1}^1(x,y)\big]\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}}\ (\psi_1(y) +$$

$$\left.+\int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)\Omega_2\left(N_2\big(c_8, F_1(y)\big), f_2(t,y)\right)}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\Big[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\Big]dt\right) +$$

$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y) + (x^2-y^2)^p c_2(x,y)\Omega_2\left(N_2\big(c_8, F_1(y)\big), f_2(x,y)\right) =$$

$$= (x^2-y^2)^{\ n}a_1(x,y)f_2(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n+p}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\ \text{в}\ D;$$

6) $f_2(x,y) = o((x-y)^{\gamma_1}),\ \ \gamma_1 > p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
   $f_2(x,y) = o((x+y)^{\gamma_2}),\ \ \gamma_2 > p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
   $F_1(y) = o(y^{\gamma_3})\,, \gamma_3 > 2(m+n+p)-1.$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *можно найти по формуле*

$$u(x,y) \equiv \Omega_2(\psi_2(y), f_2(x,y)), \tag{8}$$

$$\psi_2(y) \equiv N_2(c_8, F_1(y)), \tag{9}$$

где $\Omega_2(\psi_2(y), f_2(x,y)), N_2(c_8, F_1(y))$ *—известные интегральные операторы,* c_8 *—произвольная постоянная.*

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \to 0$, то будем иметь

$$u(0,y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \to 0$ и $y \to 0$ имеем оценку

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = O\big(exp\big[-B_1(y,y)W_{2(m+n+p)-1}(y)\big]\big).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp\big[B_1(y,y)W_{2(m+n+p)-1}(y)\big]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_8.$

4°. Если $y \to 0$, и $x \neq 0$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right).$$

5°. Если $y \to x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y \to -x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Замечание 3.4.1. Подобные результаты получены и при $m = 2k - 1$.

В параграфе 3.5 представлено рассмотрение системы (2.2) при $m = n = p = 1$**.** Результатом исследования является явное описание многообразия решений, посредством одной произвольной константы. При этом исследованы основные свойства найденных решений.

Параграф § 3.6 главы 3 посвящён исследованию системы (2.2) в случае $m = n = 1, p \geq 2$, при выполнении условий взаимосвязи между коэффициентами. В результате исследования получены явные выражения для многообразия решений и проанализированы их свойства.

В § 3.7 главы 3 исследуется система (2.2) при $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$, где $m, n, p \in \mathrm{N}$. Основные результаты этого параграфа отражены в теоремах 3.7.1 и 3.7.2.

В параграфе 3.8 представлено исследование системы (2.2) в случае, когда $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. Ключевые результаты, полученные в ходе проведённого исследования, формулируются в виде следующих теорем:

Теорема 3.8.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.2)* $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$ *и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

1) $b_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_1(x,y), c_1(x,y),$ $f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0$;
3) $b_1(y,y) > 0, a_1(x,x) > 0,\ b_2(0,0) > 0$;
4) $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x-y)^{\beta_1}\big),\ \beta_1 > n-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
   $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x+y)^{\beta_2}\big),\ \beta_2 > n-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
   $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}),\ \alpha_1 > m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
   $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}),\ \alpha_2 > m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
   $|b_2(0,y) - b_2(0,0)| \leq H_1 y^{\mu_1},\ H_1 = const,\ \mu_1 > 4k-1$;

5) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *в* D,

$$b)\ [(x^2-y^2)^{m+n}b_2(x,y)-(x^2-y^2)^{p+n}a_1(x,y)]\times$$
$$\times exp\left[-W_{a_1}^m(x,y)-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right]\times$$
$$\times\left(\varphi_1(x)+\int\limits_0^y\frac{f_1(x,s)}{(x^2-s^2)^{m+n}}exp\left[W_{a_1}^m(x,s)+a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,s)\right]ds\right)+$$
$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y)+(x^2-y^2)^p=(x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)+$$
$$+(x^2-y^2)^m b_1(x,y)f_2(x,y)\ в\ D;$$

6) $f_1(x,y)=o\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1>m+n-1$

в окрестности Γ_1^0,

$$f_1(x,y)=o\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2>m+n-1$$

в окрестности Γ_2^0,

$$f_2(0,y)=o(y^{\mu_1}),\ \ \mu_1>4k-1.$$

Тогда всякое решение (2.2), которое принадлежит классу $C^2(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ *можно представить в виде*

$$u(x,y)\equiv K_1\big(\psi_1(y),\varphi_1(x),f_1(x,y)\big),\tag{10}$$
$$\psi_1(y)\equiv N_1\big(c_{15},f_2(0,y)\big),\tag{11}$$
$$\varphi_1(x)\equiv G_1(x),\tag{12}$$

где $K_1\big(\psi_1(y),\varphi_1(x),f_1(x,y)\big),N_1\big(c_{15},f_2(0,y)\big),G_1(x)-$ *известные интегральные операторы,* c_{15} *−произвольная постоянная.*

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x\to 0$, то получим
$$u(0,y)=\psi_1(y).$$

2°. При $x\to 0$ и $y\to 0$ имеем оценку
$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=O(exp[b_2(0,0)W_{4k-1}(y)]).$$

3°. $\lim\limits_{y\to 0}\left\{exp[-b_2(0,0)W_{4k-1}(y)]\lim\limits_{x\to 0}u(x,y)\right\}=c_{15}.$

4°. Если $y\to 0$ и $x\neq 0$, то
$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Если $y\to x$, то
$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

6°. Если $y\to -x$, то
$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

Замечание 3.8.1. Для системы уравнений (2.2), как и в теореме 3.8.1, при $p=2k-1$ $(k=1,2,3,\dots)$ получено аналогичное утверждение.

Рассмотрим случай, когда второе уравнение системы (2.2) принимается за исходное. При этом случае имеет место следующая

Теорема 3.8.2. *Пусть в (2.2)* $m\geq 2,n\geq 2,p\geq 2$. *Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:*

1) $b_1(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),\ b_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),f_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),a_1(x,y),c_1(x,y),$
$f_1(x,y)\in C(\overline{D})$;

2) $c_2(x,y)=-c_1(x,y)+(x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y)\neq 0;$

3) $b_2(x,x)<0,B_1(0,0)>0;$

4) $b_2(x,y)-b_2(x,x)=o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1>p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,

$b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \ \mu_2 > p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|B_1(x,0)\ - B_1(0,0)\ | \le H_1 x^{\mu_3},\ \ H_1 = const,\ \ \mu_3 > 2(m+n+p)-1$;

5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)$ *в* D,

$b)$
$$(x^2-y^2)^{m+n+p}\left((x^2-y^2)^{-p}b_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-m}a_1(x,y)\right)\times$$
$$\times exp\left[-W_{a_1}^m(x,y) - a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right]\Bigg(\varphi_1(x) +$$
$$+\int_0^y \frac{f_1(x,s)+c_2(x,s)K_2\big(\varphi_2(x),f_2(x,s)\big)}{(x^2-s^2)^{m+n}} exp\left[W_{a_1}^m(x,s) + a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,s)\right]ds\Bigg)+$$
$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y) + (x^2-y^2)^p c_2(x,y)K_2\big(\varphi_2(x),f_2(x,y)\big) =$$
$$= (x^2-y^2)^m b_1(x,y)f_2(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n+p}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\ \text{ в } D;$$

6) $f_2(x,y) = o\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > p-1$
в окрестности Γ_1^0,
$f_2(x,y) = o\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > p-1$
в окрестности Γ_2^0,
$F_1(x) = o\big(exp\big[B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\big]x^{\lambda_3}\big), \lambda_3 > 2(m+n+p)-1.$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.2), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *можно найти по формуле*
$$u(x,y) \equiv K_2\big((\varphi_2(x), f_2(x,y)\big), \tag{13}$$
$$\varphi_2(x) \equiv N_2\big(c_{16}, F_1(x)\big), \tag{14}$$
где $K_2\big((\varphi_2(x), f_2(x,y)\big), N_2\big(c_{16}, F_1(x)\big)$ *−известные интегральные операторы,* c_{16} *−произвольная постоянная.*

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \to 0$, то имеем
$$u(x,0) = \varphi_2(x).$$
2°. При $y \to 0$ и $x \to 0$ имеем оценку
$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\big(exp\big[B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\big]\big).$$
3°. $\lim_{x\to 0}\left\{exp\big[-B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\big]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_{16}$.

4°. Если $x \to 0$ и $y \neq 0$, то
$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right]\right).$$
5°. Если $y \to x$, то
$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right]\right).$$
6°. Если $y \to -x$, то
$$u(x,y) = 0.$$

В § 3.9 главы 3 приведены задачи с начальными условиями $K_3^1 - K_3^{16}$, сформулированные и решённые для интегральных представлений решений переопределённых систем (2.1) и (2.2). Ниже рассмотрим некоторые из них.

Задача K_3^1. Найти решение системы (2.1) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого имеет место начальное условие
$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_1,$$
$p_1 = const.$

Задача K_3^2. Найти решение системы (2.1) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого выполняется условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[\frac{G_1(0)}{y}\right]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_2,$$

в котором p_2 —заданно известное постоянное.

Задача K_3^3. При выполнении условий $m = n = 1, p \geq 2$. Найти решение системы (2.1), которое принадлежит классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_3,$$

в котором предполагается, что p_3 —есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^4. Найти решение системы (2.1) $m = n = 1, p \geq 2$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-a_1(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_4,$$

$p_4 = const.$

Задача K_3^9. Найти решение системы (2.2) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b_2(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_9,$$

$p_9 = const.$

Задача K_3^{10}. Найти решение системы (2.2) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого выполняется условие

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-b_3(0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_{10},$$

в котором p_{10} —заданно известное постоянное.

Задача K_3^{11}. При выполнении условий $m = n = 1, p \geq 2$. Найти решение системы (2.2), которое принадлежит классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b_2(0,0)W_{4k-3}(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_{11},$$

в котором предполагается, что p_{11} —есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^{12}. Найти решение системы (2.2) $m = n = 1, p \geq 2$, принадлежащее классу $C^2\big(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\big)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-B_1(0,0)W_1(x)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = p_{12},$$

$p_{12} = const.$

Решение задачи K_3^1. Для решения задачи K_3^1 используем интегральное представление, заданное формулами (3.1.6) и (3.1.12), а также его свойства. На основании этих свойств и условий задачи K_3^1 получаем

$$c_1 = p_1. \tag{3.9.1}$$

Подставляя найденное значение c_1 из (3.9.1) в (3.1.6) и (3.1.12) получим решение задачи K_3^1.

Итак, справедлива

Теорема 3.9.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда у задачи* K_3^1 *есть единственное решение, определяющее формулами (3.1.6), (3.1.12) и (3.9.1).*

Решение задачи K_3^2. Для решения задачи K_3^2 используем интегральное представление, заданное формулами (3.1.16) и (3.1.24), а также его свойства. На основании этих свойств и условий задачи K_3^2 получаем

$$c_2 = p_2. \tag{3.9.2}$$

Подставляя найденное значение c_2 из (3.9.2) в (3.1.16) и (3.1.24), получим решение задачи K_3^2.

Итак, доказана

Теорема 3.9.2. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.1) выполнены условия теоремы 3.1.2. Тогда у задачи K_3^2 существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.1.16), (3.1.24) и (3.9.2).*

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_3^3 - K_3^{12}$ справедливы следующие

Теорема 3.9.3. *При выполнении условий теоремы 3.2.1 для системы (2.1) у задачи K_3^3 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.1.6) и (3.2.1), в которых $c_3 = p_3$.*

Теорема 3.9.4. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.2.2. Тогда у задачи K_3^4 есть единственное решение, определяющее формулами (3.2.3) и (3.2.4), в которых $c_4 = p_4$.*

Теорема 3.9.9. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.5.1. Тогда у задачи K_3^9 есть единственное решение, определяющее формулами (3.5.1) и (3.5.2), при этом $c_9 = p_9$.*

Теорема 3.9.10. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.2) выполнены условия теоремы 3.5.2. Тогда у задачи K_3^{10} существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.5.4) и (3.5.5), при этом $c_{10} = p_{10}$.*

Теорема 3.9.11. *При выполнении условий теоремы 3.6.1 для системы (2.2) у задачи K_3^{11} существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.5.1) и (3.6.1), при этом $c_{11} = p_{11}$.*

Теорема 3.9.12. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.6.2. Тогда у задачи K_3^{12} есть единственное решение, определяющее формулами (3.6.3) и (3.6.4), при этом $c_{12} = p_{12}$.*

В главе 4 исследуется система из трёх дифференциальных уравнений, включающая одно линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями и два дифференциальных уравнения первого порядка, также содержащих по две внутренние сингулярные линии. Указанные уравнения связаны между собой через одну общую неизвестную функцию. Используя схему, разработанную в работах Раджабова Н., первое уравнение данной системы представляется в виде произведения двух дифференциальных операторов первого порядка. Путём введения новой неизвестной функции рассматриваемая задача сводится к решению двух расщеплённых дифференциальных уравнений первого порядка. Последовательное интегрирование указанных уравнений позволяет получить общее решение исходного дифференциального уравнения второго порядка в виде выражения, содержащего две произвольные функции одного независимого переменного. Далее, второе и третье уравнения рассматриваемой системы приводятся к специальной форме, упрощающей последующие вычисления. Подставляя найденное решение первого уравнения во второе и третье преобразованные уравнения и выполняя необходимые преобразования, определение первой произвольной функции сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для определения второй произвольной функции используется предельный переход в данном условии.

Аналогичная методика применяется для построения решения в случае, когда второе и третье уравнения выступают в роли базовых.

В следующих случаях получены представления многообразия решений с учётом произвольных константах: $m = n = p = k = 1; m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2;$ $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1;$ $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ $(m, n, p, k \in N)$.

В конце изложены постановка и решение задач с начальными условиями с применением, полученных в ходе исследования системы (3.1) результатов.

В параграфе 4.1 рассматривается система (3.1) при $m = n = p = k = 1$. Основные результаты данного параграфа изложены в теоремах 4.1.1 (для случая, когда базовым является первое уравнение системы), 4.1.2 (когда основным считается второе уравнение) и 4.1.3 (при выборе третьего уравнения в качестве исходного).

В § 4.2 главы 4 система (3.1) исследована при $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$. В рассматриваемом случае многообразие решений представлено в явной форме посредством введения одной произвольной константы и выполнено изучение их свойств.

В третьем параграфе четвёртой главы исследуется система (3.1) при параметрах $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$. На основе схемы, изложенной в предыдущих параграфах, получено явное выражение многообразия решений и отмечены их некоторые характеристики.

В параграфе 4.4 рассмотрена система (3.1) в случае $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$, для которой получены интегральные представления решений, зависящие от одной произвольной константы. Ключевые результаты параграфа изложены в виде следующих теорем.

Теорема 4.4.1. *Пусть в (3.1)* $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$. *Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y),$ $f_3(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0$;
3) $a_1(x,x) < 0,\ b_1(y,y) < 0,\ a_2(0,0) > 0$;
4) $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}),\ \alpha_1 > m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}),\ \alpha_2 > m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x-y)^{\beta_1}\big),\ \beta_1 > n-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x+y)^{\beta_2}\big),\ \beta_2 > n-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_1 x^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \gamma_1 > 2p-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *в* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)(x^2-y^2)^n a_1(x,y) f_2(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^p f_1(x,y) \ \text{в } D,$$

$$c)\ (x^2-y^2)^k exp\Big[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big]\left(\psi_1(y) + \int\limits_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^{m+n}} \times \right.$$
$$\left. \times\, exp\Big[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\Big]dt\right) = f_3(x,y) \ \text{в } D;$$

6) $f_1(x,y) = o\left(exp\Big[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > m+n-1$

в окрестности Γ_1^0,

$$f_1(x,y) = o\left(exp\Big[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > m+n-1$$

в окрестности Γ_2^0,

$$f_2(x,0) = o(x^{\gamma_2}),\ \gamma_2 > 2p-1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *можно найти по формуле*

$$u(x,y) \equiv \Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), \tag{15}$$
$$\varphi_1(x) \equiv N_1\big(c_{10}, f_2(x,0)\big), \tag{16}$$
$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0,y)}{(-y^2)^k}, \tag{17}$$

где $\Omega_1(\varphi_1(x),\psi_1(y),f_1(x,y)),N_1(c_{10},f_2(x,0)),\psi_1(y)$ *−известные интегральные операторы,* c_{10} *−произвольная постоянная.*

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y\to 0$, то будем получать

$$u(x,0)=\varphi_1(x).$$

2°. При $y\to 0$ и $x\to 0$ имеем оценку

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=O\big(exp\big[a_2(0{,}0)W_{2p-1}(x)\big]\big).$$

3°. $\lim_{x\to 0}\left\{exp\big[-a_2(0{,}0)W_{2p-1}(x)\big]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=c_{10}.$

4°. Если $y\to x$, то

$$u(x,y)=\ O\left(exp\Big[a_1(x,x)J^{(2)}_{m-1}(x,y)\Big]\right)\ \text{в окрестности}\ \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y\to -x$, то

$$u(x,y)=\ 0\ \text{в окрестности}\ \Gamma_2^0.$$

Если второе уравнение (3.1) считать исходным, то с использованием вышеописанной схемы получим следующая

Теорема 4.4.2. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1)* $m\ge 2,\ n\ge 2,\ p\ge 2,\ k\ge 2$ *и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

1) $a_1(x,y)\in C^1_x(\overline{D}),\ a_2(x,y)\in C^1_y(\overline{D}), b_2(x,y)\in C^1_x(\overline{D}), f_2(x,y)\in C^1_y(\overline{D}),$
$f_3(x,y)\in C^1_x(\overline{D}), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y)\in C(\overline{D});$
2) $c_2(x,y)=-c_1(x,y)+(x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y)\neq 0;$
3) $a_2(y,y)>0, b_2(0{,}0)>0;$
4) $a_2(x,y)-a_2(y,y)=o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1>p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$a_2(x,y)-a_2(y,y)=o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2>p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|b_2(0,y)\ -b_2(0{,}0)\ |\le H_1y^{\gamma_1},\ H_1=const,\ \gamma_1>4l-1;$
5) $a)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^{2m})}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right)$ *в* D,

$$b)(x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)+(x^2-y^2)^n a_1(x,y)f_2(x,y)=$$
$$=(x^2-y^2)^p f_1(x,y),\ \textit{при}\ a_2(x,y)=b_1(x,y)\ \textit{в}\ D,$$

$$c)\ (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right)+a_2(x,y)f_3(x,y)=$$
$$=(x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)+b_2(x,y)f_2(x,y)\ \ \textit{в}\ D;$$

6) $f_2(x,y)=o\big((x-y)^{\lambda_1}\big),\ \lambda_1>p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$f_2(x,y)=o\big((x+y)^{\lambda_2}\big),\ \lambda_2>p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$f_3(0,y)=o\big(y^{\lambda_3}\big),\ \lambda_3>4l-1.$

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ *можно представить в виде*

$$u(x,y)\equiv\Omega_2\big(\psi_2(y),f_2(x,y)\big),\qquad(18)$$

$$\psi_2(y)\equiv N_2(c_{11},f_3(0,y)),\qquad(19)$$

где $\Omega_2\big(\psi_2(y),f_2(x,y)\big),N_2(c_{11},f_3(0,y))-$ *известные интегральные операторы,* c_{11} *−произвольная постоянная.*

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x\to 0$, то имеем

$$u(0,y)=\psi_2(y).$$

2°. При $x\to 0$ и $y\to 0$ имеем оценку

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = O(exp[b_2(0,0)W_{4l-1}(y)]).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp[-b_2(0,0)W_{4l-1}(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_{11}$.

4°. Если $y \to x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\left[a_2(y,y)J^{(3)}_{p-1}(x,y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma^0_1.$$

5°. Если $y \to -x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\left[a_2(y,y)J^{(3)}_{p-1}(x,y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma^0_2.$$

Замечание 4.4.1. Получены соответствующие утверждения и при $k = 2l - 1$.

При принятии третье уравнения (3.1) в качестве базового, на основе вышеописанной схемы получим следующая

Теорема 4.4.3. *Пусть в (3.1)* $m \ge 2,\ n \ge 2,\ p \ge 2,\ k \ge 2$. *Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:*

1) $a_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}),\ b_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), f_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), f_3(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), a_1(x,y),$ $b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0$;
3) $b_2(x,x) < 0,\ a_2(0,0) > 0$;
4) $b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > k-1$ *в окрестности* Γ^0_1,
   $b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > k-1$ *в окрестности* Γ^0_2,
   $|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_1 x^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \gamma_1 > 2p-1$;
5) *a)* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *в* D,
   b) $(x^2-y^2)^k exp\left[-W^n_{b_1}(x,y) + b_1(y,y)J^{(1)}_{n-1}(x,y)\right](\psi_1(y) +$

$$+\int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)T_3(\varphi_2(t), f_3(t,y))}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\left[W^n_{b_1}(t,y) - b_1(y,y)J^{(1)}_{n-1}(t,y)\right]dt\Bigg) =$$

$$= f_3(x,y) \text{ при } a_1(x,y) = b_2(x,y) \text{ в } D,$$

   c) $(x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + b_2(x,y)f_2(x,y) =$

$$= (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right) + a_2(x,y)f_3(x,y) \text{ в } D;$$

6) $f_3(x,y) = o\left((x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > k-1$ *в окрестности* Γ^0_1,
   $f_3(x,y) = o\left((x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > k-1$ *в окрестности* Γ^0_2,
   $f_2(x,0) = o\left(x^{\theta_1}\right),\ \theta_1 > 2p-1$.

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma^1_0 \cup \Gamma^2_0))$ *можно найти по формуле*

$$u(x,y) \equiv \Omega_3\big((\varphi_2(x), f_3(x,y)\big), \tag{20}$$

$$\varphi_2(x) \equiv N_3(c_{12}, f_2(x,0)), \tag{21}$$

$\Omega_3\big((\varphi_2(x), f_3(x,y)\big), N_3(c_{12}, f_2(x,0))$ *−известные интегральные операторы,* c_{12} *−произвольная постоянная.*

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \to 0$, то имеем

$$u(x,0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \to 0$ и $x \to 0$ имеем оценку

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\right).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_{12}.$

4°. Если $y \to x$, то

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{k-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Если $y \to -x$, то

$$u(x,y) = 0.$$

Доказательство теорем 4.4.1, 4.4.2 и 4.4.3 основано на представлении левой части первого уравнения системы (3.1) в виде произведения двух дифференциальных операторов первого порядка. Далее, подставляя решение первого уравнения во второе и третье уравнения, определяются соответствующие произвольные функции, что позволяет сформулировать и доказать утверждение теоремы 4.4.1

В дальнейшем, соответственно считая второе уравнение исходным и ее решение подставляя в первое и третье уравнение получим утверждение теоремы 4.4.2.

Аналогичным образом доказывается утверждение теоремы 4.4.3.

В параграфе 4.5 главы 4 сформулированы и решены задачи с начальными условиями $K_4^1 - K_4^{12}$, основанные на интегральных представлениях решений системы (3.1). В качестве примера приведём три из них:

Задача K_4^1. Найти решение системы (3.1) $m = n = p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_1,$$

$p_1 = const.$

Задача K_4^9. При выполнении условий $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p = k = 1$. Найти решение системы (3.1), которое принадлежит классу $C^2\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_9,$$

в котором предполагается, что p_9 —есть заданное известное постоянное.

Задача K_4^{10}. Найти решение системы (3.1) $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2\left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$ в области D, для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_{10},$$

$p_{10} = const.$

Решение задачи K_4^1. Для решения задачи K_4^1 используем интегральное представление (4.1.6), (4.1.12) и его свойства. Из этих свойств и условия задачи K_4^1 следует, что

$$c_1 = p_1. \tag{4.5.1}$$

Подставляя найденное значение c_1из (4.5.1) в (4.1.6) и (4.1.12) получим решение задачи K_4^1.

Итак, доказана следующая

Теорема 4.5.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.1.1. Тогда у задачи K_4^1 есть единственное решение, определяющее формулами (4.1.6), (4.1.12) и (4.5.1).*

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_4^2 - K_4^{10}$ справедливы следующие

Теорема 4.5.9. *При выполнении условий теоремы 4.3.3 для системы (3.1) у задачи K_4^9 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (4.1.29) и (4.3.32), при этом $c_9 = p_9$.*

Теорема 4.5.10. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.4.1. Тогда у задачи* K_4^{10} *есть единственное решение, определяющее формулами (4.3.6) и (4.4.1), где* $c_{10} = p_{10}$.

В разделе «Обсуждение полученных результатов» представлен краткий анализ важнейших результатов, полученных в ходе выполнения диссертационного исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе для одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями получены представления многообразия решений. Исследованы свойства данных решений, а также сформулированы и решены задачи с начальными данными. Ниже представлены основные результаты, отражённые в диссертации:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также поставлены и решены некоторые задачи с начальными условиями, которые опубликованы в [1-А], [2-А], [10-А], [12-А], [13-А], [17-А], [18-А] и [25-А];

- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе. Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями. Полученные результаты опубликованы в [3-А], [6-А], [9-А], [11-А], [15-А], [16-А], [19-А], [20-А], [21-А], [24-А] и [26-А];

- исследована переопределённая система, состоящая из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых является гиперболическим уравнением второго порядка. Построены явные представления многообразия её решений. Полученные решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда в качестве основного уравнения выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями. Полученные результаты опубликованы в [4-А], [5-А], [7-А], [8-А], [14-А], [23-А] и [22-А].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Несмотря на преимущественно теоретический характер, полученные в диссертации результаты обладают широкими возможностями практического применения. Научные результаты и выводы вносят существенный вклад для дальнейшего развития теории переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с сингулярными коэффициентами.

Практическая значимость полученных результатов проявляется и в их использовании при решении ряда прикладных задач, где встречаются системы уравнений с сингулярными коэффициентами.

Полученные выводы и формулы могут быть практически применены в следующих направлениях:

1. В математическом моделировании сложных физических процессов, в которых закономерно возникают сингулярные коэффициенты в уравнениях, описывающих явления с разрывными или часто изменяющимися параметрами среды, задачи диффузии и теплопроводности с локальными особенностями, а также волновые процессы в средах со структурными неоднородностями.

2. В механике и инженерных системах. Полученные результаты могут быть востребованы при анализе устойчивости конструкций, при распределении нагрузок, которых имеют специфические особенности, а также при исследовании динамики систем, в которых коэффициенты зависят от положения и обладают особенностями в отдельных точках или на отдельных линиях.

3. В образовательном процессе. Полученные результаты целесообразно использовать в учебном процессе высших учебных заведений при преподавании специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов (PhD) по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика» и «Физика».

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах:

[1-А] Валиев Р.С. Об исследовании одного класса систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. - 2023. - №2 / 1 (108). - С. 23-26.

[2-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал). Серия естественных наук. - 2023. - №2 / 2 (111). - С. 17-21.

[3-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. 2023. Том 1, №4(35). - С. 30-38.

[4-А] Валиев Р.С. Оид ба як системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Светоч науки (Международный научный журнал). Высшая аттестатсионная комиссия при президенте Республики Таджикистан. 2024. №001 (1)/2024. - С. 106-116.

[5-А] Валиев Р.С. Интегралные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Доклады НАН Таджикистана. – 2024. – Т.67, №5-6. – С.243-253.

[6-А] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Хорогского университета. – 2024. №2 (30). – С.197-205.

[7-А] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Известия НАН Таджикистана. – 2024. –№3(196) – С. 48-59.

[8-А] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. 2024. - №2/3 (126) ч-2. - С. 8-15.

[9-А] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник «Номаи Донишгох». Серия естественные и экономические науки. Худжандский государственный университет им. Б. Гафуров. – 2024. – №2 (69). – С. 3-8.

2. Материалы конференций, тезисы докладов:

[10-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 24-28 мая 2022. - С. 254-257.

[11-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений». - г. Бишкек, 23-25 июня 2022. - С. 108-110.

[12-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сверхсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022» - г. Уфа, 28 сент-1 окт 2022. Том 2. - С. 276-278.

[13-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её приложения” ТНУ. – г. Душанбе, 20-21 окт 2022. - С. - 257-260.

[14-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Комплексный анализ и его приложения” БГУ им. Н. Хусрав. - г. Бохтар, 19 ноя 2022. - С. 239-242.

[15-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики» НАНТ институт математики имени А. Джураева. – г. Душанбе, 26-27 мая 2023. - С. 275-277.

[16-А] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Теxт] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. – Казань, 22-27 авг. 2023. - Т. 66. - С. 275-276.

[17-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Теxт] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С.// Материалы международной научно-практической конференции «Междисциплинарное синхронное и асинхронное использование инновационных образовательных технологий в контексте развития креативной активности учащихся и студентов». - г. Денау респ. Узбекистан, 29-30 сентября 2023. - С. 29-31.

[18-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Теxт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» ТНУ. – Душанбе, 5 окт. 2023. - С. 261-263.

[19-А] Валиев Р.С. Интегралные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя

внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» - г. Уфа, 4 – 8 октября 2023. - С. 144 – 146.
[20-А] Валиев Р.С. Об одной системе дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Современные проблем ы дифференциальных уравнений и их приложения» - г. Ташкент респ. Узбекистан, 23 – 25 ноября, 2023. - С. 148 – 149.
[21-А] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения» ТНУ. – г. Душанбе, 18 мая 2024. - С. 359-362.
[22-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Материалы республиканской научно-практической конференции на тему «Современные проблемы и перспективы прикладной математики» Каршинский государственный университет. - г. Карши, 24 - 25 мая 2024. - С. 375-377.
[23-А] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения». Институт математики имени А. Джураева НАНТ. – г. Душанбе, 30-31 мая 2024. - С. 233-236.
[24-А] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы республиканская конференция "Интегративный подход к развитию креативной деятельности учащихся соеденяя синхронно и асинхронно общеобразовательные дисциплины" – г. Ташкент, 25 – 26 октября 2024. - С. 20-23.
[25-А] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно - практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». Ч-2. (Естественные науки). – г. Душанбе, 22-23 ноя. 2024. - С. 24-28.
[26-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними суперсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Сборник трудов всероссийская школа – конференция «Лобачевские чтения». – г. Казань, 27 ноя – 2 дек. 2024. - С. 70-72.

МДТ «ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ БОХТАР БА НОМИ НОСИРИ ХУСРАВ»

УДК 517.95

ББК 22.161

В-15

Бо ҳуқуқи дастхат

Рализода Рузибой Сангимурод

ОИД БА ТАҲҚИҚИ ЯК СИНФИ СИСТЕМАҲОИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ЯКУМ ВА ДУЮМ БО ДУ ХАТИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)
– доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060102
– Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ
ва идоракунии оптималӣ)

Душанбе - 2025

Кор дар кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав иҷро карда шудааст.

Роҳбари илмӣ:	**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич,** доктори илмҳои физикаю математика, дотсент, и.в. профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав.
Официальные оппоненты:	**Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич**, доктори илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон; **Ҷумаев Эраҷ Ҳақназарович,** номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математика ва илмҳои риёзии филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе.
Муассисаи пешбар:	Донишгоҳи славянии Руссияву Тоҷикистон.

Ҳимоя санаи «4» марти соли 2026 соати 14:00 дар ҷаласаи шурои диссертатсионии 6D.КАО-011 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки дар суроғаи: 734025, шаҳри Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, аудиторияи 203 ҷойгир аст, баргузор мешавад.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони котиби илмӣ +992900766603.

Бо диссертатсия ва автореферати он тавассути сомонаи http://www.tnu.tj ва дар китобхонаи илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон шинос шудан мумкин аст.

Автореферат фиристода шудааст «_____» «____» 2026с.

Котиби илмии шурои диссертатсионии 6D.КАО-011,
номзади илмҳои физикаю математика Ғафоров А.Б.

Муқаддима

Мубрамияти мавзӯи илмӣ. Назарияи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳояшон регулярӣ соҳаи таҳқиқоти босамар ва хуб рушдёфта ба ҳисоб меравад. Ин назария, ки бо номи Якоби ва як қатор олимони дигар алоқаманд аст, системаҳои хаттии якҷинса ва ғайриякҷинсаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми бо ҳосилаҳои хусусиро фаро мегирад, ки дорои як функсияи номаълум мебошанд ва аз миқдори ихтиёрии тағйирёбандаҳои мустақил вобастаанд. Назарияи Фробениус оид ба системаҳо дар дифференсиалҳои пурра, ки ҳам барои як ва ҳам барои маҷмӯи функсияҳои номаълум татбиқшаванда аст, ҳамчун идомаи назарияи Коши–Ковалевская хизмат мекунад ва синфҳои муайяни системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусиро дар бар мегирад. Ин назария барои ёфтани тасвирҳои бисёршаклаи ҳалҳо бо коэффитсиентҳои регулярӣ ва сингулярӣ равона шудааст. Рушди минбаъдаи ин назария дар корҳои П. Аппел [29], Л.Г. Михайлов [8], [10], Н.Р. Раджабов [13], [15], Ж.Н. Тасмамбетова [23], А. Хасанов [25] ва шогирдони илмии онҳо инъикос ёфтааст.

Бо назардошти аҳамияти масъалаи мазкур, шумораи зиёди корҳои илмӣ [1]–[156] ба омӯзиши муодилаҳо ва системаҳои зикршуда бахшида шудаанд. Натиҷаҳои бунёдӣ дар ин самт дар монографияҳо ва корҳои илмии як қатор муҳаққиқони маъруф, аз ҷумла А.В. Бицадзе [1], М.М. Смирнов [21], А.М. Нахушев [11], В.И. Жегалов [4], К.Б. Сабитов [19], Т.Д. Джураев [2], М.С. Салахиддинов [31], Т.Ш. Кальменов [6], Л.Г. Михайлов [9], З.Д. Усманов [24], Н. Раджабов [16] - [17], N. Begehr [30], А.Д. Джурев [3], А.С. Исхоков [5], Л.Н. Раджабова [17], А.М. Самойленко [20] ва инчунин мактабҳои илмии онҳо муаррифӣ шудаанд.

Намуди одии системаи муодилаҳои дифференсиалии барзиёдмуайяншуда бо хосилаҳои хусусӣ чунин мебошад:

$$u_x = P(x,y), \quad u_y = Q(x,y)$$

$P_y = Q_x$ шарти зарурӣ ва кифоягӣ барои ҳамҷояшавии ин система мебошад.

Ҳангоми иҷроиши шарти додашуда

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

дифференсиали пурра шуда ва функсияи $u(x,y)$ ба воситаи интегронӣ барқарор карда мешавад. Мутаносибан нисбат ба ҳолатҳои дифференсиали пурра дар фазои сеченака ва фазои n −ченака низ татбиқшаванда мебошад.

Дараҷаи таҳқиқи мавзуи илмӣ. Самтҳои дигари муҳим дар назарияи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ омӯзиши системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии коэффисиентҳояшон регулярӣ, сингулярӣ ва суперсингулярӣ мебошанд.

Баъзе синфҳои системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якум бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ дар корҳои П. Аппел, Л.Г. Михайлов, Н. Раджабов, Э. Рузметов, С. Байзаев, Р. Пиров, Б. Шарипов, Д.С. Сафаров, Ф.М. Шамсудинов, Б. Шоимкулов ва дигарон омӯхта шудаанд.

Ба таҳқиқи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои регулярӣ, сингулярӣ ва суперсингулярӣ корҳои илмии Л.Г. Михайлов [8], Н. Раҷабов [12] - [13], Э.Р. Рузметов [18], Ж.Н. Тасмамбетов [23], Ф. М. Шамсудинов [26] - [27], М.В. Коровина [7], Б.М. Шоимкулов [28] ва мактабҳои илмии онҳо бахшида шудаанд.

Омӯзиши системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо системаҳо бо коэффисиентҳои регулярӣ оғоз шуда, баъдан омӯзиши системаҳои барзиёдмуайяншуда бо коэффисиентҳои сингулярӣ шурӯъ гашт.

Монографияи Михайлов Л.Г. [9] ба таҳқиқи системаҳои барзиёдмуайяншуда бо коэффисиентҳои регулярӣ бахшида шудааст.

Монографияи Н. Раджабов ва М.Э. Абдель-Аал-Гхани Гхареб [12] ба таҳқиқи системаҳои хаттии барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо хатҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ бахшида шудааст.

Монографияи Н. Раҷабов [16] ба таҳқиқи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ навъи гиперболии тартиби дуюм ва баъзе системаҳои барзиёдмуайяншудаи тартиби якум ва дуюм бо як ё ду хати суперсингулярӣ ё нуқтаҳои суперсингулярӣ бахшида шудааст. Инчунин, дар ин монография баъзе системаҳои хаттии бисёрченакаи тартиби якум бо нуқтаҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ ва соҳаҳои суперсингулярӣ таҳқиқ карда шудааст.

Дар монографияи Э. Рузметов [18] тасвирҳои интегралии ҳалҳои бисёршаклаи баъзе системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якум ва дуюм бо нуқтаи сингулярӣ, хатҳо ва ҳамвориҳои сингулярӣ ёфта шудааст.

Дар монографияи математики қазоқ Ж.Н. Тасмамбетов [23] ҳалҳои нормалӣ ва регулярӣ-нормалии системаҳои барзиёдмуайяншуда (махсус)-и муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои полиномиалӣ бартариятдоштаи ду тағйирёбандадошта ҳосил карда шудааст. Методи асосии сохтани ҳалли умумикардашуда ба муаллиф Фробениус - Латышев таaллуқ дорад, ки мафҳуми ранг ва зиддирангро истифода кардааст. Ин мафҳумҳо вақти муайянкунии навъҳои ҳалҳои нормалӣ ва нормалӣ-регулярии системаҳои омӯхташаванда муайянкунии наздикшавии онҳо истифода карда мешаванд.

Масоили марбут ба таҳқиқи системаҳои барзиёдмуайяншуда (махсус)-и муодилаҳои дифференсиалӣ, махсусан дар ҳолатҳое, ки коэффитсиентҳои сингулярӣ ва хатҳои сингулярии дохилӣ вуҷуд доранд, то ҳол дорои аҳамияти илмии худ мебошанд. Бо назардошти мавҷудияти шумораи зиёди корҳои илмӣ, ки ба ҷанбаҳои гуногуни чунин системаҳо бахшида шудаанд, масъалаи тавсифи рафтори ҳалли онҳо дар атрофи хатщои дохилии сингулярӣ то ба имрӯз ба таври кофӣ таҳқиқ нашудааст.

Аз ин ҷиҳат, масъалаи рушди назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати сингулярии дохилӣ аҳамияти калон дорад. Бо ин муносибат, натиҷаҳои назаррас дар таҳқиқи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ду хати сингулярии дохилӣ аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд. Ин натиҷаҳо дар мақолаҳои илмии муаллиф [1-М] - [26-М] нашр гардидаанд, ки дар онҳо ҳам равишҳои таҳлилии тавсифи ҳалли системаҳо ва ҳам намунаҳо бо шартҳои ибтидоии намуди Коши пешниҳод шудаанд.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Таҳқиқоти диссертатсионии мазкур дар чаҳорчӯбаи иҷроиши нақшаю барномаҳои давлатии «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» дар солҳои 2020-2040, «Барномаи мақсадноки давлатии рушди илмҳои риёзӣ, дақиқ ва табиӣ барои солҳои 2021-2025», инчунин нақшаи илмӣ-таҳқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав барои солҳои 2021-2025 дар мавзуъҳои «Таҳқиқи системаҳои эллиптикии хаттӣ ва ғайрихаттӣ дар ҳамворӣ», «Омӯзиши сифатии системаи муодилаҳои чандирию электромагнитӣ ва ёфтани ҳалҳои аниқи онҳо» ва «Ҳосил намудани ҳалҳои ошкори баъзе синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва таҳқиқи хосиятҳои онҳо» иҷро карда шудааст.

Тавсифи умумии таҳқиқот

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кор таҳқиқи як синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ мебошад.

Масъалаҳои таҳқиқот дар кори диссертатсионӣ иборатанд аз:

- таҳқиқи як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум, инчунин як қатор системаҳои барзиёдмуайяншудаи хаттии тартиби дуюми дорои ду ва се муодилаи дифференсиалӣ бо ду хати дохилии сингулярӣ;

- ёфтани тасвирҳои интегралии бисёршаклаи ҳал барои системаҳои таҳқиқшаванда;

- омӯзиши хосиятҳои ҳалҳои ёфташуда;

- таҳқиқи масъалаи навъи Коши барои тасвирҳои интегралии ҳалли ёфташудаи системаҳои омӯхташаванда.

Қайд карда мешавад, ки системаҳои зикршуда бори аввал мавриди омӯзиш қарор мегиранд.

Объекти таҳқиқот. Объекти таҳқиқот системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ мебошанд.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот рафтори ҳалли системаҳои таҳқиқшаванда дар атрофи хатҳои дохилии сингуляриро дар бар мегирад.

Методҳои таҳқиқот. Дар диссертатсия методҳои муосири коркардшуда барои системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии сингулярӣ ва сверхсингулярӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, методи факторизатсия, методи ҳалли муодилаи интегралӣ, инчунин методҳои дар корҳои Н. Раҷабов коркардшуда васеъ истифода мешаванд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои дорои навгонии илмӣ инъикос ёфтаанд, ки муаллиф онҳоро ба таври мустақилона ҳосил кардааст. Мазмуни асосии ин натиҷаҳо чунин аст:

- барои як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум бо ду хати дохилии сингулярӣ дар соҳаи росткунҷавӣ тасвири интегралии бисёршаклаи ҳалҳои он ҳосил карда шудааст. Хосиятҳои ҳалҳо дар атрофи ин хатҳо таҳқиқ гардида, ҳамчунин масъалаҳо бо шартҳои аввала ҳал карда шудаанд;

- тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳои системаҳои барзиёдмуайяншуда, ки аз ду муодилаи дифференсиалӣ иборатан ва яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дувум мебошад, ҳосил карда шудаанд. Ҳалҳо тавассути як доимии ихтиёрӣ ифода шудаанд. Ду ҳолат дида баромада шудааст: вақте ки муодилаи якум асосӣ интихоб карда мешавад ва вақте ки муодилаи дувум асосӣ ҳисобида шудааст. Хосиятҳои ҳалҳои бадастомада дар атрофи хатҳои дохилии сингулярӣ таҳқиқ гардидаанд. Ҳамчунин, масъалаҳо бо шартҳои ибтидоӣ ҳал карда шудаанд;

- системаи барзиёдмуайяншудаи дорои се муодилаи дифференсиалӣ, ки яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дуюм мебошад, таҳқиқ карда шуда, тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳои он сохта шудаанд. Ҳалҳои ҳосилкардашуда тавассути як доимии ихтиёрӣ ифода ёфтаанд. Ҳолатҳои гуногун баррасӣ шудаанд, ки дар онҳо яке аз муодилаҳои якум, дуюм ё сеюм ҳамчун муодилаи асосӣ қабул мегардад. Хосиятҳои ҳалҳо дар атрофи хатҳои сингулярӣ таҳлил гардида, инчунин масъалаҳо бо шартҳои ибтидоӣ баён ва ҳал карда шудаанд.

Аҳамияти назаривӣ ва илмӣ-амалии таҳқиқот. Маводи диссертатсия ба андозаи калон характери назариявӣ доранд. Усулҳои таҳиягардида ва натиҷаҳои бадастомада метавонанд дар ҳалли масъалаҳои гуногуни назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ, геометрияи проективии дифференсиалӣ, масъалаҳои гуногуни амалии электродинамика, механика, физикаи математикӣ ва дигар самтҳо истифода шаванд.

Натиҷаҳои дар кори мазкур пешниҳодшударо метавон дар таълими курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрантон ва докторантони (PhD) - и муассисаҳои таҳсилоти олӣ, ки дар самтҳои математика, математикаи амалӣ ва физика таҳсил мекунанд, истифода намуд.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- исботи теоремаҳо оид ба ёфтани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум бо ду хати дохилии сингулярӣ;

- теоремаҳо оид ба ёфтани тасвирҳои интегралии бисёршаклаи ҳалҳо барои системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо ду хусусияти дохилӣ: хати сингулярӣ ва хатти барзиёдсингулярӣ;

- омӯзиши хосиятҳои тасвирҳои интегралии ҳалҳои ҳосилкардашуда дар атрофи хатҳои дохилии сингулярӣ ва барзиёдсингулярӣ;

- далели теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии масъалаҳо бо шартҳои ибтидоии навъи Коши барои системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм, ки дорои ду хати дохилии сингулярӣ мебошанд.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсия. Дурустии натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ пешниҳодшуда тавассути асосноккунии назариявӣ ва исботҳои қатъӣ, ки ба усулҳои назарияи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои сингулярӣ асос ёфтаанд, таъмин карда шудаанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ. Диссертатсияи мазкур мувофиқи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060102 – «Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ» иҷро шудааст ва пурра ба формулаи он (муодилаҳои дифференсиалии оддӣ), инчунин ба се самти асосии соҳаи тадқиқот мутобиқат мекунад:

1) назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ;

2) масъалаҳои сарҳадӣ-ибтидоӣ ва спектралӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ;

3) назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ-операторӣ.

Самтҳои зикршуда ба бахши «Муодилаҳои дифференсиалӣ» тааллуқ доранд, ки дар банди III, параграфи 3-юми шиносномаи ихтисоси илмӣ пешбинӣ шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Мазмуни диссертатсия ва нуқтаҳои асосие, ки ба ҳимоя пешниҳод шудаанд, саҳми шахсии муаллифро дар корҳои илмии нашршуда инъикос мекунанд. Дар корҳои муштарак бо Шамсудинов Ф.М., [1-М], [3-М], [4-М], [5-М], [7-М] ба ҳаммуаллиф муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада тааллуқ дорад. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия пешниҳодшуда шахсан аз тарафи худи муаллиф ҳосил карда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ муҳокима шудаанд дар:

• семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав зери роҳбарии д.и.ф.-м., профессор Сафаров Д. С. (Бохтар, 2021-2025 с.);

• конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ, таҳлил ва алгебра» (ш. Актобе, 24-28 майи 2022 с.);

• конференсияи байналмилалии «Назарияи муодилаҳои оптималӣ, системаҳои динамикӣ ва муодилаҳои операторӣ» (Бишкек, 23-25 июни 2022г.);

• конференсияи байналмилалии илмии международной научной конференции «Мактаби математикии тирамоҳии Уфа – 2022» (ш. Уфа, 28 сентябр -1 октябри 2022с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он», ДМТ (Душанбе, 20-21 октябри 2022 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Анализи комплексӣ ва татбиқи он» ДДБ ба номи Носири Хусрав (Бохтар, 19 ноябри 2022 с.);

• конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика» бахшида ба 50-солагии институти математика ба номи А. Ҷураев АМИТ (Душанбе, 26-27 майи 2023 с.);

• XVI – умин мактаб-конференсияи Қазон «Назарияи функсия, татбиқи он ва саволҳои ба он вобаста» (Қазон, 22 – 27 августи 2023 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Истифодаи синхронӣ ва асинхронии байнисоҳаҳои технологияҳои инноватсионии таълимӣ дар заминаи рушди фаъолияти эҷодии хонандагон ва донишҷӯён» (ш. Деҳнав, ҷумҳ. Узбекистон, 29-30 сентябри 2023 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он», ДМТ (Душанбе, 5 - октябри 2023 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ «Мактаби математикии тирамоҳии Уфа – 2023» (Уфа, 4 - 8 октябри 2023с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ «Масъалаҳои муосири муодилаҳои дифференсиалӣ ва татбиқи он» (Тошкент, 23 – 25 ноябри 2023 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои мубрами таълими фанҳои техникӣ, дақиқ ва риёзӣ», ДДБ ба номи Н. Хусрав (ш. Бохтар, 17 - 18 майи 2024 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири моделиронии математикӣ ва татбиқи он», ДМТ (Душанбе, 18 - майи 2024 с.);

• конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» институти математика ба номи А. Ҷураев АМИТ (Душанбе, 30-31 майи 2024 с.);

• конференсияи ҷумҳуриявии «Муносибати интегратсионӣ ба рушди фаъолияти эҷодии донишҷӯен бо пайваст кардани фанҳои синхронӣ ва асинхронӣ» (Тошкент, 25-26 октябри 2024 с.);

• конференсияи байналмилалии илмӣ – амалӣ XIV Хониши Ломоносов «Нақши филиали ДДМ ба номи М. Ломоносова дар шаҳри Душанбе дар рушди илм ва маориф». (Душанбе, 22-23 ноябри 2024 с.);

• Мактаб-конференсияи Умумирусиягии хониши Лобачевӣ (Қазон, 27 ноябр - 2 декабри 2024 с.);

Интишорот аз рӯи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои асосӣ оид ба мавзӯи диссертатсия дар 26 корҳои чопии муаллиф нашр шудаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Аз ин шумора, 9 мақола дар нашрияҳое ба табъ расидаанд, ки ба рӯйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон шомил мебошанд. Қисми боқимондаи корҳои нашршуда дар маводи конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ ҷой дода шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Рисола аз муқаддима, чаҳор боб, муҳокимаи натиҷаҳои ҳосилкардашуда, хулоса ва рӯйхати адабиёти истифодашуда, ки дорои 156 адад мебошад, иборат аст. Ҳаҷми умумии диссертатсия 192 саҳифа матни чопшуда мебошад, ки бо истифодаи таҳриргари матнии Microsoft Word тартиб дода шудааст. Барои осонбаёнӣ дар кор рақамгузории пайдарпайи ба теоремаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки бо рақамгузории сегона амалӣ гардидааст: рақами аввал ба шумораи боб мувофиқат мекунад, рақами дуюм - шумораи параграф, рақами сеюм - рақами тартибии теорема, шарҳ, натиҷа ё формулаи дар доираи он параграфро инъикос мекунад.

МАЗМУНИ МУХТАСАРИ РИСОЛА

Дар муқаддимаи кори диссертатсионӣ муҳиммияти масъалаҳои мавриди омӯзиш асоснок гардонида шуда, таърихи кӯтоҳи таҳқиқоти қаблӣ ва шарҳи манбаъҳои илмии марбут ба он пешниҳод гардидааст. Мақсад ва вазифаҳои тадқиқот муайян карда шуда, объект ва предмети таҳқиқ мушаххас карда шудаанд, инчунин методҳои истифодашаванда тавсиф ёфтаанд. Илова бар ин, муҳтавои қисмҳои асосии диссертатсия дар шакли мухтасар ироа гардидааст.

Пас аз муқаддима, таҳлили адабиёти илмие, ки ба самти мавриди омӯзиш бахшида шудааст, пешниҳод мегардад.

Дар шарҳи мухтасари муҳтавои кори диссертатсионӣ рақамгузории бобҳо, теоремаҳо, формулаҳо ва дигар натиҷаҳои илмӣ ҳифз мегардад, ки ба рақамгузории истифодашуда дар матни асосии тадқиқот мувофиқ мебошад.

Бигузор D соҳаи росткунҷаро, ки ба таври зерин дода шудааст, ифода кунад:

$$D = \{(x,y): -a < x < a, 0 < y < a\}.$$

Баъдан, ишора мекунем:

$$\Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\},\ \ \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\},$$
$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \le x \le a\},\ \ \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \le x \le 0\}.$$

Дар оянда таҳти $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ синфи функсияҳоеро мефаҳмем, ки дар соҳаи D, ба истиснои маҷмӯаҳои Γ_0^1 ва Γ_0^2, ҳосилаҳои бефосилаи тартиби якум доранд.

Таҳти $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ синфи функсияҳоеро мефаҳмем, ки дар D ҳосилаҳои бефосилаи тартиби дуюмро доро мебошанд ва инчунин, $u(x,y) \in \left(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\right)$.

Таҳти синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ маҷмӯаи функсияҳо фаҳмида мешавад, ки дар минтақаи D ҳосилаҳои бефосилаи тартиби дуюм доранд, ба шарте ки ҳосилаи омехтаи $u_{xy}(x,y)$ дар маҷмӯаи $D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)$ бефосила бошад.

Дар соҳаи D системаи муодилаҳои дифференсиалии зерин таҳқиқ карда мешаванд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m} u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b(x,y)}{(x^2-y^2)^n} u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^n}, \end{cases} \tag{1.1}$$

дар ин ҷо $a(x,y), b(x,y), f_j(x,y), j = \overline{1,2}$ – функсияҳои додашуда дар соҳаи $D, m = const, n = const, u(x,y) -$ функсияи ҷустуҷӯшаванда;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}} u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p} u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}} u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p} u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}} u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p} u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k} u = \dfrac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}, \end{cases} \tag{3.1}$$

дар ин ҷо $a_i(x,y), b_i(x,y), c_1(x,y), f_j(x,y), i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}$ – функсияҳои додашуда дар соҳаи $D, m = const, n = const, u(x,y) -$ функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Барои системаи (1.1) вобаста аз қиматҳои m, n ($m = n = 1$; $m = 1, n \ge 2$; $m \ge 2, n = 1$; $m \ge 2, n \ge 2$) ва дигар ҳолатҳои имконпазир аз аломатҳои $a(0,0), b(0,0)$ шартҳои ба коэффисиентҳо аз тарафҳои рост ҳангоме ёфта шудаанд, ки коэффисиентҳо байни худ бо таври ошкор алоқаманданд, тасвирҳои бисёршаклаи ҳал бо ёрии ду функсияҳои ихтиёрии як тағйирёбандаи мустақилдошта дар шакли ошкор ёфта шудаанд.

Барои системаи (2.1) вобаста аз қиматҳои m, n, p ($m = n = p = 1$; $m = n = 1, p \ge 2$; $m \ge 2, n \ge 2$; $p = 1$;, $m \ge 2, n \ge 2, p \ge 2$), дигар ҳолатҳои имконпазир аз аломатҳои $a_1(0,0), b_1(0,0), a_2(0,0), b_2(0,0)$ шартҳои ҳамҷояшавӣ барои коэффисиентҳо ва тарафҳои рости системаи (2) ёфта шуда, ҳангоми иҷроиши онҳо ҳалли умумии ин система дар шакли ошкор ёфта шудаанд.

Натиҷаҳои монанд, инчунин барои системаҳои (2.2), (3.1) ҳосил карда шудааст.

Ҳангоми таҳқиқот диққати асосӣ ба ҳолатҳое ҷудо карда мешаванд, ки коэффитсиентҳои муодилаи якуми системаҳои (2.1), (2.2) ва (3.1) бо якдигар ба таври муайян алоқаманданд

$$c_1(x,y)=(x^2-y^2)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y),$$

ва инчунин

$$c_2(x,y)=-c_1(x,y)+(x^2-y^2)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y)\neq 0.$$

Қайд менамоем, ки ҳангоми $c_2(x,y)\neq 0$ масъалаи ёфтани ҳалли умумии системаҳои (2.1) ва (2.2), вобаста ба қиматҳои m,n,p,k, танҳо дар ҳолатҳое баррасӣ мешавад, ки муодилаи дуюми системаҳои (2.1) ва (2.2) ҳамчун муодилаи базавӣ қабул карда мешавад.

Ҳангоми $c_2(x,y)\neq 0$ системаи муодилаҳои (3.1) дар он ҳолат баррасӣ мешавад, ки муодилаҳои дуюм ва сеюми системаи (3.1) ҳамчун муодилаҳои асосӣ қабул карда шаванд.

Дар боби якум баррасии адабиёте, ки ба таҳқиқи баъзе муодилаҳо бо коэффициентҳои регулярӣ ва сингулярӣ, системаҳои барзиёдмуайяншуда бо нуқтаи сингулярӣ, инчунин бо хатҳои сингулярӣ ва барзиёдсингулярӣ марбутанд, оварда шудааст.

Боби дуюми диссертатсия ба дида баромадани системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии (1.1) дар соҳаи D бахшида шудааст. Дар ин боб таваҷҷӯҳи асосӣ ба ёфтани тасвирҳои бисёршаклаи ҳалли як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум бо ду хати дохилии сингулярӣ равона карда мешавад. Системаи таҳқиқшаванда дар ду ҳолат баррасӣ карда мешавад:

1. вақте, ки муодилаи якум ҳамчун муодилаи асосӣ баррасӣ карда мешавад;
2. ҳангоме, ки муодилаи дуюм ҳамчун асосӣ қабул карда мешавад.

Дар натиҷаи таҳлили гузаронидашудаи системаи муодилаҳои мавриди назар, бо дарназардошти алоқамандии муайян байни коэффициентҳо, тасвирҳои бисёршаклаи ҳалҳо бо ёрии як функсияи ихтиерии дорои як тағиребандаи новобаста дар шакли ошкор ҳосил карда шудаанд. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилкардашуда омӯхта шудаанд. Илова бар ин, барои тасвирҳои интегралии ҳосилкардашудаи муодилаи таҳқиқшаванда масъалаҳо бо шартҳои аввалаи $K_2^1-K_2^8$ гузошта ва ҳал карда шудаанд.

Дар §2.1 боби 2 системаи муодилаҳои (1.1) ҳангоми $m=n=1$ омӯхта мешавад. Дар ин ҳолат барои системаи (1.1) тасдиқоти мувофиқ ҳосил карда шуда, хосиятҳои ҳалҳои ҳосилшуда омӯхта шудаанд. Дар теоремаи 2.1.1 натиҷаҳои асосӣ барои ҳолате, ки муодилаи якуми системаи (1.1) ҳамчун асосӣ қабул карда мешавад, баён шудаанд. Дар теоремаи 2.1.2 бошад, ҳолате баррасӣ мегардад, ки муодилаи дуюм асосӣ шуморида шудааст.

Дар параграфи дуюми боби дуюми диссертатсия системаи (1.1) барои ҳолати $m=1, n\geq 2$ мавриди таҳқиқ қарор дода шудааст. Барои ин система тасвирҳои бисёршаклаи ҳал бо ёрии як функсияи ихтиёрии дорои як тағйирёбандаи новобаста дар шакли ошкор ҳосил карда шудааст. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилкардашуда омӯхта шудаанд. Натичаҳои асосии параграфи мазкур дар теоремаи 2.2.1 барои ҳолате, ки муодилаи якуми системаи (1.1) ҳамчун муодилаи асосӣ қабул карда шудааст ва дар теоремаи 2.2.2 - барои ҳолате, ки муодилаи дуюм асосӣ аст, баён карда шудаанд.

Параграфи сеюми боби дуюм ба дида баромадани системаи (1.1) ҳангоми $m\geq 2, n=1$ бахшида шудааст. Натичаҳои таҳқиқоти ҳосилкардашуда аз тасдиқоти зерин иборат мебошанд:

Теоремаи 2.3.1. *Фарз мекунем, ки дар системаи муодилаҳои дифференсиалии (1.1)* $m\geq 2, n=1$ *ҳам барои коэффисиентҳо ва ҳам тарафҳои рост шартҳои зерин иҷро шаванд:*

1) $a(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),\ b(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),\ f_1(x,y)\in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D})$;
2) $a(y,y)>0,\ b(0,0)<0$;

3) $a(x,y) - a(y,y) = o\big((x-y)^{\lambda_1}\big),\ \lambda_1 > m-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$a(x,y) - a(y,y) = o\big((x+y)^{\lambda_2}\big),\ \lambda_2 > m-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|b(0,y) - b(0,0)| \le H_1 y^{\lambda_3},\ H_1 = const,\quad \lambda_3 > 1$;

4) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,y)}{x^2-y^2}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right) + a(x,y)f_2(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + b(x,y)f_1(x,y)\ \text{дар } D;$$

5) $f_1(x,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > m-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_1(x,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > m-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$f_1(x,y) = o(y^{\mu_3}),\ \mu_3 > 1$.

Пас ҳалли дилхоҳи (1.1), ки ба синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *тааллуқ дорад, дар шакли зерин ифода карда мешавад*

$$u(x,y) \equiv \chi_1\big(\psi_1(y), f_1(x,y)\big), \tag{1}$$
$$\psi_1(y) \equiv N_1\big(c_5, f_2(0,y)\big), \tag{2}$$

дар ин ҷо $\chi_1\big(\psi_1(y), f_1(x,y)\big), N_1\big(c_5, f_2(0,y)\big)$ *операторҳои интегралии маълум,* c_5 *- доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо қайд менамоем.

1°. Агар фарз кунем, ки $x \to 0$, онгоҳ соҳиб мешавем:
$\lim\limits_{x\to 0} u(x,y) = \psi_1(y)$.

2°. Ҳангоми $x \to 0$ ва $y \to 0$ баҳо медиҳем:
$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} u(x,y)\right\} = O(exp[-b(0,0)W_1(y)])$.

3°. $\lim\limits_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim\limits_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_5$.

4°. Агар $y \to 0$ ва $x \neq 0$, пас
$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a(y,y)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\Big]\right).$$

Фарз мекунем, муодилаи дуюми системаи (1.1) асосӣ аст. Тасдиқоти зерин ҷой дорад

Теоремаи 2.3.2. *Бигузор дар (1.1)* $m \ge 2, n = 1$. *Илова бар ин, фарз мекунем, ки барои коэффициентҳо ва қисмҳои рост талаботҳои зерин иҷро шудаанд:*

1) $b(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ f_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$;

2) $\frac{b(x,x)}{2x} < 0$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$\frac{b(x,x)}{2x} > 0$ *дар атрофи*Γ_2^0,
$a(0,0) > 0$;

3) $b(x,y) - b(x,x) = o\big((x-y)^{\lambda_1}\big),\ 0 < \lambda_1 < 1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$b(x,y) - b(x,x) = o\big((x+y)^{\lambda_2}\big),\ 0 < \lambda_2 < 1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|a(x,0) - a(0,0)| \le H_1 x^{\lambda_3},\ H_1 = const,\quad \lambda_3 > 2m-1$;

4) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,y)}{x^2-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + b(x,y)f_1(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^{m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right) + a(x,y)f_2(x,y)\ \text{дар } D;$$

5) $f_2(x,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > \frac{b(x,x)}{2x}$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_2(x,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > -\frac{b(x,x)}{2x}$ *дар атрофи*Γ_2^0,
$f_1(x,0) = o(x^{\mu_1}),\ \mu_1 > 2m-1$.

Онгоҳ, бо иҷроиши талаботҳои дар боло зикршуда ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (1.1)-ро, ки ба синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ таалluқ дорад, бо формулаи зерин ёфтан мумкин аст

$$u(x,y) \equiv \chi_2\big(\varphi_1(x), f_2(x,y)\big), \tag{3}$$

$$\varphi_1(x) \equiv N_2\big(c_6, f_1(x,0)\big), \tag{4}$$

дар ин ҷо $\chi_2\big(\varphi_1(x), f_2(x,y)\big), N_2\big(c_6, f_1(x,0)\big)$-операторҳои интегралии маълум, $c_6 -$ доимии ихтиёрӣ.

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем.

1°. Агар фарз кунем, ки $y \to 0$, пас тасдиқоти зеринро соҳиб мешавем:

$$u(x,0) = \varphi_1(x).$$

2°. Ҳангоми $y \to 0$ ва $x \to 0$ баҳо медиҳем

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O(exp[a(0,0)W_{2m-1}(x)]).$$

3°. $\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_6.$

4°. Агар $y \to x$, пас

$$u(x,y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_1^0.$$

5°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_2^0.$$

Дар §4 боби 2 системаи (1.1) ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2$ дида баромада мешавад. Тасвирҳои интегралии ҳал бо ёрии як функсияи ихтиёрӣ ҳосил карда шудаанд. Натичаҳои асосии параграфи мазкур дар теоремахои 2.4.1 (барои ҳолате, ки муодилаи якуми системаи (1.1) ҳамчун асосӣ қабул шудааст) ва 2.4.2 (вақте ки муодилаи дуюм ҳамчун асосӣ баррасӣ мегардад) баён ёфтаанд.

Дар параграфи 2.5 барои системаи муодилаҳои барзиёдмуайяншудаи (1.1) дар асоси тасвирҳои интегралии ҳалҳои ҳосилкардашуда масъалаҳо бо шартҳои аввалаи $K_2^1 - K_2^8$ гузошта ва ҳал карда шудаанд, ки дар поён оварда мешаванд.

Масъалаи $\boldsymbol{K_2^1}$. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1.1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = \ p_1,$$

$p_1 = const.$

Масъалаи $\boldsymbol{K_2^2}$. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1.1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = \ p_2,$$

дар ин ҷо $p_2 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи $\boldsymbol{K_2^3}$. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = 1, n \geq 2$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = \ p_3,$$

дар ин ҷо $p_3 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи $\boldsymbol{K_2^4}$. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = 1, n \geq 2$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = \ p_4,$$

$p_4 = const.$

Масъалаи K_2^5. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2, n = 1$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = \ p_5,$$

дар ин ҷо $p_5 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_2^6. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2, n = 1$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = \ p_6,$$

дар ин ҷо $p_6 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_2^7. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = \ p_7,$$

$p_7 = const.$

Масъалаи K_2^8. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (1) аз синфи $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2$ бо шарти аввалаи зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = \ p_8,$$

дар ин ҷо $p_8 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Ҳалли масъалаи K_2^1. Барои ҳалли масъалаи K_2^1 тасвирҳои интегралии ҳалҳои (2.1.1), (2.1.7) ва хосиятҳои онро истифода мекунем. Аз ин хосиятҳо ва шарти масъалаи K_2^1 бар меояд, ки

$$c_1 = p_1. \tag{2.5.1}$$

Қимати ёфташудаи c_1 - ро аз (2.5.1) дар (2.1.1) ва (2.1.7) гузошта, ҳалли масъалаи $K_2^1 -$ ро ҳосил мекунем.

Ҳаминхел, теоремаи зерин исбот шуд

Теоремаи 2.5.1. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 2.1.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_2^1 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.1.1), (2.1.7) ва (2.5.1) муайян карда мешавад.*

Ҳалли масъалаи K_2^2. Барои ҳалли масъалаи K_2^2 тасвири интегралии (2.1.9), (2.1.14) ва хосиятҳои онро истифода мебарем. Аз ин хосиятҳо ва шарти масъалаи K_2^2 бар меояд, ки

$$c_2 = p_2. \tag{2.5.2}$$

Қимати ёфташудаи c_2 – ро аз (2.5.2) дар (2.1.9) ва (1.1.14) гузошта, ҳалли масъалаи $K_2^2 -$ ро ҳосил мекунем.

Ҳаминхел, исбот шуд

Теоремаи 2.5.2. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 2.1.2 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_2^2 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.1.9), (2.1.14) ва (2.5.2) муайян карда мешавад.*

Бо дастрасии масъалаҳои аввалаи $K_2^3 - K_2^8$ тасдиқотҳои зерин ҳосил карда шудаанд.

Теоремаи 2.5.3. *Агар дар системаи муодилаҳои (1.1) коэффисиентҳо ва тарафҳои рост ҳамаи шартҳои теоремаи 2.2.1-ро қаноат кунонанд. Пас масъалаи K_2^3 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.1.1) ва (2.2.1) ҳангоми $c_3 = p_3$ ифода карда мешавад.*

Теоремаи 2.5.4. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.2.2 барои системаи (1.1) масъалаи K_2^4 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.2.2) ва (2.1.14) ҳангоми $c_4 = p_4$ дода мешавад.*

Теоремаи 2.5.5. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 2.3.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_2^5 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.3.1) ва (2.3.2) ҳангоми $c_5 = p_5$ дода мешавад.*

Теоремаи 2.5.6. *Бигузор коэффисиентҳо ва тарафҳои рости системаи муодилаҳои (1.1) ҳамаи шартҳои теоремаи 2.3.2-ро қаноат кунонанд. Пас масъалаи K_2^6 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.1.9) ва (2.3.3) ҳангоми $c_6 = p_6$ дода мешавад.*

Теоремаи 2.5.7. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 2.4.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_2^7 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.3.1) ва (2.4.7) ҳангоми $c_7 = p_7$ дода мешавад.*

Теоремаи 2.5.8. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.4.2 барои системаи (1.1) масъалаи K_2^8 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (2.2.2) ва (2.4.13) ҳангоми $c_8 = p_8$ дода мешавад.*

Дар боби сеюм таҳқиқиқоти ду системаи муодилаҳои дифференсиалии (2.1) ва (2.2) дар соҳаи D гузаронида шудааст.

Дар §3.1 боби 3 системаи муодилаҳои (2.1) ҳангоми $m = n = p = 1$ $(m, n, p -$ ададҳои натуралӣ) таҳқиқ карда шудааст. Натиҷаи параграфи мазкур дар теоремаҳои 3.1.1 ва 3.1.2 оварда шудаанд.

Параграфи дуюми боби 3-юм ба таҳлили системаи муодилаҳои (2.1) ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ бахшида шудааст. Дар ин ҳолат барои системаи дидашаванда ҳал бо ёрии як функсияи ихтиёрии як тағйирёбандаи новобастадошта дар шакли ошкор ёфта шудааст. Хосиятҳои ҳалҳои ёфташуда омӯхта шудаанд.

Дар параграфи сеюми боби сеюм системаи муодилаҳои (2.1) ҳангоми $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p = 1$ дида баромада шудааст. Натиҷаи асосии ин параграф дар теоремаи 3.3.1 ҳангоми муодилаи якуми системаи (2.1) асосӣ аст ва дар теоремаи 3.3.2 ҳангоми муодилаи дуюм асосӣ будан, оварда шудааст.

Дар § 3.4 боби 3 барои системаи муодилаҳои (2.1) ҳаноми $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$ тасвирҳои интегралии ҳал бо ёрии як доимии ихтиёрӣ ёфта шудааст. Натиҷаҳои асосии параграфи мазкур чунинанд.

Ҳангоми қабул кардани муодилаи якуми системаи (2.1) ҳамчун асосӣ, натиҷаҳои зерин ҳосил карда шудаанд:

Теоремаи 3.4.1. *Фарз мекунем, ки дар системаи муодилаҳои дифференсиалии (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ ҳам барои коэффисиентҳо ва ҳам тарафҳои рост шартҳои зерин иҷро шаванд:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\bar{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}),\ b_1(x,y), c_1(x,y),$ $f_1(x,y) \in C(\bar{D})$;
2) $c_1(x,y) = (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $a_1(x,x) < 0,\ b_1(y,y) < 0,\quad a_2(0,0) > 0$;
4) $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x-y)^{\beta_1}\big),\ \beta_1 > n-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x+y)^{\beta_2}\big),\ \beta_2 > n-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_1 x^{\mu_1},\ H_1 = const,\ \mu_1 > 2p-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + (x^2-y^2)^n a_1(x,y) f_2(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^{m+n+p}\big((x^2-y^2)^{-m}a_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-n}b_1(x,y)\big) \times$$
$$\times exp\left[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right] \times$$
$$\times\left(F_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\right]dt\right) +$$
$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y)\ \text{дар}\ D;$$

6) $f_1(x,y) = o\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > m+n-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_1(x,y) = o\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > m+n-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,

$f_2(x,0) = O(x^{\mu_3}),\ \mu_3 > 2p-1.$

Пас ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (2.1), ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ тааллуқ дорад, дар шакли зерин ифода карда мешавад

$$u(x,y) \equiv \Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), \tag{9}$$

$$\varphi_1(x) \equiv N_1\big(c_7, f_2(x,0)\big), \tag{10}$$

$$\psi_1(y) \equiv F_1(y), \tag{11}$$

дар ин ҷо $\Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), N_1\big(c_7, f_2(x,0)\big), F_1(y) -$ *операторҳои интегралии маълум,* $c_7 -$ *доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем.

1°. Агар фарз кунем, ки $y \to 0$, пас тасдиқоти зеринро соҳиб мешавем:

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \varphi_1(x).$$

2°. Ҳангоми $y \to 0$ ва $x \to 0$ баҳо медиҳем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\big(exp\big[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\big).$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{exp\big[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_7.$

4°. Агар $x \to 0$ ва $y \neq 0$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Агар $y \to x$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

6°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = 0.$$

Бигузор муодилаи дуюми системаи (2.1) асосӣ бошад, пас тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем

Теоремаи 3.4.2. *Бигузор дар (2.1)* $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. *Илова бар ин, фарз мекунем, ки барои коэффициентҳо ва қисмҳои рост талаботҳои зерин иҷро шудаанд:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\bar{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), a_2(x,y), f_2(x,y) \in C(\bar{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0$;
3) $a_2(y,y) > 0, B_1(y,y) < 0$;
4) $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
 $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
 $|B_1(0,y) - B_1(y,y)| \leq H_1 y^{\mu_3},\ H_1 = const,\ \mu_3 > 2(m+n+p)-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right)$ *дар* D,
 $b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\big((x^2-y^2)^{-p}a_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-\ n}b_1(x,y)\big) \times$

$$\times\, exp\big[-W_{b_1}^1(x,y)\big]\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}}\ (\psi_1(y) +$$

$$+\int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)\Omega_2\left(N_2\big(c_8, F_1(y)\big), f_2(t,y)\right)}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\Big[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\Big]dt\Bigg) +$$

$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y) + (x^2-y^2)^p c_2(x,y)\Omega_2\left(N_2\big(c_8, F_1(y)\big), f_2(x,y)\right) =$$

$$= (x^2-y^2)^{\,n} a_1(x,y) f_2(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\ \text{дар}\ D;$$

6) $f_2(x,y) = o((x-y)^{\gamma_1}),\ \gamma_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
 $f_2(x,y) = o((x+y)^{\gamma_2}),\ \gamma_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,

$F_1(y) = o(y^{\gamma_3})\,, \gamma_3 > 2(m+n+p)-1.$

Онгоҳ, бо иҷроиши талаботҳои дар боло зикршуда ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (2.1)-ро, ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ таааллуқ дорад, бо формулаи зерин ёфтан мумкин аст

$$u(x,y) \equiv \Omega_2\big(\psi_2(y), f_2(x,y)\big), \tag{8}$$

$$\psi_2(y) \equiv N_2\big(c_8, F_1(y)\big), \tag{9}$$

дар ин ҷо $\Omega_2\big(\psi_2(y), f_2(x,y)\big), N_2\big(c_8, F_1(y)\big) -$ *операторҳои интегралии маълум,* $c_8 -$ *доимии ихтиёрӣ.*

Ҳалли ҳосилкардашуда дорои хосиятҳои зерин мебошад.

1°. Агар $x \to 0$, пас

$$u(0,y) = \psi_2(y).$$

2°. Агар $x \to 0$ ва $y \to 0$, пас

$$\lim_{y\to 0}\Big\{\lim_{x\to 0} u(x,y)\Big\} = O\big(exp\big[-B_1(y,y)W_{2(m+n+p)-1}(y)\big]\big).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\Big\{exp\big[B_1(y,y)W_{2(m+n+p)-1}(y)\big]\lim_{x\to 0} u(x,y)\Big\} = c_8.$

4°. Агар $y \to 0$ ва $x \neq 0$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right).$$

5°. Агар $y \to x$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_1^0.$$

6°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\Big[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\Big]\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_2^0.$$

Эзоҳи 3.4.1. Натиҷаҳои монанд ҳангоми $m = 2k-1$, ҳосил карда шудаанд.

Дар параграфи 3.5 системаи (2.2) ҳангоми $m = n = p = 1$ дида баромада шудааст. Дар натиҷа, тасвирҳои бисёршаклаи ҳал бо истифода аз як доимии ихтиерӣ ҳосил карда шуд ва хосиятҳои ҳосилкардашудаи ҳал таҳқиқ карда шудаанд.

Параграфи § 3.6 боби 3 ба таҳқиқи системаи (2.2) ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ ҳангоме, ки коэффисиентҳои муодилаҳо байни худ бо таври муайян алоқаманданд, бахшида шудааст. Дар натиҷа тасвирҳои бисёршаклаи ҳал дар шакли ошкор ҳосил карда шуда, хосиятҳои онҳо таҳлил карда шуданд.

Дар § 3.7 боби 3 системаи (2.2) ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$ $(m,n,p \in \mathrm{N})$ таҳқиқ карда шудааст. Натиҷаҳои асосии параграфи мазкур дар теоремаҳои 3.7.1 ва 3.7.2 нишон дода шудаанд.

Дар параграфи 3.8 системаи муодилаҳои (2.2) ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$ баррасӣ карда шудаанд. Натиҷаҳои асосии таҳлили гузаронидашуда дар теоремаҳои зерин оварда шудаанд:

Теоремаи 3.8.1. *Фарз мекунем, ки дар системаи муодилаҳои дифференсиалии (2.2)* $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ *ҳам барои коэффисиентҳо ва ҳам тарафҳои рост шартҳои зерин иҷро шаванд:*

1) $b_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_1(x,y), c_1(x,y),$
   $f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0;$
3) $b_1(y,y) > 0, a_1(x,x) > 0,\ b_2(0,0) > 0;$
4) $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x-y)^{\beta_1}\big),\ \beta_1 > n-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
   $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x+y)^{\beta_2}\big),\ \beta_2 > n-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
   $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}),\ \alpha_1 > m-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
   $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}),\ \alpha_2 > m-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,

$|b_2(0,y)-b_2(0,0)|\le H_1y^{\mu_1},\ H_1=const,\ \ \mu_1>4k-1;$

5) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *дар* D,

$b)\ [(x^2-y^2)^{m+n}b_2(x,y)-(x^2-y^2)^{p+n}a_1(x,y)]\times$

$$\times exp\left[-W_{a_1}^m(x,y)-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right]\times$$

$$\times\left(\varphi_1(x)+\int_0^y\frac{f_1(x,s)}{(x^2-s^2)^{m+n}}exp\left[W_{a_1}^m(x,s)+a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,s)\right]ds\right)+$$

$$+(x^2-y^2)^pf_1(x,y)+(x^2-y^2)^p=(x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)+$$

$$+(x^2-y^2)^mb_1(x,y)f_2(x,y)\ \text{дар}\ D;$$

6) $f_1(x,y)=o\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1>m+n-1$

дар атрофи Γ_1^0,

$f_1(x,y)=o\left(exp\left[-a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2>m+n-1$

дар атрофи Γ_2^0,

$f_2(0,y)=o(y^{\mu_1}),\ \ \mu_1>4k-1.$

Пас ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (2.2), ки ба синфи $C^2(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ *тааллуқ дорад, дар шакли зерин ифода карда мешавад*

$$u(x,y)\equiv K_1\big(\psi_1(y),\varphi_1(x),f_1(x,y)\big),\tag{10}$$

$$\psi_1(y)\equiv N_1\big(c_{15},f_2(0,y)\big),\tag{11}$$

$$\varphi_1(x)\equiv G_1(x),\tag{12}$$

дар ин ҷо $K_1\big(\psi_1(y),\varphi_1(x),f_1(x,y)\big),N_1\big(c_{15},f_2(0,y)\big),G_1(x)-$ *операторҳои интегралии маълум,* c_{15} $-$ *доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем:

1°. Агар фарз кунем, ки $x\to 0$, пас соҳиб мешавем:

$u(0,y)=\psi_1(y).$

2°. Ҳангоми $x\to 0$ ва $y\to 0$ баҳо медиҳем:

$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}u(x,y)\right\}=\psi_1(0)=O(exp[b_2(0,0)W_{4k-1}(y)]).$

3°. $\lim\limits_{y\to 0}\left\{exp[-b_2(0,0)W_{4k-1}(y)]\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)\right\}=c_{15}.$

4°. Агар $y\to 0$ ва $x\ne 0$, пас

$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Агар $y\to x$, пас

$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

6°. Агар $y\to -x$, пас

$$u(x,y)=O\left(exp\left[b_1(y,y)J_{n-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

Эзоҳи 3.8.1. Барои системаи муодилаҳои (2.2) ҳангоми иҷроиши шартҳои теоремаи 2.8.1 ва $n=2k-1$ ($k=1,2,3\dots$), низ тасдиқоти монанд ҳосил карда шудааст.

Ҳолате, ки муодилаи дуюми системаи (2.2) асосӣ аст, дида мебароем. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.8.2. *Бигузор дар (2.2)* $m\ge 2,n\ge 2,k\ge 2$. *Илова бар ин, фарз мекунем, ки барои коэффициентҳо ва қисмҳои рост талаботҳои зерин иҷро шудаанд:*

1) $b_1(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),\ b_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),f_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),a_1(x,y),c_1(x,y),$
$f_1(x,y)\in C(\overline{D});$

2) $c_2(x,y)=-c_1(x,y)+(x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y)\ne 0;$

3) $b_2(x,x)<0,B_1(0,0)>0;$

4) $b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|B_1(x,0) - B_1(0,0)| \le H_3 x^{\mu_3},\ H_3 = const,\ \mu_3 > 2(m+n+p)-1$;

5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\left((x^2-y^2)^{-p}b_2(x,y) - (x^2-y^2)^{-m}a_1(x,y)\right)\times$$
$$\times exp\left[-W_{a_1}^m(x,y) - a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y)\right](\varphi_1(x)+$$
$$+\int_0^y \frac{f_1(x,s)+c_2(x,s)K_2\left(N_2\left(c_2,F_1(x)\right),f_2(x,y)\right)}{(x^2-s^2)^{m+n}} exp\left[W_{a_1}^m(x,s)+a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,s)\right]ds\Bigg)+$$
$$+(x^2-y^2)^p f_1(x,y) + (x^2-y^2)^p c_2(x,y)K_2\left(N_2\left(c_2,F_1(x)\right),f_2(x,y)\right) =$$
$$= (x^2-y^2)^m b_1(x,y)f_2(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\ \text{дар}\ D;$$

6) $f_2(x,y) = o\left(exp\left[-b_2(0,0)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right](x-y)^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_2(x,y) = o\left(exp\left[-b_2(0,0)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right](x+y)^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$F_1(x) = o\left(exp\left[B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\right]x^{\lambda_3}\right), \lambda_3 > 2(m+n+p)-1$.

Онгоҳ, бо иҷроиши талаботҳои дар боло зикршуда ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (2.2)-ро, ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ тааллуқ дорад, бо формулаи зерин ёфтан мумкин аст

$$u(x,y) \equiv K_2\left((\varphi_2(x), f_2(x,y)\right), \tag{13}$$
$$\varphi_2(x) \equiv N_2\left(c_{16}, F_1(x)\right), \tag{14}$$

дар ин ҷо $K_2\left((\varphi_2(x), f_2(x,y)\right), N_2\left(c_{16}, F_1(x)\right) -$ *операторҳои интегралии маълум,* $c_{16} -$ *доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем:

1°. Агар фарз кунем, ки $y \to 0$, пас соҳиб мешавем:
$$u(x,0) = \varphi_2(x).$$
2°. Ҳангоми $y \to 0$ ва $x \to 0$ баҳо медиҳем:
$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = \varphi_2(0) = O\left(exp\left[B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\right]\right).$$
3°. $\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)\right]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_{16}$.

4°. Агар $x \to 0$ ва $y \ne 0$, пас
$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right]\right).$$
5°. Агар $y \to x$, пас
$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right]\right).$$
6°. Агар $y \to -x$, пас
$$u(x,y) = 0.$$

Дар § 3.9 боби 3 барои тасвирҳои интегралии ҳалли ҳосилкардашудаи системаҳои барзиёдмуайяншудаи (2.1) ва (2.2) масъалаҳо бо шартҳои аввалаи $K_2^1 - K_2^{16}$ гузошта ва ҳал карда шудаанд. Дар поён баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи K_3^1. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = p = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад
$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_1,$$
$p_1 = const$.

Масъалаи K_3^2. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = k = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[\frac{G_1(0)}{y}\right]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = p_2,$$

дар ин ҷо $p_2 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_3^3. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = p_3,$$

дар ин ҷо $p_3 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_3^4. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-a_1(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = p_4,$$

$p_4 = const.$

Масъалаи K_3^9. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.2) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = k = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b_2(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = p_9,$$

$p_9 = const.$

Масъалаи K_3^{10}. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.2) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = k = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-b_3(0)W_1(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = p_{10},$$

дар ин ҷо $p_{10} -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_3^{11}. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.2) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[b_2(0,0)W_{4k-3}(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = p_{11},$$

дар ин ҷо $p_{11} -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи K_3^{12}. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (2.2) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-B_1(0,0)W_1(x)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = p_{12},$$

$p_{12} = const.$

Ҳалли масъалаи K_3^1. Барои ҳалли масъалаи K_3^1 тасвирҳои интегралии ҳалҳои (3.1.6) ва (3.1.12), инчунин хосиятҳои онро истифода мекунем. Аз ин хосиятҳо ва шарти масъалаи K_3^1 бар меояд, ки

$$c_1 = p_1. \tag{3.9.1}$$

Қимати ёфташудаи c_1 – ро аз (3.9.1) дар (3.1.6) ва (3.1.12) гузошта, ҳалли масъалаи $K_3^1 -$ ро ҳосил мекунем.

Ҳамингуна, исбот шуд

Теоремаи 3.9.1. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 3.1.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_3^1 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.1.6), (3.1.12) ва (3.9.1) муайян карда мешавад.*

Ҳалли масъалаи K_3^2. Барои ҳалли масъалаи K_3^2 тасвирҳои интегралии ҳалҳои (3.1.16), (3.1.24) ва хосиятҳои онро истифода мекунем. Аз ин хосиятҳо ва шарти масъалаи K_3^2 бар меояд, ки

$$c_2 = p_2. \tag{3.9.2}$$

Қимати ёфташудаи c_2 – ро аз (3.9.2) дар (3.1.16) ва (3.1.24) гузошта, ҳалли масъалаи $K_3^2 -$ ро ҳосил мекунем.

Ҳаминхел, теоремаи зерин исбот шуд

Теоремаи 3.9.2. *Агар дар системаи муодилаҳои (2.1) коэффисиентҳо ва тарафҳои рост ҳамаи шартҳои теоремаи 3.1.2-ро қаноат кунонанд. Пас масъалаи K_3^2 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.1.16), (3.1.24) ва (3.9.2) ифода карда мешавад.*

Бо дастраси масъалаҳои $K_3^3 - K_3^{12}$ тасдиқотҳои зерин ҳосилкарда шуданд

Теоремаи 3.9.3. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 3.2.1 барои системаи (2.1) масъалаи K_3^3 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.1.6) ва (3.2.1) ҳангоми $c_3 = p_3$ дода мешавад.*

Теоремаи 3.9.4. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 3.2.2 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_3^4 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.2.3) ва (3.2.4) ҳангоми $c_4 = p_4$ муайян карда мешавад.*

Теоремаи 3.9.9. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 3.5.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_3^9 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.5.1) ва (3.5.2) ҳангоми $c_9 = p_9$ муайян карда мешавад.*

Теоремаи 3.9.10. *Бигузор дар системаи муодилаҳои (2.2) коэффисиентҳо ва тарафҳои рост ҳамаи шартҳои теоремаи 2.5.2-ро қаноат кунонанд. Пас ҳалли ягонаи масъалаи K_3^{10} бо ёрии формулаҳои (3.5.4) ва (3.5.5) ҳангоми $c_{10} = p_{10}$ ифода карда мешавад.*

Теоремаи 3.9.11. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 3.6.1 барои системаи (2.2) масъалаи K_3^{11} ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.5.1) ва (3.6.1) ҳангоми $c_{11} = p_{11}$ дода мешавад.*

Теоремаи 3.9.12. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 3.6.2 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_3^{12} ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (3.6.3) ва (3.6.4) ҳангоми $c_{12} = p_{12}$ муайян карда мешавад.*

Дар боби 4-ум системаи се муодилаҳои дифференсиалӣ, ки як муодилаи гиперболикии хаттии тартиби дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ ва ду муодилаҳои дифференсиалии тартиби якумро бо ду хати дохилии сингулярӣ дар бар мегиранд, таҳқиқ карда мешавад. Ин муодилаҳо бо ёрии як функсияи номаълум бо ҳам алоқамананданд. Бо истифода аз методи дар корҳои Н. Раҷабов таҳияшуда, муодилаи якуми системаро дар шакли ду оператори диффенсиалии тартиби якум менависем ва функсияи нави номаълумро ворид карда, масъаларо ба ҳалли ду муодилаи дифференсиалии тартиби якуми ҷудошуда меорем. Бо ҳалли пайдарпайии ин муодилаҳо, мо ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуюмро бо ёрии ду функсияи ихтиёрии аз як тағйирёбандаи мустақил иборатбуда, ҳосил мекунем. Сипас муодилаҳои дуюм ва сеюми системаро дар шаклҳои махсус менависем, ки ҳисобҳои минбаъдаро осон мекунанд. Баъдан, ҳалли муодилаи якумро ба муодилаҳои табдилёфтаи дуюм ва сеюм гузошта, пас аз баъзе ҳисоб ва содакуниҳо барои муайян кардани функсияи ихтиёрии якум, муодилаи дифференсиалии одии тартиби якумро ҳосил мекунем. Шарти ҳамҷоягиро барои муайян кардани функсияи ихтиёрии дуюм, нисбат ба коэффитсиентҳо ва қисмҳои рост ҳосил мекунем. Аз ин шарти ҳамҷоягӣ ҳангоми гузариши лимитии мувофиқ функсияи дуюми ихтиерӣ муайян карда мешавад.

Ба ҳамин монанд ҳангоме, ки муодилаҳои дуюм ва сеюми системаи (3.1) асосӣ аст, ҳалҳо ёфта шудаанд.

Тасвирҳои бисёршаклаи ҳал бо ёрии доимиҳои ихтиёрӣ дар ҳолатиҳои зерин ёфта шудаааанд: $m = n = p = k = 1; m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2;$ $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1;$ $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ $(m, n, p, k \in N)$.

Дар охир гузориш ва ҳалли масъалаҳо бо шартҳои аввала бо истифодаи натиҷаҳои ба даст овардашуда ҳангоми таҳлили системаи (3.1) оварда шудаанд.

Дар параграфи 4.1 системаи (3.1) ҳангоми $m = n = p = k = 1$ дида баромада шудааст. Натиҷаҳои асосии ин параграф дар теоремаҳои 4.1.1 (ҳангоми муодилаи якуми система асосӣ будан), 4.1.2 (вақте, ки муодилаи дуюми система асосӣ мебошад) ва 4.1.3 (ҳангоми муодилаи сеюм асосӣ аст) оварда шудаанд.

Дар § 4.2 боби 4 системаи (3.1) ҳангоми $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$ таҳқиқ карда шудааст. Дар ин маврид тасвирҳои бисёршаклаи ҳал ба воситаи як доимии ихтиёрӣ дар шакли ошкор ёфта шудааст. Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашуда баён карда шудаанд.

Дар параграфи 3-юми боби 4-ум бошад, системаи (3.1) ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$ таҳқиқ карда шудааст. Бо истифода аз нақшаи дар параграфҳои пешина овардашуда, тасвирҳои бисёршаклаи ҳал дар шакли ошкор ҳосил карда шуда хосиятҳои ҳалҳои ҳосилкардашуда омӯхта шуданд.

Дар параграфи 4.4 системаи (3.1) ҳангоми $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ дида баромада шуда, тасвирҳои интегралии ҳал бо ёрии як доимии ихтиёрӣ ёфта шудааст. Натиҷаҳои асосии ин параграф бо тасдиқотҳои зерин ифода карда шудаанд

Теоремаи 4.4.1. *Бигузор дар (3.1)* $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$. *Илова бар ин, фарз мекунем, ки барои коэффициентҳо ва қисмҳои рост талаботҳои зерин иҷро шудаанд:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y),$ $f_3(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_1(x,y) = (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $a_1(x,x) < 0,\ b_1(y,y) < 0,\ a_2(0,0) > 0$;
4) $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}),\ \alpha_1 > m-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}),\ \alpha_2 > m-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x-y)^{\beta_1}\big),\ \beta_1 > n-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$b_1(x,y) - b_1(y,y) = o\big((x+y)^{\beta_2}\big),\ \beta_2 > n-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_1 x^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \gamma_1 > 2p-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)(x^2-y^2)^n a_1(x,y) f_2(x,y) = $$
$$= (x^2-y^2)^p f_1(x,y) \text{ дар } D$$

$$c)\ (x^2-y^2)^k exp\Big[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big]\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^{m+n}}\times\right.$$
$$\left.\times\, exp\Big[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\Big]dt\right) = f_3(x,y) \text{ дар } D;$$

6) $f_1(x,y) = o\left(exp\Big[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big](x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > m+n-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_1(x,y) = o\left(exp\Big[b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\Big](x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > m+n-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$f_2(x,0) = o(x^{\gamma_2}),\ \gamma_2 > 2p-1$.

Онгоҳ, бо иҷроиши талаботҳои дар боло зикршуда ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (3.1)-ро, ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *тааллуқ дорад, бо формулаи зерин ёфтан мумкин аст*

$$u(x,y) \equiv \Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), \tag{15}$$
$$\varphi_1(x) \equiv N_1\big(c_{10}, f_2(x,0)\big), \tag{16}$$
$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0,y)}{(-y^2)^k}, \tag{17}$$

дар ин ҷо $\Omega_1\big(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\big), N_1\big(c_{10}, f_2(x,0)\big), \psi_1(y) -$ *операторҳои интегралии маълум,* $c_{10} -$ *доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем:

1°. Агар фарз кунем, ки $y \to 0$, пас соҳиб мешавем:

$$u(x,0) = \varphi_1(x).$$

2°. Агар $y \to 0$ ва $x \to 0$, пас баҳо медиҳем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\big(exp\big[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\big).$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)\right\} = c_1.$

4°. Агар $y \to x$, пас

$u(x,y) = \ O\left(exp\left[-a_1(x,x)J^{(2)}_{m-1}(x,y)\right]\right)$ дар атрофи Γ_1^0.

5°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = \ 0 \text{ дар атрофи } \Gamma_2^0.$$

Агар муодилаи дуюми (3.1)-ро ҳамчун асосӣ қабул кунем, пас бо истифода аз усули дар боло тавсифшуда чунин натиҷаро ба даст меорем

Теоремаи 4.4.2. *Фарз мекунем, ки дар системаи муодилаҳои дифференсиалии (3.1)* $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$ *ҳам барои коэффисиентҳо ва ҳам тарафҳои рост шартҳои зерин иҷро шаванд:*

1) $a_1(x,y) \in C^1_x(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), b_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), f_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}),$
$f_3(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D});$
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0;$
3) $a_2(y,y) > 0, b_2(0,0) > 0;$
4) $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|b_2(0,y)\ - b_2(0,0)\ | \leq H_1 y^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \gamma_1 > 4l-1;$
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^{2m})}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right)$ *дар* D,

$$b)(x^2-y^2)^{m+n+p}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + (x^2-y^2)^n a_1(x,y)f_2(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^p f_1(x,y),\ \text{ҳангоми } a_2(x,y) = b_1(x,y) \text{ дар } D,$$
$$c)\ (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right) + a_2(x,y)f_3(x,y) =$$
$$= (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + b_2(x,y)f_2(x,y)\ \ \text{дар } D;$$

6) $f_2(x,y) = o\left((x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > p-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_2(x,y) = o\left((x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > p-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$f_3(0,y) = o\left(y^{\lambda_3}\right),\ \lambda_3 > 4l-1.$

Пас ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (3.1), ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *тааллуқ дорад, дар шакли зерин ифода карда мешавад*

$$u(x,y) \equiv \Omega_2\left(\psi_2(y), f_2(x,y)\right), \tag{18}$$
$$\psi_2(y) \equiv N_2(c_{11}, f_3(0,y)), \tag{19}$$

дар ин ҷо $\Omega_2\left(\psi_2(y), f_2(x,y)\right), N_2(c_{11}, f_3(0,y)) -$ *операторҳои интегралии маълум,* c_{11} *−доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем:

1°. Агар фарз кунем, ки $x \to 0$, пас соҳиб мешавем:

$$u(0,y) = \psi_2(y).$$

2°. Агар $x \to 0$ ва $y \to 0$, пас баҳо медиҳем:

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\} = O(exp[b_2(0,0)W_{4l-1}(y)]).$$

3°. $\lim\limits_{y\to 0}\left\{exp[-b_2(0,0)W_{4l-1}(y)]\lim\limits_{x\to 0}u(x,y)\right\} = c_{11}.$

4°. Агар $y \to x$, пас

$$u(x,y) = \ O\left(exp\left[a_2(y,y)J^{(3)}_{p-1}(x,y)\right]\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_1^0.$$

5°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\left[a_2(y,y)J_{p-1}^{(3)}(x,y)\right]\right) \text{ дар атрофи } \Gamma_2^0.$$

Эзоҳи 4.4.1. Натиҷаҳои мувофиқ инчунин барои $k = 2l - 1$ ба даст оварда шудаанд.

Ҳангоми муодилаи сеюми (3.1)-ро ҳамчун асосӣ қабул кардан, бо истифода аз схемаҳои дар боло баёншуда, чунин натиҷа ба даст меорем.

Теоремаи 4.4.3. *Бигузор дар (3.1)* $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$. *Илова бар ин, фарз мекунем, ки барои коэффициентҳо ва қисмҳои рост талаботҳои зерин иҷро шудаанд:*

1) $a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_3(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_1(x,y),$ $b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0$;
3) $b_2(x,x) < 0,\ a_2(0,0) > 0$;
4) $b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > k-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$b_2(x,y) - b_2(x,x) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > k-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_1x^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \gamma_1 > 2p-1$;
5) $a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *дар* D,

$$b)\ (x^2-y^2)^k exp\left[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y)\right]\Bigg(\psi_1(y) +$$

$$+\int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)T_3(\varphi_2(t), f_3(t,y))}{(t^2-y^2)^{m+n}} exp\left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y)\right]dt\Bigg) =$$

$$= f_3(x,y) \text{ ҳангоми } a_1(x,y) = b_2(x,y) \text{ дар } D,$$

$$c)\ (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + b_2(x,y)f_2(x,y) =$$

$$= (x^2-y^2)^{p+k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{(x^2-y^2)^k}\right) + a_2(x,y)f_3(x,y) \text{ дар } D;$$

6) $f_3(x,y) = o\left((x-y)^{\lambda_1}\right),\ \lambda_1 > k-1$ *дар атрофи* Γ_1^0,
$f_3(x,y) = o\left((x+y)^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2 > k-1$ *дар атрофи* Γ_2^0,
$f_2(x,0) = o\left(x^{\theta_1}\right),\ \theta_1 > 2p-1$.

Онгоҳ, бо иҷроиши талаботҳои дар боло зикршуда ҳалли дилхоҳи системаи муодилаҳои (3.1)-ро, ки ба синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *тааллуқ дорад, бо формулаи зерин ёфтан мумкин аст*

$$u(x,y) \equiv \Omega_3\left((\varphi_2(x), f_3(x,y)\right), \tag{20}$$

$$\varphi_2(x) \equiv N_3(c_{12}, f_2(x,0)), \tag{21}$$

дар ин ҷо $\Omega_3\left((\varphi_2(x), f_3(x,y)\right), N_3(c_{12}, f_2(x,0)) -$ *операторҳои интегралии маълум,* c_{12} *−доимии ихтиёрӣ.*

Баъзе хосиятҳои ҳалли ҳосилкардашударо баён мекунем:

1°. Агар фарз кунем, ки $y \to 0$, пас соҳиб мешавем:

$$u(x,0) = \varphi_2(x).$$

2°. Ҳангоми $y \to 0$ ва $x \to 0$, пас баҳо медиҳем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\right).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = c_3$.

4°. Агар $y \to x$, пас

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(x,x)J_{k-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

5°. Агар $y \to -x$, пас

$$u(x,y) = 0.$$

Далелҳои дар теоремаҳои 4.4.1, 4.4.2 ва 4.4.3 овардашуда ба тасвирҳои қисми чапи муодилаи якуми система (3.1) дар шакли ду оператори дифференсиалии тартиби якум асос ёфтаанд. Минбаъд, ҳалли муодилаи якумро ба муодилаи дуюм ва сеюм гузошта, функсияҳои ихтиёрии мувофиқро пайдо карда, тасдиқи теоремаи 4.4.1-ро ҳосил мекунем.

Баъдан, мутаносибан муодилаи дуюмро асосӣ ҳисобида ҳалли онро дар муодилаҳои якум ва сеюм гузошта, тасдиқоти теоремаи 4.4.2.-ро ҳосил мекунем.

Ба ҳамин монанд, тасдиқоти теоремаи 4.4.3 исбот карда мешавад.

Дар параграфи 4.5 боби 4 масъалаҳо бо шартҳои аввалаи $K_4^1 - K_4^{12}$, ки дар асоси тасвирҳои интегралии ҳалли системаи (3.1) ҳосил шудаанд, гузошта ва ҳал карда шудаанд. Ҳамчун намуна, сетои онҳо оварда мешаванд:

Масъалаи $\boldsymbol{K_4^1}$. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (3.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m = n = p = k = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = p_1,$$

$p_1 = const.$

Масъалаи $\boldsymbol{K_4^9}$. Дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (3.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2,\ n \geq 2,\ \ p = k = 1$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_1(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = p_9,$$

дар ин ҷо $p_9 -$ доимии маълуми додашуда мебошад.

Масъалаи $\boldsymbol{K_4^{10}}$. Талаб карда мешавад, ки дар соҳаи D ҳалли системаи муодилаҳои (3.1) аз синфи $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ ҳангоми $m \geq 2,\ n \geq 2,\ p \geq 2,\ k \geq 2$ бо шарти зерин ёфта шавад

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\big[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\big]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\} = p_{10},$$

$p_{10} = const.$

Ҳалли масъалаи K_4^1. Барои ҳалли масъалаи K_4^1 тасвирҳои интегралии ҳалҳои (4.1.6) ва (4.1.12), инчунин хосиятҳои онро истифода мекунем. Аз ин хосиятҳо ва шарти масъалаи K_4^1 бар меояд, ки

$$c_1 = p_1. \qquad (4.5.1)$$

Қимати ёфташудаи c_1 – ро аз (4.5.1) дар (4.1.6) ва (4.1.12) гузошта, ҳалли масъалаи $K_4^1 -$ ро ҳосил мекунем.

Ҳамингуна, исбот шуд

Теоремаи 4.5.1. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 4.1.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_4^1 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (4.1.6), (4.1.12) ва (4.5.1) муайян карда мешавад.*

Бо дастрасии масъалаҳои $K_4^2 - K_4^{10}$ тасдиқотҳои зерин ҳосилкарда шуданд.

Теоремаи 4.5.9. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 4.3.3 барои системаи (3.1) масъалаи K_4^9 ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (4.1.29) ва (4.3.32) ҳангоми $c_9 = p_9$ дода мешавад.*

Теоремаи 4.5.10. *Фарз мекунем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 4.4.1 иҷро шудаанд. Пас масъалаи K_4^{10} ҳалли ягонаро соҳиб шуда, бо ёрии формулаҳои (4.3.6) ва (4.4.1) ҳангоми $c_{10} = p_{10}$ муайян карда мешавад.*

Дар қисми «Баррасии натиҷаҳои бадастомада» таҳлили кӯтоҳи муҳимтарин натиҷаҳои дар раванди иҷрои таҳқиқоти диссертатсионӣ ба дастовардашуда пешниҳод шудааст.

ХУЛОСА

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Дар кори диссертатсионӣ барои як синфи системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ тасвирҳои бисёршаклаи ҳал ҳосил карда шудааст. Хосиятҳои ҳал омӯхта шуда, баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд. Дар поён натиҷаҳои асосии дар диссертатсия инъикос гардида оварда шудааст:

- тасвирҳои бисёршаклаи ҳалҳо барои як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум бо ду хати дохилии сингулярӣ дар росткунҷа ҳосил карда шудаанд. Хосиятҳои ҳосилкардашудаи ҳал дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шуда, инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд, ки дар [1-М], [2-М], [10-М], [12-М], [13-М], [17-М], [18-М] ва [25-М] нашр шудаанд;

- тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳо барои системаҳои барзиёдмуайяншуда, ки аз ду муодилаи дифференсиалӣ иборатанд ва яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дуюм мебошад, ҳосил карда шудаанд. Ҳалҳо бо ёрии як доимии ихтиёрӣ баён карда шудаанд. Ду ҳолат дида баромада шудааст: ҳангоме, ки муодилаи якум асосӣ аст ва ҳангоме, ки муодилаи дуюм асосӣ аст. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилшуда дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шудаанд. Инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд. Натиҷаҳои ҳосилкардашуда дар [3-М], [6-М], [9-М], [11-М], [15-М], [16-М], [19-М], [20-М], [21-М], [24-М] ва [26-М] нашр шудаанд;

- системаи барзиёдмуайяншудаи се муодилаи дифференсиалӣ, ки яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дуюм аст, таҳқиқ карда шудааст. Тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳои он ёфта шудааст. Ҳалҳои ҳосилкардашуда ба воситаи як доимии ихтиёрӣ баён карда шудаанд. Ҳолатҳои гуногун дида баромада шудаанд, вақте ки ҳамчун муодилаи асосӣ муодилаи якум, дуюм ё сеюм қабул карда мешавад. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилшуда дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шудаанд, инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд. Натиҷаҳои ҳосилкардашуда дар [4-М], [5-М], [7-М], [8-М], [14-М], [23-М] ва [22-М] нашр шудаанд.

ТАВСИЯҲО ОИД БА ИСТИФОДАИ АМАЛИИ НАТИҶАҲО

Натиҷаҳои дар диссертатсия бадастомада, сарфи назар аз хусусияти асосан назариявӣ доштани онҳо, имкониятҳои васеи истифодаи амалӣ доранд. Натиҷаҳои илмӣ ва хулосаҳои таҳиягардида барои рушди минбаъдаи назарияи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо коэффитсиентҳои сингулярӣ саҳми назаррас доранд.

Аҳаммияти амалии натиҷаҳои бадастомада инчунин дар истифодаи онҳо ҳангоми ҳалли як қатор масъалаҳои амалӣ, ки дар онҳо системаҳои муодилаҳо бо коэффитсиентҳои сингулярӣ вомехӯранд, зоҳир мегардад.

Хулосаҳои бадастомада ва формулаҳои ҳосилкардашуда метавонанд дар самтҳои зерин амалӣ шаванд:

1. Дар моделсозии математикӣ барои равандҳои мураккаби физикӣ, ки дар онҳо коэффитсиентҳои сингулярӣ ба таври табиӣ дар муодилаҳо пайдо мешаванд, ҳодисаҳоро бо параметрҳои муҳити канишдошта ё зудтағйирёбанда тасвир мекунанд, масъалаҳои диффузия ва гармигузарониро бо махсусиятҳои локалӣ нишон медиҳанд, ҳамчунин равандҳои мавҷиро дар муҳитҳои ғайриякҷинса ифода мекунанд.

2. Дар механика ва системаҳои муҳандисӣ. Натиҷаҳои ҳосилгардида метавонанд ҳангоми таҳлили устувории конструксияҳое, ки дар тақсимоти борҳо хусусиятҳои махсус доранд, истифода шаванд. Ҳамчунин барои омӯзиши динамикаи системаҳо, ки коэффитсиентҳои онҳо аз ҳолати объект вобаста буда, дар баъзе нуқтаҳо ё хатҳо хусусиятҳои сингулярӣ доранд.

3. Дар раванди таълим. Натиҷаҳои дар кор ба даст омадаро метавон дар раванди таълим дар мактабҳои олӣ ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрантон ва докторантон (PhD), ки аз рӯи ихтисосҳои «Математика», «Математикаи амалӣ» ва «Физика» таҳсил мекунанд, мақсаднок истифода намуд.

РӮЙХАТИ АДАБИЁТ

[1] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

[2] Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238с.

[3] Джураев А. Д. Об одном случае вырождения эллиптической системы первого порядка на плоскости [Текст] / А.Д. Джураев //Докл. АН Тадж ССР. – 1972. – Т. 15, №11. – С. 3 – 5.

[4] Жегалов, В.И. О краевых задачах со смешениями для уравненй гиперболического и смешанного типа [Текст] / В.И. Жегалов // Differential equations and apple- cations (I). Proc. of the third conference "Rousse -85". - Bulgaria, 1987. – P.139-142.

[5] Исхоков, С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений [Текст] / С.А. Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 1995.- Т.31, №4. -С. 641-653.

[6] Кальменов, Т.Ш. Критерий единственности решения задача Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения [Техт] / Т.Ш. Кальменов //Дифференциальные уравнения. – 1971. – VII, №1.

[7] Коровина, М.В. Некоторые результаты касающейся задачи Коши для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Коровина //Вестник МГУ. – 1990. – Т. 26, №1. – С. 75-85.

[8] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе: Дониш, 1963. - 183с.

[9] Михайлов, Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями [Текст] /Л.Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1986. – 115с.

[10] Михайлов, Л. Г. К теории полных дифференциалов с сингулярными точками [Текст] /Л. Г. Михайлов //ДАН России. – 1992. – Т. 322, №4. – С. 646-650.

[11] Нахушев, А.М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболического уравнения [Текст] / А.М. Нахушев //Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, №1. – С. 40–56.

[12] Раджабов, Н. Переопределённая линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями/Н. Раджабов, М. Эльсаед Абдель Аал. – Саарбрюкен: Lap Lambert Academic Publishing, 2011. – 234 с.

[13] Раджабов, Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой граничной сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, О.И. Меликов // Доклады АН Республики Таджикистан. - 2015. — Т. 58, № 6. — С.451-457.

[14] Раджабов, Н. Переопределённая линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. - Душанбе: ТНУ, 2021. - 317 с.

[15] Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными линиями или сингулярными поверхностями [Текст] /Н. Раджабов. – Душан- бе: Изд. ТГУ, 1980. – Ч.I. – 127 с.; 1981. – Ч.II. – 170 с.; 1982. – Ч.III. – 170 с.

[16] Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями "Введение в теорию немодельных гиперболических уравнений второго порядка с сингулярными линиями" [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе: Изд – во.ТГУ, Ч.4, 1985. – 148 с.

[17] Раджабова, Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // Вестник национального университета. - 2002. - №5 (31). - С. 44-51.
[18] Рузметов, Э. Дифференциальные уравнения с параметром и их приложения к исследованию некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст] /Э. Рузметов. – Душанбе: ДГПУ, 1994. – 241 с.
[19] Сабитов, К.Б. "О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений"[Текст] / К.Б. Сабитов, Р.Р. Илясов // Изв. вузов. Математика. – 2001. – №5. – С.59-63.
[20] Самойленко, А.М. Решение в конечной форме регулярной системы дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, Ж.Н. Тасмамбетов. - Киев, 1990 (Препр. АН УССР; Институт математики; 90.21), 44с.
[21] Смирнов, М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. – Минск: Высшая школа, 1977. – 157 с.
[22] Тасмамбетов, Ж.Н. Об определении регулярных особенностей одной системы в частных производных [Текст] / Ж.Н. Тасмамбетов //Изв. Каз. ССР, Сер. физ. -мат., 1988, №3. – С. 50-53.
[23] Тасмамбетов, Ж. Н. Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст]: монография. – Актобе, 2015. – 463 с.
[24] Усмонов, З. Д. Обобщенные системы Коши - Римана с сингулярной точкой [Текст] /З.Д. Усмонов. – Душанбе: ТГУ, 1993. – 244 с.
[25] Хасанов, А.Х. Краевые задачи для обобщенного осе симметрического уравнения Гельмгольца [Текст] / А.Х. Хасанов, Р.Б. Сеилханова //Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании» (21-22 февраля 2015г.) Актобе, университет им. К. Жубанова, 2015. – С. 242-247.
[26] Шамсудинов Ф. М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью.\ Ф.М. Шамсудинов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2015.- №1\4(168). - с.37-42.
[27] Шамсудинов, Ф. М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и с связанных с ними переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными точками. [Текст]: дис… докт. физ.-мат. наук: 010102: защищена 25.12.19.: утв. 25.09.20 / Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич. -Д., 2019.-355с.-Библиогр.: с.338-355.
[28] Шоимкулов, Б.М. Интегральные представления многообразия решений для некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками [Текст]: дис… кан. физ.-мат. наук: 010102 / Шоимкулова Бойтура Магмудбековича. -Д., 2006.-110с.
[29] Appel, P. Fonctions hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d’Hermite [Text] / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. – Paris: Gauthier- Villars. – 1926. – 434s.
[30] Begehr, H. Transformations, transmutations and kernel functions [Text] /H. Begehr, R.P. Gilbert. – V.2. – Harlow: Longman, 1993. – 268p.
[31] Salakhidinov, M.S. Solution of the Neumanu Dirichlet boundary value problem for ganeralized bi- axially symmetric Helmholtz equation [Text] / M.S. Salakhidinov, A. Hasanov. – Complex Variables and Elliptic Equations 53(4), 2008. – P. 355-364.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РӮЙИ МАВЗӮИ РИСОЛА

1. Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда:

[1-М] Валиев Р.С. Об исследовании одного класса систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. - 2023. - №2 / 1 (108). - С. 23-26.

[2-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал). Серия естественных наук. - 2023. - №2 / 2 (111). - С. 17-21.

[3-М] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. 2023. Том 1, №4(35). - С. 30-38.

[4-М] Валиев Р.С. Оид ба як системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Светоч науки (Международный научный журнал). Высшая аттестатсионная комиссия при президенте Республики Таджикистан. 2024. №001 (1)/2024. - С. 106-116.

[5-М] Валиев Р.С. Интегралные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Доклады НАН Таджикистана. – 2024. – Т.67, №5-6. – С.243-253.

[6-М] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Хорогского университета. – 2024. №2 (30). – С.197-205.

[7-М] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Известия НАН Таджикистана. – 2024. –№3(196) – С. 48-59.

[8-М] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. 2024. - №2/3 (126) ч-2. - С. 8-15.

[9-М] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник «Номаи Донишгох». Серия естественные и экономические науки. Худжандский государственный университет им. Б. Гафуров. – 2024. – №2 (69). – С. 3-8.

2. Маводҳои конференсияҳо:

[10-М] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 24-28 мая 2022. - С. 254-257.

[11-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений». - г. Бишкек, 23-25 июня 2022. - С. 108-110.

[12-М] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сверхсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022» - г. Уфа, 28 сент-1 окт 2022. Том 2. - С. 276-278.

[13-М] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её приложения” ТНУ. – г. Душанбе, 20-21 окт 2022. - С. - 257-260.

[14-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Комплексный анализ и его приложения” БГУ им. Н. Хусрав. - г. Бохтар, 19 ноя 2022. - С. 239-242.

[15-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики» НАНТ институт математики имени А. Джураева. – г. Душанбе, 26-27 мая 2023. - С. 275-277.

[16-М] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. – Казань, 22-27 авг. 2023. - Т. 66. - С. 275-276.

[17-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С.// Материалы международной научно-практической конференции «Междисциплинарное синхронное и асинхронное использование инновационных образовательных технологий в контексте развития креативной активности учащихся и студентов». - г. Денау респ. Узбекистан, 29-30 сентября 2023. - С. 29-31.

[18-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» ТНУ. – Душанбе, 5 окт. 2023. - С. 261-263.

[19-М] Валиев Р.С. Интегралные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» - г. Уфа, 4 – 8 октября 2023. - С. 144 – 146.

[20-М] Валиев Р.С. Об одной системе дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными с двумя внутренними сингулярными линиями [Техт] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной научной конференции «Современные проблем ы дифференциальных уравнений и их приложения» - г. Ташкент респ. Узбекистан, 23 – 25 ноября, 2023. - С. 148 – 149.

[21-М] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической

конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения» ТНУ. – г. Душанбе, 18 мая 2024. - С. 359-362.
[22-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Материалы республиканской научно-практической конференции на тему «Современные проблемы и перспективы прикладной математики» Каршинский государственный университет. - г. Карши, 24 - 25 мая 2024. - С. 375-377.
[23-М] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Text] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения». Институт математики имени А. Джураева НАНТ. – г. Душанбе, 30-31 мая 2024. - С. 233-236.
[24-М] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Text] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы республиканская конференция “Интегративный подход к развитию креативной деятельности учащихся соеденяя синхронно и асинхронно общеобразовательные дисциплины” – г. Ташкент, 25 – 26 октября 2024. - С. 20-23.
[25-М] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно - практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». Ч-2. (Естественные науки). – г. Душанбе, 22-23 ноя. 2024. - С. 24-28.
[26-М] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними суперсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Сборник трудов всероссийская школа – конференция «Лобачевские чтения». – г. Казань, 27 ноя – 2 дек. 2024. - С. 70-72.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Валиев Рузибой Сангимуродович «Оид ба таҳқиқи як синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ», барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) аз рӯи ихтсос 6D060100 – Математика: 6D060102, – «Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ, идоракунии оптималӣ».

Вожаҳои калидӣ: системаҳои барзиёдмуайяншуда**,** бисёршаклаи ҳал, шарти ҳамҷоягӣ, росткунҷа, хатҳои сингулярӣ, тасвирҳои интегралии ҳал, хосиятҳои ҳал, равиши ҳал, масъала бо шартҳои аввала.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кор таҳқиқи як синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ мебошад.

Методҳои таҳқиқот. Дар диссертатсия методҳои муосири коркардшуда барои системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии сингулярӣ ва барзиёдсингулярӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, методи факторизатсия, методи ҳалли муодилаҳои интегралӣ, инчунин методҳои дар корҳои Н. Раҷабов коркардшуда васеъ истифода мешаванд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ навовариҳои илмиро дар бар гирифта, аз тарафи муаллиф мустақилона ҳосил карда шудаанд. Мазмуни асосии ин натиҷаҳо чунин аст:

- тасвирҳои бисёршаклаи ҳалҳо барои як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум бо ду хати дохилии сингулярӣ дар чоркунҷа ҳосил карда шудаанд. Хосиятҳои ҳосилкардашудаи ҳал дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шуда, инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд;
- тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳо барои системаҳои барзиёдмуайяншуда, ки аз ду муодилаи дифференсиалӣ иборатанд ва яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дуюм мебошад ҳосил карда шудаанд. Ҳалҳо бо ёрии як доимии ихтиёрӣ баён карда шудаанд. Ду ҳолат дида баромада шудааст: ҳангоме, ки муодилаи якум асосӣ аст ва ҳангоме, ки муодилаи дуюм асосӣ аст. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилшуда дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шудаанд. Инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд;
- системаи барзиёдмуайяншудаи се муодилаи дифференсиалӣ, ки яке аз онҳо муодилаи гиперболикии тартиби дуюм аст, таҳқиқ карда шудааст. Тасвирҳои ошкорои бисёршаклаи ҳалҳои он ёфта шудааст. Ҳалҳои ҳосилкардашуда ба воситаи як доимии ихтиёрӣ баён карда шудаанд. Ҳолатҳои гуногун дида баромада шудаанд, вақте ки ҳамчун муодилаи асосӣ муодилаи якум, дуюм ё сеюм қабул карда мешавад. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилшуда дар атрофи хатҳои сингулярӣ омӯхта шудаанд, инчунин баъзе масъалаҳо бо шартҳои аввала гузошта ва ҳал карда шудаанд.

Аҳамияти назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Маводҳои диссертатсия ба андозаи зиёд характери назариявӣ доранд. Методҳои дар он инкишофдодашуда ва натиҷаҳои ҳосилкардаро метавон дар дигар масъалаҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ, геометрияи проективию дифференсиалӣ, масъалаҳои гуногуни амалии электродинамика, механика, физикаи математикӣ ва ғайраҳо истифода намуд.

Натиҷаҳои дар кор пешниҳодшуда метавонанд ҳангоми таълим додани курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрантон ва докторантони PhD, ки аз рӯи ихтисосҳои «Математика», «Математикаи амалӣ» ва «Физика» таҳсил мекунанд, истифода шаванд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Валиева Рузибоя Сангимуродовича «Об исследовании одного класса переопределенных систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями», представленной на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102, – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Ключевые слова: переопределенная система, многообразия решений, условия совместности, прямоугольник, сингулярные линии, интегральные представления решений, свойства решений, поведение решения, задача с начальными данными.

Цель исследования. Основная цель данной работы заключается в исследовании одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка, содержащих две внутренние сингулярные линии.

Методы исследования. В диссертации применены современные методы, разработанные для переопределённых систем сингулярных и сверхсингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, общие методы теории дифференциальных уравнений, метод факторизации, метод решения интегральных уравнений, а также широко используются методы, разработанные в работах Н. Раджабова.

Полученные результаты и их новизна. Диссертационная работа содержит результаты, обладающие научной новизной, полученные автором самостоятельно. Содержание этих результатов заключается в следующем:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также поставлены и решены некоторые задачи с начальными условиями;

- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе. Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями;

- исследована переопределённая система, состоящая из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых является гиперболическим уравнением второго порядка. Построены явные представления многообразия её решений. Полученные решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда в качестве основного уравнения выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями.

Теоретическая и практическая ценность. Материалы диссертации в значительной степени носят теоретический характер. Разработанные в ней методы и полученные результаты могут быть применены для решения задач в теории дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, в проективной дифференциальной геометрии, а также в различных прикладных задачах электродинамики, механики, математической физики и других областях.

Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при преподавании специализированных курсов для студентов, магистрантов и докторантов PhD обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика» и «Физика».

ABSTRACT

of the dissertation by Valiev Ruziboy Sangimurodovich "On the study of a class of overdetermined systems of first- and second-order differential equations with two internal singular lines", submitted for the degree of doctor of philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 – Mathematics: 6D060102 – Differential equations, dynamical systems, and optimal control.

Keywords: overdetermined system, solution manifolds, compatibility conditions, rectangle, singular lines, integral representations of solutions, properties of solutions, solution behavior, initial-boundary value problem.

Research objective. The main objective of this study is to investigate a class of overdetermined systems of first- and second-order differential equations containing two internal singular lines.

Research methods. The dissertation employs modern methods developed for overdetermined systems of singular and supersingular partial differential equations, general methods from the theory of differential equations, the factorization method, and the method for solving integral equations. Additionally, methods developed in the works of N. Rajabov are extensively used.

Results and their novelty. The dissertation presents results possessing scientific novelty, obtained independently by the author. The content of these results is as follows:

- for a single overdetermined system of first-order differential equations with two internal singular lines in a rectangular domain, a description of the solution manifold has been obtained. The behavior of solutions in the vicinity of the singularities has been investigated, and several initial-boundary value problems have been formulated and solved.

- explicit representations of the solution manifolds for overdetermined systems consisting of two differential equations, one of which is a second-order hyperbolic equation, have been obtained. The solutions are expressed in terms of a single arbitrary constant. Two cases are considered: when the first equation is taken as the base equation and when the second equation is taken as the base. The properties of the obtained solutions in the vicinity of the singular lines have been analyzed. Initial-boundary value problems have also been formulated and solved.

- an overdetermined system consisting of three differential equations, one of which is a second-order hyperbolic equation, has been investigated. Explicit representations of its solution manifold have been constructed. The obtained solutions are expressed in terms of a single arbitrary constant. Various cases have been considered, where the first, second, or third equation serves as the base equation. The properties of the solutions in the neighborhoods of the singular lines have been analyzed, and initial-boundary value problems have been formulated and solved.

Theoretical and practical significance. The materials of the dissertation are largely theoretical in nature. The methods developed and the results obtained can be applied to the solution of problems in the theory of partial differential equations with singular coefficients, in projective differential geometry, as well as in various applied problems in electrodynamics, mechanics, mathematical physics, and other fields.

The results presented in the dissertation can also be used in teaching specialized courses for undergraduate students, master's students, and PhD doctoral candidates in the fields of Mathematics, Applied Mathematics, and Physics.