

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УДК: 519:681.3+004

ББК: 22.174:73+22.18

К-23

На правах рукописи



КАРИМЗОДА МЕХРУБОН МАТКАРИМ

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЦИКЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060200 –
Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования)

Душанбе – 2026

Диссертация выполнена на кафедре информатики механико-математического факультета Таджикского национального университета.

**Научный
руководитель:**

Нуров Исохобой Джумаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационно-коммуникационных технологий Таджикского национального университета.

**Официальные
оппоненты:**

Худойбердиев Хуршед Атохонович, доктор технических наук, доцент кафедры программирования и информационных систем Политехнического института Таджикского технического университета имени академика М. С. Осими в городе Худжанде, г. Худжанд.

Мухаммади Шоира Файзулло, доктор физико-математических наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики, г. Худжанд.

Ведущая организация: **Институт математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана.**

Защита состоится «26» ноября 2026 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.KOA-105 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте <http://www.tnu.tj>.

Автореферат разослан «___» _____ 2026г.

**Учёный секретарь диссертационного
совета, к.ф.-м.н., доцент**



Садуллоев Р.И.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Модели с переключениями играют важную роль в различных областях науки и техники, включая теорию автоматического управления, механику, экономику, биологию и другие разделы прикладных наук. Такие модели, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с негладкими, релейными или разрывными нелинейностями. Практические задачи, возникающие при исследовании указанных систем, стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, основы которой были заложены в работах А. Ф. Филиппова.

Одной из наиболее важных задач при исследовании динамических систем является изучение качественных изменений фазового портрета при варьировании параметров в окрестности состояний равновесия. Анализ таких изменений осуществляется с использованием аппарата теории бифуркаций и позволяет выявлять условия возникновения новых динамических режимов, в частности периодических движений и предельных циклов, что имеет принципиальное значение для исследования циклических явлений.

Теория предельных циклов и их бифуркаций получила значительное развитие благодаря работам таких авторов, как А. Пуанкаре [2], А.М. Ляпунов [3], А.А. Андронов [4], Н.Н. Боголюбов [5], Л. С. Понтрягин [6], Ю.А. Митропольский [7], М.А. Красносельский [8] и их последователей.

Особое место среди указанных явлений занимает бифуркация Андронова–Хопфа, описывающая рождение предельного цикла при изменении параметров системы. В классической постановке данная бифуркация предполагает достаточную гладкость правой части системы, что существенно ограничивает область её применения. В настоящей работе рассматривается обобщение условий возникновения бифуркации Андронова–Хопфа на случай систем с непрерывной, но негладкой правой частью, что позволяет расширить применимость теории к моделям с переключениями, содержащим элементы насыщения, разрывные нелинейности и другие особенности.

В этой связи особую актуальность приобретает не только анализ указанных систем, но и разработка методов их проектирования, обеспечивающих формирование требуемых циклических режимов. Это соответствует современным задачам математического моделирования и систем автоматизации проектирования, где требуется комплексный подход, объединяющий аналитические и вычислительные методы.

Таким образом, диссертационная работа посвящена разработке и исследованию методов анализа и проектирования динамических систем с переключениями, ориентированных на изучение и формирование циклических явлений. Математическую основу исследования составляют следующие системы и уравнения:

1. Двумерная динамическая система с главной однородной частью вида

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

где P, Q – непрерывные функции по совокупности переменных (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, удовлетворяющие условиям $P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0$, $|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0$, $|x| + |y| > 0$, $\lambda \in \Lambda$.

2. Динамическая система вида

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2)$$

где $x \in R^n$, $n \geq 3$, $F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu)$, $A(\mu) = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$ – квадратная матрица, а $\omega(x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, |x| \rightarrow 0.$$

3. Кусочно-линейного дифференциального уравнения вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \quad (3)$$

при $\lambda = 0$, где a, b, c – вещественные числа.

4. Кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + g(y, y') = 0, \quad (4)$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0, \end{cases}$$

здесь $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in R$, $r \neq 0$ и a_i, b_i, c_i – вещественные числа, $i = 1, 2$.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы.

Исследованию бифуркаций и предельных циклов в гладких и негладких динамических системах посвящено значительное число научных работ. В частности, фундаментальные результаты в этой области представлены в трудах А. А. Андропова [4,15], Г. Ю. Ризниченко [9], М. А. Красносельского, Я. З. Цыпкина, А. Ф. Филиппова [1], а также В. И. Уткина [10], в которых с использованием различных аналитических и качественных методов получены условия существования периодических решений для широких классов динамических систем.

В указанных работах разработаны подходы к исследованию колебательных режимов, включая анализ устойчивости предельных

циклов, изучение нелинейных эффектов и построение соответствующих математических моделей. Вместе с тем, значительная часть результатов относится к гладким системам либо к частным классам негладких моделей.

В то же время для динамических систем с переключениями задачи качественного и приближённого исследования бифуркаций и предельных циклов остаются недостаточно разработанными. В ряде современных исследований предлагаются подходы, основанные на сочетании методов сшивания решений в различных областях фазового пространства, развиваемых в рамках теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, и методов анализа периодических режимов в системах, содержащих модульные или кусочно-линейные нелинейности.

Однако вопросы систематического анализа и, особенно, проектирования динамических систем с переключениями, обладающих заданными циклическими свойствами, требуют дальнейшего развития, что и определяет направление настоящего исследования.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информатики Таджикского национального университета на 2021-2024 гг. по теме "Методы качественного и приближённого исследования бифуркаций в динамических системах с переключениями", а также в соответствии с основными положениями Национальной стратегии развития образования Республики Таджикистан на период до 2030 года и Стратегии развития и изучения естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования на период до 2030 года.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью диссертационной работы является разработка и исследование методов анализа и проектирования динамических систем с переключениями, направленных на изучение циклических явлений и периодических режимов в математических моделях с негладкой правой частью в окрестности состояний равновесия. Для достижения поставленной цели в работе выполнено качественное и приближённое исследование бифуркационных процессов, приводящих к возникновению предельных циклов, а также разработаны алгоритмы и программные средства, предназначенные для численного и качественного анализа динамических режимов, представляющих интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Особое внимание уделено исследованию двумерных динамических систем с переключениями, для которых проведён качественный и численный

анализ фазовых портретов, а также разработаны и обоснованы методы сшивания решений на линии переключения, обеспечивающие корректное описание поведения траекторий и формирование циклических режимов.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью исследования сформулированы следующие основные задачи:

1. Для двумерных динамических системы (1) с главной однородной частью получить необходимое и достаточное условия бифуркации периодических решений.

2. Для динамических системы (2) проанализировать условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа;

3. Разработать методы качественного и численного анализа фазовых портретов негладких динамических систем, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными нелинейностями;

4. Разработать программный пакет для численного и качественного анализа полученных результатов динамических систем с переключением.

Объект исследования. Нелинейные, кусочно-линейные дифференциальные уравнения второго и третьего порядков с линейным переключением.

Предмет исследования. Моделирование бифуркационных явлений и предельных циклов в нелинейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков, а также анализ точек контакта на линии переключения.

Методы исследования. В работе применяются методы математического моделирования, теории нелинейных колебаний, приближенные методы решения дифференциальных уравнений, а также методы качественного анализа и исследования бифуркаций, в том числе негладких динамических систем с переключением. Эти методы используются для анализа и проектирования динамических систем, позволяя выявлять условия возникновения предельных циклов и скользящих траекторий, а также создавать модели с заранее заданными режимами движения.

Научная новизна исследования. В работе получены новые научные результаты, обладающие строгой математической обоснованностью и четкой формулировкой. При использовании результатов других авторов приведены соответствующие библиографические ссылки. К основным научным результатам работы относятся следующие положения:

1. Для двумерной динамической системы (1) с главной однородной частью с использованием принципа смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля получены

необходимое и достаточное условия бифуркации периодических решений;

2. Для динамической системы (2) с помощью топологических методов (принцип смены индекса), при условии непрерывной зависимости линейной части системы от параметра в терминах поведения коэффициентов установлены условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа;

3. Предложен новый подход к аналитическому и численному исследованию периодических явлений в негладких системах, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными функциями, обеспечивающий построение фазовых портретов для основных типов негладких динамических систем;

4. Получены расчетные формулы, описывающие периодических явлений, возникающие в окрестности состояний равновесия динамических систем, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными функциями;

5. Создан новый программный комплекс, предназначенный для компьютерного моделирования и анализа предельных циклов динамических систем с переключениями, описываемых уравнениями (3) и (4).

Теоретическая и научно-практическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании математических моделей и методов анализа динамических систем с переключениями, предназначенных для исследования периодических и стационарных режимов в нелинейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков. Полученные результаты развивают топологические и качественные методы теории динамических систем и расширяют классические представления теории бифуркаций применительно к негладким системам с разрывной структурой.

Особое значение имеет развитие подходов к исследованию циклических явлений в системах с переключениями, включая установление условий существования и устойчивости предельных циклов, а также анализ фазовой структуры вблизи линий переключения.

Научно-практическая значимость работы обусловлена тем, что полученные теоретические результаты доведены до уровня расчётных соотношений, алгоритмов и программных средств, пригодных для практического применения. На их основе разработан и реализован программный комплекс на языке Java, предназначенный для

компьютерного моделирования, анализа динамических режимов и построения фазовых портретов систем с переключениями.

Разработанные методы и алгоритмы могут быть использованы при проектировании и исследовании широкого класса нелинейных динамических систем, включая модели с элементами переключения, возникающие в задачах механики, теории автоматического управления, электроники и других прикладных областях, где существенную роль играют циклические процессы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что для двумерной динамической системы (1) с главной однородной частью существуют необходимое и достаточное условия возникновения периодических решений; для динамической системы (2), при непрерывной зависимости линейной части системы от параметра установлены условия возникновения периодических решений в окрестности состояния равновесия на основе принципа смены топологического индекса;

2. Доказано, что для кусочно-линейного дифференциального уравнения (3) применим аналог формулы Лиувилля – Остроградского, описывающий изменение вронскиана при переходе решений между областями действия различных линейных уравнений; для кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка (4) доказано существование предельного цикла на основе сшивания решений и анализа точек контакта на линии переключения;

3. Разработаны алгоритмы автоматизированного численного моделирования и качественного анализа уравнений (3) и (4), обеспечивающие определение точек контакта, вычисление вронскиана и визуализацию фазовых портретов в автоматическом режиме. На основе разработанных алгоритмов получен программный комплекс, позволяющий исследовать условия возникновения и циклических режимов в системах с линиями переключения.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений, математического моделирования, топологического анализа и теории негладких динамических систем, а также их численной верификацией посредством разработанного программного комплекса. Все теоретические выводы подтверждены компьютерными экспериментами и согласуются с известными результатами для классических случаев, что обеспечивает надежность и воспроизводимость результатов как для гладких, так и для негладких динамических систем.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности.
Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования).

1. Методология автоматизированного проектирования в технике, включая постановку, формализацию и типизацию проектных процедур и процессов проектирования, вопросы выбора методов и средств для применения в САПР.

8. Разработка научных основ построения средств компьютерной графики, методов геометрического моделирования проектируемых объектов и синтеза виртуальной реальности.

9. Комплексные исследования научно-технических и фундаментально-прикладных проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

11. Разработка и обоснование методик и правил адаптации компьютерных моделей, их эффективного использования при прогнозах эволюции объектов, систем, процессов и явлений.

12. Разработка качественных, аналитических, приближенных, численных и имитационных методов подготовки и реализации этапов вычислительного эксперимента.

13. Разработка математических методов моделирования объектов, систем, процессов и явлений.

14. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели.

15. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

16. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

17. Теоретические, прикладные и экспериментальные исследования по созданию, испытанию и применению математических моделей для решения актуальных задач автоматизированного проектирования, планирования и управления.

Личный вклад автора. Научным руководителем были определены основные направления исследования и сформулирована постановка задач. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. В совместных публикациях с Э.М.Мухамадиевым и И.Дж.Нуровым девяти статей [2-А], [6-А - 13-А] соавторам принадлежат постановки задач и обсуждения методов

доказательства основных результатов. Кроме того, Министерством культуры Республики Таджикистан автору выдано свидетельство о регистрации произведений науки, литературы и искусства № 227 от 6 марта 2025 года на компьютерную программу «О новом алгоритме построения фазовых портретов кусочно-линейных дифференциальных уравнений». Копия свидетельства приведена в приложении 1 диссертации.

Апробация результатов диссертации. Основные положения и результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры «Информатика» Таджикского национального университета (ТНУ), а также на онлайн семинарах профессоров Нурова И.Дж. и Мухамадиева Э.М. (2019-2025 гг.).

Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих международных научных конференциях: международной научной конференции "Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы (Вологда, 2021 г.)"; международной научной конференции "Современные методы теории краевых задач (Воронеж, 03-09 мая 2022 г.)"; международных научных конференциях "Современные методы теории функций и смежные проблемы (Воронеж, 27 января, 01 - февраля 2023 г.)"; международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа - 2024" (Воронеж, 26-30 января 2024 г.); международной научной конференции "Современные методы теории функций и смежные проблемы (Воронеж, 30 – января, 04 февраля 2025)".

Результаты диссертационного исследования и разработанный программный пакет внедрены в научную и учебную деятельность механико-математического факультета Таджикского национального университета, а также в практическую деятельность Института математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана. Внедрение подтверждается соответствующими актами, приведёнными в приложениях 2 и 3 диссертации.

Публикации по теме диссертации. Результаты, полученные автором в ходе выполнения диссертационного исследования, отражены в 13 публикациях [1-А - 13-А]. Из них 6 статьи опубликованы в научных журналах и сборниках конференций Российской Федерации, и 7 в научных изданиях Республики Таджикистан. Полный перечень опубликованных работ приведён в конце диссертации. Пять статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а восемь – в материалах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, каждая из которых подразделена на параграфы, заключения, библиографического списка, включающего 121 источник, и приложений. Общий объем диссертации составляет 149 страниц. Работа содержит 3 таблицы и 12 рисунков, при этом нумерация таблиц и рисунков осуществляется отдельно в пределах каждой главы. В диссертации используется сквозная тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, где первый индекс обозначает номер главы, второй индекс номер параграфа, третий на номер теорем, лемм, следствий и формул в текущем параграфе.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение посвящено актуальности рассматриваемых в диссертационной работе задач, степени научной разработанности изучаемой проблемы и приводится общая характеристика работы.

В первой главе (параграфы 1.1-1.5) изложены теоретические и методологические основы моделирования нелинейных динамических систем и рассмотрены бифуркационные явления в них. Проведён обзор литературы по качественному анализу стационарных и периодических решений, фазовых портретов и бифуркаций в гладких и негладких динамических моделях. Особое внимание уделено вопросом существования устойчивых стационарных и периодических решений и их поведению около особых точек. В главе также приведены сведения из теории локальных бифуркаций: обсуждаются необходимые и достаточные условия возникновения бифуркаций и классические результаты о характере и устойчивости бифуркационных решений. Эти материалы составляют теоретическую базу для последующего исследования моделей с переключениями.

Во второй главе (параграфы 2.1-2.4) диссертации исследуется поведение динамической системы при возникновении бифуркации Андронова – Хопфа – появлении в окрестности стационарного решения малых амплитуд нестационарных периодических решений.

В параграфе 2.1 однородная двумерная динамическая система

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases}$$

где P, Q – непрерывные функции по совокупности переменных (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, удовлетворяющие условиям

$$P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0,$$

$$|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0, \quad |x| + |y| > 0, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Предполагается, что в функциях P и Q выделены главные однородные части

$$P(x, y, \lambda) = P_m(x, y, \lambda) + p(x, y, \lambda),$$

$$Q(x, y, \lambda) = Q_m(x, y, \lambda) + q(x, y, \lambda),$$

где P_m, Q_m положительно однородные порядка $m > 0$ функции переменных x, y :

$$P_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m P_m(x, y, \lambda), Q_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m Q_m(x, y, \lambda),$$

$$\forall \rho > 0,$$

а функции p, q удовлетворяют условиям малости

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^m} \sup_{x^2 + y^2 \leq \rho^2, \lambda \in \Lambda} (|p(x, y, \lambda)| + |q(x, y, \lambda)|) = 0.$$

Для данной системы исследуется бифуркация Андронова-Хопфа с использованием принципа смены топологического индекса особой точки.

В параграфах 2.2-2.3 изучается бифуркация Андронова-Хопфа для трёхмерных и n -мерных динамических систем вида

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

где правая часть допускает представление

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu),$$

при условии непрерывной зависимости от параметра μ линейной части системы и выполнения условия малости нелинейного возмущения

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, |x| \rightarrow 0,$$

равномерно по параметру. В отличие от классической постановки теоремы Андронова-Хопфа, в работе не требуется дифференцируемости правой части системы по совокупности переменных, а используются лишь условия её непрерывности.

На основе топологических методов и принципа смены индекса получены условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа для двумерных, трёхмерных и n -мерных систем, а также сформулированы и доказаны теоремы о существовании периодических решений в случае гладких и негладких динамических систем.

Результаты данной главы связаны с работами [1-А - 3-А, 7-А, 8-А, 11-А] автора.

Третья глава (параграфы 3.1-3.7) посвящена моделированию кусочно-линейных динамических систем второго порядка с линией переключения. Модель включает линию переключения, разделяющую фазовое пространство на области с разными режимами динамики. Полученные результаты являются новыми и представлены вместе с их доказательствами. Кроме того, получен аналог теоремы Пуанкаре-Бендиксона для таких кусочно-линейных систем и разработан новый программный комплекс на языке Java для вычислительного построения

фазовых портретов. Данные алгоритмы позволяют численно моделировать предельные циклы и исследовать бифуркационное поведение рассматриваемых систем.

В параграфе 3.1 приводится постановка задачи и вводится в рассмотрение кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка с линией переключения, описывающая динамику в различных областях фазового пространства. Следует отметить, что рассмотренные в 1.5 прикладные модели механических, биологических, популяционных и экономических процессов естественным образом приводят к кусочно-линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Именно поэтому в этом разделе в качестве примеров исследуются следующие негладкие динамические модели.

«В биологии и экологии такие модели естественным образом возникают при исследовании популяционной динамики с учётом запаздывающей реакции биологических процессов и эффекта перенаселения. Инерционная модель численности $x(t)$ имеет вид

$$Mx'' + \alpha x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - D(x), \quad D(x) = \begin{cases} 0, & x < R, \\ d, & x > R, \end{cases}$$

где M – коэффициент инерции, α – демпфирование, r – темп роста, K – ёмкость среды, R – порог перенаселения. Линеаризация приводит к кусочно-линейной системе второго порядка с линией переключения $x = R$ » [11].

«Аналогичные негладкие структуры возникают и в экономической динамике. Модель накопления капитала $K(t)$ с пороговым механизмом инвестирования описывается уравнением

$$K' = \begin{cases} -\delta K, & K < K_0, \\ sAK^\alpha - \delta K, & K \geq K_0, \end{cases}$$

где K_0 – инвестиционный порог, A – технологический параметр, $0 < \alpha < 1$ – эластичность выпуска, $s \in (0,1)$ – норма сбережений, $\delta > 0$ – коэффициент амортизации. Данная модель характеризуется наличием линии переключения $K = K_0$, разделяющей режимы деградации и устойчивого экономического роста.

Порог $h(K) = K - K_0$.

1. $0 < K < K_0$. $K' = -\delta K < 0$.

Вследствие чего все фазовые траектории монотонно убывают и стремятся к равновесию $K = 0$, и это с точки зрения экономики, является деградацией капитала при отсутствии инвестиционной активности.

2. $K > K_0$. $K' = sAK^\alpha - \delta K$.

При выполнении условия

$$K^* = \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > K_0,$$

существует второе стационарное состояние $K = K^*$.

Таким образом, фазовый портрет модели представляет собой фазовую прямую с двумя устойчивыми состояниями равновесия $K = 0$ и $K = K^*$ разделенной пороговой точкой $K = K_0$ [12].

Для указанных систем формулируется задача исследования фазовых траекторий, точек контакта и условия существования предельных циклов в негладких динамических системах.

В параграфе 3.2 рассматривается кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка с модульной правой частью

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \quad (5)$$

которое является негладким и склеивается из двух линейных уравнений в зависимости от знака производной, при $\lambda = 0$

$$y'' + (a + c)y' + by = 0, \quad \text{если } y' > 0$$

и

$$y'' + (a - c)y' + by = 0, \quad \text{если } y' \leq 0$$

В свою очередь, при $\lambda = 0$ уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - bx_1 - c|x_2|. \end{cases} \quad (6)$$

Рассматривается решения в верхней и нижней полуплоскости, и строятся их явные выражения в случае комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0. \quad (7)$$

Для корней $\mu = \alpha^\pm \pm i\beta^\pm$ получены явные формулы решений с экспоненциально затухающими колебаниями. Установлены моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4 , при которых решения пересекают линию переключения $x_2 = 0$, с указанием координат точек пересечения. Выведены точные формулы для перехода между фазовыми траекториями в верхней и нижней полуплоскостях.

Особое внимание уделено определителю Вронского $W(t)$, составленному по траекториям решений. Для участков до и после переключения реализуется классическая формула Лиувилля – Остроградского

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a+c)t}, \quad \text{при } 0 < t \leq t_2,$$

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a-c)t}, \quad \text{при } t > t_1,$$

однако на участке $t_2 \leq t \leq t_1$ формула Лиувилля–Остроградского нарушается. Введён «переходный определитель», и доказано существование предельного значения, а именно доказано следующее утверждение.

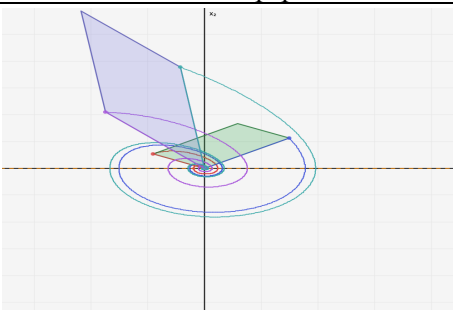
Теорема 1. *Предположим, что корни уравнения (7) являются комплексно-сопряженными, т.е. $4b > (a \pm b)^2$. Существует предел*

$$\Phi(t) = \lim_{c_2 \rightarrow \frac{\alpha^+}{\beta^+}} \frac{W(t)}{W(0)}$$

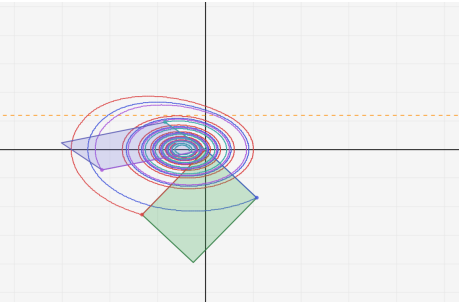
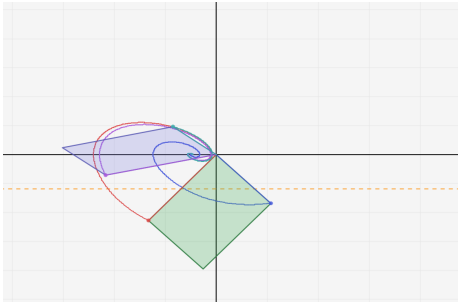
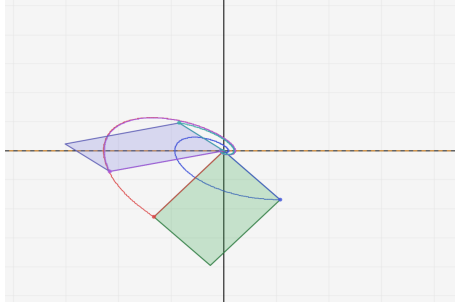
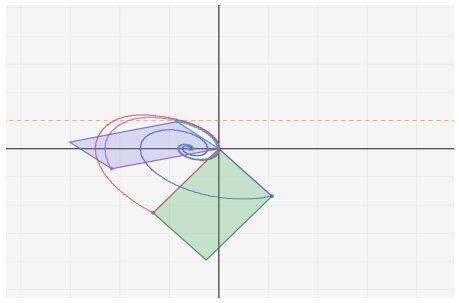
с учётом вариации t . Тогда для уравнение (5) применима формула Остроградского – Лиувилля.

Выполнено численное моделирование фазового портрета системы (6) в программной среде, составленной автором. Построены фазовые траектории в пространстве (x_1, x_2) при различных значениях параметров a, b, c, λ . Для интерпретации формулы Лиувилля–Остроградского на фазовой плоскости формировался параллелограмм с вершинами $O = (0,0), A = x^{(1)}(t), B = x^{(2)}(t), C = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$, площадь которого равна $|W(t)|$. При переходе траекторий через линию переключения происходит временное нарушение формулы Лиувилля–Остроградского, но в предельном смысле сохраняется её обобщение. В таблице 1 приведены различные фазовые портреты системы при варьировании коэффициентов уравнений (6).

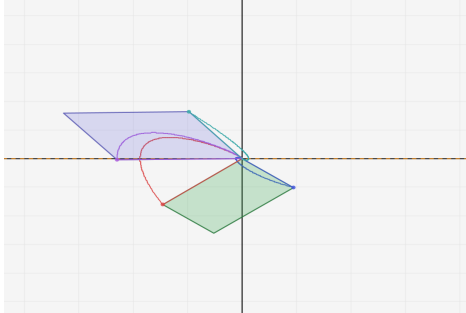
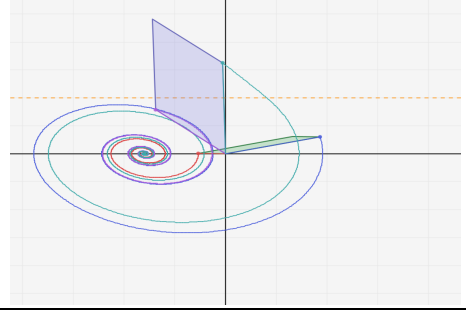
Таблица 1. Подбор коэффициентов и фазовые портреты

№	a	b	c	λ	Фазовые портреты
1.	0,50	1,0	0,40	0,00	

Продолжение таблицы 1.

2.	0,50	1,0	0,40	0,60	
3.	0,50	1,0	0,40	-0,60	
4.	0,90	1,0	0,30	0,00	
5.	1,20	1,0	0,60	0,50	

Продолжение таблицы 1.

6.	1,60	1,0	0,20	0,00	
7.	0,80	1,50	0,70	0,00	
8.	1,10	1,00	0,80	1,00	

Источник: Разработано и усовершенствовано автором [9 – А].

Все результаты главы подтверждают, что даже в условиях негладкости поведение решений можно описывать строго и количественно, а формальные обобщения теорем классического анализа сохраняются при должной интерпретации.

В **параграфе 3.3** рассматривается кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + g(y, y') = 0, \quad (8)$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0, \end{cases} \quad (9)$$

здесь $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in R, r \neq 0$ и a_i, b_i, c_i – вещественные числа, $i = 1, 2$.

Окружность, задаваемая равенством $h(y, y') = 0$, является линией переключения. Заметим, что функция $g(y, y')$ на линии $h(y, y') = 0$ в общем случае имеет разрыв. Дифференциальное уравнение вида (8) с правой частью (9) называют сшитым или склеенным дифференциальным уравнением. Как известно [14], многие прикладные задачи приводят к рассмотрению подобных систем.

Уравнение (9) эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -g(x_1, x_2), \end{cases} \quad (10)$$

где $x_1 = y, x_2 = y'$. Траектории системы (10) в областях $G_1 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) > 0\}$ и $G_2 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) < 0\}$ определяются решениями линейных систем

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -a_1 x_2 - b_1(x_1 - c_1) \end{cases} \quad (11)$$

и

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -a_2 x_2 - b_2(x_1 - c_2), \end{cases} \quad (12)$$

соответственно. На линии сшивания $h(x_1, x_2) = 0$ траектория системы (10) доопределяется в зависимости от поведения решений указанных линейных систем.

Предполагается, что коэффициенты a_i и b_i удовлетворяют условию $4b_i > a_i^2$, $i = 1, 2$. Это означает, что корни характеристических уравнений, соответствующих системам (11) и (12), являются комплексными числами.

На первом этапе исследуется поведение траекторий уравнения

$$x'' + ax' + b(x - c) = 0.$$

Эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - b(x_1 - c), \end{cases} \quad (13)$$

относительно заданной линии $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$. Здесь, коэффициенты a и b удовлетворяют условию $4b > a^2$.

Далее, фиксируется окружность $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$ и рассматривается, как траектории (13) пересекают или касаются её.

«Пусть $(x_1(t), x_2(t))$ – решение системы (13). Рассмотрим траекторию решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (13), которая проходит через точку $(x_1(0), x_2(0))$. Если траектория решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (13), проходящая через точку $(x_1(0), x_2(0))$ окружности $h(x_1, x_2) = 0$, в этой точке не касается этой окружности, то говорят, что окружность в точке $(x_1(0), x_2(0))$ не имеет контакта с траекториями системы (13). Если же эта траектория касается окружности, то мы будем говорить, что окружность в точке $(x_1(0), x_2(0))$ имеет контакт с траекторией системы (13)» [16]. Для анализа области, где отсутствует контакт окружности $h(x_1, x_2) = 0$ с системой (13), рассмотрим функцию:

$$f(t) = h(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - r^2. \quad (14)$$

Значение $f(t)$ показывает, находится ли фазовая точка внутри окружности, на окружности или вне её. Поэтому условия касания и пересечения удобно формулировать через значения $f(0), f'(0), f''(0)$.

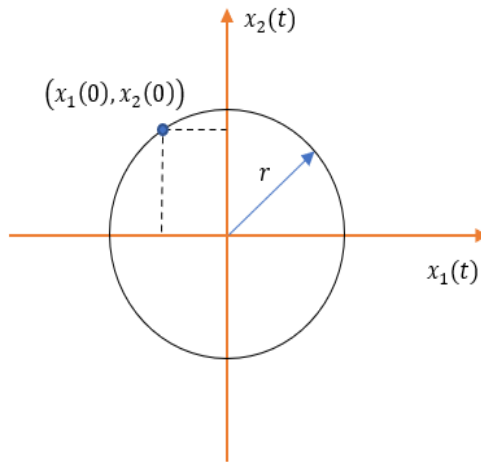


Рисунок 1. Геометрическое представление начального условия и радиуса r в фазовом пространстве (составлен автором)

Если начальная точка лежит на окружности, то $f(0) = 0$. Особый интерес представляет случай касания, когда дополнительно $f'(0) = 0$. Поставляя $t = 0$ и используя выражение $f'(t)$, получаем систему

$$\begin{cases} x_1^2(0) + x_2^2(0) - r^2 = 0, \\ 2x_2(0)[(1-b)x_1(0) - ax_2(0) + bc] = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что $(x_1(0), x_2(0)) = (\pm r, 0)$ являются решениями данной системы. Кроме этих решений система (15) может иметь решение $(x_1(0), x_2(0))$, где $x_2(0) \neq 0$. Возможны следующие случаи:

Случай 1. Коэффициенты системы (9) удовлетворяют условию $|c| > \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, это условие эквивалентно тому, что окружность $h(x_1, x_2) = 0$ во всех точках, за исключением точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, не имеет контакта с системой (9).

Случай 2. Коэффициенты системы (9) удовлетворяют условию $|c| < \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, тогда окружность $h(x_1, x_2) = 0$, помимо точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, имеет контакт с системой (9) в двух точках $A_1(x_1, x_2)$ и $B_1(x_1, x_2)$.

Случай 3. Пусть коэффициенты системы (9) удовлетворяют условию $|c| = \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, тогда окружность $h(x_1, x_2) = 0$, помимо точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, имеет контакт с системой (9) в единственной точке $C(x_1, x_2)$.

На рисунке 2 приведены геометрические интерпретации случаев 1-3.

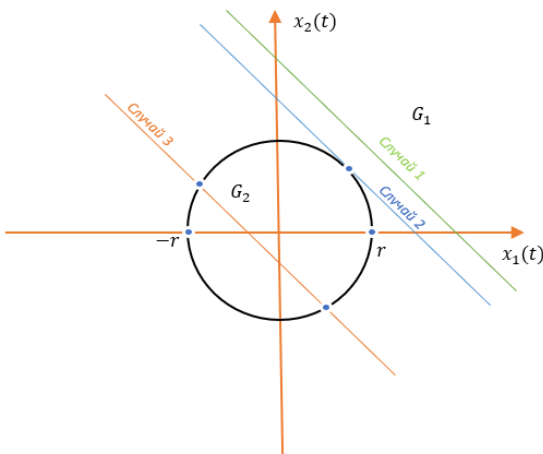


Рисунок 2. Все возможные варианты точки контакта (составлен автором)

Далее, подробно анализируется случай 1, так как он является базовым при доказательстве существования предельного цикла. В случае 1 справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $|c| > \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$. Тогда все точки окружности $h(x_1, x_2) = 0$, отличные от точек $(\pm r, 0)$, не имеют контакта с системой (13). Кроме того, при $c > 0$ ($c < 0$) функция $h(x_1(t), x_2(t))$, при возрастании t возрастает (убывает), если $x_2(0) > 0$ и убывает (возрастает), если $x_2(0) < 0$.

После установления отсутствия контакта во всех остальных точках необходимо уточнить характер касания в точках $(\pm r, 0)$. «Для этого, как принято в теории касания, исследуется производная $f''(0)$ » [14]. В рассматриваемом случае

$$f''(0) = 2b(x_1(0) - c)[(b - 1)x_1(0) - bc],$$

и потому в точках $(\pm r, 0)$ имеем $f''(0) \neq 0$ при $|c| \neq r$. Это формализуется следующей леммой.

Лемма 2. Пусть $|c| > \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1 - b)^2}$, $|c| \neq r$ и $(x_1(t), x_2(t))$ – решение системы (13) удовлетворяет условию $(x_1(0), x_2(0)) = (r, 0)$ или $(x_1(0), x_2(0)) = (-r, 0)$. Тогда функция $f(t)$, определенная равенством (14), удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f''(0) \neq 0$.

Далее для фиксированных значений параметров $r = 1$ и $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ и при выполнении условий

$$\frac{1}{b_1}\sqrt{a_1^2 + (1 - b_1)^2} < c_1 < 1, \quad c_2 > \max\left\{\frac{1}{b_2}\sqrt{a_2^2 + (1 - b_2)^2}, 1\right\}, \quad (16)$$

определено число

$$\gamma = \frac{a_1}{b_1(1 - c_1)(1 - b_1(1 - c_1))} - \frac{a_2}{b_2(1 - c_2)(1 - b_2(1 - c_2))}.$$

Знак γ определяет тип особой точки $(1, 0)$, что выражено в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (16). Тогда особая точка $(1, 0)$ системы (10) является неустойчивым фокусом, если $\gamma < 0$, и является устойчивым фокусом, если $\gamma > 0$.

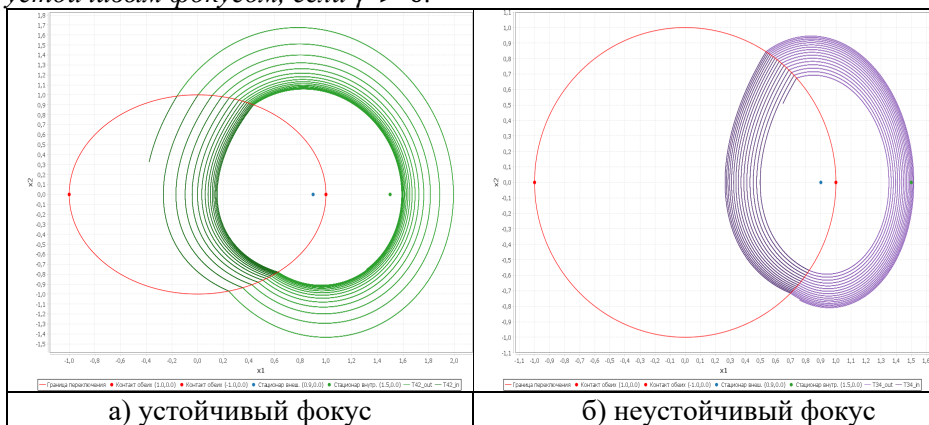


Рисунок 3. Фазовые портреты, возникновение устойчивого и неустойчивого фокуса (составлен автором)

Из лемм 1-3 следует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (16) и $\gamma < 0$. Тогда система (10) имеет предельный цикл.

Доказательство опирается на то, что одна из особых точек играет роль устойчивого фокуса, другая – неустойчивого, а лемма 1 задаёт монотонность изменения $h(x_1(t), x_2(t))$ в верхней и нижней полуплоскостях. Тем самым формируется область, в которой траектория не может уйти на бесконечность и не может стремиться к единственной особой точке. Следовательно, по теореме Пуанкаре – Бендиксона существует предельный цикл.

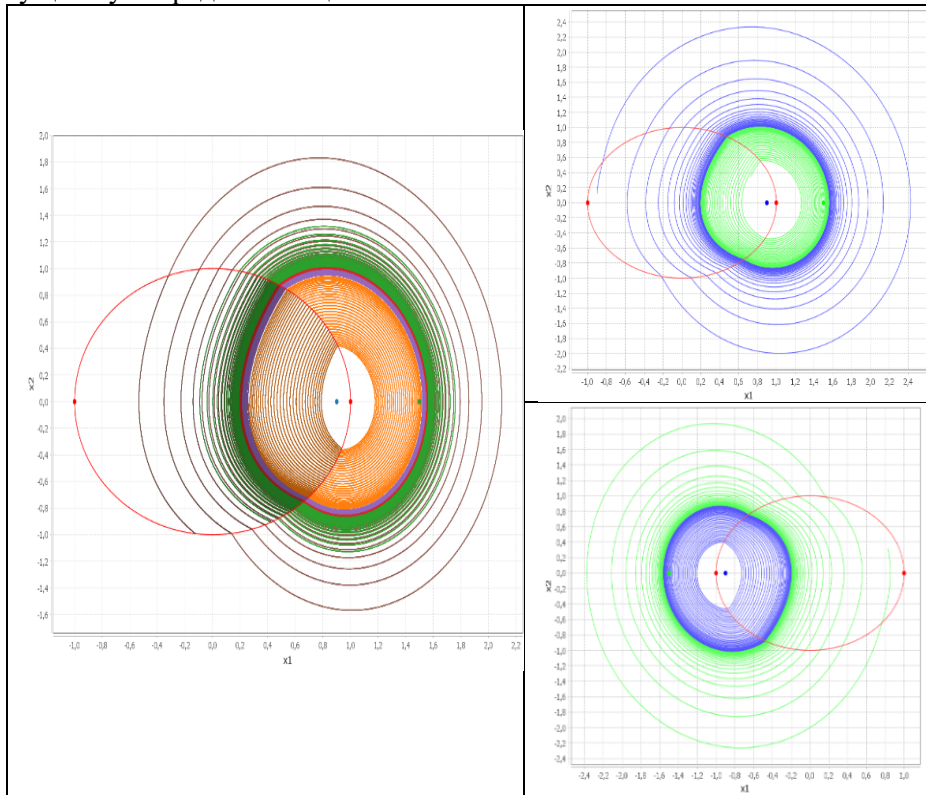


Рисунок 4. Предельный цикл (составлен автором)

В параграфе 3.4 исследуются скользящие режимы в кусочно-линейной системе второго порядка с разрывной правой частью. Анализ проводится с использованием метода Филиппова, который позволяет корректно определять решения дифференциальных уравнений в точках разрыва правой части

Рассматривается система вида (10), для которой линия переключения задаётся окружностью $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$. Векторное поле по разные стороны линии переключения определяется системами (11) и (12). Согласно методу Филиппова, скользящий режим возникает в тех точках линии переключения, где нормальные составляющие векторных полей имеют противоположные знаки [1].

Вычисляя скалярные произведения градиента функции переключения $\Delta h = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ с векторными полями системы, получаем условие возникновения режима скольжения

$$[(1 - b_1)x_1 - a_1x_2 + b_1c_1][(1 - b_2)x_1 - a_2x_2 + b_2c_2] < 0. \quad (17)$$

На участках окружности, удовлетворяющих неравенству (17), движение траектории описывается эквивалентным филипповским полем, задаваемым выпуклой комбинацией векторных полей

$$x' = (1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_2(x),$$

где коэффициент λ определяется из условия $(\Delta h, x') = 0$ и имеет вид

$$\lambda = \frac{(1 - b_1)x_1 - a_1x_2 + b_1c_1}{(b_2 - b_1)x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + b_1c_1 - b_2c_2}.$$

Значение $0 < \lambda < 1$ является необходимым и достаточным условием существования скользящего режима, при котором траектория удерживается на линии переключения и движется вдоль неё.

Полученные аналитические условия позволяют однозначно определить зоны скольжения на линии переключения и используются при численном моделировании фазовых портретов кусочно-линейной системы [1]. Реализация метода Филиппова и алгоритм обнаружения скользящих режимов выполнена в программном комплексе, описание которого приведено в параграфе 3.6.

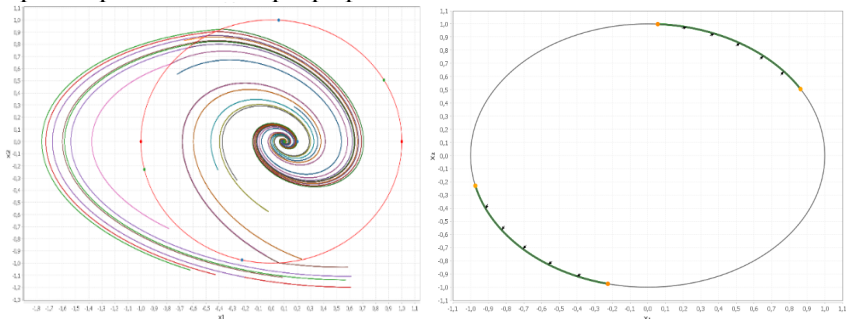


Рисунок 5. Дуга скольжения на окружности переключения $h(x_1, x_2) = 0$
(составлен автором)

В параграфе 3.5 проводится полный качественный разбор всех остальных конфигураций контакта с окружностью $h(x_1, x_2) = 0$,

вводится секторное разбиение окружности и формулируются достаточные признаки существования предельного цикла.

Предполагается, что $r = 1$ и коэффициенты системы (10) удовлетворяют условиям $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Введётся обозначения $\Delta_i =$

$$\frac{1}{b_i} \sqrt{a_i^2 + (1 - b_i)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Величины Δ_i характеризуют взаимное расположение траекторий линейных систем (11), (12) относительно окружности переключения и позволяют классифицировать число и тип точек контакта. Полная классификация таких конфигураций приведена в следующей таблице.

Таблица 2. Конфигурации контактов, секторное разделение и число секторов

№	Условие для коэффициентов в системе (11)	Контакты для системы (11)	Условие для коэффициентов в системе (12)	Контакты для системы (12)	Секторы
	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 > \Delta_2$	0	2
	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 > \Delta_2$	0	3
	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 > \Delta_2$	0	4
	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 = \Delta_2$	1	3
	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 = \Delta_2$	1	4
	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 = \Delta_2$	1	5
	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 < \Delta_2$	2	4
	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 < \Delta_2$	2	5
	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 < \Delta_2$	2	6

Источник: Разработано и усовершенствовано автором [4-А].

В зависимости от того, какие дуги возникают при выполнении условий таблицы 2, направление движения в этих дугах определяется знаком $f'(0)$ (см. параграф 3.3).

В параграфе 3.6 представлен программный пакет, разработанный автором для численного и качественного исследования кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка с линией переключения. Программный комплекс реализует методы, изложенные в параграфы 3.3-3.5, и предназначен для анализа фазовых портретов и предельных циклов систем с разрывной правой частью.

В пакете реализованы алгоритмы численного интегрирования с переключением между линейными подсистемами, автоматического определения точек контакта траекторий с линией переключения, построения секторного разделения и отображения Пуанкаре. Численное интегрирование основано на методе Рунге–Кутты четвертого порядка с

детекцией событий, что обеспечивает корректное сшивание решений в различных областях фазового пространства.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают существование и устойчивость предельных циклов для исследуемого класса систем и согласуются с полученными в работе теоретическими результатами.

В параграфе 3.7 представлены программные средства, разработанные автором для поддержки теоретических результатов и проведения численных экспериментов. Приложения ориентированы на исследование кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переключениями и их аналогов, связанных с обобщением формулы Лиувилля–Остроградского.

Разработанные программные модули обеспечивают построение фазовых портретов, численное вычисление траекторий решений, определителей Вронского и визуализацию их эволюции, а также корректную обработку пересечений линии переключения и точек контакта. Универсальность реализованных алгоритмов позволяет использовать приложения как для воспроизведения результатов, полученных в диссертации, так и для проведения дополнительных исследований динамических систем с переключениями.

В пункте «Обсуждения полученных результатов» приведен анализ полученных в диссертационной работе результатов, а также они сравнены с результатами других авторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны и обоснованы новые методы качественного и приближённого исследования бифуркаций и периодических решений в негладких, кусочно-линейных динамических системах различной размерности. Проведённое исследование охватывает как теоретические аспекты возникновения предельных циклов и бифуркаций Андронова–Хопфа, так и практические задачи их численного моделирования с использованием современных вычислительных технологий.

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для двумерной динамической системы (1) с главной однородной частью, используя принцип смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений [2 - А];

- для динамической системы (2) в трехмерном фазовом пространстве, с помощью топологических методов (принцип смены индекса), при условии непрерывной зависимости от параметра линейной части системы, в терминах поведения коэффициентов найдены условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа [1 - А], [3 - А], [8 - А], [9 - А, 12 - А];
- предложен новый подход к аналитическому и численному исследованию бифуркаций в негладких системах (3) и (4), описываемых модульными и кусочно-линейными функциями, который обеспечивает построение фазовых портретов для основных типов негладких динамических систем [10 - А], [11 - А], [13 - А];
- получены расчетные формулы, описывающие периодические явления, возникающие в окрестности состояний равновесия динамических систем, модели которых включают модульные и кусочно-линейные функции [6 - А, 10 - А];
- создан новый программный комплекс, предназначенный для компьютерного моделирования и анализа предельных циклов негладких динамических систем с переключением [4 - А, 5 - А].

Полученные результаты обладают теоретической новизной и практической значимостью.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании математических моделей и методов анализа динамических систем с переключениями, предназначенных для исследования периодических и стационарных режимов в нелинейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков. Полученные результаты развивают топологические и качественные методы теории динамических систем и расширяют классические представления теории бифуркаций применительно к негладким системам с разрывной структурой.

Особое значение имеет развитие подходов к исследованию циклических явлений в системах с переключениями, включая установление условий существования и устойчивости предельных циклов, а также анализ фазовой структуры вблизи линий переключения.

Научно-практическая значимость работы обусловлена тем, что полученные теоретические результаты доведены до уровня расчётных соотношений, алгоритмов и программных средств, пригодных для практического применения. На их основе разработан и реализован программный комплекс на языке Java, предназначенный для

компьютерного моделирования, анализа динамических режимов и построения фазовых портретов систем с переключениями.

Разработанные методы и алгоритмы могут быть использованы при проектировании и исследовании широкого класса нелинейных динамических систем, включая модели с элементами переключения, возникающие в задачах механики, теории автоматического управления, электроники и других прикладных областях, где существенную роль играют циклические процессы.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанные методы можно применить при исследовании систем автоматического регулирования, электрических и механических осцилляторов, биофизических и экономических процессов, а также при построении компьютерных моделей динамических систем с переключениями.

Предложенный топологический подход и численные алгоритмы могут служить основой для дальнейших исследований многомерных негладких систем, включая задачи синхронизации, хаотических режимов и бифуркций высших порядков.

Разработанный программный комплекс целесообразно использовать в учебном процессе при изучении курсов «Математическое моделирование», «Дифференциальные уравнения» и «Нелинейная динамика».

Таким образом, проведённое исследование представляет собой завершённую научную работу, содержащую как фундаментальные теоретические результаты, так и их программную реализацию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1]. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [Текст] / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 223 с.
- [2]. Пуанкаре А. Избранные труды [Текст] / А. Пуанкаре. М.: Наука, 1971. – Т.1.-771 с.
- [3]. Ляпунов А.М. Общие задача об устойчивости движения [Текст] / А.М. Ляпунов. -М.: ГИТТЛ, 1950. -472 с.
- [4]. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. -568 с.
- [5]. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов. -М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1974. -504 с.
- [6]. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Едиториал УРСС, 2018. - 208 с.

- [7]. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. -М.: Наука, 1973. -512 с.
- [8]. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. -390 с.
- [9]. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст] / Г.Ю. Ризниченко. -М.: Ижевск, 2002. -232 с.
- [10]. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления [Текст] / В.И. Уткин. -М.: Наука, 1981. - 368 с.
- [11]. Murray J.D. Inertial and delayed effects in population dynamics [Text] / J.D. Murray // Mathematical Biology I: An Introduction. – Berlin: Springer, 2002. – p. 97–135.
- [12]. Gandolfo G. Nonlinear and threshold effects in economic dynamics [Text] / G. Gandolfo // Economic Dynamics. – Berlin: Springer, 2009. – p. 201–245.
- [13]. Мухамадиев Э.М. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // Уфим. мат. журн. -2014. -Т. 6. -№ 1. -С. 84-93.
- [14]. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости [Текст] / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. -М.: Наука, 1976. -496 с.
- [15]. Андронов А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. -М.: Физ-матгиз, 1959. -568 с.
- [16]. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. -М.: Мир, 1970. -720 с.

ПЕРЕЧЕНЬ ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

А). Статьи, опубликованные в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан (на языке оригинала):

- [1 - А]. Каримов М.М. О применении методов функционального анализа в задаче исследования бифуркаций нелинейной трехмерной системы. [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2023. - №1. -С. 104-115.
- [2 - А]. Каримов М.М. Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№3-4. -С. 162-169.

- [3 - А]. Каримов М.М. Приложение принципа смены индекса к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа [Текст] / М.М. Каримов // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№11-12. -С. 650-658.
- [4 - А]. Каримов М.М. О новом программном пакете для задач моделирования предельных циклов дифференциального уравнения второго порядка с переключением [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. -2025. -№2. -С. 11-17.
- [5 - А]. Каримзода М.М. Компьютерные методы управления и автоматизации систем с переключением. [Текст] / М.М. Каримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2026. -№1. -С. 58-68.

Б). Научные статьи, опубликованные в сборниках и других научно-практических изданиях:

- [6 - А]. Каримов М.М. Моделирование возникновения предельного цикла дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. -30 января – 4 февраля 2025 г. -С. 168-172.
- [7 - А]. Каримов М.М. Качественный анализ и фазовые траектории динамики раковых клеток [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы., посвящённая 100-летию чл. корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. -Уфа, 2021. -С. 170-171.
- [8 - А]. Каримов М.М. Об одном доказательстве теоремы Андронова – Хопфа методами функционального анализа [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова. Воронеж, - 2024. -С. 172-174.
- [9 - А]. Каримов М.М. Топологические методы исследования бифуркаций в трёхмерном пространстве [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Воронеж, - 2023. -С. 188-190.

- [10 - А]. Каримов М.М. Об одном аналоге теоремы Лиувилля–Остроградского для кусочно–линейного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции “Современные методы теории краевых задач”. ВоГУ, МГУ имени М.В. Ломоносова, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. Воронеж, - 2022. -С. 211-213.
- [11 - А]. Каримов М.М. Анализ предельных циклов и численное моделирование в кусочно – линейных динамических системах [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров, Р.И. Азизов // Материалы международной научно – практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения», посвящённая «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75–летию Таджикского национального университета». Душанбе, - 2024. -С. 59-62.
- [12 - А]. Каримов М.М. Обобщенная теорема Хопфа для системы дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», «75- летию заслуженного работника Таджикистана, чл. корр.НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова» и «70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж. С. Сафарова». г. Бохтар, - 2022. С. 97-98.
- [13 - А]. Каримов М.М. Качественный анализ существования циклов кусочно – линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.М. Каримов, М.З. Убайдов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Уфа, - 2025. С. 46-49.

ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

ТДУ: 519:681.3+004

ТКБ: 22.174:73+22.18

К-33

Бо ҳукуқи дастнавис



КАРИМЗОДА МЕҲРУБОН МАТКАРИМ

УСУЛҲОИ ТАҲЛИЛ ВА БАНАҚШАГИРИИ СИСТЕМАҲОИ
ДИНАМИКИИ ГУЗАРИШДОР ДАР МАСЪАЛАҲОИ ТАҲҚИҚИ
ПАДИДАҲОИ ДАВРӢ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии

доктори фалсафа (PhD) - доктор аз рӯи ихтисоси 6D060200 –

Информатика (6D060202 – Системаҳои автоматикунонии банақшагирӣ)

Душанбе – 2026

Диссертатсия дар кафедраи информатикаи факултети механикаи математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст.

Роҳбари илмӣ:

Нуров Исроқбой Ҷумаевич, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи технологияҳои иттилоотӣ ва иртиботии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Муқарризони расмӣ:

Худойбердиев Хуршед Атохонович, доктори илмҳои техника, дотсенти кафедраи барномасозӣ ва системаҳои иттилоотии Донишгадаи политехникии Донишгоҳи техникаи Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ дар шаҳри Хучанд, ш.Хучанд.

Муҳаммадӣ Шоира Файзулло, доктори илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи технологияҳои иттилоотӣ – иртиботӣ ва барномасозии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон, ш.Хучанд.

Муассисаи пешбар:

Институти математикаи ба номи академик А. Ҷӯраев Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Ҳимоя санаи «26» ноябри соли 2026, соати 14:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.KOA-105-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргуздор мегардад. Нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 203.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё дар сомонаи <http://www.tnu.tj> шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» _____ соли 2026 фиристода шуд.

Котиби илмӣ Шурои диссертатсионӣ, н.и.ф.-м., дотсент



Садуллоев Р.И.

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзуи таҳқиқот. Моделҳои дорои гузариш дар соҳаҳои гуногуни илмию техникӣ, аз ҷумла назарияи идоракунии автоматӣ, механика, иқтисодиёт, биология ва дигар соҳаҳои илмӣ-амалӣ нақши муҳим мебозанд. Чунин моделҳо одатан бо муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ ғайриҳамвор, релей ё канишдор тавсиф карда мешаванд. Масъалаҳои амалие, ки ҳангоми омӯзиши чунин моделҳо ба миён меоянд, боиси рушди назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо тарафҳои рости канишдор гардидаанд, ки дар қорҳои илми А.Ф. Филиппов оварда шудаанд.

Яке аз масъалаҳои бунёдӣ ва ҳамзамон аз ҷиҳати назариявӣ ва амалӣ муҳим дар таҳқиқи моделҳои динамикӣ омӯзиши тағйироти сифатии портрети фазавӣ чунин системаҳо ба ҳисоб меравад. Ин тағйирот дар натиҷаи тағйирёбии параметрҳои система дар атрофи ҳолатҳои оромӣ ба вучуд меоянд. Таҳлили чунин падидаҳо бо истифода аз аппарати назарияи бифуркатсия анҷом дода мешавад.

Назарияи сиклҳои ҳудудӣ ва бифуркатсияи онҳо дар қорҳои олимони барҷаста, аз ҷумла А. Пуанкаре [2], А.М. Ляпунов [3], А.А. Андронов [4], Н.Н. Боголюбов [5], Л. С. Понтрягина [6], Ю.А. Митропольский [7], М.А. Красноселский [8] ва пайравони онҳо рушди назаррас пайдо кардааст.

Хусусан, барои системаҳои динамикии гузаришдори тартиби дуум таваҷҷуҳи махсус дода мешаванд, ки дар онҳо пайдоиши ҳолатҳои ғайримуқаррарии ҳаракат имконпазир аст. Ба чунин ҳолатҳо траекторияҳои лағжанда ва сиклҳои ҳудудӣ мансубанд, ки пайдоиши онҳо дар натиҷаи бифуркатсия ба миён меоянд.

Аз тарафи дигар, бифуркатсияи Андронов-Хопф ҳамчун як падидаи фундаменталӣ дар назарияи системаҳои динамикии ғайрихаттӣ шинохта шуда, равандҳои пайдоиши сиклҳои ҳудудиро ҳангоми тағйирёбии параметрҳои система тавсиф менамояд. Дар гузориши классикии масъалаи бифуркатсионӣ, одатан талаб карда мешавад, ки тарафи рости система дифференсиронидашаванда бошад, ки ин шарт доираи татбиқи усулҳои мавҷударо маҳдуд месозад. Дар диссертатсияи мазкур дар қисмати бифуркатсияи Андронов-Хопф масъалаи умумигардонию ин назарияи дар ҳолате баррасӣ мегардад, ки тарафи рости система танҳо бефосила бошад. Чунин равиш имкон медиҳад, ки доираи назарияи бифуркатсионӣ васеъ карда шуда, системаҳои хусусияти каниши ғайрихаттӣ ва дигар хосиятҳои мураккаб дошта таҳлил карда шаванд.

Дар ин робита на танҳо таҳлили чунин системаҳо, балки таҳияи усулҳои лоиҳакашии онҳо низ аҳамияти махсус пайдо мекунад. Ин усулҳо бояд пайдоиши ҳолатҳои даврии заруриро таъмин намоянд. Чунин

масъалаҳо ба талаботи муосири моделсозии математикӣ ва системаҳои автоматонидашудаи лоиҳакашӣ мувофиқ буда, муносибати комплексиرو, ки усулҳои таҳлилӣ ва ҳисоббарориро муттаҳид месозад, тақозо менамоянд.

Ҳамин тариқ, диссертатсияи мазкур ба таҳия ва таҳқиқи усулҳои таҳлил ва лоиҳакашии системаҳои динамикии дорои гузариш, ки ба омӯзиш ва ташаккули падидаҳои даврӣ равона шудаанд, бахшида шудааст. Асоси математикии таҳқиқотро системаҳо ва муодилаҳои зерин ташкил медиҳанд:

1. Системаи динамикии дученака бо қисми асосии якҷинсаи намуди

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

дар инҷо P, Q – функсияҳои бефосила нисбат ба тағйирёбандаҳои (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, ки шартҳои $P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0$, $|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0$, $|x| + |y| > 0$, $\lambda \in \Lambda$, қаноат менамоянд.

2. Системаи динамикии намуди

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2)$$

дар инҷо $x \in R^n$, $n \geq 3$, $F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu)$, $A(\mu) = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$ – матритсаи квадратӣ, ва $\omega(x, \mu)$ бошад шартӣ зеринро қаноат менамояд

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, |x| \rightarrow 0.$$

3. Муодилаи дифференсиалии қисман хаттии намуди

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \quad (3)$$

ҳангоми $\lambda = 0$, ки дар он a, b, c – ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

4. Муодилаи қисман хаттии тартиби дуум бо намуди

$$y'' + g(y, y') = 0, \quad (4)$$

ки дар он

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0, \end{cases}$$

дар инҷо $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in R$, $r \neq 0$ ва a_i , b_i , c_i – ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, $i = 1, 2$.

Дарачаи коркардшудаи мавзӯи таҳқиқот. Масъалаҳои вобаста ба омӯзиши бифуркатсия ва сиклҳои ҳудудӣ дар системаҳои динамикии ҳамвор ва ғайриҳамвор, дар қорҳои илмӣ як қатор олимони ба таври васеъ баррасӣ шудаанд. Аз ҷумла, дар қорҳои А.А. Андронов [4,15], Г.Ю. Ризниченко [9], М.А. Красноселский, Я.З. Цыпкин, А.Ф. Филипов [1] ва В.И. Уткина [10] бо истифода аз усулҳои гуногуни аналитикӣ ва сифатӣ мавҷудияти ҳалли даврӣ барои синфҳои мухталифи системаҳои динамикӣ тадқиқ ва асоснок карда шудааст.

Дар қорҳои зикршуда равишҳои гуногун ба таҳқиқи ҳолатҳои лаппишӣ, аз ҷумла таҳлили устувории сиклҳои ҳудудӣ, омӯзиши таъсирҳои ғайрихаттӣ ва сохтани моделҳои мувофиқи математикӣ таҳия гардидаанд. Бо вучуди ин, қисми зиёди натиҷаҳо ба системаҳои ҳамвор ё ба синфҳои махсуси моделҳои ғайриҳамвор тааллуқ доранд.

Дар айни замон, барои масъалаи омӯзиши сифатӣ ва тақрибии бифуркатсияҳо ва сиклҳои ҳудудӣ дар системаҳои динамикии ҷаҳишдор дар қатори қорҳои илмӣ муосир равишҳои гуногун пешниҳод шудаанд. Яке аз ин равишҳо аз назарияи муодилаҳои дифференциалӣ бо тарафҳои рости қанишдор гирифта шудааст, ки усули дӯхтани ҳал аз ду соҳа мебошад. Равиши дигар бошад ин усули ёфтани падидаҳои даврӣ барои системаҳои динамикии дорои функсияҳои модулдор ё қисман хаттӣ мебошад.

Бо вучуди ин, масъалаҳои таҳлили низомнок ва, махсусан, таҳлили банақшагирии системаҳои динамикии дорои гузариш, ки дорои хосиятҳои даврии додашуда мебошанд, тақмили минбаъдaro талаб менамоянд. Ин ҳолат самти асосии таҳқиқоти мазкурро муайян мекунад.

Робитаи қор бо барномаҳо (лоиҳаҳо), мавзӯҳои илмӣ. Таҳқиқоти диссертатсионӣ дар доираи татбиқи нақшаи дурнамои қорҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраи информатикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон дар солҳои 2021-2024 дар мавзӯи “Усулҳои таҳлили сифатӣ ва тақрибии бифуркатсия дар системаҳои динамикии ҷаҳишдор”, муқаррароти асосии Стратегияи миллии рушди маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон барои давраи то соли 2030 ва Стратегияи рушд ва омӯзиши фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф барои давраи то соли 2030 иҷро шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади таҳқиқоти мазкур таҳия ва таҳқиқи усулҳои таҳлил ва лоиҳакашии системаҳои динамикии дорои гузариш мебошад, ки ба омӯзиши падидаҳои даврӣ ва режимҳои периодӣ дар

моделҳои математикӣ бо тарафи рости ғайриҳамвор дар атрофи ҳолатҳои мувозинат равона шудаанд. Барои ноил шудан ба мақсади гузошташуда дар кори диссертатсионӣ таҳқиқи сифатӣ ва тақрибии равандҳои бифуркатсионӣ, ки ба пайдоиши сиклҳои худудӣ оварда мерасонанд, анҷом дода шудааст. Инчунин алгоритмҳо ва воситаҳои барномавӣ таҳия гардидаанд, ки барои таҳлили ададӣ ва сифатии режимҳои динамикӣ пешбинӣ шудаанд ва ҳам аз ҷиҳати назариявӣ ва ҳам аз ҷиҳати амалӣ аҳаммият доранд. Дикқати махсус ба таҳқиқи системаҳои динамикии дученакаи дорои гузариш равона карда шудааст. Барои чунин системаҳо таҳлили сифатӣ ва ададии портретҳои фазавӣ гузаронида шуда, инчунин усулҳои дӯхтани ҳалҳо дар ҳатти гузариш таҳия ва асоснок карда шудаанд, ки тавсифи дурусти рафтори траекторияҳо ва ташаккули режимҳои давриро таъмин менамоянд.

Вазиваҳои таҳқиқот. Бо мақсади амалӣ намудани ҳадафҳои дар боло зикршуда, вазифаҳои асосии зерин гузошта шудаанд:

1. Барои системаи динамикии дученакаи (1) бо қисми асосии якҷинса ба даст овардани шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти бифуркатсияи ҳалҳои даврӣ;
2. Таҳлил намудани шартҳои пайдоиши бифуркатсияи Андроно-Хопф барои системаи динамикии (2);
3. Таҳияи таҳлили сифатӣ ва ададии портретҳои фазавии системаҳои дученакаи ғайриҳамвор, ки бо муодилаҳои (3) ва (4)-и функсияҳои модулдор ва қисман ҳаттӣ тавсиф мешаванд;
4. Таҳияи дастаи барномаҳо барои таҳлили ададӣ ва сифатии натиҷаҳои ба даст овардаи системаҳои динамикии гузаришдор.

Объекти таҳқиқот. Муодилаҳои дифференсиалии ғайриҳаттӣ ва қисман ҳаттии тартиби дуум ва сеюм бо ҳаҷми гузариш.

Мавзӯи таҳқиқот. Моделсозии падидаҳои бифуркатсионӣ ва сиклҳои худудӣ дар муодилаҳои дифференсиалии ғайриҳаттии тартиби дуум ва сеюм, инчунин таҳлили нуқтаҳои расиш дар ҳати гузариш.

Усулҳои таҳқиқ. Дар таҳқиқот усулҳои моделсозии математикӣ, назарияи лаппишҳои ғайриҳаттӣ, усулҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ, инчунин усулҳои таҳлили сифатӣ ва таҳқиқи масъалаҳои бифуркатсионӣ аз ҷумла дар системаҳои динамикии ғайриҳамвори дорои гузариш, истифода шудаанд. Ин усулҳо барои таҳлил ва банақшагирии системаҳои динамикӣ ба кор бурда мешаванд, ки имкон медиҳанд шартҳои пайдоиши сиклҳои худудӣ ва траекторияҳои лағжандаро муайян намуда, инчунин моделҳоро бо ҳолатҳои пешаки додасишда эҷод намоянд.

Навгони илмӣ таҳқиқот. Дар диссертатсияи мазкур натиҷаҳои нави илмӣ ба даст оварда шудаанд, ки бо дақиқии қатъии математикӣ

асоснок гардида, ба таври возеҳ ва мантиқӣ баён шудаанд. Ҳангоми истифодаи натиҷаи илмӣ дигар муаллифон истинод мувофиқи меъёрҳои қабулшуда анҷом дода шудааст. Натиҷаҳои асосии илмӣ таҳқиқот аз инҳо иборатанд:

1. Барои системаи динамикии дученакаи (1), ки қисми асосиаш якҷинса мебошад, бо истифода аз принципи тағйирёбии индекси топологии нуқтаи махсуси майдони вектории комилан бефосила, шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти бифуркатсияи ҳалҳои даврӣ муайян карда шудаанд;
2. Барои системаҳои динамикии (2), бо истифода аз усулҳои топологӣ (принципи тағйирёбии индекс), ҳангоми бефосила будани қисми хаттии система, дар асоси рафтори коэффитсиентҳо, шарт ба вуҷуд омадани бифуркатсияи Андронов-Хопф ёфта шудааст;
3. Равиши нави таҳқиқи аналитикӣ ва адабии падидаҳои даврӣ дар системаҳои динамикии ғайриҳамвор, ки бо муодилаҳои (3) ва (4) дорои функцияҳои модулдор ва қисман хаттӣ тавсиф мешаванд, пешниҳод гардидааст, ки он имконияти сохтани портретҳои фазавиро барои чунин намуди системаҳо фароҳам меорад;
4. Формулаҳои ҳисобӣ ҳосил карда шудаанд, ки падидаҳои даврии дар атрофи ҳолатҳои мувозинати системаҳои динамикӣ пайдошавандаро тавсиф менамоянд, ин системаҳо бо муодилаҳои (3) ва (4)-и дорои функцияҳои модулдор ва қисман хаттӣ тавсиф мешаванд;
5. Дастаи нави барномавӣ таҳия карда шудааст, ки барои моделсозии компютерӣ ва таҳлили сиклҳои ҳудудӣ дар системаҳои динамикии гузаришдор, ки бо муодилаҳои (3) ва (4) тавсиф мешаванд, пешбинӣ гардидааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмӣ амалии таҳқиқот. Аҳамияти назариявии таҳқиқот дар таҳия ва асосноккунии модели математикӣ, ки барои таҳқиқи ҳалли даврӣ ва статсионarii муодилаҳои ғайрихаттӣ ва қисман хаттии дараҷаи дуум ва сеюм пешбинӣ гардидааст, ифода меёбад. Натиҷаҳои бадастомада усулҳои топологӣ ва сифатии назарияи системаҳои динамикиро инкишоф дода, назарияи тағйирёбии ҳолатҳои бифуркатсиониро нисбат ба системаҳои динамикии ғайриҳамвори ҷаҳишдор тақмил медиҳанд.

Инкишофи равишҳои таҳқиқи падидаҳои даврӣ дар системаҳои дорои гузариш, аз ҷумла муайян намудани шартҳои мавҷудият ва устувории сиклҳои ҳудудӣ, инчунин таҳлили сохтори фазавӣ дар наздикии хатҳои гузариш аҳамияти махсус дорад.

Аҳамияти илмию амалии кор аз он ифода меёбад, ки натиҷаҳои назариявӣ то сатҳи формулаҳои ҳисобӣ ва алгоритмҳои барои татбиқи амалӣ мувофиқ расонида шудаанд. Дар асоси натиҷаҳои ба даст омада дар забони барномасозии Java дастаи барномаҳо сохта шудаанд, ки барои моделсозии компютерӣ, таҳлили ҳолатҳои даврӣ ва сохтани портретҳои фазаии системаҳои ғайриҳамвор пешбинӣ шудааст.

Усулҳо ва алгоритмҳои таҳияшуда метавонанд ҳангоми таҳқиқи синфи васеи системаҳои динамикии ғайриҳаттӣ, аз ҷумла моделҳои дорои элементҳои гузариш, ки дар масъалаҳои механика, назарияи идоракунии, электроника ва дигар соҳаҳои татбиқӣ ба миён меоянд, истифода шаванд.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

Ба ҳимоя нуктаҳои илмӣ зерин пешниҳод мегарданд:

1. Муқаррар карда шудааст, ки барои системаи динамикии дученакаи (1) бо қисми асосии яқинса, шартҳо зарурӣ ва кифоягии пайдоиши ҳалҳои даврӣ мавҷуданд; барои системаи динамикии (2), дар ҳолате, ки қисми ҳаттии система аз параметр ба таври бефосила вобаста аст, шартҳои пайдоиши ҳалҳои даврӣ дар атрофи ҳолати оромӣ дар асоси принципи тағйирёбии индекси топологӣ муқаррар карда шудаанд;
2. Исбот карда шудааст, ки барои муодилаи дифференсиалии қисман ҳаттии (3) шабеҳи формулаи Лиувилля – Остраградский татбиқшаванда буда, тағйирёбии вронскианро ҳангоми гузариши ҳалҳо байни соҳаҳои вобастаи муодилаи гуногуни ҳаттӣ тавсиф менамояд; барои муодилаи дифференсиалии қисман ҳаттии тартиби дуҷумла (4) мавҷудияти сиклҳои худудӣ дар асоси дӯхтани ҳалҳо ва таҳлили нуктаҳои тамос дар ҳати гузариш исбот карда шудаанд;
3. Алгоритмҳои моделсозии ададии автоматикунонидашуда ва таҳлили сифатии муодилаҳои (3) ва (4) таҳия карда шудаанд, ки муайян намудани нуктаҳои тамос, ҳисобкунии вронскиан ва тасвири портретҳои фазавиро дар речаи худкор таъмин менамояд. Дар асоси алгоритмҳои таҳияшуда маҷмӯи барномавӣ ба даст оварда шудааст, ки имконият медиҳад шартҳои пайдоиши низомҳои даврӣ дар системаҳои дорои ҳаҷмҳои гузариш таҳқиқ карда шаванд.

Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои ба дастовардашуда бо асосноккунии қатъии математикӣ, бо истифода аз усулҳои назарияи сифатии муодилаҳои дифференсиалӣ, моделсозии математикӣ, таҳлили топологӣ, назарияи системаҳои динамикии ғайриҳамвор таъмин карда мешавад. Илова бар ин, дурустӣ ва

самаранокии усулҳои адабии пешниҳодшуда тавассути санҷиши ҳисобӣ ва татбиқи онҳо дар доираи дастаи барномаҳои компютерии таҳиягардида тасдиқ гардидааст. Ҳамаи хулосаҳои назариявӣ бо натиҷаҳои моделсозии компютерӣ муқоиса ва тасдиқ гардида, бо натиҷаҳои маъмул барои ҳолатҳои классикӣ мувофиқат мекунад. Ин усулҳо эътимоднокии натиҷаҳоро ҳам барои системаҳои динамикии ҳамвор ва ҳам ғайриҳамвор кафолат медиҳад.

Мутобикати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ.
Диссертатсия ва мазмуну мундариҷаи он фарогири соҳаҳои таҳқиқоти шиносномаи ихтисоси 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системаҳои автоматикунории банақшагирӣ) мебошад.

1. Методологияи банақшагирии автоматиконидашуда дар техника, аз ҷумла гузориш, формализатсия ва типизатсияи расмиётҳои лоиҳавӣ ва равандҳои лоиҳакашӣ, инчунин масъалаҳои интиҳоби усулҳо ва воситаҳо барои истифода дар САБ.

8. Таҳияи асосҳои илмӣ сохтани воситаҳои графикаи компютерӣ, усулҳои моделсозии геометрии объектҳои лоиҳашаванда ва синтези воқеияти маҷозӣ.

9. Таҳқиқоти комплекси масъалаҳои илмӣ-техникӣ ва бунёди-амалӣ бо истифода аз технологияҳои муосири моделсозии математикӣ ва таҷрибаи ҳисоббарорӣ.

11. Таҳия ва асосноккунии методика ва қоидаҳои мутобиксозии моделҳои компютерӣ ва истифодаи самараноки онҳо барои пешгӯии эволютсияи объектҳо, системаҳо, равандҳо ва падидаҳо.

12. Таҳияи методҳои сифатӣ, таҳлилӣ, тахминӣ, ададӣ ва тақлидӣ барои омодакунӣ ва татбиқи марҳилаҳои таҷрибаи ҳисоббарорӣ.

13. Таҳияи методҳои математикӣ барои моделсозии объектҳо, системаҳо, равандҳо ва падидаҳо.

14. Таҳияи методҳо ва алгоритмҳои нави математикӣ барои маънидоқкунии таҷрибаи воқеӣ дар асоси модели математикӣ.

15. Таҳияи системаҳои моделсозии компютерӣ ва тақлидӣ.

16. Татбиқи усулҳо ва алгоритмҳои самараноки ададӣ дар шакли комплексҳои барномавии масъалагари барои гузаронидани таҷрибаи ҳисоббарорӣ.

17. Таҳқиқоти назариявӣ, амалӣ ва таҷрибавӣ оид ба таҳия, озмоиш ва истифодаи моделҳои математикӣ барои ҳалли масъалаҳои муҳими лоиҳакашии автоматиконидашуда, банақшагирӣ ва идоракунии.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои асосии диссертатсия аз тарафи роҳбари илмӣ гузошта шудааст. Муаллиф мустақилона натиҷаҳои дар диссертатсия пешниҳодшударо ба даст овардааст. Дар наҷрияҳои муштарак бо Э.М. Муҳаммадиев ва И.Ҷ. Нуров, нӯҳ мақола [2-М], [6-М - 13-М] ба таъб расидааст. Ба ҳаммуаллифон гузориши масъала ва интиҳоби усулҳо барои исботи натиҷаҳои асосӣ тааллуқ дорад. Инчунин, барои барномаи компютери "Оид ба алгоритми нави сохтани портретҳои ҷазавии муодилаҳои дифференсиалии қисман ҳатӣ" ба муаллиф аз ҷониби Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон шаҳодатнома дар бораи ба қайд гирифтани асарҳои илмӣ, адабиёт ва санъат №227 аз 6 март соли 2025, ки аз ҷониби Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон дода шудааст. Нусхаи шаҳодатнома дар замимаи 1-и диссертатсия оварда шудааст.

Тасвир ва амалисозӣ. Нуқтаҳои асосӣ ва натиҷаҳои таҳқиқоти диссертатсионӣ борҳо дар семинарҳои илмии кафедраи "Информатика"-и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон (ДМТ) ва дар семинарҳои онлайнии профессорон Нуров И.Ҷ. ва Муҳаммадиев Э.М. (солҳои 2019-2025) гузориш ва мавриди муҳокима қарор дода шудаанд.

Натиҷаҳои таҳқиқот дар конференсияҳои илмии байналмилалӣ зерин пешниҳод ва мавриди муҳокима қарор дода шудаанд: конференсияи илмӣ – байналмилалии "Муодилаҳои дифференсиалӣ, моделсозии математикӣ ва алгоритмҳои ҳисоббарорӣ" (Вологда, соли 2021); конференсияи илмии байналмилалии "Усулҳои муосири назарияи масъалаҳои канорӣ" (Воронеж, 3-9 майи соли 2022); конференсияи илмии байналмилалии "Усулҳои муосири назарияи функсияҳо ва масъалаҳои марбут ба онҳо" (Воронеж, 27 январ - 1 феврал соли 2023); конференсияи илмии байналмилалии "Мақолаи зимистонаи математикӣ Воронеж - 2024" (Воронеж, 26-30 январ соли 2024); конференсияи илмии байналмилалии "Усулҳои муосири назарияи функсияҳо ва масъалаҳои марбут" (Воронеж, 30 январ-4 феврал соли 2025)".

Натиҷаҳои таҳқиқоти диссертатсионӣ ва маҷмӯи барномаҳои таҳияшуда дар фаъолияти илмӣ ва таълимии факултети механикаи математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, инчунин дар фаъолияти амалии Институти математикаи ба номи академик А. Ҷӯраевӣ Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ҷори карда шудаанд. Ҷорӣ намудани натиҷаҳо бо санадҳои дахлдор, ки дар замимаҳои 2 ва 3-и диссертатсия оварда шудаанд, тасдиқ мегардад.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 13 мақола [1-М - 13-М] инъикос ёфтаанд. Аз ин шумора, 6 мақола дар маҷаллаҳои илмӣ ва маводҳои

конфронсияҳои Федератсияи Русия ва 7 мақола дар маҷаллаҳои илмӣи Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд. Рӯйхати пурраи асарҳои нашршуда дар охири диссертатсия оварда шудааст. Панҷ мақола дар маҷаллаҳое, ки ба рӯйхати Комиссияи олии аттестатсионӣ назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон дохил карда шудаанд, ва ҳашт мақола дар маводҳои конфронсҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ нашр шудаанд.

Соҳтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, ки ҳар кадом ба зербобҳо тақсим шудаанд, ҳулоса, рӯйхати адабиётҳо, ки аз 121 манбаъ иборат аст ва замимаҳо ифода ёфтааст. Ҳаҷми умумии диссертатсия 149 саҳифаро ташкил медиҳад. Дар қори диссертатсионӣ 3 ҷадвал ва 12 расм мавҷуд буда, рақамгузори ҷадвалҳо ва расмҳо дар доираи ҳар як боб алоҳида анҷом дода шудааст. Дар диссертатсия рақамгузори сегонаи пайдарпайи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки дар он рақами аввал рақами боб, рақами дуюм рақами зербоб ва рақами сеюм рақами теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳоро дар зербоби қорӣ нишон медиҳад.

МУҲТАВОИ МУҲТАСАРИ ДИССЕРТАТСИЯ

Муқаддима ба муҳимияти масъалаҳои дар диссертатсия баррасишуда, дараҷаи таҳияи илмӣи масъалаи таҳқиқшаванда бахшида шуда, тавсифи умумии қор оварда шудааст.

Дар боби якум (зербобҳои 1.1–1.5) асосҳои назариявӣ ва моделсозии математикӣи системаҳои динамикии ғайрихаттӣ ва қисман хаттӣ пешниҳод карда шуда, падидаҳои бифуркатсионӣ дар онҳо таҳқиқ карда мешаванд. Шарҳи адабиёт оид ба таҳлили сифатӣи ҳалли статсионарӣ ва даврӣ, портретҳои фазаӣ ва бифуркатсия дар моделҳои динамикии ҳамвор ва ғайриҳамвор пешниҳод карда мешавад. Таваҷҷӯҳи махсус ба мавҷудияти ҳалли статсионарӣ ва даврии устувор ва рафтори онҳо дар атрофи нуқтаҳои оромӣ дида мешавад. Дар ин боб инчунин маълумот аз назарияи бифуркатсионӣ пешниҳод карда мешавад: шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ барои пайдоиши бифуркатсия ва натиҷаҳои классикӣ дар бораи хусусият ва устувории ҳалҳои бифуркатсионӣ баррасӣ карда мешаванд. Ин маводҳо асоси назариявӣ барои таҳқиқоти минбаъдаи моделҳои ҷаҳишдор мебошанд.

Дар боби дуюм диссертатсия (зербобҳои 2.1–2.4)-и рафтори системаи динамикӣ ҳангоми ба вуҷуд омадани бифуркатсияи Андронов-Хопф таҳқиқ карда мешавад. Дар атрофи ҳалли статсионарӣ пайдоиши ҳалҳои даврии ғайриватсионӣ бо амплитудаи хурд баррасӣ мешавад.

Дар зербоби 2.1 системаи динамикии дученакаи якҷинсаи

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases}$$

баррасӣ мегардад, ки дар он P, Q - функцияҳои бефосила аз маҷмӯи тағйирёбандаҳои (x, y, λ) буда, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, ва шартҳои зеринро қонеъ месозанд:

$$P(0,0,\lambda) \equiv Q(0,0,\lambda) \equiv 0, \\ |P(x,y,\lambda)| + |Q(x,y,\lambda)| > 0, |x| + |y| > 0, \lambda \in \Lambda.$$

Фарз карда мешавад, ки дар функцияҳои P ва Q қисмҳои асосии якҷинса ҷудо карда шудаанд, яъне

$$\begin{cases} P(x,y,\lambda) = P_m(x,y,\lambda) + p(x,y,\lambda), \\ Q(x,y,\lambda) = Q_m(x,y,\lambda) + q(x,y,\lambda), \end{cases}$$

ки дар он P_m, Q_m функцияҳои якҷинсаи мусбат аз тартиби $m > 0$ нисбат ба тағйирёбандаҳои x, y мебошанд, яъне

$P_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m P_m(x, y, \lambda)$, $Q_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m Q_m(x, y, \lambda)$, $\forall \rho > 0$, ва бошад функцияҳои p, q шартҳои зеринро қонеъ дорад.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^m} \sup_{\substack{x^2+y^2 \leq \rho^2 \\ \lambda \in \Lambda}} (|p(x,y,\lambda)| + |q(x,y,\lambda)|) = 0.$$

Барои системаи мазкур бифуркатсияи Андроно́в–Хопф бо истифода аз принципи тағйирёбии индекси топологии нуктаи махсус таҳқиқ карда мешавад.

Дар зербобҳои 2.2–2.3 бифуркатсияи Андроно́в–Хопф барои системаҳои динамикии сеченака ва n -ченакаи шакли

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

омӯхта мешавад, ки тарафи рости он ба

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu)$$

пешниҳод гардидааст, ки дар он қисми ҳаттӣ бефосила нисбати параметри μ мебошад ва шартҳои

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, |x| \rightarrow 0,$$

барои қисмати ғайрихаттии ифодаи додашуда мунтазам нисбат ба параметр иҷро мегардад.

Бар ҳилофи гузориши классикии теоремаи Андроно́в–Хопф, дар ин кор дифференсиронидашаванда будани тарафи рости система аз рӯи маҷмӯи тағйирёбандаҳо талаб карда намешавад ва танҳо шартҳои бефосилагии он истифода мешаванд.

Дар асоси усулҳои топологӣ ва принципи тағйирёбии индекс, шартҳои ба вучуд омадани бифуркатсияи Андроно́в–Хопф барои системаҳои дученака, сеченака ва n -ченака ба даст оварда шудаанд, инчунин теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалҳои даврӣ дар ҳолати системаҳои динамикии ҳамвор ва ғайриҳамвор таҳия ва исбот карда шудаанд.

Натиҷаҳои ин боб дар қорҳои [1-М - 3-М, 7-М, 8-М, 11-М] муаллиф оварда шудаанд.

Боби сеюм (зербобҳои 3.1-3.7) ба моделсозии математикии системаҳои динамикии қисман ҳаттии тартиби дуум бо ҳати гузариш бахшида шудааст. Модел ҳати гузаришро дар бар мегирад, ки фазоро ба соҳаҳои гуногуни динамикӣ тақсим мекунад. Натиҷаҳои бадастовардашуда на ҳама буда, дар баробари ин исботҳои онҳо пешниҳод карда мешаванд. Ғайр аз ин, барои чунин системаҳои қисман ҳаттӣ шабеҳи теоремаи Пуанкаре- Бендиксон ба даст оварда шудааст ва дастаи нави барномаҳо дар забони барномасозии Java барои сохтани портретҳои фазавӣ ва таҳлили онҳо таҳия шудааст. Ин алгоритмҳо имкон медиҳанд, ки моделсозии адабии сиклҳои ҳудудӣ ва таҳқиқи рафтори бифуркатсионии системаҳои мавҷудбуда анҷом дода шавад.

Дар зербоби 3.1 баёни масъала пешниҳод гардида, муодилаи дифференсиалии қисман ҳаттии тартиби дуум бо ҳати гузариш мавриди таҳлил қарор дода мешавад, ки динамикаи системаро дар минтақаҳои гуногуни фазои фазавӣ тавсиф менамояд. Қайд кардан зарур аст, ки моделҳои татбиқии механикӣ, биологӣ, популятсионӣ ва иқтисодӣ, ки дар зербоби 1.5 баррасӣ шудаанд, ба таври табиӣ ба муодилаҳои дифференсиалии қисман ҳаттии тартиби дуум оварда мешаванд. Маҳз бинобар ин, дар ин бахш як қатор моделҳои динамикии ғайриҳамвор ҳамчун мисол мавриди таҳқиқ қарор дода мешаванд.

«Дар биология ва экология чунин моделҳо ҳангоми омӯзиши динамикаи популятсия бо дарназардошти таъхири реаксияи равандҳои биологӣ ва таъсири барзиёдии аҳоли ба таври табиӣ ба вучуд меоянд. Модели инерсионии шумораи аҳоли $x(t)$ бо муодилаи зерин тавсиф мешавад:

$$Mx'' + \alpha x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - D(x), D(x) = \begin{cases} 0, & x < R, \\ d, & x > R, \end{cases}$$

ки дар он M – коэффиенти инертсия, α – демпфиронӣ, r – суръати афзоиш, K – ғунҷоиши муҳит ва R – ҳадди барзиёдии аҳоли мебошад. Хаттикунонии ин модел ба системаи муодилаҳои қисман ҳаттии тартиби дуум бо ҳати гузариши $x = R$ оварда мерасонад» [11].

«Шабеҳи чунин сохторҳои ғайриҳамвор дар динамикаи иқтисодӣ низ ба назар мерасанд. Аз ҷумла, модели ҷамъшавии сармоя $K(t)$ бо механизми ҳадди сармоягузорӣ тавассути муодилаи зерин ифода меёбад:

$$K' = \begin{cases} -\delta K, & K < K_0, \\ sAK^\alpha - \delta K, & K \geq K_0, \end{cases}$$

ки дар он K_0 – ҳадди сармоягузорӣ, A – параметри технологӣ, $0 < \alpha < 1$ – эластикнокии маҳсулот, $s \in (0,1)$ – меёри пасандоз ва $\delta > 0$ –

коэффициенты амортизации мебошад. Модели мазкур бо мавҷудияти хати гузариши $K = K_0$ тавсиф мешавад, ки қоидаҳои деградацияи сармоя ва рушди устувории иқтисодиёро ҷудо менамояд.

Функцияи $h(K) = K - K_0 = 0$ хати гузаришро ифода менамояд.

1. Дар минтақаи $0 < K < K_0$ ҳосил мешавад:

$$K' = -\delta K < 0,$$

ки дар натиҷа ҳамаи траекторияҳои фазавӣ якранг кам шуда, ба ҳолати мувозинати $K = 0$ майл мекунад, ки аз нуқтаи назари иқтисодӣ деградацияи сармояро дар шароити набудани ғайриқоидаҳои сармоягузорӣ ифода менамояд.

2. Дар минтақаи $K > K_0$ динамика бо муодилаи $K' = sAK^\alpha - \delta K$ тавсиф мешавад. Ҳангоми

$$K^* = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > K_0$$

ҳолати дуҷуми статсионарии $K = K^*$ ба вуҷуд меояд.

Ҳамин тариқ, портрети фазавии модели мазкур хати фазавиро бо ду ҳолати устувори мувозинат $K = 0$ ва $K = K^*$ ифода мекунад, ки бо нуқтаи ҳудудии $K = K_0$ аз ҳам ҷудо шудаанд» [12].

Барои системаҳои зикршуда масъалаи таҳқиқи траекторияҳои фазавӣ, нуқтаҳои расанда ва шартҳои мавҷудияти сиклҳои ҳудудӣ дар системаҳои динамикии ғайриҳамвор ба таври возеҳ баён ва мавриди омӯзиш қарор дода мешаванд.

Дар зербоби 3.2 муодилаи дифференсиалии қисман хаттии тартиби дуюм бо тарафи рости канишдор

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0 \quad (5)$$

баррасӣ мешавад. Муодилаи додашуда ғайриҳамвор буда ва аз ду муодилаи хаттӣ, вобаста бо аломати ҳосила «часпонида» мешавад, яъне

$$y'' + (a + c)y' + by = 0, \quad \text{агар } y' > 0$$

ва

$$y'' + (a - c)y' + by = 0. \quad \text{агар } y' \leq 0$$

Дар навбати худ, муодилаи (5) ҳангоми $\lambda = 0$ ба системаи зерин эквивалент мебошад

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - bx_1 - c|x_2|. \end{cases} \quad (6)$$

Ҳалҳо дар нимҳамвораҳои болоӣ ва поёнӣ баррасӣ карда мешаванд ва ифодаҳои аниқӣ онҳо дар ҳолати решаҳои комплексӣ доштани муодилаҳои характериستيкии

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0 \quad (7)$$

сохта мешаванд. Барои решаҳои $\mu = \alpha^{\pm} \pm i\beta^{\pm}$ муодилаи характеристикӣ (3) ҳалҳои аналитикӣ системаҳо ба даст оварда шудаанд. Лаҳзаҳои вақт t_1, t_2, t_3, t_4 муайян карда шудаанд, ки дар онҳо траекторияҳои ҳал ба сарҳад, яъне ба хати буриш (хати гузариш) мерасанд, ки онҳо координатаҳои худро доро мебошанд. Инчунин формулаҳои дақиқ барои гузариши ҳалҳо аз нимҳамвории болоӣ ба нимҳамвории поёнӣ (ва баръакс) ҳосил карда шудаанд.

Дикқати махсус ба муайянкунадаи Вронски $W(t)$, ки аз ҳалҳои система тартиб дода мешаванд, равона карда шудааст. Барои қисматҳои пеш ва баъд аз гузариш, формулаи классикӣ Лиувилля-Остроградский

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a+c)t}, \quad \text{агар } 0 < t \leq t_2,$$

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a-c)t}, \quad \text{агар } t > t_1$$

татбиқ гардида, робитаҳои зарурӣ барои таҳлили устуворӣ ва ҳосиятҳои динамикии ҳалҳо ба даст оварда шудаанд. Аммо дар фосилаи $t_2 \leq t \leq t_1$ татбиқи мустақими формулаи классикӣ Лиувилля-Остроградский имконпазир нест, зеро дар ҳамин қитъа гузариш аз хати буриш сурат мегирад ва сохтори система тағйир меёбад. Бо мақсади тавсифи рафтори муайянкунандаи Вронски дар ин фосила, мафҳуми махсус - «**муайянкунандаи гузариш**» ворид карда мешавад.

Пас аз муайян намудани «муайянкунандаи гузариш» ва истифодаи усули пешниҳодшуда, натиҷаи асосии мувофиқ ба таври қатъӣ асоснок карда шуда, тасдиқоти зерин исбот мегардад.

Тасдиқоти 1. *Фарз мекунем, ки решаҳои муодилаи характеристикӣ (7) комплексӣ бошанд, яъне шартҳои $4b > (a \pm b)^2$ иҷро мегардад. Онгоҳ функсия*

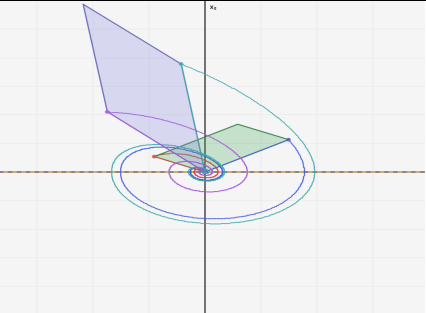
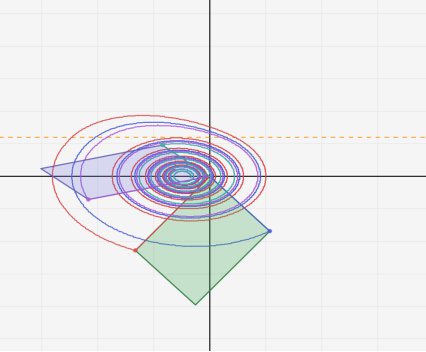
$$\Phi(t) = \lim_{c_2 \rightarrow \frac{\alpha^+}{\beta^+}} \frac{W(t)}{W(0)}$$

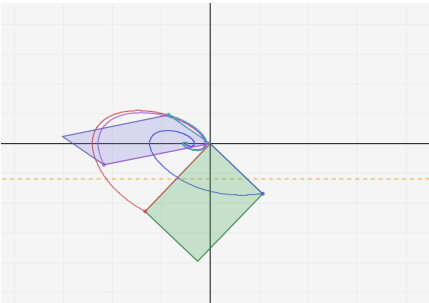
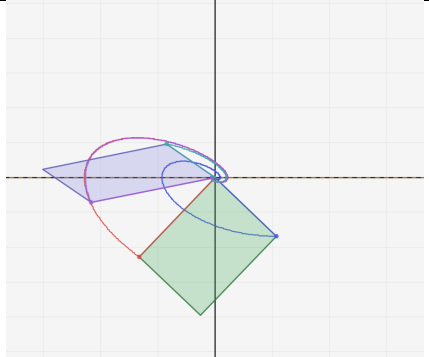
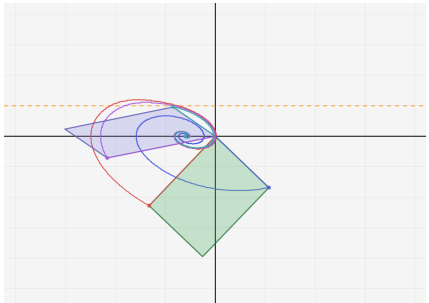
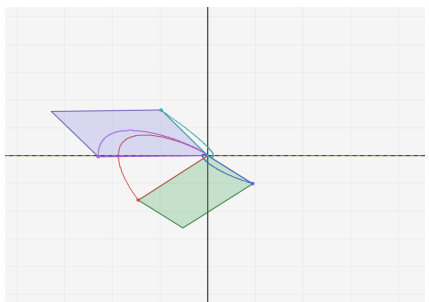
мавҷуд буда, бо назардошти тағйирёбии параметри t муайян карда мешавад. Дар ин ҳолат, формулаи классикӣ Остроградский-Лиувилля ба муодилаи дифференсиалии (5) татбиқшаванда аст.

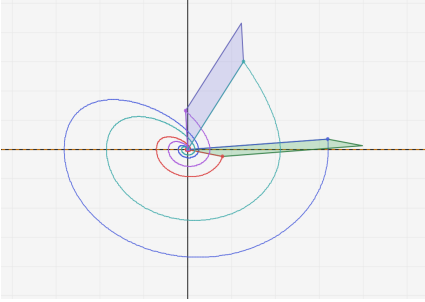
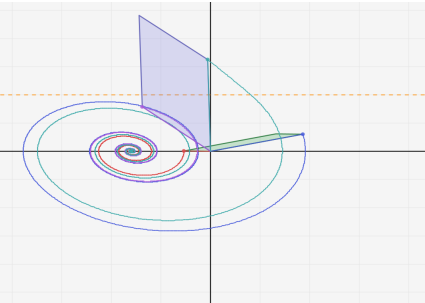
Бо мақсади тасдиқи натиҷаҳои назариявӣ, моделсозии адабии портрети фазавии системаи (6) бо истифода аз усули Рунге-Куттаи тартиби чорум анҷом дода шудааст. Траекторияҳои фазавӣ дар ҳамвории (x_1, x_2) барои қиматҳои гуногуни a, b, c, λ сохта шудаанд. Барои тафсири формулаи Лиувилля-Остроградский, дар ҳамвории фазавӣ

параллелограмм бо қуллаҳои $O = (0,0), A = x^{(1)}(t), B = x^{(2)}(t), C = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$ сохта шудааст, ки масоҳати он ба қимати мутлақи муайянкунандаи $|W(t)|$ баробар аст. Ҳангоми гузариши траекторияҳо аз хати гузариш, татбиқи мустақими формулаи Лиувилля-Остроградский муваққатан вайрон мегардад. Бо вучуди ин, аз нуқтаи назари худудӣ ва дар чаҳорчӯбаи умумисозии пешниҳодшуда, қонунияти мазкур нигоҳ дошта шуда, дурустии натиҷаҳои назариявӣ таъмин мегардад.

Ҷадвали 1. Коэффитсиентҳои интиҳобшуда ва тасвири портретҳои фазавӣ барои қиматҳои гуногуни параметрҳо

№	a	b	c	λ	Портретҳои фазавӣ
1.	0,50	1,0	0,40	0,00	
2.	0,50	1,0	0,40	0,60	

3.	0,50	1,0	0,40	-0,60	
4.	0,90	1,0	0,30	0,00	
5.	1,20	1,0	0,60	0,50	
6.	1,60	1,0	0,20	0,00	

7.	0,80	1,50	0,70	0,00	
8.	1,10	1,00	0,80	1,00	

Манбаъ: Таҳқиқоти илмӣ муаллиф дар асоси [9 – М].

Ҳамаи натиҷаҳои бадастомада нишон медиҳанд, ки ҳатто дар шароити ғайриҳамвор рафтори ҳалҳоро метавон ба таври дақиқ тавсиф намуд, дар ҳоле ки умумият ва эътибори расмӣ усулҳои таҳлили тасдиқотҳои классикӣ бо тафсири дуруст нигоҳ дошта мешаванд.

Дар зербоби 3.3 муодилаи дифференсиалии қисман хаттии тартиби дуоми

$$y'' + g(y, y') = 0 \quad (8)$$

баррасӣ шудааст. Дар кучо,

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Ин ҷо $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ ва a_i, b_i, c_i , $i = 1, 2$ ададҳои доимӣ мебошанд.

Даврае, ки бо баробарии $h(y, y') = 0$ муайян мегардад, **хати гузариш** номида мешавад. Маълум аст, ки функсияи $g(y, y')$ дар хати $h(y, y') = 0$ одатан каниш дорад. Муодилаи дифференсиалии (8) бо тарафи рости (9) дар адабиёт ҳамчун **муодилаи дифференсиалии дӯхташуда (часбондашуда)** маъруф аст [14]. Тавре ки ба мо маълум аст, доираи васеи масъалаҳои амалӣ ба зарурати баррасии чунин системаҳо оварда мерасонад [15].

Муодилаи (8) ба системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (10)$$

эквивалент мебошад, ки дар он $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Траекторияҳои системаи (10) дар соҳаҳои $G_1 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) > 0\}$ ва $G_2 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) < 0\}$ бо ҳалли системаҳои ҳаттии зерин мувофиқан муайян карда мешаванд

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a_1 x_2 - b_1(x_1 - c_1) \end{cases} \quad (11)$$

ва

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a_2 x_2 - b_2(x_1 - c_2). \end{cases} \quad (12)$$

Дар хати гузариши $h(x_1, x_2) = 0$ траекторияи системаи (10) вобаста ба рафтори ҳалли системаҳои ҳаттии (11) ва (12) муайян карда мешавад.

Фарз карда мешавад, ки коэффитсиентҳои a_i ва b_i шарти $4b_i > a_i^2$, $i = 1, 2$ - ро қаноат мекунонанд. Ин маънои онро дорад, ки решаҳои муодилаҳои хarakterистикии мувофиқ ба системаҳои (11) ва (12) ададҳои комплексӣ мебошанд.

Дар марҳилаи аввал, рафтори траекторияҳои муодилаи

$$x'' + ax' + b(x - c) = 0$$

таҳқиқ карда мешаванд. Ин муодила ба системаи

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - b(x_1 - c), \end{cases} \quad (13)$$

эквивалент мебошад. Таҳқиқи он нисбати функсияи $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$ анҷом дода мешавад. Дар ин ҷо барои коэффитсиентҳои a ва b шарти $4b > a^2$ ҷой дорад.

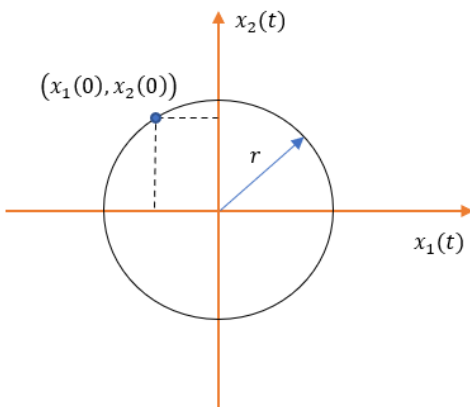
Баъдан, рафтори траекторияҳои ҳалҳои системаи (13) нисбат ба давраи $h(x_1, x_2) = 0$ омӯхта мешаванд. Яъне ҳолатҳои буридани давра ё расидан (тамос гирифтани)-и траектория ба он баррасӣ мегарданд.

«Бигзор $(x_1(t), x_2(t))$ ҳалли системаи (13). Траекторияи ҳалли $(x_1(t), x_2(t))$ системаи (13)-ро, ки аз нуқтаи ибтидоии $(x_1(0), x_2(0))$ мегузарад, дида мебароем. Агар траекторияи $(x_1(t), x_2(t))$ ҳалли системаи (13), ки аз нуқтаи $(x_1(0), x_2(0)) \in \{h(x_1, x_2) = 0\}$ оғоз меёбад, дар ҳамин нуқта ба давра нарасад, он гоҳ меғӯем, ки **давра дар нуқтаи $(x_1(0), x_2(0))$ нисбат ба траекторияи системаи (13) расанда нест**. Агар траекторияи ҳалли системаи (13) дар нуқтаи $(x_1(0), x_2(0))$ ба давра расад, он гоҳ меғӯем, ки **давра дар нуқтаи $(x_1(0), x_2(0))$ нисбат ба траектория ҳалли системаи (13) расанда мебошад**» [16].

Барои таҳлили минтақае, ки дар он давра ва траекторияҳои системаи (13) расанда нестанд, функсияи

$$f(t) = h(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - r^2 \quad (14)$$

-ро баррасӣ мекунем. Қимати $f(t)$ мавқеи нуктаи фазавиро нисбат ба давра муайян мекунад, яъне нишон медиҳад, ки он дар дохили давра, дар болои он ё берун аз он ҷойгир аст. Бинобар ин, истифодаи $f(0)$, $f'(0)$ ва $f''(0)$ барои тартиб додани шартҳои **расандагӣ** ва **буриш** мувофиқ ва қулай мебошад.



Расми 1 – Тасвири геометрии шarti ибтидоӣ ва радиуси r дар ҳамвории фазавӣ (коркарди муаллиф)

Агар нуктаи ибтидоӣ дар болои давра ҷойгир бошад, пас шarti $f(0) = 0$ иҷро мегардад. Диққати махсус барои ҳолати расандагӣ дода мешавад, ки барои он шarti иловагии $f'(0) = 0$ иҷро мегардад. Бо муқаррар кардан $t = 0$ ва истифода аз ифодаи $f'(t)$, мо чунин системаро ба даст меорем

$$\begin{cases} x_1^2(0) + x_2^2(0) - r^2 = 0, \\ 2x_2(0)[(1-b)x_1(0) - ax_2(0) + bc] = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Аз инчо маълум аст, ки $(x_1(0), x_2(0)) = (\pm r, 0)$ ҳалли ин система шуда метавонад. Илова бар ин ҳангоми $x_2(0) \neq 0$ системаи (15) метавонад якчанд ҳал дошта бошад. Аз ҳамин сабаб ҳолатҳои зерин имконпазиранд:

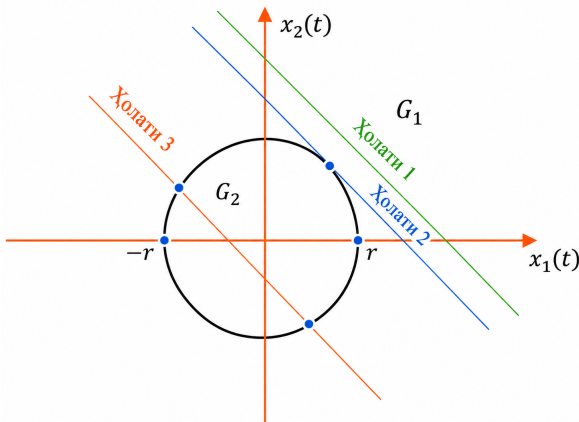
ҳолати 1. Бигзор барои коэффитсиентҳои системаи (13) шarti $|c| > \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$ иҷро гардад. Онгоҳ системаи (13), ба ғайр аз нуктаҳои $(-r, 0)$ ва $(r, 0)$, бо давраи $h(x_1, x_2) = 0$ дигар нуктаҳои расанда надоранд.

ҳолати 2. Бигзор барои коэффитсиентҳои системаи (13) шarti $|c| < \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$ иҷро гардад. Онгоҳ системаи (13) ғайр аз нуктаҳои

$(-r, 0)$ ва $(r, 0)$, бо давраи $h(x_1, x_2) = 0$ дар нуқтаҳои $A_1(x_1, x_2)$ ва $B_1(x_1, x_2)$ расанда мебошад.

ҳолати 3. Бигзор барои коэффитсиентҳои системаи (13) шарт $|c| = \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + (1-b)^2}$ иҷро гардад. Онгоҳ системаи (13) ғайр аз нуқтаҳои $(-r, 0)$ ва $(r, 0)$, бо давраи $h(x_1, x_2) = 0$ дар нуқтаи $C(x_1, x_2)$ расанда мешавад.

Дар расми 2 тасвирҳои геометрии ҳолатҳои 1-3 нишон дода шудаанд.



Расми 2. Ҳамаи ҳолатҳои имконпазири нуқтаҳои тамос (коркарди муаллиф)

Ҳолати 1 дар зер муфассал таҳлил карда мешавад, зеро он асоси исботи минбаъдаи мавҷудияти сиклҳои худудӣ мебошад. Дар ҳолати 1 леммаи зерин ҷой дорад.

Лемма 1. Бигзор шарт $|c| > \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + (1-b)^2}$ иҷро гардад. Онгоҳ ҳамаи нуқтаҳои давраи $h(x_1, x_2) = 0$, ба ғайр аз нуқтаҳои $(\pm r, 0)$, нисбат ба траекторияҳои системаи (13) **расанда нестанд**. Илова бар ин, агар $(x_1(t), x_2(t))$ ҳалли системаи (13) ва $h(x_1(0), x_2(0)) = 0$ бошад, онгоҳ

- ҳангоми $c > 0$ қимати $h(x_1(t), x_2(t))$ бо зиёд шудани t **афзоиш меёбад**, агар $x_2(0) > 0$; ва **кам мешавад**, агар $x_2(0) < 0$;
- ҳангоми $c < 0$ қимати $h(x_1(t), x_2(t))$ бо зиёд шудани t **кам мешавад**, агар $x_2(0) > 0$; ва **афзоиш меёбад**, агар $x_2(0) < 0$.

Пас аз муайян намудани набудани расиши траектория дар ҳамаи нуқтаҳои дигар, зарур аст хусусияти расандагӣ дар нуқтаҳои махсус $(\pm r, 0)$ муайян карда шавад. «Бо ин мақсад, мувофиқи равиши маъмул дар

назариинг расиши траекторияҳо бо нуқта, ҳосилаи тартиби дуюм $f''(0)$ таҳқиқ карда мешавад» [14].

$$f''(0) = 2b(x_1(0) - c)[(b - 1)x_1(0) - bc].$$

Аз инҷо бармеояд, ки дар нуқтаҳои $(\pm r, 0)$ барои $|c| \neq r$ шартӣ $f''(0) \neq 0$ иҷро мегардад. Натиҷаи ҳосилшуда дар леммаи зерин баён карда мешавад.

Лемма 2. Бигзор $|c| > \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + (1 - b)^2}$, $|c| \neq r$ ва $(x_1(t), x_2(t))$ – ҳалли системаи (9) бошад, ки яке аз шартҳои ибтидоии $(x_1(0), x_2(0)) = (r, 0)$ ё $(x_1(0), x_2(0)) = (-r, 0)$ – ро қаноат менамояд. Онгоҳ барои функсияи $f(t)$, ки бо баробарии (14) муайян шудааст, шартҳои $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ва $f''(0) \neq 0$ ҷой дорад.

Ғайр аз ин, барои қиматҳои муқарраршудаи параметрҳо $r = 1$, $a_1 > 0$ ва $a_2 < 0$, агар шартӣ

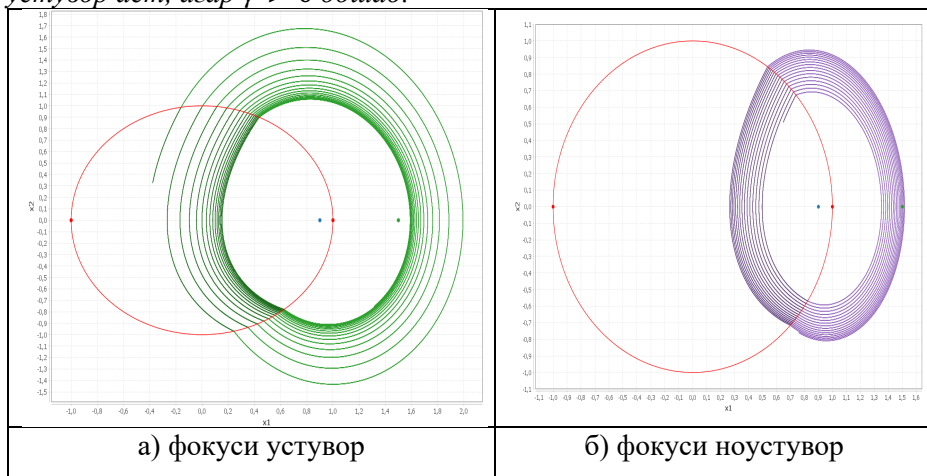
$$\frac{1}{b_1} \sqrt{a_1^2 + (1 - b_1)^2} < c_1 < 1, \quad c_2 > \max \left\{ \frac{1}{b_2} \sqrt{a_2^2 + (1 - b_2)^2}, 1 \right\}, \quad (16)$$

иҷро гардад, онгоҳ чунин адади γ -ро ҳосил мекунем

$$\gamma = \frac{a_1}{b_1(1 - c_1)(1 - b_1(1 - c_1))} - \frac{a_2}{b_2(1 - c_2)(1 - b_2(1 - c_2))}.$$

Аломати γ намуди нуқтаи махсусӣ $(1, 0)$ -ро муайян мекунад, ки дар леммаи зерин ба таври дақиқ баён гардидааст.

Лемма 3. Бигзор шартҳои (16) иҷро гарданд. Пас, нуқтаи махсусӣ $(1, 0)$ системаи (10) фокуси ноустувор аст, агар $\gamma < 0$ бошад ва фокуси устувор аст, агар $\gamma > 0$ бошад.

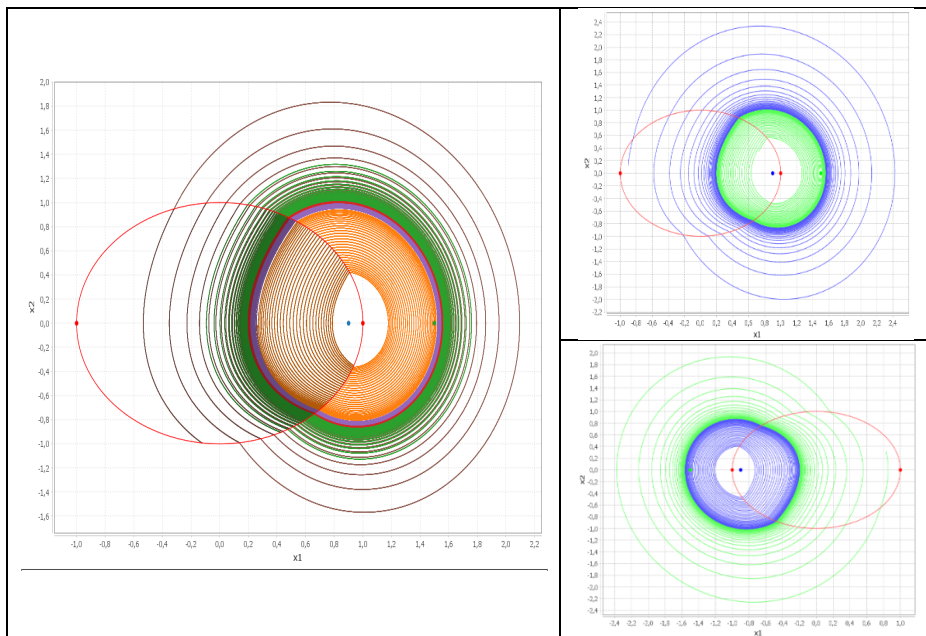


Расми 3. Портретҳои фазавии пайдоиши фокуси устувор ва ноустувор
(коркарди муаллиф)

Тасдиқоти зерин аз леммаҳои 1 - 3 бармеояд.

Тасдиқоти 2. Бигзор шартҳои (16) иҷро гарданд ва $\gamma < 0$ бошад. Онгоҳ, системаи (10) дорои сикли ҳудудӣ мебошад.

Исбот ба он асос меёбад, ки яке аз нуқтаҳои махсуси система нақши **фокуси устувор**, дар ҳоле ки нуқтаи махсуси дигар нақши **фокуси ноустувор**-ро иҷро мекунад. Мувофиқи леммаи 1 монотонӣ тағйирёбии функсияи $h(x_1(t), x_2(t))$ дар нимҳамвораҳои болоӣ ва поёни муайян карда мешавад. Ин ҳолат минтақаи маҳдудеро ташкил медиҳад, ки дар он траекторияҳо наметавонанд ба беохирӣ раванд ва ҳамчунин наметавонанд ба як нуқтаи ягона наздик шаванд. Аз ин рӯ, тибқи теоремаи Пуанкаре–Бендиксон, мавҷудияти сикли ҳудудӣ дида мешавад [16].



Расми 4. Сикли ҳудудӣ (коркарди муаллиф)

Дар зербоби 3.4 ҳолатҳои лағжиш дар системаҳои дифференсиалии қисман хаттии тартиби дуум бо тарафи рости ҷаҳишдор баррасӣ мегарданд. Таҳлили мазкур бо истифода аз усули Филиппов анҷом дода мешавад, ки он имкон медиҳад ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалӣ дар нуқтаҳои ҷаҳишдори тарафи рости система ба таври дуруст аз нигоҳи

математикӣ асоснок ва муайян карда шаванд. Мо системаи (10)-ро баррасӣ мекунем, ки барои он хати гузариш чунин намуд дорад

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0.$$

Майдонҳои векторӣ дар ҳар ду тарафи хати гузариш мутаносибан бо системаҳои (11) ва (12) муайян мегарданд. Мувофиқи усули Филиппов, ҳолати лағжиш дар он нуқтаҳои хати гузариш ба вучуд меояд, ки дар онҳо чузҳои муқаррарии майдонҳои векторӣ нисбат ба хати гузариш аломатҳои муқобил доранд.

Бо ҳисоб кардани зарби скалярии градиенти функсияи гузариш $\Delta h = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ бо майдонҳои вектории система, шarti пайдоиши ҳолати лағжишро ба даст меорем.

$$[(1 - b_1)x_1 - a_1x_2 + b_1c_1][(1 - b_2)x_1 - a_2x_2 + b_2c_2] < 0. \quad (17)$$

Дар он қисматҳои даврае, ки нобаробарии (17) иҷро мегардад, ҳаракати траектория бо майдони эквиваленти Филиппов тавсиф карда мешавад, ки бо ифодаи зерин муайян карда мешавад.

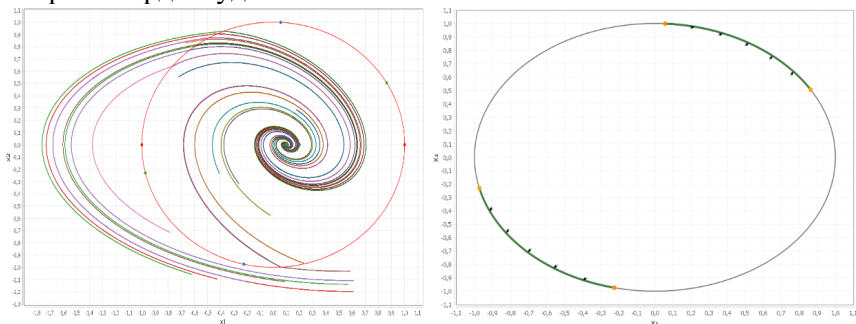
$$x' = (1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_2(x).$$

Дар инҷо коэффитсиенти λ аз $(\Delta h, x') = 0$ чунин намуд мегирад.

$$\lambda = \frac{(1 - b_1)x_1 - a_1x_2 + b_1c_1}{(b_2 - b_1)x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + b_1c_1 - b_2c_2}.$$

Шarti $0 < \lambda < 1$ шarti зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳолати лағжиш аст, ки дар он траектория дар хати гузариш нигоҳ дошта мешавад ва дар болои камони давра ҳаракат мекунад.

Таҳлили шартҳои бадастомада имкон медиҳад, ки минтақаҳои лағжиш дар хати гузариш ба таври якмаъно муайян карда шуда, дар моделсозии адабии портретҳои фазавии системаҳои қисман хаттӣ истифода гарданд [1]. Татбиқи усули Филиппов ва алгоритми муайян намудани ҳолатҳои лағжиш дар дастаи барномае, ки дар зербоби 3.6 тавсиф шудааст, дар расми зерин оварда шудааст.



Расми 5. Камони лағжанда дар хати гузариши $h(x_1, x_2) = 0$ (коркарди муаллиф)

Дар зербоби 3.5 таҳлили сифатии намудҳои боқимондаи рафтори траекторияи ҳалҳо бо давраи $h(x_1, x_2) = 0$ гузаронида мешавад. Дар ин бахш тақсимооти сектори давра оварда шуда, шартҳои кифоягии мавҷудияти ҳалҳои даврӣ оварда мешаванд.

Фарз карда мешавад, ки $r = 1$ ва коэффисиентҳои системаи (10) шартҳои $a_1 > 0, a_2 < 0$ -ро қаноат менамоянд. Бо ин мақсад, аломатгузори

$$\Delta_i = \frac{1}{b_i} \sqrt{a_i^2 + (1 - b_i)^2}, i = 1, 2$$

оварда мешавад. Микдорҳои Δ_i мавқеи мутақобилаи траекторияҳои системаҳои хаттии (11) ва (12)-ро нисбат ба давра тавсиф намуда, имкон медиҳанд шумора ва навъи нуқтаҳои расанда муайян карда шаванд. Таснифоти пурраи чунин намудҳои рафтори ҳал нисбат ба давра дар ҷадвали зерин оварда шудааст.

Ҷадвали 2. Намудҳои нуқтаҳои расанда, тақсимооти бахшҳо ва шумораи бахшҳо

№	Шартҳо барои коэффисиентҳои системаи (11)	Микдор и нуқтаҳо и расанда барои система и (11)	Шартҳо барои коэффисиентҳои системаи (12)	Микдор и нуқтаҳо и расанда барои система и (12)	Микдор и камонҳо
1.	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 > \Delta_2$	0	2
2.	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 > \Delta_2$	0	3
3.	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 > \Delta_2$	0	4
4.	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 = \Delta_2$	1	3
5.	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 = \Delta_2$	1	4
6.	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 = \Delta_2$	1	5
7.	$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 < \Delta_2$	2	4
8.	$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 < \Delta_2$	2	5
9.	$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 < \Delta_2$	2	6

Манбаъ: Таҳқиқоти илмӣ муаллиф дар асоси [4 – М].

Вобаста аз он, ки кадом камонҳо ҳангоми риояи шартҳои ҷадвали 2 ба вуҷуд меоянд, самти ҳаракат дар ин камонҳо аз рӯи аломати $f'(0)$ муайян карда мешавад (нигаред ба зербоби 3.3).

Дар зербоби 3.6 дастаи барномае пешниҳод мегардад, ки аз ҷониби муаллиф барои омӯзиши ададӣ ва сифатии муодилаҳои дифференсиалии қисман хаттии тартиби дуум бо хати гузариш таҳия шудааст. Дасти барномаҳо усулҳо ва алгоритмҳои дар зребобҳои 3.3–3.5 таҳия ва

баррасишударо татбиқ намуда, барои таҳлили портретҳои фазавӣ ва сиклҳои ҳудудии системаҳои динамикии қисман хаттӣ пешбинӣ гардидааст.

Дар доираи ин дастаи барномаҳо алгоритмҳои ададӣ бо гузариш байни зерсистемаҳои хаттӣ, муайян намудани нуқтаҳои расандагӣ бо хати гузариш, сохтани тақсимои сектори камонҳои давра, инчунин татбиқи амалии теоремаи Пуанкаре–Бендиксон амалӣ карда шудаанд. Усулҳои ададӣ дар асоси усули Рунге–Куттаи тартиби чорум бо муайянсозии рӯйдодҳо иҷро мегардад, ки ин дӯхтани дуруст ва пайдарпайи ҳалҳоро дар минтақаҳои гуногуни ҳамвории фазавӣ таъмин менамояд.

Натиҷаҳои озмоишҳои ҳисобӣ мавҷудият ва устувории сиклҳои ҳудудиро барои синфи системаҳои омӯхташуда тасдиқ намуда, бо натиҷаҳои назариявии дар диссертатсия бадастомада мутобиқ мебошанд.

Дар зербоби 3.7 дастаи барномаҳо пешниҳод мегарданд, ки аз ҷониби муаллиф барои тасдиқи натиҷаҳои назариявӣ ва гузаронидани озмоишҳои ададӣ таҳия шудаанд. Ин дастаи барномаҳо ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии қисман хаттӣ тартиби дуюм бо хати гузариш ва шабеҳи онҳо, ки бо умумисозии формулаи Лиувилл–Остроградский алоқаманд мебошанд, нигаронида шудаанд.

Илова бар ин, дастаи барномаҳои таҳияшуда имконият медиҳанд, ки портретҳои фазавӣ сохта шаванд, траекторияҳои ҳалҳо тасвир гарданд, муайянкунандаҳои Вронски ва қонуниятҳои тағйирёбии онҳо ҳисоб карда шаванд. Инчунин коркарди дурусти буришҳои хати гузариш ва нуқтаҳои махсус амалӣ гардад. Универсиалӣ будани алгоритмҳои татбиқшуда истифодаи барномаро ҳам барои такрори натиҷаҳои бадастомада дар диссертатсия ва ҳам барои гузаронидани таҳқиқоти минбаъда оид ба системаҳои динамикӣ бо хати гузариш таъмин менамояд.

Дар баҳши **«Муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада»** таҳлили муфассали натиҷаҳои ҳосилшудаи кори диссертатсионӣ пешниҳод гардида, онҳо бо натиҷаҳои дигар муаллифон муқоиса ва баҳогузорӣ карда мешаванд.

ХУЛОСА

Дар кори диссертатсионӣ усулҳои нави таҳқиқи сифатӣ ва тақрибии бифуркатсияҳо ва ҳалҳои даврӣ дар системаҳои динамикии ғайриҳамвор ва қисман хаттӣ андозаҳои гуногун таҳия ва асоснок карда шудаанд. Таҳқиқоти анҷомдодашуда ҳам ҷанбаҳои назариявии пайдоиши сиклҳои ҳудудӣ ва бифуркатсияҳои Андронов-Хопф ва ҳам масъалаҳои амалии моделсозии ададии онҳоро бо истифода аз технологияҳои муосири ҳисоббарорӣ фаро мегирад.

Натиҷаҳои асосии илмӣ диссертатсия инҳоянд:

- барои системаи динамикии дученакаи (1) бо қисми асосии якҷинса, бо истифода аз принципи тағйирёбии индекси топологии нуқтаи махсуси майдони вектории комилан бефосила, шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ пайдоиши ҳалҳои даврӣ муайян карда шудаанд [2 - M];
- барои системаи динамикии (2) дар фазои сеченака, бо истифода аз усулҳои топологӣ (принципи тағйирёбии индекс) ва дар шартҳои вобастагии бефосилаи қисми ҳаттӣ аз параметр, шартҳои ба вуҷуд омадани бифуркатсияи Андронов–Хопф дар истилоҳҳои рафтори коэффитсиентҳо ҳосил гардидаанд [1 - M], [3 - M], [8 - M], [9 - M, 12 - M];
- равиши нави аналитикӣ ва ададӣ барои таҳқиқи бифуркатсияҳо дар системаҳои ғайриҳамвори (3) ва (4), ки бо функсияҳои модуль ва қисман-ҳаттӣ тавсиф мешаванд, пешниҳод гардида, имконияти сохтани портретҳои фазавӣ барои намудҳои асосии чунин системаҳо таъмин карда шудааст [10 - M], [11 - M], [13 - M];
- формулаҳои ҳисобие ба даст оварда шудаанд, ки падидаҳои даврӣ дар атрофи ҳолатҳои мувозинати системаҳои динамикӣ бо функсияҳои модулдор ва қисман-ҳаттӣ тавсиф мекунанд [6 - M, 10 - M];
- дастаи нави барномавӣ барои моделсозии компютерӣ ва таҳлили сиклҳои ҳудудии системаҳои динамикии ғайриҳамвори дори гузариш таҳия шудааст [4 - M, 5 - M].

Натиҷаҳои бадастоварда аз ҷиҳати назариявӣ нав буда, аҳамияти амалӣ доранд.

Аҳамияти назариявии кор аз таҳия ва асосноккунии моделҳои математикӣ ва усулҳои таҳлили системаҳои динамикии дорой гузариш иборат аст, ки барои таҳқиқи низомҳои даврӣ ва статсионарӣ дар муодилаҳои дифференциалии ғайриҳаттӣ ва қисман ҳаттии тартибҳои дуум ва сеюм пешбинӣ шудаанд. Натиҷаҳои бадастомада усулҳои топологӣ ва сифатии назарияи системаҳои динамикӣ ро инкишоф дода, тасаввуроти классикии назарияи бифуркатсияҳоро нисбат ба системаҳои ғайриҳамвори дорой сохтори кандашаванда васеъ менамояд.

Инкишофи равишҳои таҳқиқи падидаҳои даврӣ дар системаҳои дорой гузариш, аз ҷумла муайян намудани шартҳои мавҷудият ва устувории сиклҳои ҳудудӣ, инчунин таҳлили сохтори фазавӣ дар наздикии ҳаҷҳои гузариш аҳамияти махсус дорад.

Аҳамияти илмӣ амалии кор бо он муайян мегардад, ки натиҷаҳои назариявии бадастомада то сатҳи муносибатҳои ҳисобӣ, алгоритмҳо ва воситаҳои барномавии барои истифодаи амалӣ мувофиқ расонида

шудаанд. Дар асоси онҳо маҷмӯи барномавӣ бо забони Java таҳия ва амалӣ гардонида шудааст, ки барои моделсозии компютерӣ, режимҳои динамики ва сохтани портретҳои фазавии системаҳои дорои гузариш пешбинӣ шудааст.

Усулҳо ва алгоритмҳои таҳияшуда метавонанд ҳангоми лоиҳакашӣ ва таҳқиқи синфи васеи ситемаҳои динамикии ғайрихаттӣ, аз ҷумла моделҳои дорои унсурҳои гузариш, ки дар масъалаҳои механикӣ, назарияи идоракунии автоматӣ, электроника ва дигар соҳаҳои амалӣ ба миён меоянд ва дар онҳо равандҳои даврӣ нақши муҳим мебозанд, истифода шаванд.

Тавсияҳо барои истифодаи амалии натиҷаҳо

Усулҳои таҳияшударо ҳангоми таҳқиқи системаҳои идоракунии автоматӣ, осцилляторҳои электрикӣ ва механикӣ, равандҳои биофизикӣ ва иқтисодӣ, инчунин ҳангоми сохтани моделҳои компютерии системаҳои динамикӣ бо хати гузариш истифода бурдан мумкин аст.

Равиши топологӣ ва алгоритмҳои ададии пешниҳодшуда метавонанд барои таҳқиқоти минбаъдаи системаҳои бисёрченакаи ғайриҳамвор, аз ҷумла масъалаҳои ҳамоҳангсозӣ, низомҳои хаотикӣ ва бифуркатсияҳои тартиби баландтар асос гардан.

Дастаи барномаҳои таҳияшуда барои истифода дар раванди таълим ҳангоми омӯзиши фанҳои "Моделсозии математикӣ", "Муодилаҳои дифференсиалӣ" ва "Динамикаи ғайрихаттӣ" мувофиқ мебошад.

Ҳамин тариқ, таҳқиқоти анҷомдодашуда қори илмӣ анҷомёфтаеро ифода мекунад, ки ҳам натиҷаҳои назариявии бунёдӣ ва ҳам татбиқи амалии онҳоро бо истифода аз дастаи барномаҳои таҳияшуда дар бар мегирад.

РУЙХАТИ АДАБИЁТҲОИ ИСТИФОДАШУДА

- [1]. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [Текст] / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. - 223 с.
- [2]. Пуанкаре А. Избранные труды [Текст]/ А. Пуанкаре. М.: Наука, 1971. -Т.1.-771 с.
- [3]. Ляпунов А.М. Общие задача об устойчивости движения [Текст] / А.М. Ляпунов. -М.: ГИТТЛ, 1950. -472 с.
- [4]. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. -568 с.
- [5]. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов. -М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1974. -504 с.

- [6]. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Едиториал УРСС, 2018. - 208 с.
- [7]. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. -М.: Наука, 1973. -512 с.
- [8]. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. -390 с.
- [9]. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст] / Г.Ю. Ризниченко. -М.: Ижевск, 2002. -232 с.
- [10]. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления [Текст] / В.И. Уткин. -М.: Наука, 1981. - 368 с.
- [11]. Murray J.D. Inertial and delayed effects in population dynamics [Text] / J.D. Murray // Mathematical Biology I: An Introduction. – Berlin: Springer, 2002. – p. 97–135.
- [12]. Gandolfo G. Nonlinear and threshold effects in economic dynamics [Text] / G. Gandolfo // Economic Dynamics. – Berlin: Springer, 2009. – p. 201–245.
- [13]. Мухамадиев Э.М. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // Уфим. мат. журн. - 2014. -Т. 6. -№ 1. -С. 84-93.
- [14]. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости [Текст] / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. -М.: Наука, 1976. -496 с.
- [15]. Андронов А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. -М.: Физ-матгиз, 1959. -568 с.
- [16]. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. -М.: Мир, 1970. -720 с.

РЎЙХАТИ КОРҶОИ ЧОПШУДА ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

**А). Мақолаҳо, ки дар нашрияхои дорои тақризшавандаи Комиссияи
олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ҷоп
шудаанд (бо забони асл):**

- [1 - М]. Каримов М.М. О применении методов функционального анализа в задаче исследования бифуркаций нелинейной трехмерной системы. [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2023. -№1. -С. 104-115.

- [2 - М]. Каримов М.М. Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№3-4. -С. 162-169.
- [3 - М]. Каримов М.М. Приложение принципа смены индекса к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа [Текст] / М.М. Каримов // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№11-12. -С. 650-658.
- [4 - М]. Каримов М.М. О новом программном пакете для задач моделирования предельных циклов дифференциального уравнения второго порядка с переключением [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. -2025. -№2. -С. 11-17.
- [5 - М]. Каримзода М.М. Компьютерные методы управления и автоматизации систем с переключением. [Текст] / М.М. Каримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2026. -№1. -С. 58-68.

Б). Мақолаҳои илмие, ки дар дигар маҷаллаҳо ҷоп шудаанд:

- [6 - М]. Каримов М.М. Моделирование возникновения предельного цикла дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров //Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. -30 января – 4 февраля 2025 г. -С. 168-172.
- [7 - М]. Каримов М.М. Качественный анализ и фазовые траекторий динамики раковых клеток [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы., посвящённая 100-летию чл. корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. -Уфа, 2021. -С. 170-171.
- [8 - М]. Каримов М.М. Об одном доказательстве теоремы Андронова – Хопфа методами функционального анализа [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова. Воронеж, - 2024. -С. 172-174.
- [9 - М]. Каримов М.М. Топологические методы исследования бифуркаций в трёхмерном пространстве [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Материалы международной

- конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Воронеж, - 2023. -С. 188-190.
- [10 - М]. Каримов М.М. Об одном аналоге теоремы Лиувилля – Остроградского для кусочно – линейного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции “Современные методы теории краевых задач”. ВоГУ, МГУ имени М.В. Ломоносова, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. Воронеж, - 2022. -С. 211-213.
- [11 - М]. Каримов М.М. Анализ предельных циклов и численное моделирование в кусочно – линейных динамических системах [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров, Р.И. Азизов // Материалы международной научно – практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения», посвящённая «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75–летию Таджикского национального университета». Душанбе, - 2024. -С. 59-62.
- [12 - М]. Каримов М.М. Обобщенная теорема Хопфа для системы дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», «75- летию заслуженного работника Таджикистана, чл. корр.НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова» и «70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж. С. Сафарова». г. Бохтар, - 2022. С. 97-98.
- [13 - М]. Каримов М.М. Качественный анализ существования циклов кусочно – линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.М. Каримов, М.З. Убайдов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Уфа, - 2025. С. 46-49.

Шарҳи мухтасари

диссертатсияи Каримзода Мехрубон Маткарим дар мавзӯи «Усулҳои таҳлил ва банақшагирии системаҳои динамикии гузаришдор дар масъалаҳои таҳқиқи падидаҳои даврӣ», барои дарёфти дараҷаи илмӣ доктори фалсафа (PhD) аз рӯи ихтисоси 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системаҳои автоматикунории банақшагирӣ)

Вожаҳои калидӣ: системаҳои динамикӣ бо хати гузариш, муодилаҳои дифференциалӣ, ҳалли статсионарӣ, ҳаттикунонӣ, устуворӣ, ҳалҳои даврӣ, гомотопия, майдонҳои вектории комилан бифосила, ҷарҳзани майдонҳои векторӣ, хати гузариш, моделсозии ададӣ, портретҳои фазавӣ.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади таҳқиқоти мазкур таҳия ва таҳқиқи усулҳои таҳлил ва лоиҳакашии системаҳои динамикии дорои гузариш мебошад, ки ба омӯзиши падидаҳои даврӣ ва режимҳои периодӣ дар моделҳои математикӣ бо тарафи рости ғайриҳамвор дар атрофи ҳолатҳои мувозинат равона шудаанд. Барои ноил шудан ба мақсади гузошташуда дар қори диссертатсионӣ таҳқиқи сифатӣ ва тақрибии равандҳои бифуркатсионӣ, ки ба пайдоиши сиклҳои ҳудудӣ оварда мерасонанд, анҷом дода шудааст. Инчунин алгоритмҳо ва воситаҳои барномавӣ таҳия гардидаанд, ки барои таҳлили ададӣ ва сифатии режимҳои динамикӣ пешбинӣ шудаанд ва ҳам аз ҷиҳати назариявӣ ва ҳам аз ҷиҳати амалӣ аҳамият доранд. Дикқати махсус ба таҳқиқи системаҳои динамикии дученакаи дорои гузариш равона карда шудааст. Барои чунин системаҳо таҳлили сифатӣ ва ададии портретҳои фазавӣ гузаронида шуда, инчунин усулҳои дӯхтани ҳалҳо дар ҳатти гузариш таҳия ва асоснок карда шудаанд, ки тавсифи дурусти рафтори траекторияҳо ва ташаккули режимҳои давриро таъмин менамоянд.

Усулҳои таҳқиқ. Дар таҳқиқот усулҳои моделсозии математикӣ, назарияи лапшиҳои ғайриҳаттӣ, усулҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои дифференциалӣ, инчунин усулҳои таҳлили сифатӣ ва таҳқиқи масъалаҳои бифуркатсионӣ аз ҷумла дар системаҳои динамикии ғайриҳамвори дорои гузариш, истифода шудаанд. Ин усулҳо барои таҳлил ва банақшагирии системаҳои динамикӣ ба қор бурда мешаванд, ки имкон медиҳанд шартҳои пайдоиши сиклҳои ҳудудӣ ва траекторияҳои лағжандаро муайян намуда, инчунин моделҳоро бо ҳолатҳои пешаки додашуда эҷод намоянд.

Навоварии илмӣ таҳқиқот. Моделҳои математикӣ барои системаҳои динамикии дученака ва сеченакаи дорои хати гузариш таҳия карда шудаанд, ки барои онҳо бо истифода аз усулҳои топологӣ шартҳои пайдоиши бифуркатсияи ҳалҳои даврӣ, аз ҷумла бифуркатсияи Андроно-Хопф, муайян гардидаанд. Равиши нави аналитикӣ-ададӣ барои таҳқиқи системаҳои динамикии ғайриҳамвор, ки бо функсияҳои модуль ва қисман ҳаттӣ тавсиф мешаванд, пешниҳод шуда, формулаҳои ҳисобӣ барои тавсифи тахминии ҳалҳои бифуркатсионӣ ва комплекси барномавӣ барои таҳлили ададии онҳо таҳия карда шудааст.

Аҳамияти назарӣ ва амалӣ. Арзиши назариявии қор дар рушди усулҳои моделсозии математикӣ ва таҳлили ададии системаҳои динамикии ғайриҳамвор бо хати гузариш ифода меёбад. Арзиши амалӣ дар таҳияи алгоритмҳо ва комплекси барномавие зоҳир мегардад, ки метавонанд барои моделсозӣ ва таҳлили компютерӣ доираи васеи системаҳои динамикӣ ва масъалаҳои амалӣ истифода шаванд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Каримзода Мехрубон Маткарим на тему «Методы анализа и проектирования динамических систем с переключениями в задачах исследования циклических явлений», представленной на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования)

Ключевые слова: динамические системы с переключением, дифференциальные уравнения, стационарные решения, линеаризация, устойчивость, периодические решения, гомотопия, вполне непрерывные векторные поля, вращение векторных полей, линия переключения, численное моделирование, фазовые портреты.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является разработка и исследование методов анализа и проектирования динамических систем с переключениями, направленных на изучение циклических явлений и периодических режимов в математических моделях с негладкой правой частью в окрестности состояний равновесия. Для достижения поставленной цели в работе выполнено качественное и приближённое исследование бифуркационных процессов, приводящих к возникновению предельных циклов, а также разработаны алгоритмы и программные средства, предназначенные для численного и качественного анализа динамических режимов, представляющих интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Особое внимание уделено исследованию двумерных динамических систем с переключениями, для которых проведён качественный и численный анализ фазовых портретов, а также разработаны и обоснованы методы сшивания решений на линии переключения, обеспечивающие корректное описание поведения траекторий и формирование циклических режимов.

Методы исследования. В работе применяются методы математического моделирования, теории нелинейных колебаний, приближенные методы решения дифференциальных уравнений, а также методы качественного анализа и исследования бифуркаций, в том числе негладких динамических системах с переключением. Эти методы используются для анализа и проектирования динамических систем, позволяя выявлять условия возникновения предельных циклов и скользящих траекторий, а также создавать модели с заранее заданными режимами движения.

Научная новизна исследований. Разработаны математические модели двумерных и трёхмерных динамических систем с переключениями, для которых с использованием топологических методов получены условия бифуркации периодических решений, включая бифуркацию Андронова – Хопфа. Предложен аналитический и численный подход к исследованию негладких систем, описываемых модульными и кусочно – линейными функциями, получены расчётные формулы для приближённого описания бифуркационных решений и создан программный комплекс для их численного анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая ценность работы заключается в развитии методов математического и численного моделирования негладких динамических систем с переключениями. Практическая ценность состоит в разработке численных алгоритмов и программного комплекса, которые могут быть использованы при компьютерном моделировании и анализе широкого класса динамических и прикладных систем.

ABSTRACT

dissertation of Karimzoda Mehrubon Matkarim on the topic "Methods of analysis and design of switched dynamical systems in problems of studying cyclic phenomena", submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060200 – Computer science (6D060202 – Computer-Aided design systems).

Keywords: switched dynamic systems, differential equations, stationary solutions, linearization, stability, periodic solutions, homotopy, completely continuous vector fields, vector field rotation, switching line, numerical simulation, phase portraits.

Objective. The aim of this dissertation is to develop and explore methods for the analysis and design of switched dynamic systems aimed at studying cyclic phenomena and periodic regimes in mathematical models with nonsmooth right-hand sides near equilibrium states. To achieve this goal, this paper presents a qualitative and approximate study of the bifurcation processes leading to the emergence of limit cycles. Algorithms and software tools for the numerical and qualitative analysis of dynamic regimes of interest from both theoretical and applied perspectives are developed. Particular attention is paid to the study of two-dimensional dynamic systems with switching, for which a qualitative and numerical analysis of phase portraits is performed. Methods for stitching solutions on the switching line are developed and validated, ensuring an accurate description of trajectory behavior and the formation of cyclic regimes.

Research Methods. The paper employs mathematical modeling methods, nonlinear oscillation theory, approximate methods for solving differential equations, and methods for qualitative analysis and bifurcation research, including nonsmooth dynamic systems with switching. These methods are used to analyze and design dynamic systems, allowing one to identify the conditions for the emergence of limit cycles and sliding trajectories, as well as to create models with predetermined motion regimes.

Scientific Novelty of the Research. Mathematical models of two-dimensional and three-dimensional dynamic systems with switching are developed, for which bifurcation conditions for periodic solutions, including the Andronov-Hopf bifurcation, are obtained using topological methods. An analytical and numerical approach to studying nonsmooth systems described by modular and piecewise linear functions is proposed. Calculation formulas for an approximate description of bifurcation solutions are obtained, and a software package for their numerical analysis is created.

Theoretical and Practical Value. The theoretical value of the work lies in the development of methods for mathematical and numerical modeling of nonsmooth dynamic systems with switching. The practical value lies in the development of numerical algorithms and a software package that can be used in computer modeling and analysis of a wide range of dynamic and applied systems.