РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Абдукаримзода Муслими Кароматулло

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^m$

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДУШАНБЕ — 2021

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и механики Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Шабозов Мирганд Шабозович,**
академик Национальной Академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Бохтарского государственного университета им. Н. Хусрава

Файзмамадова Лолазор Гадомамадовна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и естественно - научных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции.

Оппонирующая организация: Российско-Таджикиский (славянский) университет

Защита состоится *26 мая 2021 г. в 10:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г.Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Таджикского национального университета, а также на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «___» «__________» 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-012,
доктор физико-математических наук **Р.Н. Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В шестидесятых годах прошлого столетия С.М.Никольский[1] поставил и решил впервые экстремальные задачи о построении наилучших (оптимальных) квадратурных формул, т.е. оптимизационная задача выбора узлов и весов квадратурной формулы из условия минимальности точной оценки ошибки формулы на заданном классе функций. В случае фиксированных узлов аналогичную задачу впервые рассмотрел американский математик А.Сард[2]. В настоящее время теория построения оптимальных квадратурных формул стала наиболее важным разделом вычислительной математики. В этом направлении современной математики получены многочисленные результаты. Отметим, что ряд наилучших квадратурных формул найден в работах Н.П.Корнейчука, Н.Е.Лушпайа, М.Левина, А.А.Женсыкбаева, Б.Д.Боянова, А.А.Лигуна, В.П.Моторного, В.Ф.Бабенко и другие. Основные результаты этой теории приведены в монографии С.М.Никольского[3], откуда видно, что это теория получила значительное развитие, хотя в ней остаётся ряд нерешённых вопросов. Так, например, значительно менее развита теория наилучших кубатурных формул для многомерных, сингулярных и криволинейных интегралов.

Данная диссертационная работа посвящена построению наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых, заданных в некоторой области из $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Следует отметить, что наилучшие квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов найдены в небольшом количестве. Укажем только на некоторые результаты, полученные в последнее время С.Б.Вакарчуком[4], М.Ш.Шабозовым[5], М.Ш.Шабозовым и

[1]Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР, сер. математики. - 1952. - №16. - С.181-196.

[2]Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas // American J. Math. - 1949. - LXXI. - P.80-91.

[3]Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука. - 1988. - 256 с.

[4]Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. - 1986. - Т.38. - №5. - С.643-645.

[5]Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. - 2014. - Т.96. - №4. - С.637-640.

К.Тухлиевым[6], Д.С.Сангмамадовым[7], Л.Г.Файзмамадовой[8], Г.А.Юсуповым и А.А.Шабозовой[9].

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и найдены явный вид оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода в более общей постановке по сравнению с известной постановкой С.М.Никольского.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Данная диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2020 гг. по теме „Теория аппроксимации функций".

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти явный вид и точную оценку погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найти явный вид и точную оценку погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов, на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайними узлами;
- найти оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найти оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

[6] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. - 2015. - Серия 1. - Т.2. - №4. - С.563-575.

[7] Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ. - 2011. - Т.54. - №10. - С.801-806.

[8] Файзмамадова Л.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. - 2013. - Т.56. - №4. - С.265-272.

[9] Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. - 2013. - Т.56. - №7. - С.509-514.

Основные методы исследования. В работе используются методы отыскания наилучших квадратурных формул, разработанные С.М.Никольский, метод Н.П.Корнейчука оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. Основные результаты работы:

- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;
- найдена оптимальная квадратурная формула для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Положения, выносимые на защиту:

- теорема о явном виде и точной оценке погрешности оптимальной квадратурной формулы вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ при произвольном расположении узлов;
- теорема о явном виде и точной оценке погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;
- теорема о явнем виде оптимальной квадратурной формулы вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- теорема о явном виде оптимальной квадратурной формулы вычисления весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов на классе $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертационной работы можно применять в теорию приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Функционального анализа и дифференциальных уравнений "Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2020 гг.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научно - теоретической конференции „Компьютерный анализ проблем науки и технологи" (Душанбе, 27-28 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами" (Душанбе, 10-11 октября 2019 г.);
- международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно - практической конференции „Современные проблемы теории дифференциальных уравнений" (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).

Публикации. Основные результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 12 работах [1-А – 12-А], из них 1 статья опубликована в научном журнале Российской Федерации, 11 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце автореферата. Из 12 работ 5 опубликовано в журналах, входящих в список журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 7 - в материалах международных и республиканских научных конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым двух статей [2-А, 3-А] соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из – наименований, занимает – страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Приведём краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

В первой главе диссертации рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

В первом параграфе первой главы приведено определение классов функций и кривых. Всюду далее $\mathscr{H}^\omega := \mathscr{H}^\omega[a,\, b]$ – множество функций $\mathcal{F}(t) \in C[a,\, b]$, удовлетворяющих условию

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \leq \omega\left(|t' - t''|\right),\ t', t'' \in [a,\, b],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный на отрезке $[a,\, b]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[a,\, b]$ функция, в нуле равная нулю. При $\omega(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, класс $\mathscr{H}^\omega[a,\, b]$ превращается в класс Гёльдера $\mathscr{H}^\alpha[a,\, b]$:

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \leq |t' - t''|^\alpha,\ \ \forall\, t',\, t'' \in [a,\, b].$$

Пусть $\mathscr{L}$ - произвольная спрямляемая кривая, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности m, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L). \tag{1}$$

Через $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m} := \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями (1), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[0,L],\ i = \overline{1,m}$. В случае, когда $\omega_i(t) = \omega(t)\ (i = \overline{1,m})$, соответствующий класс функций обозначим $\mathscr{H}^{m,\omega}$.

Через $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим класс функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_m)$, определённых на кривых $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и для любых двух точек $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L}$ удовлетворяющих условию

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega(\rho_p(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')).$$

Таким образом, будем писать $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$, если для любых двух точек $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t', t'' \in [0,L]$ выполняется неравенство

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \Big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\Big|^p\right\}^{1/p}\right) \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t' - t''|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

Во втором параграфе первой главы доказывается следующая общая

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L}) \approx \mathcal{L}_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}) := \sum_{k=1}^N p_k\, \mathcal{F}\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big) \tag{2}$$

с произвольными векторами-коэффициентами и узлами $(\mathscr{P},\mathscr{T})$, $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$, $\mathscr{T} = \{t_k:\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$ *наилучшей для класса функций* $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \tag{3}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (3) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (4)$$

В частности, из (4) при $p=\infty$ *имеем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,\infty};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\max_{1\le i\le m}\omega_i(t)\right)dt.$$

Из теоремы 1.2.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 при* $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{\alpha/p}dt. \qquad (5)$$

В частности, из (5) при $\alpha=1$, *вытекает результат М.Ш.Шабозова*[5]. *Если же в (5) полагать* $\omega_i(t)=\overline{\omega}(t)$, $(i=\overline{1,m})$, *где* $\overline{\omega}(t)$ *-заданный модуль непрерывности, то будем иметь*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};\ \mathscr{H}^{\,\overline{\omega}}\right) = (2N)\sqrt[p]{m^\alpha}\int\limits_0^{L/(2N)} (\overline{\omega}(t))^\alpha\,dt.$$

Следствие 1.2.2. *Если в условиях теоремы 1.2.1 полагать* $\omega_i(t)=t^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i\le 1,\ i=\overline{1,m})$, *то имеем*:

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m t^{\alpha_i p}\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (6)$$

В частности, полагая в (6) $\omega(t)=t$, $p=1$ *получаем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{t,1};\ \mathscr{H}^{\,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{L^{\alpha_i+1}}{\alpha_i+1}\cdot\left(\frac{1}{2N}\right)^{\alpha_i}.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.2.1 справедливо на более широких классах функций и кривых, чем классы $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$. Пусть $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ – класс функций $\mathcal{F}(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t))$, определённых на кривых $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, удовлетворяющих для точек $t, t \pm \tau \in [0, L]$ условию

$$\Big|\mathcal{F}\left(\varphi_1(t+\tau), \varphi_2(t+\tau), \cdots, \varphi_m(t+\tau)\right) +$$

$$+\mathcal{F}\left(\varphi_1(t-\tau), \varphi_2(t-\tau), \cdots, \varphi_m(t-\tau)\right) - 2\mathcal{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t))\Big| \leq$$

$$\leq 2\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(|t|)\right\}^{1/p}\right),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Теорема 1.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (2) с произвольными векторами коэффициентов и узлов $(\mathscr{P}, \mathscr{T})$ наилучшей для классов $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ и кривых $\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}$ является формула средних прямоугольников (3). При этом для погрешности формулы (3) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) = \mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}; \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big), \tag{7}$$

где значение правой части равенства (7) определено в правой части соотношения (4).

Замечание 1.2.1. Отметим, что частные случаи теоремы 1.2.1 при $m = 2$, $p = 2$, $\omega(t) = t$ ранее доказаны в работе М.Ш.Шабозова, Ф.М.Мирпоччоева[10], а случай произвольной $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\omega(t) = t$ -в работе М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева[6].

В третьем параграфе первой главы, наряду с квадратурной фрмулой (2), параллельно вводится в рассмотрение следующую квадратурную формулу типа Маркова:

$$\int_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= p_0\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\, \ldots,\, \varphi_m(0)\right) + p_N\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \ldots,\, \varphi_m(L)\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} p_k\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\, \ldots,\, \varphi_m(t_k)\right) + R_N(\mathcal{F}; \mathscr{L}) \tag{8}$$

[10]Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. - 2010. - Т.53. - №6. - С.415-419.

с произвольными векторами коэффициентов $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=0}^N$ и векторами узлов

$$\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=0}^N: \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_N = L.$$

Далее исследуем квадратурные формулы вида (8), где заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $t_0 = 0$, $t_N = L$, а узлы $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$ и коэффициенты p_k $(k = 0, 1, ..., N)$ нужно выбрать оптимальным образом. Имеет место следующая общая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида (8) с произвольными векторами коэффициентов и узлов* $(\mathscr{P}, \mathscr{T})$:

$$\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=0}^N, \ \ \mathscr{T} = \{t_k : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\},$$

наилучшей для класса функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула вида трапеций*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t), \, \ldots, \, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{2N}\left\{\mathcal{F}(\varphi_1(0), \, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)) + \mathcal{F}(\varphi_1(L), \, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right\} +$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right), \, \ldots, \varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \tag{9}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (9) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt. \tag{10}$$

Из теоремы 1.3.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.3.1. *Если в условиях теоремы полагать* $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K > 0, \ 0 < \alpha \le 1)$, *то при всех* $1 \le p \le \infty$ *имеем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{Kt^\alpha,p}; \ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = 2NK \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(t\right)\right\}^{\alpha/p} dt.$$

Отсюда, в частности, при $\alpha = 1$ и $K = 1$ вытекает результат в виде равенства

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{t,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\,(t)\right\}^{1/p} dt,\ \ (1 \le p \le \infty)$$

из работы М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева[6], *а если $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$, то получаем равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{t,p};\ \mathscr{H}^{\,m,\omega}\right) = 2N\sqrt[p]{m} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t)dt,\ \ (1 \le p \le \infty).$$

Следствие 1.3.2. *Если в условиях теоремы 1.3.1 полагать $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K > 0,\ 0 < \alpha \le 1),\ \omega_i(t) = K_i t\ (K_i > 0,\ i = \overline{1,m})$, то получаем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{Kt^\alpha,p};\ \mathscr{H}^{\,K_1t,\ldots,K_mt}\right) = \frac{KL^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^\alpha}\cdot\left\{\sum_{i=1}^m K_i^p\right\}^{\alpha/p}\cdot\frac{1}{N^\alpha},\ \ (1 \le p \le \infty).$$

В третьем параграфе первой главы доказана также следующая

Теорема 1.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида (8) с произвольными векторами коэффициентов и узлов $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$:*

$$\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=0}^N,\ \ \mathscr{T} = \{t_k : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\}$$

наилучшей для классов $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ и кривых $\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ является формула трапеций (9). При этом для погрешности формулы (9) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) = \mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big), \tag{11}$$

где значение правой части равенства (11) определено в правой части соотношения (10).

Во второй главе диссертации рассматривается оптимизация приближенного вычисления весовых криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций и кривых малой гладкости.

В первом параграфе второй главы приводится постановка задачи отыскания наилучших квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода.

Рассмотрим вопрос оптимизации приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода с весом

$$\int_{\mathscr{L}} \gamma(\mathscr{M})\mathcal{F}(\mathscr{M})d\tau = \sum_{k=1}^{N} p_k\mathcal{F}(\mathscr{M}_k) + R_N(\gamma;\ ,\mathcal{F};\ \mathscr{L}) \tag{12}$$

в виде линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции $\mathcal{F}(\mathscr{M}_k)$, где $\mathscr{M}_k \in \mathscr{L},\ k = \overline{1, N}$, весовая функция $\gamma(\mathscr{M}) \geq 0,\ \mathscr{M} \in \mathscr{L},\ p_k$ - произвольные числовые коэффициенты, $R_N(\gamma;\ ,\mathcal{F};\ \mathscr{L})$ - погрешность квадратурной формулы. Ясно, что для достижения высокой точности вычислений при заданном N нужно возможно лучшим образом воспользоваться коэффициентами p_k и узлами $\mathscr{M}_k$.

Через $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим класс пространственных спрямляемых кривых $\mathscr{L}$, у которых длина равна L, кривизна кусочно - непрерывна и все кривые из класса $\mathfrak{N}_Q(L)$ расположены в области

$$Q = \{(u_1,\, u_2, ..., u_m):\ u_1^2 + u_2^2 + ... + u_m^2 \leq L^2\}.$$

Хорошо известно[11], что если на кривой $\mathscr{L}$ положительное направление определено так, чтобы положение произвольной точки $\mathscr{M} := \mathscr{M}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathscr{L}$ могло быть определено длиной дуги $\tau = \overset{\smile}{B\mathscr{M}}$, отсчитываемой от начальной точки B, то тогда кривая $\mathscr{L}$ параметрически определяется уравнениями

$$u_1 = \varphi_1(\tau),\, u_2 = \varphi_2(\tau),\, \ldots,\, u_m = \varphi_m(\tau),\ (0 \leq \tau \leq L). \tag{13}$$

Обозначим через $\tau_k \in [0; L], k = 1, 2, ..., N$ значения длины дуги $\overset{\smile}{B\mathscr{M}}$ кривой $\mathscr{L}$, которые соответствуют точкам $\mathscr{M}_k \in \mathscr{L}$, и перепишем формулу (12) в виде:

$$\int_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) + R_N(\mathcal{F};\, \gamma;\, \mathscr{L}). \tag{14}$$

[11]Финников С.П. Курс дифференциальной геометрии. - М. Гостехиздат. - 1952. - 343 с.

Всюду далее полагаем, что формула (14) является точной для постоянной функции $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = const$, то есть что выполняется условие

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau = \sum_{k=1}^{N} p_k. \tag{15}$$

При выполнении условия (15) для квадратурной формулы (14) сформулируем экстремальную задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы в смысле А.Н.Колмогорова – С.М.Никольского и Сарда.

В второй главе, мы кроме отыскания наилучших весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов на классах функций и кривых (в смысле С.М.Никольского) будем исследовать задачу отыскания наилучших весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов по коэффициентам $P = \{p_k\}$ при фиксированных узлах (или только по узлам $\mathscr{T} = \{\tau_k\}$ при фиксированных коэффициентах) в смысле А.Сарда, решая при этом соответствующую экстремальную задачу.

Всякая квадратурная формула вида (14) задается векторами коэффициентов $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $\mathscr{T} = \{\tau_k : 0 \le \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{N-1} < \tau_N \le L\}$, где $p_1, p_2, ..., p_N$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию (15). При фиксированном $N \ge 1$ через $\mathscr{B}$ будем обозначать множество векторов коэффициентов $\{\mathscr{P}\}$ и узлов $\{\mathscr{T}\}$, либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы квадратурной формулы (14) (например, требование точности формулы на многочлены заданной степени, положительность коэффициентов p_k $(k = \overline{1, N})$, строгое расположение узлов $\tau_k < \tau_{k+1}$ $(k = \overline{1, N})$ и др.).

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right)\}$ – некоторый класс функций, определенных вдоль кривой $\mathscr{L} \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. Для каждой функции $\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ абсолютная погрешность формулы (14) имеет вполне определенное числовое значение

$$|R_N(\gamma; \mathcal{F};\, \mathscr{L};\, \mathscr{P},\, \mathscr{T})| = |\mathcal{J}(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}) - L_N(\mathcal{F}; \mathscr{L})| =$$

$$= \Big| \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \cdot \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) \Big|.$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций $\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)) \in \mathfrak{M}$ и кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$, примем верхний грань погрешности квадратурной формулы по всем функциям класса:

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) = \sup\{|R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T})| : \mathcal{F} \in \mathfrak{M}\}.$$

Наибольшую погрешность квадратурной формулы (14) для всех функций $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$ и кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим величиной

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) = \sup\{R_N(\gamma; \mathfrak{M};\ \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) : \mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) : (\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}\} \qquad (16)$$

по всем векторам коэффициентов и узлов $(\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}$, по аналогии с монографией С.М.Никольского[3], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (14) на рассматриваемых классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если существует квадратурная формула, для которой

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0),$$

то будем ее называть *наилучшей* (или *оптимальной*) на классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$, а векторы $\mathscr{P}_0 = \{p_k^0\}_{k=1}^N$ и $\mathscr{T}_0 = \{\tau_k^0\}_{k=1}^N$ наилучшими векторами коэффициентов и узлов в смысле Колмогорова-Никольского.

Пусть задан вектор узлов $\mathscr{T}^* = \{\tau_k^*\}_{k=1}^N$. Требуется определить величину

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}^*) : \mathscr{P} \in \mathscr{B}\}$$

и если существует вектор коэффициентов $\tilde{\mathscr{P}}^0 \in \mathscr{B}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); \tilde{\mathscr{P}}^0,\ \mathscr{T}^*), \qquad (17)$$

то квадратурную формулу (14) называется *наилучшей* (или *оптимальной*) *по коэффициентам* на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Задачу (17) обычно называют задачей Сарда. Отметим, что для класса функций с ограниченным по норме градиентом в пространстве $\mathcal{L}_1$, задача (16) решена С.Б.Вакарчуком[4]. Для некоторых классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности, задача Сарда решена Д.С.Сангмамадовым[7].

Во втором параграфе решена задача Колмогорова - Никольского для весовых квадратурных формул для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q)$ - функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) =$

$\mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ..., u_m)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_m}$$

и удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^L |\mathcal{F}(u_1,\, u_2, ..., u_m)| d\tau =$$

$$= \int\limits_0^L \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{d\tau} \right| d\tau \le \mathscr{M}.$$

Через $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$, $\mathscr{M} > 0$ обозначаем множество всех функций $\mathcal{F}(u_1, u_2, ..., u_m)$, принадлежащих соответственно множеству $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$, $\mathscr{M} > 0$ и удовлетворяющих условию $\mathcal{F}(0, ..., 0) = 0$.

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида (14) наилучшей для классов функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является формула*

$$\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) \mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{\Phi(0)}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), ..., \varphi_m(\tau_k)) + R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}), \qquad (18)$$

где

$$\Phi(\tau) = \int\limits_\tau^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) dt,$$

а узлы τ_k определяются из системы уравнений

$$\Phi(\tau_k) = \frac{2N - 2k + 1}{2N} \cdot \Phi(0),\ (k = \overline{1, N}).$$

При этом для погрешности формулы (18) на классах $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ справедлива точная оценка

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L)\right) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N}\Phi(0) = \frac{\mathscr{M}}{2N}\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t))dt.$$

Теорема 2.2.1 является обобщением на случай криволинейных интегралов первого рода одного результата Ю.Г.Гиршовича[12]. М.Ш.Шабозовым и С.С.Каландаршоевым[13] она доказанна для регулярных интегралов. Из даказанной теоремы 2.2.1, в частности, вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида (18) с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \tau^{-\alpha},\ 0 < \alpha < 1$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \frac{\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))}{\tau^\alpha}d\tau =$$

$$= \frac{L^{1-\alpha}}{(1-\alpha)N}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}\Bigg(\varphi_1\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right), \varphi_2\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right), ...$$

$$..., \varphi_m\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right)\Bigg) + R_N(\tau^{-\alpha};\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}). \qquad (19)$$

При этом точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы (19) на классе функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathcal{E}_N\left(\tau^{-\alpha};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}\, L^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)N},\ \ 0 < \alpha < 1.$$

Следствие 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (18) с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \sin\dfrac{\pi\tau}{L},\ \ 0 \le \tau \le L$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \sin\frac{\pi\tau}{L}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{2L}{\pi N}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\, \varphi_2(\tau_k^*), ..., \varphi_m(\tau_k^*)) + R_N(\sin\frac{\pi\tau}{L}; \mathcal{F}; \mathscr{L}), \qquad (20)$$

[12]Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. - 1975. - Т.24. - №1. - С.121-123.

[13]Шабозов М.Ш., Каландаршоев С.С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости // ДАН РТ. - 1998. - Т.41. - №10. - С.69-75.

где узлы $\tau_k^* = \dfrac{L}{\pi}\arccos\left(1-\dfrac{2k-1}{N}\right),\ k=\overline{1,N}$. *При этом для погрешности квадратурной формулы (20) на классах функций* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\sin\frac{\pi\tau}{L};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}\,L}{N}.$$

Следствие 2.2.3. *Пусть* $[0,\,L]=[0,\,1]$. *Среди всех квадратурных формул вида (18) с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))=\dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right),\,\varphi_2\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right),...\right.$$

$$\left....,\varphi_m\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right)\right)+R_N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathcal{F};\ \mathscr{L}\right),\tag{21}$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (21) на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}\,\pi}{4N}.$$

Аналогичное утверждение имеет место для класса функций $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теорема 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (14) наилучшей для класса функций* $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L\gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{2\Phi(0)}{2N+1}\cdot\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\,\varphi_2(\tau_k^*),...,\varphi_m(\tau_k^*))+R_N(\gamma;\,\mathcal{F};\,\mathscr{L}),\tag{22}$$

если узлы τ_k^* *есть решения уравнений*

$$\Phi(\tau_k)=\frac{2N-2k+1}{2N+1}\Phi(0),\ (k=\overline{1,N}).$$

Верхняя грань ошибки этой формулы равна

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\, \mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}}{2N+1}\Phi(0) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N+1}\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t))dt.$$

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие весовые квадратурные формулы в смысле Сарда для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченым градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2$. Пусть задан класс $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$, $\mathscr{M} > 0$ функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ..., u_m)$, у которых почти всюду в области Q сущесвуют частные производные

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_m}$$

и выполняется неравенство

$$\|grad\mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ..., u_m)\|_{\mathcal{L}_2(Q)} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^L \left|\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_m}\right)^2\right| dt\right\}^{1/2} \le \mathscr{M}.$$

Основными результатами третьего параграфа второй главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathscr{T} := \{\tau_k :\, 0 \le \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N \le L\}_{k=1}^N$ *- произвольная система узлов, а коэффициенты* $\mathscr{P} = \{p_k\}$ *квадратурной формулы (14) имеют вид* $p_k = d_k - d_{k+1},\ k = \overline{1, N},\ d_{N+1} = 0.$ *Тогда для погрешности наилучшей по коэффициентам формулы имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^0) =$$

$$= \mathscr{M}\left\{\int\limits_0^L\left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right)dt\right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N D_k d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$d_k = \sum_{i=k}^N p_i,\ \ D_k = \tau_k^0 - \tau_{k-1}^0,\ \ k = \overline{1, N}.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть весовая функция* $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)\right) \equiv 1$. *Тогда при заданной системе узлов* $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* : \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^{N}$ *наилучшей по коэффициентам квадратурной формулы в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), \varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), ..., \varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2(N-1)}\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right) + R_N(\mathcal{F},\, \mathscr{L}). \tag{23}$$

При этом точная оценка погрешности формулы (23) равна

$$\mathcal{E}_N(1;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \frac{\mathscr{M}L^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

Теорема 2.3.3. *Пусть* $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)\right) \equiv \tau$. *Тогда при заданной системе узлов* $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* : \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^{N}$ *наилучшая по коэффициентам квадратурная формула имеет вид*

$$\int\limits_0^L \tau\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \frac{L^2}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), \varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), ..., \varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2} - \frac{3N-2}{6(N-1)^2}\right)\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right) + R_N(\tau,\, \mathcal{F},\, \mathscr{L}),$$

погрешность которой на классе функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$ *имеет вид*

$$\mathcal{E}_N\left(\tau;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*\right) = \frac{\mathscr{M}L^2}{4\sqrt{3}(N-1)}.$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;
- найдена оптимальная квадратурная формула для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространство $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертационной работы можно использовать в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Прикладная математика» и «Математика».

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

[1-А] Абдукаримзода, М. К. Эрмитовые кубические сплайны и погрешность квадратурных формул, связанных с ними [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2018. - №.3. - С.110-116.

[2-А] Абдукаримзода, М. К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.Ш. Шабозов, М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2019. - Т.62. -№11-12. - С.619-628.

[3-А] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых [Текст] / М.Ш. Шабозов, М.К. Абдукаримзода // Чебышевский сборник. - 2020. - Т.21. - №3. - С.437-448.

[4-А] Абдукаримзода, М. К. О наилучших весовых квадратурных формулах для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2020. - Т.63. - №7-8. - С.427-435.

[5-А] Абдукаримзода, М. К. Оптимальные квадратурные формулы с весом для криволинейных интегралов на классах функций с ограниченным градиентом в пространстве $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2020. - Т.63. - №9-10. - С.557-563.

В других изданиях:

[6-А] Абдукаримзода, М. К. О погрешности квадратурных формул, точных на кубических эрмитовых сплайнах [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С.22-24.

[7-А] Абдукаримзода, М. К. О наилучших кубатурных формулах для некоторых классов функций [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы XI международной научно - теоретической конференции „Компьютерный анализ, проблем науки и технологии” (Душанбе, 27-28 декабря 2018 г.). – С.33-35.

[8-А] Абдукаримзода, М. К. О точной оценке погрешности наилучших кубатурных формул для некоторых классов функций [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.7-11.

[9-А] Абдукаримзода, М. К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами” (Душанбе, 10-11 октября 2019 г.) – С.3-6.

[10-А] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие весовые квадратурные формулы для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.26-31.

[11-А] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы республиканской научно - практической конференции „Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.) – С.261-265.

[12-А] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) – С.12-16.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Абдукаримзода Муслими Кароматулло

ФОРМУЛАҲОИ КВАДРАТУРИИ БЕҲТАРИНИ ТАҚРИБӢ ҲИСОБ КАРДАНИ ИНТЕГРАЛҲОИ КАҶХАТТА ДАР ФАЗОИ $\mathbb{R}^m$

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

ДУШАНБЕ — 2021

Диссертатсия дар кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академияи Миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор

Муққаризони расмӣ: **Сафаров Ҷумъабой,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав

Файзмамадова Лолазор Гадомамадовна, номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математикаи олӣ ва фанҳои илмӣ-табиии донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон

Муассисаи тақриздиҳанда: Донишгоҳи (славянии) Россия ва Тоҷикистон

Ҳимоя *26 - уми майи соли 2021 соати 10:00* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-012 дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 203 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «___» «__________» соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-012, доктори илмҳои физикаю математика **Р.Н. Одинаев**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммият ва дараҷаи рушди мавзӯи тадқиқот. Дар солҳои шастуми асри гузашта С.М.Никольский[1] масъалаи экстремалиро доир ба формулаи квадратурии беҳтарин (оптималӣ) гузошт ва онро ҳал кард, яъне масъалаи ба таври оптимизатсионӣ интихоби гиреҳҳо ва коэффитсиентҳои формулаи квадратурӣ аз шарти қимати минималии баҳои аниқи хатогии формула дар синфи функсияҳои додашуда. Дар ҳолати гиреҳҳои фиксирондашуда масъалаи монандро аввалин маротиба математики амрикоӣ А.Сард[2] дида баромада буд. Дар замони муосир назарияи сохтани формулаҳои квадратурии оптималӣ ба яке аз қисмҳои муҳими математикаи ҳисоббарорӣ табдил ёфтааст. Дар ин самти математикаи муосир натиҷаҳои зиёде ба даст оварда шудаанд. Қайд мекунем, ки як қатор формулаҳои квадратурии беҳтарин дар корҳои Н.П.Корнейчук, Н.Е.Лушпай, М.Левин, А.А.Женсыкбаев, Б.Д.Боянов, А.А.Лигун, В.П.Моторный, В.Ф.Бабенко ва дигарон ёфта шудааст. Натиҷаҳои асосии ин назария дар монографияи С.М.Никольский[3] оварда шудаанд ва аз онҳо аён аст, ки бо вуҷуди рушди ин назария дар он як қатор масъалаҳои ҳалнашуда боқӣ мондааст. Масалан, назарияи формулаҳои кубатурии беҳтарин барои интегралҳои бисёрченака, сингулярӣ ва каҷхатта кам рушд кардааст.

Кори диссертатсионии мазкур ба сохтани формулаҳои квадратурии беҳтарин барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар баъзе синфҳои функсияҳо ва хатҳои каҷи дар ягон соҳаи $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ додашуда бахшида шудааст.

Бояд қайд кард, ки формулаҳои квадратурии беҳтарин барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта чандон зиёд нестанд. Мо танҳо ба баъзе натиҷаҳои вақтҳои охир ҳосилкардаи С.Б.Вакарчук[4], М.Ш.Шабозов[5],

[1]Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР, сер. математики. - 1952. - №16. - С.181-196.

[2]Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas // American J. Math. - 1949. - LXXI. - P.80-91.

[3]Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука. - 1988. - 256 с.

[4]Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. - 1986. - Т.38. - №5. - С.643-645.

[5]Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. - 2014. - Т.96. - №4. - С.637-640.

М.Ш.Шабозов ва К.Тухлиев[6], Д.С.Сангмамадов[7], Л.Г.Файзмамадова[8], Г.А.Юсупов ва А.А.Шабозова[9] ишора мекунем.

Аҳамият ва ба мақсад мувофиқ будани кори диссертатсионӣ дар он зоҳир мегардад, ки дар он намуди ошкори формулаҳои квадратурии беҳтарин барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар гузориши умумӣ нисбат ба гузориши машҳури С.М.Никольский ёфта шудаанд.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2017-2020 аз рӯйи мавзӯи „Назарияи наздиккунии функсияҳо” иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ иборат аст аз:

- ёфтани намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷе, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ барои дилхоҳ ҷойгиршавии гиреҳҳо дода шудаанд;
- ёфтани намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималии намуди Марков бо гиреҳҳои қайдкардашудаи канорӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ дода шудаанд;
- ёфтани формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ бо нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_2(Q)$ маҳдуд;

[6]Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. - 2015. - Серия 1. - Т.2. - №4. - С.563-575.

[7]Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ. - 2011. - Т.54. - №10. - С.801-806.

[8]Файзмамадова Л.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. - 2013. - Т.56. - №4. - С.265-272.

[9]Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. - 2013. - Т.56. - №7. - С.509-514.

- ёфтани формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор, ки дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$ дода шудаанд.

Методҳои асосии тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин, ки аз тарафи С.М.Никольский коркард шудаанд, инчунин усули Н.П. Корнейчук барои аз поён баҳодиҳии хатогии формулаҳои квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратуриро ба нол мубаддал мекунонанд, истифода шудаанд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия чунинанд:

- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷе, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ барои дилхоҳ ҷойгиршавии гиреҳҳо дода шудаанд, ёфта шудааст;
- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималии намуди Марков бо гиреҳҳои қайдкардашудаи канорӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ дода шудаанд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ бо нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_2(Q)$ маҳдуд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор, ки дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳои асосӣ оид ба намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷе, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ барои дилхоҳ ҷойгиршавии гиреҳҳо, дода шудаанд;
- теоремаҳо дар бораи намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималии намуди Марков бо гиреҳҳои қайдкардашудаи канорӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ дода шудаанд;

- теоремаҳо оид ба намуди ошкори формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ бо нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_2(Q)$ маҳдуд;
- теоремаҳо дар бораи намуди ошкори формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор, ки дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$ дода шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ ҳам дорои арзишҳои назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро дар назарияи тақрибӣ ҳисобкунии интегралҳои сатҳӣ дар синфи функсияҳое, ки суфтагиашон кам аст, истифода бурдан мумкин аст.

Саҳми шахсии муаллиф. Муҳтавои диссертатсия ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро дар асарҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ борҳо дар:

- семинарҳои кафедраи „Таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ" -и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМИТ Тоҷикистон, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2017-2020);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Проблемаҳои муосири математика ва татбиқи он" (Душанбе, 10-11 июни соли 2019);
- конференсияи XI - байналмилалии илмӣ-назариявии „Таҳлили компютерии масоилҳои илм ва технология" (Душанбе, 27-28 декабри соли 20018);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявии „Таҳлили математикӣ ва татбиқи он" (Душанбе, 10-11 июни соли 2019);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявии „Проблемаҳои муосири илмҳои дақиқ ва гуманитарӣ ва саҳми онҳо дар мустаҳкамкунии робитаи илмии байни мамлакатҳо" (Душанбе, 10-11 октябри соли 2019);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ" (Душанбе, 30-31 январи соли 2020);

- к о н ф е р е н с и я и ҷумҳуриявии илмӣ-амалии „Проблемаҳои муосири назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ” (Душанбе, 26 сентябри соли 2020);
- к о н ф е р е н с и я и илмӣ-байналмилалии „Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ” (Душанбе, 25-26 декабри соли 2020)

муҳокима ва мавриди баррасӣ қарор додаанд.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯйи мавзӯи диссертатсия дар 12 мақола дарҷ гардидаанд [1-М – 12-М], ки аз онҳо 1 мақола дар нашрияи илмии Федератсияи Русия ва 11 мақола дар маҷаллаҳои илмии Ҷумҳурии Тоҷикистон чоп шудаанд. Рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Аз 12 мақолаи илмӣ 5-тои он дар нашрияҳои тақризшавандаи рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия ва 7-тояш дар маводҳои конференсияҳои илмӣ - байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудаанд. Аз ду мақолаи бо ҳамроҳии М.Ш. Шабозов чопшуда [2-М, 3-М], ба ҳаммуаллиф танҳо гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз – номгӯйро дар бар мегирад. Ҳаҷми умумии он аз – саҳифа иборат бада, дар барномаи $\LaTeX$ ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунад.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Муҳтавои мухтасари кори диссертатсиониро бо натиҷаҳои асосии он меорем. Дар муқаддима тавсифи муҳтавои масъалаҳои омӯхташуда ва натиҷаҳои асосии кор оварда шудаанд.

Дар боби якуми диссертатсия масъала доир ба тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум барои синфи функсияҳо ва синфи фазои хатҳои кач, ки бо модули бефосилагиашон дода шудаанд, дида баромада шудааст.

Дар параграфи якуми боби якум таърифи синфи функсияҳо ва хатҳои кач оварда шудааст. Ба воситаи $\mathscr{H}^{\omega} := \mathscr{H}^{\omega}[a,\, b]$ синфи функсияҳои $\mathcal{F}(t) \in C[a,\, b]$ -ро ишора менамоем, ки онҳо шарти зеринро қаноат мекунонанд:

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \le \omega\left(|t' - t''|\right),\ t', t'' \in [a,\, b],$$

ки дар ин ҷо $\omega(\delta)$ дар порчаи $[a,\, b]$ модули бефосилагӣ мебошад, яъне дар порчаи $[a,\, b]$ бефосила, камнашаванда ва полуаддитивӣ буда, дар нуқтаи нол ба сифр баробар аст. Ҳангоми $\omega(t) = t^{\alpha},\ 0 < \alpha \le 1$ будан, синфи $\mathscr{H}^{\omega}[a,\, b]$ ба синфи Гёльдер $\mathscr{H}^{\alpha}[a,\, b]$ мубаддал мегардад:

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \le |t' - t''|^{\alpha},\ \ \forall\, t',\, t'' \in [a,\, b].$$

Бигузор $\mathscr{L}$ хати каҷи ростшаванда бошад, ки дар фазои евклидии $\mathbb{R}^m$ -и m - ченака хобида, бо муодилаҳои параметрии

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L) \tag{1}$$

дода шудааст.

Бо воситаи $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m} := \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ синфи хатҳои каҷи суфтаи $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^m$ - ро ишора мекунем, ки бо муодилаҳои параметрии (1) дода шуда, функсияҳои координатии онҳо $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[0, L],\ i = \overline{1, m}$ мебошанд. Дар ҳолати хусусӣ, агар $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1, m})$ бошад, он гоҳ синфи функсияҳоро бо $\mathscr{H}^{m,\omega}$ ишора менамоем.

Бо воситаи $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ синфи функсияҳои $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_m)$ -ро ишора менамоем, ки дар хати каҷи $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ муайян буда, барои дилхоҳ ду нуқтаи $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L}$ шарти зеринро қонеъ менамоянд:

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega(\rho_p(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')).$$

Ҳамин тариқ, агар $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ бошад, он гоҳ барои дилхоҳ ду нуқтаи $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t', t'' \in [0, L]$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \Big| \varphi_i(t') - \varphi_i(t'') \Big|^p \right\}^{1/p} \right) \leq \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p \left(|t' - t''| \right) \right\}^{1/p} \right).$$

Дар параграфи дуюми боби якум теоремаи умумикардашудаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 1.2.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди*

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L}) \approx \mathcal{L}_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, \mathcal{F}\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big), \qquad (2)$$

ки бо воситаи вектор - коэффитсиентҳо ва гиреҳҳо $(\mathscr{P},\mathscr{T})$, $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^{N}$, $\mathscr{T} = \{t_k:\ 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leq L\}$ *дода мешаванд, беҳтаринашон дар синфи функсияҳои* $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ва синфи хатҳои каҷи* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *формулаи миёнаи росткунҷаҳои зерин мебошад:*

$$\int_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \qquad (3)$$

Дар ин ҳолат барои хатогии беҳтарини формулаи (3) дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ва хатҳои каҷи* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *баҳодиҳии аниқи зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt. \qquad (4)$$

Дар ҳолати хусусӣ, аз (4) ҳангоми $p = \infty$ *будан, меёбем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,\infty};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \omega\left(\max_{1\leq i\leq m} \omega_i(t) \right) dt.$$

Аз теоремаи 1.2.1 як қатор натиҷаҳо мебароянд.

Натиҷаи 1.2.1. *Дар шарти теоремаи 1.2.1 ҳангоми* $\omega(t)=t^{\alpha}$ $(0<\alpha\leq 1)$ *будан баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\alpha,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=(2N)\int\limits_{0}^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{\alpha/p}dt. \qquad (5)$$

Дар ҳолати хусусӣ аз баробарии (5) ҳангоми $\alpha=1$ *будан, натиҷаи М.Ш.Шабозов*[5] *мебарояд. Агар дар баробарии (5)* $\omega_i(t)=\overline{\omega}(t)$, $(i=\overline{1,m})$ *гузорем, ки дар ин ҷо* $\overline{\omega}(t)$ *модули бефосилагӣ аст, он гоҳ ҳосил мекунем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\alpha,p};\mathscr{H}^{\,\overline{\omega}}\right)=(2N)\sqrt[p]{m^{\alpha}}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\left(\overline{\omega}(t)\right)^{\alpha}dt.$$

Натиҷаи 1.2.2. *Агар дар шарти теоремаи 1.2.1* $\omega_i(t)=t^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i\leq 1,$ $i=\overline{1,m})$ *гузорем,он гоҳ меёбем*:

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\right)=(2N)\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}t^{\alpha_i p}\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (6)$$

Дар ҳолати хусусӣ, дар баробарии (6) $\omega(t)=t$, $p=1$ *гузошта, пайдо мекунем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{t,1};\ \mathscr{H}^{\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{L^{\alpha_i+1}}{\alpha_i+1}\cdot\left(\frac{1}{2N}\right)^{\alpha_i}.$$

Қайд мекунем, ки натиҷаи теоремаи 1.2.1 барои синфи функсияҳо ва хатҳои каҷи назар ба синфҳои $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ ва $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ васеътар низ ҷой дорад. Бигузор $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ синфи функсияҳои $\mathcal{F}(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))$, ки дар хатҳои каҷи $\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ муайян буда, барои нуқтаҳои $t,t\pm\tau\in[0,L]$ шарти

$$\Big|\mathcal{F}\left(\varphi_1(t+\tau),\varphi_2(t+\tau),\cdots,\varphi_m(t+\tau)\right)+$$

$$+\mathcal{F}\left(\varphi_1(t-\tau),\varphi_2(t-\tau),\cdots,\varphi_m(t-\tau)\right)-2\mathcal{F}(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t))\Big|\leq$$

$$\leq 2\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(|t|)\right\}^{1/p}\right),\ 1\leq p\leq\infty$$

-ро қаноат менамоянд.

Теорема 1.2.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (2), ки ба воситаи ихтиёрӣ векторҳои коэффитсиентҳо ва гиреҳҳо* ($\mathscr{P}$, $\mathscr{T}$) *дода шудаанд,* дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ *ва хатҳои каҷи* $\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}$ *беҳтаринашон формулаи миёнаи росткунҷаҳо (3) мебошад. Дар ин ҳолат, барои хатогии формулаи (3) дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷи овардашуда, баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big)=\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big), \qquad (7)$$

ки дар ин ҷо қимати тарафи рости баробарии (7) аз тарафи рости баробарии (4) муайян карда мешавад.

Эзоҳи 1.2.1. Қайд менамоем, ки ҳолати хусусии теоремаи 1.2.1 ҳангоми $m = 2$, $p = 2$, $\omega(t) = t$ будан, пештар дар кори М.Ш.Шабозов, Ф.М.Мирпоччоев[10] исбот карда шудааст. Дар ҳолати $m\in\mathbb{N},\ m\geq 2,\quad \omega(t) = t$ бошад, дар кори М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев[6] исбот карда шудааст.

Дар параграфи сеюми боби якум дар баробари формулаи квадратурии (2), формулаи квадратурии намуди Марков

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt=$$

$$=p_0\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\,\ldots,\,\varphi_m(0)\right)+p_N\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\,\ldots,\,\varphi_m(L)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}p_k\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\,\ldots,\,\varphi_m(t_k)\right)+R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}) \qquad (8)$$

-ро бо векторҳои ихтиёрии коэффитсиентҳо $\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^N$ ва векторҳои гиреҳҳо

$$\mathscr{T}=\{t_k\}_{k=0}^N:\ 0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_N=L.$$

муоина мекунем.

Ҳамин тариқ, формулаи квадратурии (8) -ро тадқиқ менамоем, ки дар ин ҷо пешакӣ ба сифати гиреҳҳо охирҳои порча $t_0=0,\ t_N=L$ қайд карда шуда, гиреҳҳои $t_1,\,t_2,\ldots,t_{N-1}$ ва коэффитсиентҳои $p_k\,(k=0,\,1,...,N)$ ба таври оптималӣ интихоб карда мешаванд. Теоремаи умумии зерин ҷой дорад.

[10]Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. - 2010. - Т.53. - №6. - С.415-419.

Теоремаи 1.3.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (8) бо векторҳои ихтиёрии коэффитсиентҳо ва гиреҳҳо* $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$:

$$\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^{N},\ \ \mathscr{T}=\{t_k:0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=L\},$$

беҳтаринашон дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *ва синфи хатҳои качи* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *формулаи намуди трапетсияҳои зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_m(t)\right)dt=$$

$$=\frac{L}{2N}\left\{\mathcal{F}(\varphi_1(0),\ \varphi_2(0),...,\varphi_m(0))+\mathcal{F}(\varphi_1(L),\ \varphi_2(L),...,\varphi_m(L)\right\}+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\ \ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)+R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \tag{9}$$

Дар айни ҳол, барои хатогии формулаи беҳтарини (9) дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *ва хатҳои качи* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *баҳодиҳии аниқи зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=(2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{10}$$

Аз теоремаи 1.3.1 як қатор натиҷаҳо мебарояд.

Натиҷаи 1.3.1. *Агар дар шарти теорема* $\omega(t)=Kt^{\alpha}$ $(K>0,\ 0<\alpha\le 1)$ *гузорем, он гоҳ барои ҳамаи* $1\le p\le\infty$ *пайдо мекунем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{Kt^{\alpha},p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=2NK\int\limits_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{\alpha/p}dt.$$

Аз ин ҷо дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $\alpha=1$ *ва* $K=1$ *будан натиҷа дар намуди баробарии*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{t,\,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}dt,\ \ (1\le p\le\infty),$$

аз кори М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев[6] *мебарояд. Агар* $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *бошад, он гоҳ баробарии зеринро ҳосил мекунем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{t,p};\ \mathscr{H}^{\,m,\omega}\right) = 2N\sqrt[p]{m}\int\limits_0^{L/(2N)}\omega(t)dt,\ \ (1 \le p \le \infty).$$

Натиҷаи 1.3.2. *Агар дар шарти теоремаи 1.3.1* $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K > 0,$ $0 < \alpha \le 1)$, $\omega_i(t) = K_i t$ $(K_i > 0,\ i = \overline{1,m})$ *гузорем, он гоҳ пайдо мекунем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{Kt^\alpha,p};\ \mathscr{H}^{\,K_1t,\ldots,K_mt}\right) = \frac{KL^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^\alpha}\cdot\left\{\sum_{i=1}^m K_i^p\right\}^{\alpha/p}\cdot\frac{1}{N^\alpha},\ (1 \le p \le \infty).$$

Теоремаи 1.3.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии (8) бо векторҳои ихтиёрии коэффитсиентҳо ва гиреҳҳо* $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$:

$$\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=0}^N,\ \ \mathscr{T} = \{t_k : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\}$$

беҳтаринашон дар синфҳои $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *ва хатҳои каҷи* $\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *формулаи трапетсияҳои (9) мебошад. Дар ин ҳолат барои хатогии формулаи (9) дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷи додашуда баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) = \mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big), \tag{11}$$

ки дар ин ҷо қимати тарафи рости баробарии (11) аз тарафи рости баробарии (10) муайян карда мешавад.

Дар боби дуюми диссертатсия масъалаи ба таври оптимизатсионӣ тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якуми бо вазн додашуда барои дилхоҳ синфи функсияҳо ва хатҳои каҷи суфтагиашон кам дида баромада шудааст.

Дар параграфи якуми боби дуюм гузориши масъалаи ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин барои тақрибӣ ҳисоб намудани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум оварда шудааст.

Масъалаи оптимизатсионии тақрибӣ ҳисобкунии интеграли каҷхаттаи ҷинси якуми бо вазни

$$\int\limits_{\mathscr{L}}\gamma(\mathscr{M})\mathcal{F}(\mathscr{M})d\tau = \sum_{k=1}^N p_k\mathcal{F}(\mathscr{M}_k) + R_N(\gamma;\ ,\mathcal{F};\ \mathscr{L}) \tag{12}$$

-ро дар намуди комбинатсияи хаттии якчанд қиматҳои функсияи зеринтегралии $\mathcal{F}(\mathscr{M}_k)$, ки дар ин ҷо $\mathscr{M}_k \in \mathscr{L}$, $k = \overline{1, N}$, функсияи вазндори $\gamma(\mathscr{M}) \geq 0$, $\mathscr{M} \in \mathscr{L}$, p_k - коеффитсиентҳои ададии дилхоҳ, $R_N(\gamma;\ ,\mathcal{F};\ \mathscr{L})$ - хатогии формулаи квадратурӣ мебошад, дида мебароем. Маълум аст, ки барои ноил шудан ба саҳеҳии баланди ҳисобкуниҳо ҳангоми дода шудани N, ба таври беҳтарин истифодаи коэффитсиентҳои p_k ва гиреҳҳои $\mathscr{M}_k$ лозим аст.

Ба воситаи $\mathfrak{N}_Q(L)$ синфи хатҳои каҷи ростшавандаи фазоии $\mathscr{L}$ - ро ишора мекунем, ки дарозии онҳо ба L баробар буда, каҷиашон қисман - бефосила аст ва ҳамаи хатҳои каҷи аз синфи $\mathfrak{N}_Q(L)$ дар соҳаи

$$Q = \{(u_1,\, u_2, ..., u_m) : \ u_1^2 + u_2^2 + ... + u_m^2 \leq L^2\}.$$

ҷойгиранд. Маълум аст[11], ки агар дар хати каҷи $\mathscr{L}$ равиши мусбат тавре муайян бошад, ки ҷойгиршавии нуқтаи дилхоҳи $\mathscr{M} := \mathscr{M}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathscr{L}$ бо дарозии камони $\tau = \smile{B\mathscr{M}}$ аз нуқтаи ибтидои B ҳисоб карда шавад, он гоҳ хати каҷи $\mathscr{L}$ ба таври параметрӣ аз рӯи муодилаҳои

$$u_1 = \varphi_1(\tau),\, u_2 = \varphi_2(\tau),\, \ldots,\, u_m = \varphi_m(\tau),\ (0 \leq \tau \leq L) \tag{13}$$

муайян карда мешавад.

Дарозии камони $\overset{\smile}{B\mathscr{M}}$ -и хати каҷи $\mathscr{L}$ - ро ба воситаи $\tau_k \in [0; L]$, $k = 1, 2, ..., N$ ишора мекунем, ки онҳо ба нуқтаҳои $\mathscr{M}_k \in \mathscr{L}$ мувофиқанд ва формулаи (12) -ро дар намуди зерин менависем:

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) + R_N(\mathcal{F};\, \gamma;\, \mathscr{L}). \tag{14}$$

Дар оянда ба назар мегирем, ки формулаи (14) барои функсияи доимии $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = const$ аниқ аст, яъне шарти

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau = \sum_{k=1}^{N} p_k \tag{15}$$

[11] Финников С.П. Курс дифференциальной геометрии. - М. Гостехиздат. - 1952. - 343 с.

иҷро мегардад.

Ҳангоми иҷрошавии шарти (15) барои формулаи квадратурии (14) масъалаи экстремалии ёфтани формулаи квадратурии беҳтарин ба маънои А.Н.Колмогоров – С.М.Никольский ва Сардро ба шакл медарорем.

Дар боби дуюм, мо ба ғайр аз ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарини вазндор барои интегралҳои каҷхатта дар синфҳои функсияҳо ва хатҳои каҷ (ба маънои С.М.Никольский), инчунин масъалаи ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарини вазндорро барои интегралҳои каҷхатта бо коэффитсиентҳои $P = \{p_k\}$ ҳангоми гиреҳҳои фиксирондашуда (ё ин ки танҳо аз рӯйи гиреҳҳои $\mathscr{T} = \{\tau_k\}$ ҳангоми коэффитсиентҳои фиксирондашуда) ба маънои А.Сард тадқиқ мекунем. Дар айни ҳол масъалаи экстремалии мувофиқро ҳал кардан лозим меояд.

Ҳар гуна формулаҳои квадратурии намуди (14) бо воситаи векторҳои коэффитсиентҳои $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ ва гиреҳҳои $\mathscr{T} = \{\tau_k : 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{N-1} < \tau_N \leq L\}$, ки дар ин ҷо $p_1, p_2, ..., p_N$ – ададҳои ҳақиқии дилхоҳи шарти (15) - ро қонеъкунанда мебошанд, дода мешавад. Ҳангоми $N \geq 1$ -и дилхоҳ фиксирондашуда ба воситаи $\mathscr{B}$ маҷмӯи векторҳои коэфитсиентҳои $\{\mathscr{P}\}$ ва гиреҳҳои $\{\mathscr{T}\}$ ё қисми зермаҷмӯи онро ишора мекунем, ки бо ин ё он маҳдудиятҳо дар коэффитсиентҳо ва гиреҳҳои формулаи квадратурии (14) (масалан, талаби аниқ будани формула барои бисёраъзогиҳои дараҷааш додашуда, мусбат будани коэффитсиентҳои p_k $(k = \overline{1, N})$, қатъӣ ҷойгир будани гиреҳҳои $\tau_k < \tau_{k+1}$ $(k = \overline{1, N})$ ва г.) муайян карда мешавад.

Бигузор $\mathfrak{M} = \{\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right)\}$ – ягон синфи функсияҳое мебошад, ки дар қад - қади хати каҷи $\mathscr{L} \subset \mathfrak{N}_Q(L)$ муайянанд. Барои ҳар як функсияи $\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \in \mathfrak{M}$ ва ҳар як хати каҷи $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ хатогии мутлақи формулаи (14) қимати ададии мушаххасеро доро мебошад:

$$|R_N(\gamma; \mathcal{F};\, \mathscr{L};\, \mathscr{P},\, \mathscr{T})| = |\mathcal{J}(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}) - L_N(\mathcal{F}; \mathscr{L})| =$$

$$= \Big| \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \cdot \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) \Big|.$$

Ба сифати бузургие, ки аниқии формулаи квадратуриро барои ҳамаи функсияҳои $\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \in \mathfrak{M}$ ва хати каҷи $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ тавсиф мекунад, сарҳади болоии хатогии формулаи квадратуриро аз рӯйи ҳамаи функсияҳои синф қабул мекунем:

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) = \sup\{|R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T})| : \mathcal{F} \in \mathfrak{M}\}.$$

Хатогии калонтарини формулаи квадратурии (14) -ро барои ҳамаи функсияҳои $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$ ва хати каҷи $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ бо бузургии зерин ишора мекунем:

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) = \sup\{R_N(\gamma; \mathfrak{M};\ \mathscr{L};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) : \mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Сарҳади поёнии

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}) : (\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}\} \tag{16}$$

-ро барои ҳамаи векторҳои коэффитсиентҳо ва гиреҳҳои $(\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}$, ба монанди моногорафияи С.М.Никольский[3], баҳои оптималии хатогии формулаи квадратурии (14) дар синфҳои муоинашавандаи функсияҳои $\mathfrak{M}$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ менамоем. Агар формулаи квадратурие мавҷуд бошад, ки барояш шарти

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0),$$

иҷро шавад, он гоҳ онро формулаи *беҳтарин* (ё *оптималӣ*) дар синфҳои $\mathfrak{M}$ ва $\mathfrak{N}_Q(L)$, векторҳои $\mathscr{P}_0 = \{p_k^0\}_{k=1}^N$ ва $\mathscr{T}_0 = \{\tau_k^0\}_{k=1}^N$ -ро векторҳои беҳтарини коэффитсиентҳо ва гиреҳҳо ба маънои Колмогоров-Никольский меномем.

Бигузор вектори гиреҳҳо $\mathscr{T}^* = \{\tau_k^*\}_{k=1}^N$ дода шуда бошад. Талаб карда мешавад, ки бузургии

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}^*) : \mathscr{P} \in \mathscr{B}\}$$

муайян карда шавад ва агар вектори коэффитсиентҳои $\tilde{\mathscr{P}}^0 \in \mathscr{B}$ мавҷуд бошад, ки барояш шарти

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\ \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); \tilde{\mathscr{P}}^0,\ \mathscr{T}^*) \tag{17}$$

иҷро шавад, он гоҳ формулаи квадратурии (14) *беҳтарин* (ё *оптималӣ*) *аз рӯйи коэффитсиентҳо* дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ номида мешавад. Масъалаи (17) одатан масъалаи Сард номида мешавад. Қайд менамоем, ки масъалаи (16) -ро барои синфи функсияҳои нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_1$ маҳдуд, С.Б.Вакарчук[4] ҳал кардааст. Масъалаи Сардро барои баъзе синфҳои функсияҳо ва хатҳои каҷ, ки бо модули бефосилагӣ дода шудаанд, Д.С.Сангмамадов[7] ҳал кардааст.

Дар параграфи дуюм масъалаи Колмогоров - Никольский барои формулаҳои квадратурии вазндор барои функсияҳои $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ...,u_m)$ -и синфи $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$, ки барои онҳо қариб дар ҳамаи соҳаи Q ҳосилаҳои хусусии

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_m}$$

мавҷуд буда, шарти

$$\int_0^L |\mathcal{F}(u_1,\, u_2, ..., u_m)| d\tau =$$

$$= \int_0^L \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{d\tau} \right| d\tau \le \mathscr{M}.$$

-ро қонеъ менамоянд, ҳал карда шудааст.

Ба воситаи $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$, $\mathscr{M} > 0$ маҷмӯи ҳамаи функсияҳои $\mathcal{F}(u_1, u_2, ..., u_m)$ -ро ишора менамоем, ки дар маҷмӯи $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$, $\mathscr{M} > 0$ хобида, шарти $\mathcal{F}(0, ..., 0) = 0$ -ро қонеъ менамоянд.

Натиҷаи асосии параграфи дуюми боби дуюм теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 2.2.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии нумуди (14) беҳтаринашон дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ формулаи*

$$\int_0^L \gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{\Phi(0)}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), ..., \varphi_m(\tau_k)) + R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}) \tag{18}$$

мебошад, ки дар ин ҷо:

$$\Phi(\tau) = \int_\tau^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t))dt$$

ва гиреҳҳои τ_k бошад, аз системаи муодилаҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$\Phi(\tau_k) = \frac{2N-2k+1}{2N}\cdot\Phi(0),\ \ (k=\overline{1,N}).$$

Дар айни ҳол барои хатогии формулаи (18) дар синфҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва $\mathfrak{N}_Q(L)$ баҳодиҳии зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\,\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L)\right) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N}\Phi(0) = \frac{\mathscr{M}}{2N}\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(t),\,\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))dt.$$

Теоремаи 2.2.1 барои интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум, яке аз натиҷаҳои Ю.Г.Гиршович[12] -ро умумият мебахшад. М.Ш.Шабозов, С.С.Қаландаршоев[13] ин теоремаро барои интегралҳои регулярӣ исбот кардаанд. Аз теоремаи исботшудаи 2.2.1, дар ҳолати хусусӣ натиҷаҳои зерин мебароянд.

Натиҷаи 2.2.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (18) бо функсияи вазнии $\gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau)) = \tau^{-\alpha},\ 0<\alpha<1$ беҳтаринашон дар синфҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^L \frac{\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))}{\tau^\alpha}d\tau =$$

$$= \frac{L^{1-\alpha}}{(1-\alpha)N}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right),\varphi_2\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right),...\right.$$

$$\left. ...,\varphi_m\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right)\right) + R_N(\tau^{-\alpha};\,\mathcal{F};\,\mathscr{L}). \qquad (19)$$

Дар ин ҳолат баҳодиҳии аниқи хатогии формулаи квадратурии оптималии (19) дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва синфи хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$

[12]Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. - 1975. - Т.24. - №1. - С.121-123.

[13]Шабозов М.Ш., Каландаршоев С.С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости // ДАН РТ. - 1998. - Т.41. - №10. - С.69-75.

бо баробарии зерин дода мешавад:

$$\mathcal{E}_N\left(\tau^{-\alpha};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}\,L^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)N},\ \ 0<\alpha<1.$$

Натиҷаи 2.2.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (18), ки бо функсияи вазнии* $\gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))=\sin\dfrac{\pi\tau}{L},\ 0\le\tau\le L$ *дода шудаанд, беҳтаринашон дар синфи функсияҳои* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *ва хатҳои каҷи* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^L\sin\frac{\pi\tau}{L}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{2L}{\pi N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\,\varphi_2(\tau_k^*),...,\varphi_m(\tau_k^*))+R_N(\sin\frac{\pi\tau}{L};\mathcal{F};\mathscr{L}),\qquad(20)$$

ки дар ин ҷо гиреҳҳо чунинанд: $\tau_k^*=\dfrac{L}{\pi}\arccos\left(1-\dfrac{2k-1}{N}\right),\ k=\overline{1,N}$. *Дар ин ҳолат барои хатогии формулаи квадратурии формулаи (20) дар синфи функсияҳои* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *ва хатҳои каҷи* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *баҳодиҳии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N\left(\sin\frac{\pi\tau}{L};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}\,L}{N}.$$

Натиҷаи 2.2.3. *Бигузор* $[0,\,L]=[0,\,1]$. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (18), ки бо функсияи вазнии* $\gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))=\dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$ *дода шудаанд, беҳтаринашон дар синфи функсияҳои* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ *ва хатҳои каҷи* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right),\,\varphi_2\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right),...\right.$$

$$\left....,\varphi_m\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right)\right)+R_N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathcal{F};\ \mathscr{L}\right).\qquad(21)$$

Дар ин ҳолат барои хатогии формулаи квадратурии (21) дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ баҳодиҳии аниқи зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{E}_N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}\,\pi}{4N}.$$

Айнан ба ҳамин монанд барои синфи функсияҳои $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.2.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (14) беҳтаринашон дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q)$ ва хатҳои каҷи $\mathfrak{N}_Q(L)$ формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{2\Phi(0)}{2N+1}\cdot\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\,\varphi_2(\tau_k^*),...,\varphi_m(\tau_k^*))+R_N(\gamma;\,\mathcal{F};\,\mathscr{L}),\qquad(22)$$

ки дар ин ҷо гиреҳҳои τ_k^* аз ҳалли муодилаи

$$\Phi(\tau_k)=\frac{2N-2k+1}{2N+1}\Phi(0),\ \ (k=\overline{1,N}),$$

муайян гардида, сарҳади болоии хатогии ин формула ба

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\,\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{\mathscr{M}}{2N+1}\Phi(0)=$$

$$=\frac{\mathscr{M}}{2N+1}\int\limits_0^L\gamma(\varphi_1(t),\,\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))dt.$$

баробар аст.

Дар параграфи сеюми боби дуюм формулаи квадратурии беҳтарини вазндор ба маънои Сард барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум барои синфи функсияҳое, ки нормаи градиенташон дар $\mathcal{L}_2$ маҳдуд аст, ёфта шудааст. Бигузор функсияи $\mathcal{F}(\mathscr{M})=\mathcal{F}(u_1,\,u_2,\,...,u_m)$ дар синфи $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q)$, $\mathscr{M}>0$ дода шуда бошад ва барои он қариб дар ҳамаи соҳаи Q ҳосилаҳои хусусии

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_2},...,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_m}$$

мавҷуд буда, нобаробарии зеринро қонеъ менамоянд:

$$\|grad\mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ...,\, u_m)\|_{\mathcal{L}_2(Q)} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^L \left| \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_m}\right)^2 \right| dt \right\}^{1/2} \le \mathscr{M}.$$

Натиҷаҳои асосии параграфи сеюми боби дуюм теоремаҳои зерин мебошанд:

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор* $\mathscr{T} := \{\tau_k :\ 0 \le \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N \le L\}_{k=1}^N$ *системаи ихтиёрии гиреҳҳо ва коэффитсиентҳои* $\mathscr{P} = \{p_k\}$ *-и формулаи квадратурии (14) намуди* $p_k = d_k - d_{k+1},\ k = \overline{1, N},\ d_{N+1} = 0$ *-ро дошта бошанд. Он гоҳ барои хатогии беҳтарини формула нисбати коэффитсиентҳо баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^0) =$$

$$= \mathscr{M} \left\{ \int\limits_0^L \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt \right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N D_k d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ки дар ин ҷо:

$$d_k = \sum_{i=k}^N p_i,\ \ D_k = \tau_k^0 - \tau_{k-1}^0,\ \ k = \overline{1, N}.$$

Теоремаи 2.3.2. *Бигузор функсияи вазнии* $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \equiv 1$ *дода шуда бошад. Он гоҳ ҳангоми дода шудани системаи гиреҳҳои* $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* :\ \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^N$ *формулаи квадратурии беҳтарин нисбати коэффитсиентҳо ба маънои Сард формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), \varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), ..., \varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+ \frac{L}{2(N-1)}\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right) + R_N(\mathcal{F},\, \mathscr{L}). \qquad (23)$$

Дар ин ҳолат баҳодиҳии аниқи хатогии формулаи (23) ба

$$\mathcal{E}_N(1;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \frac{\mathscr{M}L^2}{2\sqrt{3}(N-1)}$$

баробар мегардад.

Теоремаи 2.3.3. *Бигузор* $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),\ldots,\,\varphi_m(\tau)\right) \equiv \tau$ *бошад. Он гоҳ ҳангоми дода шудани системаи гиреҳҳои* $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* : \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^{N}$ *формулаи квадратурии беҳтарин нисбати коэффитсиентҳо намуди*

$$\int\limits_0^L \tau\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\,\varphi_2(\tau),...,\varphi_m(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{L^2}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right),\,\varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right),...,\varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right)+$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2}-\frac{3N-2}{6(N-1)^2}\right)\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\,\varphi_2(L),...,\varphi_m(L)\right)+R_N(\tau,\,\mathcal{F},\,\mathscr{L}),$$

-ро мегирад ва дар ин ҳолат хатогӣ барои синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q)$ *ба*

$$\mathcal{E}_N\left(\tau;\,\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*\right) = \frac{\mathscr{M}L^2}{4\sqrt{3}(N-1)}$$

баробар мешавад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ инҳоянд:

- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷе, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ барои дилхоҳ ҷойгиршавии гиреҳҳо дода шудаанд, ёфта шудааст;
- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималии намуди Марков бо гиреҳҳои қайдкардашудаи канорӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ дода шудаанд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M}; Q)$ бо нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_2(Q)$ маҳдуд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор, ки дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q)$ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар диссертатсия гирифташуда, ҳам арзиши назариявӣ ва ҳам амалӣ доранд. Натиҷаҳои дар диссертатсия овардашударо дар назарияи тақрибӣ ҳисобкунии интегралҳои сатҳӣ дар синфи функсияҳои дорои суфтагии кам истифода бурдан мумкин аст. Бобҳои рисола метавонанд алоҳида мазмуни курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ ки аз рӯйи ихтисоси «Математикаи амалӣ» ва «Математика» таҳсил мекунанд, ташкил диҳанд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия нашр шудаанд:

[1-М] Абдукаримзода, М. К. Эрмитовые кубические сплайны и погрешность квадратурных формул, связанных с ними [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2018. - №.3. - С.110-116.

[2-М] Абдукаримзода, М. К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.Ш. Шабозов, М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2019. - Т.62. - №11-12. - С.619-628.

[3-М] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых [Текст] / М.Ш. Шабозов, М.К. Абдукаримзода // Чебышевский сборник. - 2020. - Т.21. - №3. - С.437-448.

[4-М] Абдукаримзода, М. К. О наилучших весовых квадратурных формулах для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2020. - Т.63. - №7-8. - С.427-435.

[5-М] Абдукаримзода, М. К. Оптимальные квадратурные формулы с весом для криволинейных интегралов на классах функций с ограниченным градиентом в пространстве $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К. Абдукаримзода // ДАН РТ. - 2020. - Т.63. - №9-10. - С.557-563.

Дар дигар нашрияҳо:

[6-М] Абдукаримзода, М. К. О погрешности квадратурных формул, точных на кубических эрмитовых сплайнах [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С.22-24.

[7-М] Абдукаримзода, М. К. О наилучших кубатурных формулах для некоторых классов функций [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы XI международной научно - теоретической конференции „Компьютерный анализ, проблем науки и технологии" (Душанбе, 27-28 декабря 2018 г.). – С.33-35.

[8-М] Абдукаримзода, М. К. О точной оценке погрешности наилучших кубатурных формул для некоторых классов функций [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.7-11.

[9-М] Абдукаримзода, М. К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами" (Душанбе, 10-11 октября 2019 г.) – С.3-6.

[10-М] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие весовые квадратурные формулы для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.26-31.

[11-М] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы республиканской научно - практической конференции „Современные проблемы теории дифференциальных уравнений" (Душанбе, 26 сентября 2020 г.) – С.261-265.

[12-М] Абдукаримзода, М. К. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К. Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) – С.12-16.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Абдукаримзода Муслими Кароматулло дар мавзӯи «Формулаҳои квадратурии беҳтарини тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар фазои $\mathbb{R}^m$» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *муодилаҳои параметрӣ, фазои m -ченака, модули бефосилагӣ, масъалаи экстремалӣ, формулаи квадратурии Марков, формулаи росткунҷа, формулаи трапетсия, сарҳади болоӣ.*

Мақсади кор. Мақсади тадқиқот аз ёфтани формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум барои баъзе синфҳои функсияҳо ва хатҳои каҷ дар $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ иборат аст.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин ки аз тарафи С.М.Никольский коркард шудаанд инчунин, усули Н.П. Корнейчук барои аз поён баҳодиҳии хатогии квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратуриро ба нол мубаддал мекунонанд, истифода шудаанд.

Навигариҳои илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия оврдашуда нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин ҳосил карда шудаанд:

- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум дар синфи функсияҳо ва хатҳои каҷе, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ барои дилхоҳ ҷойгиршавии гиреҳҳо дода шудаанд, ёфта шудааст;
- намуди ошкори баҳои аниқи формулаҳои квадратурии оптималии намуди Марков бо гиреҳҳои қайдкардашудаи канорӣ барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои каҷхатта дар синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар $\mathbb{R}^m$ дода шудаанд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ бо нормаи градиенташон дар фазои $\mathcal{L}_2(Q)$ маҳдуд, ёфта шудааст;
- формулаҳои квадратурии оптималӣ барои ҳисоб кардани интегралҳои каҷхаттаи вазндор, ки дар синфи функсияҳои $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори илмии пешниҳодшуда ҳам характери назариявӣ ва ҳам амалиро дорад. Натиҷаҳои кори рисолаи диссертатсиониро дар назарияи тақрибӣ ҳисобкунии интегралҳои сатҳӣ дар синфи функсияҳо ва сатҳҳои дорои суфтагии кам истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ
диссертации Абдукаримзода Муслими Кароматулло на тему «Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов в пространстве $\mathbb{R}^m$», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *параметрические уравнения, m -мерное пространство, модуль непрерывности, экстремальная задача, квадратурная формула Маркова, формула прямоугольника, формула трапеция, верхняя грань.*

Цель работы. Целью исследования является отыскание оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций и кривых в $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Методы исследования. В работе используются методы отыскания наилучших квадратурных формул, разработанные С.М.Никольским, а также метод Н.П.Корнейчука оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;
- найдена оптимальная квадратурная формула для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространство $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно использовать в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций и поверхностей малой гладкости.

SUMMARY

of the dissertation Abdukarimzoda Muslimi Karomatullo on the topic «Best quadrature formulas for approximate calculation of curvilinear integrals in space $\mathbb{R}^m$» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex, and functional analysis

Key words: *parametric equations, m - dimensional space, modulus of continuity, extremal problem, Markov quadrature formula, rectangle formula, trapezoid formula, upper face.*

Work objectives. The aim of the study is to find optimal quadrature formulas for approximate calculation of curvilinear integrals of the first kind for some classes of functions and curves in $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Research methods. The paper uses the methods of finding the best quadrature formulas developed by S. M. Nikolsky, as well as the method of N. P. Korneychuk for estimating the error of quadrature formulas from below on classes of functions that vanish the quadrature sum.

Scientific novelty. All the results obtained in the dissertation work are new. The following main results are obtained:

- an explicit form of an exact error estimate of the optimal quadrature formula for calculating curvilinear integrals of the first kind on classes of functions and curves given by continuity modules in $\mathbb{R}^m$ for an arbitrary arrangement of nodes is found;
- an explicit form of an exact error estimate of an optimal Markov-type quadrature formula for approximating the calculation of curvilinear integrals on classes of functions defined by continuity modules in $\mathbb{R}^m$ with fixed edge nodes is found;
- an optimal quadrature formula is found for calculating weight curvilinear integrals on classes of functions $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M}; Q)$ with bounded gradient in normal space $\mathcal{L}_2(Q)$;
- optimal quadrature formulas for calculating weight curvilinear integrals for the class $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q)$.

Theoretical and practical value. The work is both theoretical and practical. The results of the dissertation can be used in the approximation theory for calculating surface integrals on classes of functions of small smoothness.