ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК: 517.968.220 На правах рукописи

АХМАДОВ ФАРВАРИДДИН МУФАЗАЛОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Душанбе – 2024

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	**Раджабова Лутфия Нусратовна,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой математического анализа и теории функций Таджикского национального университета.
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Сафаров Джумабой,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрава.
	Каримова Назокат Шералиевна, кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой математического анализа и теории функций Кулябского государственного университета имени А.Рудаки.
ВЕДУЩЕЕ УЧРЕЖДЕНИЕ:	Российско-Таджикский (Славянский) Университет

Защита состоится *19 февраля 2025г в 15:30 часов* на заседании диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете, на механико-математический факультет по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте: http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «___» _________________2025г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.КОА-011,
кандидат физико-математических наук **А.Б.Гафоров**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и необходимость проведения исследований по теме диссертации. В настоящей диссертации впервые исследуется класс интегральных уравнений типа Вольтерра в двумерном случае, когда ядро уравнения имеет граничные особые и сильно-особые линии.

В современной математике интегральные уравнения типа Фредгольма и Вольтерра, в том числе с особыми ядрами составляют одну из важнейших и активно развивающихся областей исследования.

Теория сингулярных интегральных уравнений давно уже стала одним из распространённых инструментов исследования различных задач математической физике. В прикладных задачах математики, механики, физики, теории упругости, теории конформных отображений встречаются различные классы (одномерных и многомерных, линейных и нелинейных) сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра.

Интегральные уравнения неоднократно появлялись в трудах различных математиков, начиная с XVIII века. В развитии теории интегральных уравнений решаюший вклад внесли такие выдающиеся математики, как С.Д.Пуассон, О.Л.Коши, Дж. Лиувилл, Б.Риман, Т.И.Стилтьес, Э.Бельтрами, Н.Сонин, В.Стеклов, К.Нейман, Ш.Е.Пикар, А.Пуанкаре, Г.Шварц и др. Скачок в теории линейных интегральных уравнений произошёл в конце XIX начале XX века в связи с классическими работами В.Вольтерры [1,2,3,4,5], Э.И. Фредгольма[6], Д. Гильберта[7], Э.Шмидта[8,9].

Основным методом изучения интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций явился аппарат интегралов типа Коши, в предельном смысле законченный вид он принял в известных монографиях Н. И.Мусхелишвили[10], Ф.Д.Гахова[11] и З.Пресдорф[12].

---

[1]**Voltera V**. Sulla inversion degli integrali definiti // Tip. della R. Accademia dei Lincei. –1896. – Vol. 5. – PP. 177-185.
[2]**Voltera V**. Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1897. – Vol. 25. – PP. 139-178.
[3]**Voltera V**. Sopra un problema di electrostatica // Nuovo Cimento. – 1884. – Vol. 16. – PP. 49-57.
[4]**Voltera V**. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentieles // Gauthier Villars. – Paris. – 1913. – 180 p.
[5]**Voltera V**. Theory of Functional and of integral and Integro-differential Equations // Dover Publications.Ing. – New York. –1959. – 304 p.
[6]**Fredgolm I**. Sur une classe di fonctionnelles equations problema di electro statica // Acta matematica. –1903. – Vol. 27. – PP. 365-390.
[7]**Gilbert D**. Grundziige einer allgemeinen theorie der linearen integralgieichimgen // Leipzig. – Berlin. – 1912. – 320 p.
[8]**Schmidt E**. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkurlichen Funcnionen nach system vorgeschriebener // Math. Annalen – 1907. – Vol. 63. – PP. 433-476.
[9]**Schmidt E**. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. II Teil. Aufiosung der allgemeinen linearen integralgleichung // Math. Annalen – 1907. – Vol. 64. – PP. 161-174.
[10] **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения// Наука М.1968. – 511 с.
[11] **Гахова Ф. Д**. Краевые задачи // Из-во Наука М. 1963. 640 с.
[12]**Пресдорф З**. Некоторые классы сингулярных уравнений //М.: Мир, 1979. – 493 с.

Исследование двумерных интегральных уравнений в конечной области, а также изучение общих аналитических функций и сингулярных двумерных интегральных уравнений связано с монографией И.Н.Векуа[13], а также с работами А.Джураева[14], Г.Джангибекова[15] и их учеников.

В работах Михайлова Л.Г[16], Бильмана Б.М[17], изучены интегральные уравнения с однородным ядром -1 степени. Достойный вклад в развитии теории интегральных уравнений с непрерывными ядрами, со слабо-сингулярными ядрами, многомерных интегральных уравнений внес труд С.Г.Михлина[18].

Отметим, что исследованию характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в исключительном случае, получению условия разрешимости и явной формулы представления решений посвящена работа А.П.Солдатова[19]. Следует заметить, что работа С.А.Довгого[20] посвящена основам вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численного решения уравнений с ними, работа Н.Б.Плещинского[21] посвящена теории сингулярных интегральных уравнений с особенностями логарифмического или степенного типа, также одновременно со слабыми и сильными особенностями в различных сочетаниях. Исследованию слабо-сингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов, построению и обоснованию вычислительных схем решеный данных уравнений посвящены работы Г.А.Расолько[22] и И.В.Байков[23].

Необходимо отметить, что работа Н.Раджабова[24] посвящена изучению интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными сингулярными или сверх-сингулярными точками вида:

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K(x,t)}{|t|^\alpha}\varphi(t)dt = f(x), \text{ где } \alpha \geq 1.$$

---

[13] **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции // М. Фиматгиз. 1959. 672 с.

[14] **Джураева А. Д**. Метод сингулярных интегральных уравнений // М.: Наука, 1987. – 415 с.

[15] **Джангибеков Г.** О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. Заметки. – 1989. – Т. 46. – №46. – С.91-93.

[16] **Михайлов Л.Г**. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1// Душанбе, 1966.–49 с.

[17] **Бильман Б. М.** Об интегральных уравнениях с переменными пределами нтегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1// Душанбе 1969. – С.19-40.

[18] **Михлин С. Г**. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения //Физматгиз, 1962.-254 с.

[19] **Солдатов А.П.** Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае.//Научные ведомости БелГУ.Серия мат-физ. 2011. №17(112). С.1-7

[20] **Довгий С.А.** Методы решения интегральных уравнений.// Киев: Наукова думка, 2002. – 345 с.

[21] **Плещинский Н.Б**. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особеннотью в ядре // Казань.: Издательство КФУ, 2018. – 160 С.

[22] **Расолько Г.А.** Численое решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов.// Минск.: Изд-во БГУ, 2017, 239 с.

[23] **Байков И.В**. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Пенза.: Изд-во ПГУ, 2004. – 297 с.

[24] **Раджабов Н.** Интегральные уравнении типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх–сингулярными ядрами и их приложения // Душанбе: Деваштич, 2007. – 221с.

Степень разработанности темы исследования. Изложенные выше результаты относятся к различные классы одномерных и многомерных, линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений, также изучению некоторых случаев особых интегральных уравнений типа Вольтерра первого и второго рода. Однако интегральные уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно особыми линиями мало изучены. Получение многообразия решений и разрешимость граничных задач для таких уравнений связанны с некоторыми трудностями принципиального характера. В этой связи весьма актуальным является вопрос изучения интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особыми и сильно особыми линиями.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2020-2025 гг. по теме «Сингулярные и сверх-сингулярные дифференциальные и интегральные операторы».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель исследования. В предлагаемой диссертационной работе основной целью является получение явных многообразий решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами.

Задачи исследования:

- Получение представлений многообразий решений в явном виде двумерного интегрального уравнения Волтерра с особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- Постановка и решение задач типа Коши для двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми ядрами, в случае, когда общее решение содержит произвольные функции;
- Нахождение явных решений двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми ядрами в виде степенных и функциональных рядов, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Объект исследования. Основным объектом исследования является двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями.

Предмет исследования. Исследование одного класса интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой граничными линиями.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, метод получения интегральных представлений. В работе также используется метод решения интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированной сингулярной и сверх-сингулярной точкой, также широко используются методы, разработанные в работах Н.Раджабова и Л.Н.Раджабовой.

Научная новизна исследований. Результаты диссертационной работы полученны автором самостоятельно, являются новыми результатами и включают в себя:

- явные представления многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда корни характеристических уравнений принимают всевозможные значения и коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- постановка и решение задач типа Коши изучаемого интегрального уравнения в случае, когда коэффициенты связаны определенными равенствами;
- многообразие решений в виде обобщенного степенного и функционального рядов двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о явных решениях двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми и сильно-особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- теоремы о разрешимости задач типа Коши;
- теоремы о получении общих решений с помощью обобщенных функциональных и степенных рядов для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, изложенные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также использоваться при решении различных прикладных задач.

Материалы данной диссертационной работы могут быть применены при изложении специальных курсов для студентов, магистров и докторантов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

Достоверность диссертационных результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы интегральных уравнений.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения) и двум пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3.

Теория дифференциально-операторных уравнений). Диссертацию можно считать разделом вещественного, комплексного и функционального анализа (смежная специальность 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функции ТНУ под руководством д.ф.-м.н.,профессора, академика НАН РТ Раджабова Н.Р. (Душанбе, 2020-2024гг.);
- республиканской научно-практической конференции «Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений» (г. Душанбе, Таджикистан, 4 декабря 2021 г.);
- научно-теретической конференции преподователей и студентов университета «Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений» посвящённой обявлению 2022-2026 годов годами развития промышленности (г. Душанбе, Таджикистан, МУТПТ, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук (г. Душанбе, Таджикистан, 20-21 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функции», посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мирганда Шабозовича (г. Душанбе, Таджикистан, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящёную 85-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессор Раджабова Н (г. Душанбе, Таджикистан, 5 октября 2023 г.).

Личный вклад соискателя ученой степени состоит:

- в том, что исследовано ранее не изученное уравнение:
- в получении явных решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями, когда параметры уравнения связаны и не связаны между собой и корни характеристических уравнений являются вещественными и разными, вещественными и равными, комплексно-сопряженными, вещественными-разными и равными, вещественными-разными и комплексно-сопряженными, вещественными-равными и разными, вещественными-равными и комплексно-сопряженными, комплексно-сопряженными и вещественными-разными, комплексно-сопряженными и вещественными-равными;

- в постановке и решении задач типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями, когда общие решения интегрального уравнения содержат произвольные функции;
- в подготовке публикаций по работе и личном участии в апробации результатов диссертации. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад соискателя в опубликованных работах. Все результаты диссертационной работы получены лично соискателем.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 20 работах [1-А]-[20-А]. Из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, три статьи в других изданиях, остальные в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, списка литературы, состоящего из 144 наименований. Общий объём диссертации 189 страниц машинописного текста.

Благодарность автора. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Л.Н.Раджабовой за постановку задач и полезные советы при подготовке данной диссертационной работы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведено обоснование актуальности предлагаемой темы диссертационной работы, цель исследования, обзор работ по теме диссертации и основные результаты представляемой работы.

Первая глава. В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы.

Во второй главе приводятся результаты изучения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда параметры, присутствуюшие в уравнении, связаны определенными равенствами.

В первом параграфе второй главы в прямоуглньнике $D=\{(x,y): a<x<a_1, b<y<b_1\}$ с граничными линиями: $\Gamma_1=\{y=b, a<x<a_1\}$, $\Gamma_2=\{x=a, b<y<b_1\}$ исследуется интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми линиями вида

$$\begin{gathered} u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+ \\ +\int_a^x\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y), \end{gathered} \tag{1}$$

где $p, q, \lambda, \mu, p_1, q_1, \lambda_1, \mu_1$ – заданные коэффициенты, $\beta>1$, $f(x,y)$ – заданная функция, $u(x,y)$ – искомая функция, $\omega_b^\beta(y)=[(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}]^{-1}$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{D}),$ которые обращаются в нуль при $x\to a,\ y\to b$ с асимптотическими поведениями:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,$ при $x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu}],\nu>2(\beta-1),$ при $y\to b.$

Если параметры интегрального уравнения (1) связаны между собой равенствами

$$p=p_1, q=q_1, \lambda=\lambda_1, \mu=\mu_1. \qquad (2)$$

Тогда изучение интегрального уравнения (1) после некоторых преобразований приводится к изучению интегральных операторов вида:

$$\Pi_{\lambda,\mu}^{y}\left(T_{p,q}^{x}(u)\right)=f(x,y), \qquad (3)$$

где

$$T_{p,q}^{x}(u)\equiv u(x,y)+\int_a^x\left[p+qln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt=\psi(x,y), \qquad (4)$$

$$\Pi_{\lambda,\mu}^{y}(\psi)\equiv\psi(x,y)+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds=f(x,y). \qquad (5)$$

Для интегральных уравнений (4) и (5) характеристические уравнения имеют вид:

$$\gamma^2+p\gamma+q=0, \qquad (6)$$

$$\eta^2-\lambda\eta+\mu=0. \qquad (7)$$

В случае, когда корни характеристических уравнений (6), (7) удовлетворяют условиям $\Delta_1=p^2-4q>0,\ p<0,\ q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\ \lambda<0,\mu>0,$ для уравнения (1) справедливо утверждение:

Теорема 2.1.1. *Если в интегральном уравнении* (1) *выполняются условия* (2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0,\ p<0,\ q>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda<0,\mu>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_1}],\delta_1>\gamma_1,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_1}],\nu_1>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде:*

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+\Phi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}+\Phi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (8)$$

где

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt,\ (i=1,2), \qquad (9)$$

$$K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x,y)] = f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma 1}\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left(p^2-4q\right)\left(\lambda^2-4\mu\right)}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times \tag{10}$$

$$\times\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_2}], \delta_2 > \gamma_1$, *при* $x \to a$, $(i = 1,2)$,

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_2}], \nu_2 > 2(\beta-1)$, *при* $y \to b$, $(j = 1,2)$,

$$\gamma_1 = \frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2} > 0,\ \gamma_2 = \frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2} > 0,\ \eta_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0,\ \eta_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0,\ (\gamma_1 > \gamma_2),\ (\eta_1 > \eta_2). \tag{11}$$

Следствие 2.1.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_1}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_3}], \nu_3 > 2(\beta-1), y \to b.$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи, когда $p<0,\ q>0,\ \lambda>0,\mu<0;\ p<0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu<0;\ p>0,q<0,\ \lambda<0,\mu>0;$ $p<0,\ q<0,\ \lambda<0,\mu>0;\ p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\mu<0;\ p<0,\ q>0,$ $\lambda>0,\mu>0;\ p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu>0;\ p>0,q<0,\ \lambda>0,\mu<0;\ p>0,q<0,$ $\lambda<0,\mu<0;\ p<0,q<0,\ \lambda<0,\mu<0;\ p>0,q>0,\ \lambda<0,\mu<0;\ p>0,q<0,$ $\lambda>0,\mu>0;\ p<0,q<0,\ \lambda>0,\mu>0;\ p>0,q>0,\ \lambda>0,\mu<0$ и $p>0,q>0,$ $\lambda>0,\mu>0.$

Второй параграф второй главы посвящен изучению интегрального уравнения (1), когда корни характеристических уравнений вещественные и равные, т. е. $\Delta_1 = p^2-4q = 0,\ p<0,\ \Delta_2 = \lambda^2-4\mu = 0,\ \lambda<0.$

Справедливо утверждение:

Теорема 2.2.1. *Если в интегральном уравнении* (1) *выполняются условия* (2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q = 0, p<0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2-4\mu = 0, \lambda<0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_3}], \delta_3 > \frac{|p|}{2},$ *при* $x \to a,$

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_4}],\nu_4>2(\beta-1),\text{при}\quad y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде:*

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)],\quad (12)$$

где

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt,(i=1,2),\quad (13)$$

$$M_{p,\lambda}[f(x,y)]=f(x,y)+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$

$$+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$

$$+\frac{|p|}{2}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a,\ y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_4}],\delta_4>\frac{|p|}{2},\ \text{при}\ x\to a,\ i=(1,2),$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_5}],\nu_5>2(\beta-1),\ \text{при}\ y\to b,\ j=(1,2).$$

Следствие 2.2.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_6}],\nu_6>2(\beta-1),y\to b.$$

Остальные случаи исследуются аналогичным образом, когда $p<0$, $\lambda>0$; $p>0$, $\lambda<0$ и $p>0$, $\lambda>0$.

Третий параграф второй главы посвящен изучению двумерного интегрального уравнения Вольтерра (1), когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные т. е. $\Delta_1=p^2-4q<0$, $p<0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, $\lambda<0$.

Справедливо утверждение:

Теорема 2.3.1. *Если в интегральном уравнении* (1) *выполняются условия* (2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q<0$, $p<0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0, \lambda < 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_5}], \delta_5 > \frac{|p|}{2}, x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_7}], \nu_7 > 2(\beta - 1), y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде:*

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y) + \sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\} +$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)\right] + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{14}$$

где

$$\Phi_i(x) = \varphi_i(x) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt, \tag{15}$$

$$E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right) = f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right) + \frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2\sqrt{4q-p^2}}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right) + \frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$
$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ -*произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при* $x \to a,\ y \to b$, *поведения которых определяются из асимптотических формул:*

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_6}], \delta_6 > \frac{|p|}{2}, x \to a, i = (1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_8}], \nu_8 > 2(\beta - 1), y \to b, j = (1,2)$$

Следствие 2.3.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}] \text{ при } x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_9}], \nu_9 > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b.$$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи, когда $p < 0, \lambda > 0$; $p > 0, \lambda < 0$ и $p > 0, \lambda > 0$.

В четвертом – девятом параграфах второй главы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особыми ядрами (1), когда корни характеристических уравнений (6) и (7) принимают остальные возможные значения, т. е.:

$\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$; $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$; $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$;

$\Delta_1 = p^2 - 4q = 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$; $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$ и $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$.

В приведённых случаях, в зависимости от знака параметров уравнения и значений корней характеристических уравнений (6) и (7), получены представления многообразия решений интегрального уравнения (1) в явном виде. Доказано, что общее решение интегрального уравнения может содержать от 1 до 4 произвольных функций. Также установлены случаи, когда решение единственно.

Третья глава посвящена постановки задач типа Коши и их решению двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми и сильно-особыми ядрами, когда параметры уравнения связаны определенными равенствами.

В параграфе 3.1 в случае, когда корни характеристических уравнений изучаемого интегрального уравнения вещественные и разные, ставятся и решаются задачи типа Коши.

Задача $К_{3.1.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0,\ q > 0$, $\lambda < 0, \mu > 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)}\left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)}\left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные функции на* Γ_1 *и* Γ_2.

О разрешимости задачи $\mathrm{K}_{3.1.1}$ справедлива теорема:

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.1. Т*огда задача* **К3.1.1** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1}+\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2}+e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2-\eta_1}+e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2-\eta_1}+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)],\quad(16)$$

Аналогичном образом, ставятся и исследуется задачи типа Коши в остальных случаях, когда $p<0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu<0$; $p<0,\ q>0,\ \lambda>0,\mu>0$; $p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu>0$; $p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\mu<0$; $p>0,q<0,\lambda<0,\mu<0$; $p<0,q<0,\lambda<0,\mu<0$; $p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\ \mu<0$; $p>0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \mu>0$; $p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \mu>0$.

В параграфе 3.2 в случае, когда корни характеристических уравнений изучаемого интегрального уравнения вещественные и равные, ставятся и решаются следующие задачи типа Коши.

Задача К3.2.1. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\lambda<0$, $\Delta_1=p^2-4q=0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)u(x,y)-\ln(x-a)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x\left(u(x,y)\right)-\frac{|p|}{2}u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)u(x,y)-\omega_b^\beta(y)D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x),\mathrm{A}_1(y),\mathrm{A}_2(y)-$ *заданные произвольные непрерывные функции соответственно на* Γ_1 *и* Γ_2.

О разрешимости задачи **К3.2.1** справедлива теорема:

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1. Т*огда задача* **К3.2.1** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y)+\ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x)+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)].\quad(17)$$

Аналогичном образом, ставятся и исследуется задачи типа Коши в остальных случаях, когда $p<0,\lambda>0$ и $p>0,\lambda<0$.

В параграфе 3.3 в случае, когда корни характеристических уравнений изучаемого интегрального уравнения комплексно-сопряжённые, ставятся и решаются следующие задачи типа Коши.

Задача К3.3.1. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda<0,\ p<0$, $\Delta_1=p^2-4q<0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции соответственно на* Γ_1 *и* Γ_2.

О разрешимости задачи $\mathbf{K}_{3.3.1}$ справедлива теорема:

Теорема 3.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1. Т*огда задача* $\mathbf{K}_{3.3.1}$ *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \quad (18)$$

Ставятся и исследуется аналогичном образом, задачи типа Коши в остальных случаях, когда $p<0, \lambda>0$ и $p>0, \lambda<0$.

В четвертом-девятом параграфах третьей главы ставятся и решаются задачи типа Коши для рассматриваемого интегрального уравнения типа Вольтерра (1), когда корни характеристических уравнений (6) и (7) принимают остальные возможные значения:

$\Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0;\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0;$

$\Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$ и $\Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0.$

Четвертая глава посвящена изучению двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой.

Первый параграф четвёртой главы посвящен нахождению многообразий решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями вида (1), в виде обобщенного функционального ряда.

Пусть параметры уравнения (1) не связаны между собой, т. е.:

$$p\neq p_1, q\neq q_1, \lambda\neq\lambda_1, \mu\neq\mu_1. \quad (19)$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},\ \tau>0. \tag{20}$$

Пусть правая часть интегрального уравнения также разлагается в ряд вида:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},\ \tau>0. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.1.1. *Если в интегральном уравнении* (1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2-4q_2>0,\ p_2<0,\ q_2>0$;
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (21);
3. $f_n^1(x)\in\Gamma_1,\ f(a)=0$ *с асимптотическим поведением*:

   $f_n^1(x)=o[(x-a)^{\delta_7}],\delta_7>\gamma_1,$ *при* $x\to a$.

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (1) *в классе функций, представимых в виде (20), имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида*:

$$u_n^1(x,y)=(x-a)^{\gamma_1}e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},\ u_n^2(x,y)=(x-a)^{\gamma_2}e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},\quad n=0,1,2,3,...$$

где параметры $p_2,\ q_2,\ \gamma_1,\gamma_2$ *определены равенством:*

$$p_2=\frac{p(n+\tau)^2+p_1\lambda_1(n+\tau)+p_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu},\ q_2=\frac{q(n+\tau)^2+q_1\lambda_1(n+\tau)+q_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu},\quad f_n^1(x)=\frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu}f_n(x),$$

$$\gamma_1=\frac{-p_2+\sqrt{p_2^2-4q_2}}{2}>0,\ \gamma_2=\frac{-p_2-\sqrt{p_2^2-4q_2}}{2}>0,\ (\gamma_1-\gamma_2>0).$$

Неоднородное интегральное уравнение (1) *в классе функций, представимых в виде* (20)*, всегда разрешимо и его решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\left\{(x-a)^{\gamma_1}c_{n_1}+(x-a)^{\gamma_2}c_{n_2}+K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right]\right\},$$

где c_{n_1},c_{n_2} *– произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_1+1}|}{|c_{n_1}|}=c_1,\ e^{-\omega_b^{\beta}(b)}c_1<1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_2+1}|}{|c_{n_2}|}=c_2,\ e^{-\omega_b^{\beta}(b)}c_2<1.$$

Следствие 4.1.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_8}],\delta_8>\gamma_2,x\to a,$

$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$

Аналогичном образом исследуется остальных случаях, когда $p_2^2-4q_2>0,\ p_2>0,q_2<0;\ p_2^2-4q_2>0,\ p_2<0,q_2<0;\ \ p_2^2-4q_2>0,\ p_2>0,q_2>0;$ $p_2^2-4q_2=0,\ p_2<0;\ p_2^2-4q_2=0,\ p_2>0;\ p_2^2-4q_2<0,\ p_2<0$ и $p_2^2-4q_2<0,\ p_2>0.$

Второй параграф четвёртой главы посвящен нахождению многообразий решений двумерного интегрального уравнения типа

Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями вида (1), в виде обобщенного степенного ряда.

Рассмотрим двумерное интегральное уравнение вида (1) в случае, когда $p \neq p_1, q \neq q_1, \lambda \neq \lambda_1, \mu \neq \mu_1$ и решение интегрального уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y)(x-a)^{n+\tau}, \ \tau > 0. \tag{22}$$

Также пусть правая часть интегрального уравнения (1) разлагается в ряд вида:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)(x-a)^{n+\tau}, \ \tau > 0 \ . \tag{23}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.2.1. *Если в интегральном уравнении* (1) *выполняются условия*:

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0, \lambda_2 < 0, \ \mu_2 > 0$;
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (23);
3. $f_n^1(y) \in \Gamma_2$, $f(b) = 0$ *с асимптотическим поведением*:

$f_n^1(y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)}(y-b)^{\nu_{10}}], \nu_{10} > \beta - 1$ *при* $y \to b$.

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (1) *в классе функций, представимых в виде* (22), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида*:

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)}, \ u_n^2(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)}, \ \ n = 0,1,2,3,...$$

где параметры λ_2, μ_2, η_1, η_2 *определены равенством:*

$$\lambda_2 = \frac{\lambda(n+\tau)^2 + \lambda_1 p_1(n+\tau) + \lambda_1 q_1}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q}, \ \mu_2 = \frac{\mu(n+\tau)^2 + \mu_1 p_1(n+\tau) + \mu_1 q_1}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q}, \ f_n^1(y) = \frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q} f_n(y),$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} < 0, \ \eta_2 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} < 0, \ \ (\eta_1 - \eta_2 > 0).$$

Неоднородное интегральное уравнение (1) *в классе функций, представимых в виде* (22), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\varepsilon} \left\{ c_{n_3} e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + c_{n_4} e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)} + M_{\lambda_2,\mu_2}^{y} [f_n^1(y)] \right\},$$

где c_{n_3}, c_{n_4} − *произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_3+1}|}{|c_{n_3}|} = c_9, (a_0 - a)c_9 < 1, \ \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_4+1}|}{|c_{n_4}|} = c_{10}, \ (a_0 - a)c_{10} < 1$$

Следствие 4.2.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^\tau], \tau > 0, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{11}}], \nu_{11} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Аналогичном образом исследуется остальных случаях, когда

$\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu_2 < 0$; $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\mu_2 < 0$; $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu_2 > 0$; $\lambda_2^2 - 4\mu_2 = 0$, $\lambda_2 < 0$; $\lambda_2^2 - 4\mu_2 = 0$, $\lambda_2 > 0$; $\lambda_2^2 - 4\mu_2 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_2^2 - 4\mu_2 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются:

- в нахождении явных решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами и корни характеристических уравнений принимают все возможные значения [1-A]-[4-A], [7-A], [9-A]-[15-A];
- в постановке и решения задач типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами и корни характеристических уравнений принимают все возможные значения [6-A], [8-A], [19-A], [20-A];
- в нахождении многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой ядрами в виде обобщенного степенного и функционального рядов в случае, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами [5-A], [16-A], [17-A], [18-A].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследования, изложенные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также использоваться при решении различных прикладных задач.

Материалы данной диссертационной работы могут быть применены при изложении специальных курсов для студентов, магистров и докторантов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М. Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С.78-89.

[2-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т. 64. – №5-6. – С. 283-290.

[3-А] Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №4. – С.119-128.

[4-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.314-324.

[5-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особой и сильно–особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Известия НАН Таджикистана. – 2023. – №2(191). – С.18-26.

[6-А] Ахмадов Ф.М. Задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т. 66. – №3-4. – С.178-186.

2. Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[7-А] Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Bulletin of L.N Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2021. – Vol. 137. – №4. – P. 6-13.

[8-А] Akhmadov F.M. Solution of a Cauchy type problem for an integral equation of Volterra type with singular kernels, when the roots of the characteristic equations are complex conjugate [Text] / L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov// Bulletin of L.N Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2024. – Vol. 146. – No1. – PP. 27-35.

[9-А] Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов, // Материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и физики”.– Стерлитамак. – 2021. – Т.1. – С.91- 96.

3. Материалы конференций, тезисы докладов:

[10-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”. – Душанбе. – 2021. – С.29-32.

[11-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”. – Душанбе. – 2021. – С.194-198.

[12-А] Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равны [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества”. – Хуҷанд. – 2021. – С.148-150.

[13-А] Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы республиканской научно-практической конференции “Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений”. – Душанбе. – 2021. – С.9-11.

[14-А] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы теории чисел и математического анализа”, посвящённая восьмидесятилетиию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Исмоилова Додожона. – Душанбе. – 2022. – С.40-43.

[15-А] Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы научно-теретической конференции преподователей и студентов университета на тему “Основные направления обеспечения ускоренной индустриализации экономики в контексте стратегических целей Республики таджикистан”, “Посвящённой обявлению 2022-2026 годов, годами развития промышленности”.– Душанбе. МУТПТ. – (29-30 апреля 2022 г) . – С.521-523.

[16-А]Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математического анализа и теории функции”, посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мирганда Шабозовича. – Душанбе. – 2022. – С.309-311.

[17-А] Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международной научно-практической конференции, “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020 – 2040 годы.– Душанбе. – ДМТ – 20-21 октября. – 2022. – С.176-179.

[18-А] Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно-особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научную конференцию, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённую двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере образования и науки (2020 – 2040).– Бохтар. – 19 ноября. – 2022. – С.156-159.

[19-А]Ахмадов Ф.М. О решении задачи типа коши для двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математика”, посвящённая 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. – Душанбе. – 2023. – С.176-178.

[20-А]Ахмадов Ф.М. Задача типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научно-практическую “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящёную 85-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессор Раджабова Н. – Душанбе. – ДМТ – 05 октября.– 2023. – С. 154-157.

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

ВБД: 517.968.220 Бо ҳуқуқи дастнавис

АҲМАДОВ ФАРВАРИДДИН МУФАЗАЛОВИЧ

ТАСВИРИ ҲАЛЛИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ВОЛТЕРРА БО ХАТҲОИ МАХСУС ВА ФАВҚУЛМАХСУСИ САРҲАДӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Душанбе – 2024

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст.

РОҲБАРИ ИЛМӢ:	**Раҷабова Лутфия Нусратовна,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:	**Сафаров Ҷумабой,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии бохтар ба номи Н. Хусрав.
	Каримова Назокат Шералиевна, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи давлатии кулоб ба номи А.Рудакӣ.
МУАССИСАИ ПЕШБАР:	Донишгоҳи славянии Русияву Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия *19-уми феврали соли 2025 соати 15:30* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз рӯйи нишонии 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 203 баргузор мегардад.

Ба диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «___» ____________ соли 2025 ирсол гардидааст.

Котиби илмии
Шӯрои диссертатсонии 6D.КОА-011,
номзади илмҳои физикаю математика **Ғафоров А.Б**

МУҚАДДИМА

Мубрамӣ ва зарурати баргузории таҳқиқ аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Дар рисолаи мазкур бори аввал як синфи муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ мавриди таҳқиқ қарор дода шудааст.

Муодилаҳои интегралӣ, аз ҷумла муодилаҳои интегралии намуди Волтерра, як соҳаи васеъ ва фаъолона инкишофёфтаи математикаи муосирро ташкил медиҳанд, ки диққати бисёре аз математикони ҷаҳониро ба худ ҷалб намудааст.

Дар математикаи муосир муодилаҳои интегралии намуди Фредголм ва Волтерра, аз ҷумла муодилахое, ки ядроҳои махсус доранд, яке аз соҳаҳои муҳимтарин ва фаъолона инкишофёбандаи тадқиқотро ташкил медиханд.

Назария муодилаҳои интегралии сингулярӣ кайҳо боз ба яке аз воситаҳои маъмули тадқиқот барои масъалаҳои гуногуни физикаи математикӣ табдил ёфтааст. Дар масъалаҳои амалии математика, механика, физика, назарияи чандирӣ, назарияи тасвирҳои конформӣ синфҳои гуногуни муодилаҳои сингулярии интегралии (якченака ва бисёрченака, хаттӣ ва ғайрихаттии) намуди Волтерра вомехӯранд.

Муодилаҳои интегралӣ аз асри XVIII сар карда, дар асарҳои илмии математикони гуногуни олам борҳо пайдо шудаанд. Дар инкишофи назарияи муодилаҳои интегралӣ саҳми назаррасро математикони барҷаста ба монанди С.Д.Пуассон, О.Л.Коши, Ҷ.Лиувилл, Б.Риман, Т.И.Стилтес, Э.Белтрами, Н.Сонин, В.Стеклов, К.Нейман, Ш.Е.Пикар, А.Пуанкаре, Г.Швартс ва дигарон гузоштаанд. Ҷаҳишҳо дар назарияи муодилаҳои интегралии хаттӣ дар охири асри XIX ва аввали асри XX дар робита бо корҳои классикии В.Волтерра[1,2,3,4,5], Э.И.Фредголм[6], Д.Гилберт[7] ва Э.Шмидт[8,9] ба амал омадаанд. Усули асосии омӯзиши муодилаҳои интегралӣ ва масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналитикӣ, ин ҳам бошанд интегралҳои намуди Кошӣ ба маънои сарқимат ба ҳисоб мераванд, ки он дар монографияҳои машҳури Н.И.Мусхелишвили[10],

---

[1]**Voltera V**. Sulla inversion degli integrali definiti // Tip. della R. Accademia dei Lincei. –1896. – Vol. 5. – PP. 177-185.

[2]**Voltera V**. Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1897. – Vol. 25. – PP. 139-178.

[3]**Voltera V**. Sopra un problema di electrostatica // Nuovo Cimento. – 1884. – Vol. 16. – PP. 49-57.

[4]**Voltera V**. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentieles // Gauthier Villars. – Paris. – 1913. – 180 p.

[5]**Voltera V**. Theory of Functional and of integral and Integro-differential Equations // Dover Publications.Ing. – New York. –1959. – 304 p.

[6]**Fredgolm I**. Sur une classe di fonctionnelles equations problema di electro statica // Acta matematica. –1903. – Vol. 27. – PP. 365-390.

[7]**Gilbert D**. Grundziige einer allgemeinen theorie der linearen integralgieichimgen // Leipzig. – Berlin. – 1912. – 320 p.

[8]**Schmidt E**. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkurlichen Funcnionen nach system vorgeschriebener // Math. Annalen – 1907. – Vol. 63. – PP. 433-476.

[9]**Schmidt E**. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. II Teil. Aufiosung der allgemeinen linearen integralgleichung // Math. Annalen – 1907. – Vol. 64. – PP. 161-174.

[10] **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения// Наука М.1968. – 511 с.

Ф.Д.Гахов[11] ва З.Пресдорф[12] иникос ёфтааст.

Таҳқиқи муодилаҳои интегралии дученака дар соҳаи охирнок, инчунин омӯзиши функсияҳои умумии аналитикӣ ва муодилаҳои интегралии дученакаи сингулярӣ бо монографияи И.Н.Векуа[13], инчунин бо корҳои А.Ҷураев[14], Г.Ҷангибеков[15] ва шогирдони онҳо алоқамандии зич дорад.

Дар корҳои Л.Г.Михайлов[16], Б.М.Билман[17], муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои якҷинсаи дараҷаи -1 омӯхта шудаанд. С.Г.Михлин[18] дар инкишофи назарияи муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои бефосила, ядроҳои махсусияти содадошта инчунин муодилаҳои интегралии бисёрченака саҳми арзанда гузоштааст.

Қайд менамоем, ки дар кори А.П.Солдатов[19] муодилаи интегралии сингулярӣ бо ядрои Кошӣ дар ҳолати истисноӣ тадқиқ карда шуда, инчунин шартҳои ҳалшавандагӣ ва формулаи тасвири ошкори ҳалли муодила ба даст оварда шудааст. Бояд қайд намуд, ки кори С.А.Довгий[20] ба асосҳои ҳисоб кардани интегралҳои муайяни сингулярӣ ва гиперсингулярии якченака ва дученака, инчунин ба ҳалли ададии ин муодилаҳо бахшида шудааст ва Н.Б.Плещинский[21] дар кори худ муодилаҳои интегралии сингулярӣ, ки ядрои онҳо махсусиятҳои намуди логарифмӣ ё дараҷагӣ доранд, инчунин, дар як вақт махсусиятҳои суст ва сахтро дар ҳолатҳои гуногун доранд, дида баромадааст. Корҳои Г.А.Расолко[22] ва И.В.Байков[23] бошанд, ба таҳқиқи намудҳои гуногуни муодилаҳои интегралии махсусияти суст ва махсусиятдошта, тасвир ва асоснок кардани роҳҳои ҳисобкунии ҳалли ин муодилаҳо бахшида шудаанд.

Қайд намудан ба маврид аст, ки кори Н.Раҷабов[24] ба омӯзиши муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо нуқтаҳои қайдкардашудаи сингулярӣ ва ё барзиёд сингулярии намуди зерин бахшида шудааст.

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K(x,t)}{|t|^\alpha}\varphi(t)dt = f(x), \text{ дар ин ҷо } \alpha \geq 1,$$

[11] **Гахова Ф. Д**. Краевые задачи // Из-во Наука М. 1963. 640 с.
[12] **Пресдорф З**. Некоторые классы сингулярных уравнений //М.: Мир, 1979. – 493 с.
[13] **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции // М. Фиматгиз. 1959. 672 с.
[14] **Джураева А. Д**. Метод сингулярных интегральных уравнений // М.: Наука, 1987. – 415 с.
[15] **Джангибеков Г.** О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. Заметки. – 1989. – Т. 46. – №46. – С.91-93.
[16] **Михайлов Л.Г**. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1// Душанбе, 1966.–49 с.
[17] **Бильман Б. М.** Об интегральных уравнениях с переменными пределами нтегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1// Душанбе 1969. – С.19-40.
[18] **Михлин С. Г**. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения //Физ-мат, 1962.-254 с.
[19] **Солдатов А.П.** Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае.//Научные ведомости БелГУ.Серия мат-физ. 2011. №17(112). С.1-7
[20] **Довгий С.А.** Методы решения интегральных уравнений.// Киев: Наукова думка, 2002. – 345 с.
[21] **Плещинский Н.Б**. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особеннотью в ядре // Казань.: Издательство КФУ, 2018. – 160 С.
[22] **Расолько Г.А.** Численое решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов.// Минск.: Изд-во БГУ, 2017, 239 с.
[23] **Байков И.В**. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. – 297 с.
[24] **Раджабов Н.** Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх–сингулярными ядрами и их приложения // Душанбе: Деваштич, 2007. – 221с.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ. Натиҷаҳои дар боло овардашуда ба синфҳои гуногуни муодилаҳои интегралии сингулярии якченака ва бисёрченака, хаттӣ ва ғайрихаттӣ, инчунин омӯзиши баъзе ҳолатҳои гуногуни муодилаҳои махсуси интегралии намуди Волтерраи навъи якум ва дуюм бахшида шудаанд. Аммо муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ хеле кам омӯхта шудаанд. Як қатор мушкилотҳои принсипиалӣ дар вақти ҳосил кардани бисёршаклии ҳалҳо ва ҳалшавандагии масъалаҳои канорӣ, дар ҳолате, ки нуқта ва ё хати махсус дар сарҳади соҳа мехобад, пайдо мешаванд. Аз ин рӯ, масъалаи омӯзиши муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ хеле муҳим аст.

Алоқамандии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии мазкур дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию таҳқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2020-2025 аз рӯи мавзӯи "Операторҳои дифференсиалӣ ва интегралии сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ" анҷом дода шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии рисолаи илмии нешниҳодгардида ин ба даст овардани бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус мебошад.

Масъалаҳои таҳқиқот:

- ҳосил намудани тасвири бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- гузоштан ва ҳал намудани масъалаҳои намуди Кошӣ барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, дар ҳолатҳое, ки ҳалли умумии муодилаи интегралӣ дорои функсияҳои ихтиёрӣ мебошанд;
- ёфтани ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ба намуди қаторҳои бефосилаи функсионалӣ ва дараҷагӣ, дар ҳолати ба ҳам вобаста набудани параметрҳо.

Объекти таҳқиқот. Объекти асосии таҳқиқот ин муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ мебошад.

Мавзӯи таҳқиқот. Таҳқиқи як синфи муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ, усули ҳосил намудани тасвирҳои интегралӣ истифода карда шудааст. Ҳангоми таҳқиқ инчунин усули ҳалли муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо нуқтаи махсус қайдкардашуда ва махсусияти барзиёддошта истифода бурда мешавад, инчунин усулҳои дар корҳои Н.Раҷабов ва Л.Н.Раҷабова коркард шудаанд, ба таври васеъ истифода шудаанд.

Навгониҳои илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатанд аз:

- тасвири бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, барои ҳамаи ҳолатҳои имконпазири решаҳои муодилаҳои характеристикӣ дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- гузоштан ва ҳал намудани масъалаҳои намуди Кошӣ барои муодилаи интегралии омӯхташаванда бо ядроҳои махсус, дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- тасвири бисёршаклаи ҳалҳои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ба намуди қаторҳои умумикардашудаи функсионалӣ ва дараҷагӣ, дар ҳолати бо ҳам вобаста набудани параметрҳо.

Нуқтаҳои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оиди ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус, дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- теоремаҳо оиди ҳалшавандагии масъалаҳои намуди Коши;
- теоремаҳо оид ба ёфтани ҳалҳои умумӣ барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, ба воситаи қаторҳои умумикардашудаи функсионалӣ ва дараҷагӣ, дар ҳолати бо ҳам вобаста набудани параметрҳо.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Тадқиқотҳои дар рисола мавҷудбуда хусусияти назариявӣ доранд. Натиҷаҳои кори диссертатсионии бадастомада метавонанд барои рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус истифода шаванд, инчунин барои ҳалли масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода шуда метавонанд.

Маводҳои ин кори диссертатсионӣ метавонанд ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрантон ва докторантони муассисаҳои таҳсилоти олӣ, ки аз рӯи ихтисоси математика таҳсил мекунанд, истифода шаванд.

Эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсионӣ. Эътимоднокии натиҷаҳои дар рисола ҳосилшуда бо ҳисобҳои асосноки назариявӣ ва исботҳои қатъии ба усулҳои муодилаҳои интегралӣ ва дифференсиалӣ такякунанда таъмин карда шудаанд.

Мувофиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ. Рисолаи диссертатсионии мазкур аз рӯи ихтисоси 01.01.02-Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро шуда, пурра бо формула (муодилаҳои дифференсиалии оддӣ) ва ба се банди соҳаи таҳқиқоти он (1. Назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 2. Масъалаҳои ибтидоӣ-канорӣ ва спектрӣ барои муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 3. Назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ-операторӣ) мувофиқ мебошад. Ҳамчунон диссертатсияро қисми таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ ҳисоб кардан мумкин аст (ихтисоси ҳамгиро 01.01.01-Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ).

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсонӣ муҳокима шудаанд дар:

- семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои ДМТ бо роҳбарии д.и.ф.м., профессор, академики АМИТ Н.Раҷабов (Душанбе, с 2020-2024);
- конференсияи Ҷумҳуриявии илмӣ-амалии «Масъалаҳои канорӣ барои баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 4-уми декабри с. 2021);
- конференсияи илмӣ-назариявии ҳайати омӯзгорону донишҷӯёни донишгоҳ «Масъалаҳои канорӣ барои якчанд синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба эълон гардидани солҳои 2022-2026 солҳои рушди саноат (ш. Душанбе, Тоҷикистон, ДБССТ, 29-30 апрели с. 2022);
- конференсияи Байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 20-21-уми октябр с. 2022);
- конференсияи Байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Шабозов Мирганд Шабозович (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 24-25 июни 2022 с.);
- конференсияи Байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он», бахшида ба 85-солагии академики АМИТ, доктори илмҳои физикаю-математика, профессор Н.Раҷабов (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 5-уми октябр с. 2023).

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои диссертатсия ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро дар корҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои кори диссертатсионӣ шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд.

Интишорот. Натиҷаҳои муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 20 корҳои илмии [1-М]-[20-М] нашр шудаанд. Аз ин шумора 6 мақола дар нашрияҳое, ки ба рӯйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон дохил шудаанд, се мақола дар нашрияҳои дигар, боқимонда дар дар маводҳои конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалӣ нашр шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, 4 боб, рӯйхати адабиётҳои истифодашуда иборат аз 144 номгӯ, иборат буда, Ҳаҷми умумии он 189 саҳифаи чопи компютериро дар бар мегирад.

МУНДАРИҶАИ МУХТАСАРИ ДИССЕРТАТСИЯ

Дар муқаддима аҳамияти мавзӯи диссертатсияи баррасишаванда асоснок карда шуда, ҳадафи тадқиқот таҳия карда шуда, шарҳи мухтасари корҳои марбут ба мавзӯи диссертатсия ва инчунин натиҷаҳои асосии тадқиқот оварда шудаанд.

Боби якум. Дар ин боб таҳлили адабиёти омӯхташуда доир ба мавзӯи кори диссертатсионӣ оварда шудааст.

Дар боби дуюм натиҷаҳои омӯзиши муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, ки параметрҳои дар муодила ҷойдошта бо баробарии муайян алоқаманданд, оварда шудаанд.

Дар **параграфи якуми боби дуюм** дар росткунҷаи $D=\{(x,y): a<x<a_1, b<y<b_1\}$ бо хатҳои сарҳадии $\Gamma_1=\{y=b, a<x<a_1\}$, $\Gamma_2=\{x=a, b<y<b_1\}$ муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хати махсус ва фавқулмахсуси сарҳадии намуди (1), дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун мебошанд, тадқиқ карда мешавад:

$$u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$
$$+\int_a^x\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y), \tag{1}$$

дар ин ҷо $p,q,\lambda,\mu,p_1,q_1,\lambda_1,\mu_1-$ададҳои доимии додашуда, $\beta>1$, $f(x,y)-$ функсияи додашуда, $u(x,y)-$ функсияи номаълум, $\omega_b^\beta(y)=[(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}]^{-1}$.

Ҳалли муодилаи интегралии (1) - ро дар синфи функсияҳои бефосилаи $u(x,y)\in C(\overline{D})$, ки дар вақти $x\to a,\ y\to b$ ба сифр майл мекунанд бо рафтори асимптотикии:

$u(x,y)=o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon>0$ ҳангоми $x\to a$,

$u(x,y)=o[(y-b)^\nu], \nu>2(\beta-1)$ ҳангоми $y\to b$,

ҷустуҷӯ мекунем.

Агар параметрҳои муодилаи интегралӣ (1) бо ҳам аз рӯи баробарии зерин алоқаманд бошанд:

$$p=p_1, q=q_1, \lambda=\lambda_1, \mu=\mu_1, \tag{2}$$

онгоҳ омӯзиши муодилаи интегралии (1) пас аз табдилдиҳӣ ба омӯзиши операторҳои интегралии намуди зерин оварда мешаванд:

$$\Pi_{\lambda,\mu}^{y}\left(T_{p,q}^{x}(u)\right)=f(x,y), \tag{3}$$

дар ин ҷо

$$T_{p,q}^{x}(u) \equiv u(x,y) + \int_{a}^{x}\left[p + q ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt = \psi(x,y), \qquad (4)$$

$$\Pi_{\lambda,\mu}^{y}(\psi) \equiv \psi(x,y) + \int_{b}^{y}\left[\lambda + \mu\left(\omega_b^{\beta}(s) - \omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds = f(x,y). \qquad (5)$$

Барои муодилаҳои интегралӣ (4) ва (5) муодилаҳои характеристикӣ чунин намудро доранд:

$$\gamma^2 + p\gamma + q = 0, \qquad (6)$$

$$\eta^2 - \lambda\eta + \mu = 0. \qquad (7)$$

Дар ҳолате, ки дар муодилаи интегралӣ (1) шартҳои $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0,\ q > 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,$ иҷро мегарданд, пас барои муодилаи (1) тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.1.1. *Агар дар муодилаи интегралии* (1) *шарти* (2), *инчунин шартҳои зерин иҷро гарданд*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ p < 0,\ q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *бо рафтори асимптотикӣ дар* Γ_1 *ва* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1$ *ҳангоми* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_1}], \nu_1 > \beta - 1$ *ҳангоми* $y \to b,$

онгоҳ муодилаи интегралии (1) *дар синфи функсияҳои* $C(\overline{D})$, *ҳангоми* $x \to a$, $y \to b$ *ҳамавақт ҳалшаванда буда, ва ҳалли ошкори он аз рӯи баробарии зерин муайян карда мешавад*:

$$u(x,y) = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + \Phi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)} + \Phi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (8)$$

дар ин ҷо

$$\Phi_i(x) = \varphi_i(x) + \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_{a}^{x}\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt,\ (i = 1,2), \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)] = {} & f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_{a}^{x}\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma 1}\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_{b}^{y}\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\left(p^2-4q\right)\left(\lambda^2-4\mu\right)}}\int_{b}^{y}\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)}\right]\frac{ds}{(s-b)^{\beta}} \times \\ & \times\int_{a}^{x}\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.\end{aligned} \qquad (10)$$

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *функсияҳои ихтиерии бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2, *ки ҳангоми* $x\to a$, $y\to b$ *ба сифр мубаддал мегарданд, ва рафтори асимптотикии онҳо аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_2}],\delta_2>\gamma_1$ *ҳангоми* $x\to a$, $(i=1,2)$,

$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_2}],\nu_2>2(\beta-1)$ *ҳангоми* $y\to b$, $(j=1,2)$,

$$\gamma_1=\frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2}>0,\ \gamma_2=\frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2}>0,\ \eta_1=\frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2}<0,\ \eta_2=\frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2}<0,\ \ (\gamma_1>\gamma_2),\ (\eta_1>\eta_2). \qquad (11)$$

Натичаи 2.1.1. *Бигузор коэффисиентҳои муодилаи интегралии* (1) *шартҳои теоремаи* 2.1.1 – *ро қаноат кунонанд, пас ҳалли муодилаи интегралии* (1) *аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_1}],x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_3}],\nu_3>2(\beta-1),y\to b.$

Ба ҳамин монанд, ҳолатҳои боқимонда низ таҳқиқ карда мешаванд, яъне $p<0,\ q>0,\ \lambda>0,\mu<0$; $p<0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu<0$; $p>0,q<0,\ \lambda<0,\mu>0$; $p<0,\ q<0,\ \lambda<0,\mu>0$; $p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\mu<0$; $p<0,\ q>0$, $\lambda>0,\mu>0$; $p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\mu>0$; $p>0,q<0,\ \lambda>0,\mu<0$; $p>0,q<0$, $\lambda<0,\mu<0$; $p<0,q<0,\ \lambda<0,\mu<0$; $p>0,q>0,\ \lambda<0,\mu<0$; $p>0,q<0$, $\lambda>0,\mu>0$; $p<0,q<0,\ \lambda>0,\mu>0$; $p>0,q>0,\ \lambda>0,\mu<0$ ва $p>0,q>0$, $\lambda>0,\mu>0$.

Параграфи дуюми боби дуюм ба омӯзиши муодилаи интегралии намуди (1) бахшида шудааст, ки дар он решаҳои муодилаҳои характеристикӣ ҳақиқӣ ва баробар мебошанд, яъне $\Delta_1=p^2-4q=0,\ p<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0,\ \lambda<0$.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.2.1. *Агар дар муодилаи интегралии* (1) *шарти* (2), *инчунин шартҳои зерин иҷро гарданд*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0$, $p<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0,\lambda<0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *бо рафтори асимптотикӣ дар* Γ_1 *ва* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_1}],\delta_1>\frac{|p|}{2}$ *ҳангоми* $x\to a$,

$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_1}],\nu_1>2(\beta-1)$ *ҳангоми* $y\to b$,

онгоҳ муодилаи интегралии (1) *дар синфи функсияҳои* $C(\overline{D})$, *ҳангоми* $x\to a$, $y\to b$ *ҳамавақт ҳалшаванда буда, ва ҳалли ошкори он аз рӯи баробарии зерин муайян карда мешавад:*

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (12)$$

дар ин ҷо

$$\Phi_i(x) = \varphi_i(x) + \frac{|p|}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt, (i = 1,2), \quad (13)$$

$$M_{p,\lambda}[f(x,y)] = f(x,y) + \frac{|p|}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt +$$

$$+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\frac{|p|}{2}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *функсияҳои ихтиерии бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2, *ки ҳангоми* $x \to a$, $y \to b$ *ба сифр мубаддал мегарданд, ва рафтори асимптотикии онҳо аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_2}], \delta_2 > \frac{|p|}{2}$ *ҳангоми* $x \to a$, $i = (1,2)$,

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_2}], \nu_2 > 2(\beta - 1)$ *ҳангоми* $y \to b$, $j = (1,2)$.

Натичаи 2.2.1. *Бигузор коэффисиентҳои муодилаи интегралии* (1) *шартҳои теоремаи* 2.2.1 – *ро қаноат кунонанд, пас ҳалли муодилаи интегралии* (1) *аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:*

$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_3}], \nu_3 > 2(\beta-1), y \to b.$

Ба ҳамин монанд, ҳолатҳои боқимонда низ таҳқиқ карда мешаванд, яъне $p < 0,\ \lambda > 0;\ p > 0,\ \lambda < 0$ ва $p > 0,\ \lambda > 0.$

Параграфи сеюми боби дуюм ба омӯзиши муодилаи интегралии дученакаи Волтерра (1) тадқиқ карда шудааст, ки дар он решаҳои муодилаҳои характеристикӣ комплексии ҳамроҳшуда мебошанд, бахшида шудааст.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.3.1. *Агар дар муодилаи интегралии* (1) *шарти* (2), *инчунин шартҳои зерин иҷро гарданд*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$, $p < 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *бо рафтори асимптотикӣ дар* Γ_1 *ва* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \frac{|p|}{2}$ *ҳангоми* $x \to a$,

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_1}],\nu_1>2(\beta-1)\ \text{ҳангоми}\quad y\to b,$$

онгоҳ муодилаи интегралии (1) *дар синфи функсияҳои* $C(\overline{D})$, *ҳангоми* $x\to a$, $y\to b$ *ҳамавақт ҳалшаванда буда, ва ҳалли ошкори он аз рӯи баробарии зерин муайян карда мешавад:*

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\}+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{14}$$

дар ин ҷо

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt, \tag{15}$$

$$E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right)=f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$
$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right)+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right)\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2\sqrt{4q-p^2}}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right)+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right)\right]\frac{ds}{(s-b)^{\beta}}\times$$
$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *функсияҳои ихтиерии бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2, *ки ҳангоми* $x\to a$, $y\to b$ *ба сифр мубаддал мегарданд, ва рафтори асимптотикии онҳо аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешаванд*:

$$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_2}],\delta_2>\frac{|p|}{2},x\to a,i=(1,2),$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_2}],\nu_2>2(\beta-1),y\to b,\ j=(1,2).$$

Натиҷаи 2.3.1. *Бигузор коэффисиентҳои муодилаи интегралии* (1) *шартҳои теоремаи* 2.3.1 – *ро қаноат кунонанд, пас ҳалли муодилаи интегралии* (1) *аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:*

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_3}],\nu_3>2(\beta-1),y\to b.$$

Ба ҳамин монанд, ҳолатҳои боқимонда низ таҳқиқ карда мешаванд, яъне $p<0,\lambda>0$; $p>0,\lambda<0$ ва $p>0,\lambda>0$.

Дар параграфҳои чорум-нуҳуми боби дуюм муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсуси (1), ки дар он решаҳои муодилаҳои характеристикии (6) ва (7) қиматҳои дигари имконпазири зеринро:

$\Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0;\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0;$

$\Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$ и $\Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0.$

қабул менамоянд, мавриди тадқиқ қарор дода шудааст.

Дар ҳолатҳои дар боло овардашуда вобаста аз аломати параметрҳо ва решаҳои характеристикии муодилаҳои (6) ва (7) тасвири бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегаралии (1) ёфта шудааст. Инчунин исбот карда шудааст, ки ҳалҳои муодилаи интегралии додашуда метавонанд аз як то чор функсияҳои ихтиёриро дар бар гиранд ва ҳолати ягона будани ҳалли муодилаи интегралӣ низ ошкор карда шудааст.

Боби сеюм ба гузоштан ва ҳалли масъалаи намуди Кошӣ барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус, дар ҳолате, ки парметрҳои муодила бо ҳам алоқамандананд, бахшида шудааст.

Дар параграфи 3.1 дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикии муодилаи интегралии омӯхташаванда ҳақиқӣ ва гуногун мебошанд, масъалаҳои намуди Кошӣ гузошта ва ҳал карда мешаванд.

Масъалаи К$_{3.1.1.}$ *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои* $p<0,\ q>0,$ $\lambda<0,\mu>0,\ \Delta_1=p^2-4q>0\ ,\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, *ҳалли мудилаи интегралии Волтерра* (1) - ро *аз синфи* $C(\overline{D})$, *ки дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба сифр мубаддал мегардад, аз рӯйи шартҳои зерин ёбед*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1} \left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y) \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2} \left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y) \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x) \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x) \end{cases}$$

дар ин ҷо $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ *– мувофиқан функсияҳои ихтиёран додашудаи бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2.

Оид ба ҳалшавандагии масъалаи $\mathrm{K}_{3.1.1}$ тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теорема 3.1.1. *Бигузор шартҳои теоремаи 2.1.1 иҷро гарданд. Он гоҳ масъалаи* ***К****$_{3.1.1}$* *ҳалшаванда буда, ҳалли ягонаи он аз рӯи баробарии зерин ёфта мешавад:*

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1} + \frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2} + e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2-\eta_1} + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2-\eta_1} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \quad (16)$$

Ба ҳамин монанд, масъалаҳои намуди Кошӣ дар дигар ҳолатҳо гузошта ва таҳқиқ карда мешаванд, яъне

$p<0,\ q>0,\ \lambda<0, \mu<0$; $p<0,\ q>0,\ \lambda>0, \mu>0$; $p>0,\ q>0,\ \lambda<0, \mu>0$;
$p<0,\ q<0,\ \lambda>0, \mu<0$; $p>0, q<0, \lambda<0, \mu<0$; $p<0, q<0, \lambda<0, \mu<0$;
$p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\ \mu<0$; $p>0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \mu>0$; $p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \mu>0$.

Дар параграфи 3.2 дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикии муодилаи интегралии омӯхташаванда ҳақиқӣ ва баробар мебошанд, масъалаҳои навбатии намуди Кошӣ гузошта ва ҳал карда мешаванд.

Масъалаи К$_{3.2.1}$. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои* $p<0, \lambda<0$, $\Delta_1 = p^2-4q=0$. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$ *ҳалли мудилаи интегралии Волтерра* (1) - ро *аз синфи* $C(\overline{D})$, *ки дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба сифр мубаддал мегардад, аз рӯйи шартҳои зерин ёбед*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(1 + \frac{|p|}{2}\ln(x-a) \right) u(x,y) - \ln(x-a) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[D_x\left(u(x,y)\right) - \frac{|p|}{2} u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y) \right) u(x,y) - \omega_b^\beta(y) D_\beta^y\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\frac{\lambda}{2} u(x,y) + D_\beta^y\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

дар ин ҷо $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *мувофиқан функсияҳои ихтиёран додашудаи бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2.

Оид ба ҳалшавандагии масъалаи $\mathbf{K}_{3.2.1}$ тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теорема 3.2.1. *Бигузор шартҳои теоремаи 2.2.1 иҷро гарданд. Он гоҳ масъалаи* $\boldsymbol{K_{3.1.1}}$ *ҳалшаванда буда, ҳалли ягонаи он аз рӯи баробарии зерин ёфта мешавад:*

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y) + \ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right] + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\mathrm{B}_1(x) + \omega_b^{\beta}(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\mathrm{B}_2(x) + M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (17)$$

Ба ҳамин монанд, масъалаҳои намуди Кошӣ дар дигар ҳолатҳо гузошта ва таҳқиқ карда мешаванд, яъне $p<0, \lambda>0$ ва $p>0, \lambda<0$.

Дар **параграфи сеюми боби сеюм** дар асоси тасвирҳои интегралии бадастомада барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ, дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикӣ комплексии ҳамроҳшуда мебошанд, масъалаҳои намуди Кошӣ гузошта ва ҳал карда мешаванд.

Дар параграфи 3.3 дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикии муодилаи интегралии омӯхташаванда комплексии ҳамроҳшуда мебошанд, масъалаҳои навбатии намуди Кошӣ гузошта ва ҳал карда мешаванд.

Масъалаи К$_{3.3.1}$. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои* $\lambda<0,\ p<0, \Delta_1 = p^2-4q<0, \Delta_2 = \lambda^2-4\mu<0$, *ҳалли мудилаи интегралии Волтерра* (1) - ро *аз синфи* $C(\overline{D})$, *ки дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба сифр мубаддал мегардад, аз рӯйи шартҳои зерин ёбед*:

$$\begin{cases}
\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y),\\
\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y),\\
\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x),\\
\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x),
\end{cases}$$

дар ин ҷо $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *мувофиқан функсияҳои ихтиёран додашудаи бефосила дар* Γ_1 *ва* Γ_2.

Оид ба ҳалшавандагии масъалаи $\mathrm{K}_{3.3.1}$ тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теорема 3.3.1. *Бигузор шартҳои теоремаи* 2.3.1 *иҷро гарданд. Он гоҳ масъалаи* $\boldsymbol{K_{3.3.1}}$ *ҳалшаванда буда, ҳалли ягонаи он аз рӯи баробарии зерин ёфта мешавад:*

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \quad (18)$$

Ба ҳамин монанд, масъалаҳои намуди Кошӣ дар дигар ҳолатҳо гузошта ва таҳқиқ карда мешаванд, яъне $p<0,\lambda>0$ ва $p>0,\lambda<0$.

Дар **параграфҳои чорум-нуҳуми боби сеюм** барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра (1) дар ҳолате, ки решаҳои муодилаҳои характеристикии (6) ва (7) қиматҳои дигари имконпазири зеринро:

$\Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0;\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0;$
$\Delta_1=p^2-4q=0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0;\ \ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$ ва $\Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0.$

қабул менамоянд, масъалаҳои намуди Коши гузошта ва ҳал карда мешаванд

Боби чорум ба таҳқиқи муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ дар ҳолате, ки параметрҳои муодила байни ҳам алоқаманд нестанд, бахшида шудааст.

Параграфи якуми боби чорум ба омӯзиши муодилаҳои интегралии дученаки намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадии намуди (1) ба намуди қатори функсионалии умумикардашуда, бахшида шудааст.

Бигузор параметрҳои муодилаи (1) шарти (19) - ро қаноат кунонанд:

$$p\neq p_1, q\neq q_1, \lambda\neq\lambda_1, \mu\neq\mu_1. \quad (19)$$

Пас ҳалли муодилаи интегралии (1) - ро дар чунин шакл ҷустуҷӯ менамоем:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},\ \tau>0. \quad (20)$$

Фарз мекунем, ки қисми рости муодилаи интегралӣ низ ба қатори намуди зерин ҷудо карда шавад:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},\ \tau>0. \quad (21)$$

Дар муодилаи интегралии дученакаи (1) ба ҷои функсияҳои $u(x,y)$, $f(x,y)$ қиматҳои онҳоро мувофиқан аз баробариҳои (20) ва (21) гузошта, пас аз табдилдиҳӣ муодилаи интегралии якченакаро ҳосил мекунем:

$$u_n(x)+\int_a^x\left[p_2+q_2 ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u_n(t)}{t-a}dt=f_n^1(x) \quad (22)$$

Ҳалли муодилаи интегралии (22) - ро дар синфи функсияҳои $u_n(x)\in\Gamma_1$, $u_n(x)=0$ ҷустуҷӯ мекунем, ки ҳангоми $x\to a$, бо рафтори асимптотикии зерин ба сифр мубаддал мегардад:

$$u_n(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ ҳангоми } x \to a.$$

Дар асоси натиҷаҳои §1 боби 1, барои муодилаи интегралӣ (22) муодилаи характеристикии он чунин намудро мегирад:

$$\gamma^2 + p_2\gamma + q_2 = 0. \tag{23}$$

Дар ҳолате, ки решаҳои муодилаи характеристикии (23) ҳақиқӣ ва гуногун мебошанд, яъне $p_2^2 - 4q_2 > 0$, $p_2 < 0$, $q_2 > 0$, функсияи $f_n^1(x) \in \Gamma_1$ дар нуқтаи $x = a$ ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:

$$f_n^1(x) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1 \text{ ҳангоми } x \to a \tag{24}$$

ва ҳалли муодилаи интегралии (34) чунин намудро мегирад:

$$u_n(x) = (x-a)^{\gamma_1} c_{n_1} + (x-a)^{\gamma_2} c_{n_2} + K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right], \tag{25}$$

дар ин ҷо

$$K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right] = f_n^1(x) + \frac{1}{\sqrt{p_2^2 - 4q_2}} \int_a^x \left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right] \frac{f_n^1(x)}{t-a} dt, \cdot$$

Пас аз гузоштани қимати $u_n(x)$ аз баробарии (25) ба (20), ҳалли муодилаи интегралии (1) чунин намудро мегирад:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)} \left\{(x-a)^{\gamma_1} c_{n_1} + (x-a)^{\gamma_2} c_{n_2} + K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right]\right\}, \tag{26}$$

дар ин ҷо c_{n_1}, c_{n_2} – доимиҳои ихтиерӣ мебошанд.

Тасдиқоти зерини навбатӣ ҷой дорад:

Теоремаи 4.1.1. *Агар дар муодилаи интегралӣ* (1) *шартҳои зерин иҷро гарданд*:

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\mu_2 > 0$ *;*
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *дар намуди қатори мунтазам наздикшавандаи* (21) *ифода карда шавад;*
3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *бо рафтори асимптотикии* (24) *дар* Γ_1.

Он гоҳ муодилаи интегралии дученакаи (1) *дар синфи функсияҳое, ки ба намуди* (20) *ифода карда шудаанд, ҳалҳои беохири хаттӣ-новобастаи намуди зеринро доро мегардад:*

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{\gamma_1} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}, \; u_n^2(x,y) = (x-a)^{\gamma_2} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}, \quad n = 0,1,2,3,...,$$

параметрҳои p_2, q_2, γ_1, γ_2 *бошанд, чунин муайян карда мешаванд*:

$$p_2 = \frac{p(n+\tau)^2 + p_1\lambda_1(n+\tau) + p_1\mu_1}{(n+\tau)^2 + \lambda(n+\tau) + \mu}, \; q_2 = \frac{q(n+\tau)^2 + q_1\lambda_1(n+\tau) + q_1\mu_1}{(n+\tau)^2 + \lambda(n+\tau) + \mu}, \quad f_n^1(x) = \frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2 + \lambda(n+\tau) + \mu} f_n(x),$$

$$\gamma_1 = \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} > 0, \; \gamma_2 = \frac{-p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} > 0, \; (\gamma_1 - \gamma_2 > 0).$$

Муодилаи интегралии ғайриякҷинсаи намуди (1) *дар синфи функсияҳои ба намуди* (20) *тасвиршаванда ҳамеша ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он аз рӯи баробарии* (26) *ёфта мешавад, ки дар ин ҷо* c_{n_1}, c_{n_2} *– доимиҳои ихтиёрӣ буда, шартҳои*

$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_1+1}|}{|c_{n_1}|}=c_1$, $e^{-\omega_b^{\beta}(b)}c_1<1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_2+1}|}{|c_{n_2}|}=c_2$, $e^{-\omega_b^{\beta}(b)}c_2<1$ - *ро қаноат менамоянд.*

Натиҷаи 4.1.1. *Бигузор коэффисиентҳои муодилаи интегралии* (1) *шартҳои теоремаи* 4.1.1 – *ро қаноат кунонанд, пас ҳалли муодилаи интегралии* (1) *аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:*

$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_2}],\delta_2>\gamma_2,x\to a,$

$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$

Ба ҳамин монанд, ҳолатҳои боқимонда низ таҳқиқ карда мешаванд, яъне
$p_2^2-4q_2>0,p_2>0,q_2<0;$ $p_2^2-4q_2>0,p_2<0,q_2<0;$ $p_2^2-4q_2>0,p_2>0,q_2>0;$
$p_2^2-4q_2=0,p_2<0;$ $p_2^2-4q_2=0,p_2>0;$ $p_2^2-4q_2<0,p_2<0$ ва $p_2^2-4q_2<0,p_2>0.$

Параграфи дуюми боби чорум ба ҳосил намудани бисёршаклаи ҳалҳои муодилаи интегралии дученаки намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадии намуди (1) ба намуди қатори дараҷагии умумикардашуда бахшида шудааст.

Акнун ҳалли муодилаи интегралии дученаки намуди (1) - ро ҳангоми $p\neq p_1,q\neq q_1,\lambda\neq\lambda_1,\mu\neq\mu_1$ будан дар шакли:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)(x-a)^{n+\tau},\ \tau>0, \tag{27}$$

ҷустуҷӯ мекунем.

Ҳамчунон фарз мекунем, ки қисми рости муодилаи интегралӣ низ ба қатори намуди зерин ҷудо карда шавад:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(y)(x-a)^{n+\tau},\ \tau>0. \tag{28}$$

Дар муодилаи интегралии дученакаи (1) ба ҷои функсияҳои $u(x,y)$, $f(x,y)$ қиматҳои онҳоро мувофиқан аз баробариҳои (27) ва (28) гузошта, пас аз табдилдиҳӣ дар $\Gamma_2=\{x=a,b<y<b_1\}$ муодилаи интегралии якченакаи зеринро ҳосил мекунем:

$$u_n(y)+\int_b^y\left[\lambda_2+\mu_2\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{u_n(s)}{(s-b)^{\beta}}ds=f_n^2(y) \tag{29}$$

Ҳалли муодилаи интегралии (29) - ро дар синфи функсияҳои $u_n(y)\in\Gamma_2$, $u_n(y)=0$ ҷустуҷӯ мекунем, ки ҳангоми $y\to b,$ бо рафтори асимптотикии зерин ба сифр мубаддал мегардад:

$$u_n(y)=o[(y-b)^{\nu}],\nu>2(\beta-1),\ \text{ҳангоми}\ \ y\to b.$$

Дар асоси натиҷаҳои §1 боби 1, барои муодилаи интегралӣ (29) муодилаи характеристикии он чунин намудро мегирад:

$$\eta^2-\lambda_2\eta+\mu_2=0. \tag{30}$$

Дар ҳолате, ки решаҳои муодилаи характеристикии (30) ҳақиқӣ ва гуногун мебошанд, яъне $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\mu_2 > 0$, функсияи $f_n^2(y) \in \Gamma_2$ дар нуқтаи $y = b$ ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:

$$f_n^1(y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_1}], \nu_1 > \beta - 1 \quad \text{ҳангоми} \quad y \to b \tag{31}$$

ва ҳалли муодилаи интегралии (29) чунин намудро мегирад:

$$u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\tau} \left\{ c_{n_3} e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} + c_{n_4} e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)] \right\} \tag{32}$$

дар ин ҷо

$$M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)] = f_n^2(y) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}} \int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)} \right] \frac{f_n^2(s)}{(s-b)^\beta} ds, \cdot$$

Пас аз гузоштани қимати $u_n(x)$ аз баробарии (32) ба (27), ҳалли муодилаи интегралии (1) чунин намудро мегирад:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\varepsilon} \left\{ c_{n_3} e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} + c_{n_4} e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)] \right\}, \tag{33}$$

дар ин ҷо c_{n_3}, c_{n_4} – доимиҳои ихтиерӣ мебошанд.

Тасдиқоти зерин навбатӣ ҷой дорад:

Теоремаи 4.2.1. *Агар дар муодилаи интегралӣ* (1) *шартҳои зерин иҷро гарданд:*

1. $p_2^2 - 4q_2 > 0$, $p_2 < 0$, $q_2 > 0$;
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *дар намуди қатори мунтазам наздикшавандаи* (28) *ифода карда шавад;*
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *бо рафтори асимптотикии* (31) *дар* Γ_2.

Он гоҳ муодилаи интегралии дученакаи (1) *дар синфи функсияҳое, ки ба намуди* (27) *ифода карда шудаанд, ҳаллҳои беохири хаттӣ-новобастаи намуди зеринро доро мегардад:*

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)}, \quad u_n^2(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots,$$

параметрҳои λ_2, μ_2, η_1, η_2 *бошанд, чунин муайян карда мешаванд:*

$$\lambda_2 = \frac{\lambda(n+\tau)^2 + \lambda_1 p_1(n+\tau) + \lambda_1 q_1}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q}, \quad \mu_2 = \frac{\mu(n+\tau)^2 + \mu_1 p_1(n+\tau) + \mu_1 q_1}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q}, \quad f_n^1(y) = \frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2 + p(n+\tau) + q} f_n(y),$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} < 0, \quad \eta_2 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} < 0, \quad (\eta_1 - \eta_2 > 0).$$

Муодилаи интегралии ғайриякҷинсаи намуди (1) *дар синфи функсияҳои ба намуди* (27) *тасвиршаванда ҳамеша ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он аз рӯи баробарии* (33) *ёфта мешавад, ки дар ин ҷо* c_{n_3}, c_{n_4} *– доимиҳои ихтиёрӣ буда, шартҳои*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_3+1}|}{|c_{n_3}|} = c_9, (a_0 - a)c_9 < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_4+1}|}{|c_{n_4}|} = c_{10}, (a_0 - a)c_{10} < 1$$ *- ро қаноат мекунонанд.*

Натиҷаи 4.2.1. *Бигузор коэффисиентҳои муодилаи интегралии* (1) *шартҳои теоремаи* 4.2.1 – *ро қаноат кунонанд, пас ҳалли муодилаи интегралии* (1) *аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба сифр мубаддал мегардад, бо рафтори асимптотикии зерин:*

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\tau}],\tau>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_1}],\nu_1>2(\beta-1),y\to b.$$

Ба ҳамин монанд, ҳолатҳои боқимонда низ таҳқиқ карда мешаванд, яъне

$\lambda_2^2-4\mu_2>0$, $\lambda_2>0$, $\mu_2<0$; $\lambda_2^2-4\mu_2>0$, $\lambda_2<0$, $\mu_2<0$; $\lambda_2^2-4\mu_2>0$, $\lambda_2>0$, $\mu_2>0$; $\lambda_2^2-4\mu_2=0$, $\lambda_2<0$; $\lambda_2^2-4\mu_2=0$, $\lambda_2>0$; $\lambda_2^2-4\mu_2<0$, $\lambda_2<0$ ва $\lambda_2^2-4\mu_2<0$, $\lambda_2>0$.

ХУЛОСА

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсия иборатанд:

- аз ёфтани ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус, барои ҳамаи ҳолатҳои имконпазири решаҳои муодилаҳои характеристикӣ дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо [1-М]-[4-М], [7-М], [9-М]-[15-М];
- аз гузоштан ва ҳал намудани масъалаҳои намуди Кошӣ барои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус, барои ҳамаи ҳолатҳои имконпазири решаҳои муодилаҳои характеристикӣ, дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо [6-М], [8-М], [19-М], [20-М];
- аз ёфтани бисёршаклаи ҳалҳои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус ба намуди қаторҳои умумикардашудаи функсионалӣ ва дараҷагӣ, дар ҳолати бо ҳам вобаста набудани параметрҳо [5-М], [16-М], [17-М], [18-М].

ТАВСИЯҲО ОИД БА ИСТИФОДАИ АМАЛИИ НАТИҶАҲО

Тадқиқотҳои дар рисола мавҷудбуда хусусияти назариявӣ доранд. Натиҷаҳои кори диссертатсионии бадастомада метавонанд барои рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус истифода шаванд, инчунин барои ҳалли масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода шуда метавонанд.

Маводҳои ин кори диссертатсиониро метавон ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрҳо ва докторантҳои донишгоҳҳои олӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, истифода бурд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М. Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С.78-89.

[2-М] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т. 64. – №5-6. – С. 283-290.

[3-М] Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №4. – С.119-128.

[4-М] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.314-324.

[5-М] Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Известия НАН Таджикистана. – 2023. – №2(191). – С.18-26.

[6-М] Ахмадов Ф.М. Задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями [Текст]/ Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т. 66. – №3-4. – С.178186.

2. Мақолаҳои интишорёфта дар дигар маҷҷаллаву маҷмӯаҳои илмӣ:

[7-М] Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Bulletin of L.N Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2021. – Vol. 137. – №4. – P. 6-13.

[8-М] Akhmadov F.M. Solution of a Cauchy type problem for an integral equation of Volterra type with singular kernels, when the roots of the characteristic equations are complex conjugate [Text] / L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov// Bulletin of L.N Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2024. – Vol. 146. – No1. – PP. 27-35.

[9-М] Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов, // Материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и физики”.– Стерлитамак. – 2021. – Т.1. – С.91- 96.

3. Маводҳои конференсия ва фишурдаи маърӯзаҳо:

[10-М]Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”. – Душанбе. – 2021. – С.29-32.

[11-М]Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”. – Душанбе. – 2021. – С.194-198.

[12-М]Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равны [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества”. – Хуҷанд. – 2021. – С.148-150.

[13-М]Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы республиканской научно-практической конференции “Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений”. – Душанбе. – 2021. – С.9-11.

[14-М]Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы теории чисел и математического анализа”, посвящённая восьмидесятилетиию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Исмоилова Додожона. – Душанбе. – 2022. – С.40-43.

[15-М]Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы научно-теретической конференции преподователей и студентов университета на тему “Основные направления обеспечения ускоренной индустриализации экономики в контексте стратегических целей Республики таджикистан”, “Посвящённой обявлению 2022-2026 годов годами развития промышленности”.– Душанбе. ДБССТ. – (29-30-уми апрели с 2022) . – С.521-523.

[16-М]Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математического анализа и теории функции”, посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мирганда Шабозовича. – Душанбе. – 2022. – С.309-311.

[17-М]Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международной научно-практической конференции, “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020 – 2040 годы.– Душанбе. – ДМТ – 20-21 октября. – 2022. – С.176-179.

[18-М]Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научную конференцию, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённую двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере образования и науки (2020 – 2040).– Бохтар. – 19 ноября. – 2022. – С.156-159.

[19-М]Ахмадов Ф.М. О решении задачи типа коши для двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математика”, посвящённая 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. – Душанбе. – 2023. – С.176-178.

[20-М]Ахмадов Ф.М. Задача типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научно-практическую “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящёную 85-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессор Раджабова Н. – Душанбе. – ДМТ – 05 октября.– 2023. – С. 154-157.

АННОТАЦИЯ

диссертации Ахмадова Фарвариддина Муфазаловича на тему «Построение решений одного класса интегральных уравнений Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, характеристическое уравнение, особой, сильно-особой, задачи типа Коши, вещественные и разные, вещественные и равные, комплексно-сопряженные, вещественные-разные и равные, вещественные-разные и комплексно-сопряженные, вещественные-равные и разные, вещественные-равные и комплексно-сопряженные, комплексно-сопряженные и вещественные-разные, комплексно-сопряженные и вещественные-равные.

Цель исследования. В предлагаемой диссертационной работе основной целью является получение явных многообразий решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, метод получения интегральных представлений. В работе также используется метод решения интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированной сингулярной и сверх-сингулярной точкой, также широко используются методы, разработанные в работах Н.Раджабова и Л.Н.Раджабовой.

Научная новизна. Результаты диссертационной работы полученны автором самостоятельно, являются новыми результатами и включают в себя:

- явные представления многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда корни характеристических уравнений принимают всевозможные значения и коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- постановка и решение задач типа Коши изучаемого интегрального уравнения в случае, когда коэффициенты связаны определенными равенствами;
- многообразие решений в виде обобщенного степенного и функционального рядов двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, изложенные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также использоваться при решении различных прикладных задач. Материалы данной диссертационной работы могут быть применены при изложении специальных курсов для студентов, магистров и докторантов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Аҳмадов Фарвариддин Муфазалович дар мавзуи « Тасвири ҳалли як синфи муодилаҳои интегралии Волтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ » барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Калидвожаҳо: муодилаи интегралии дученака, муодилаи характеристикӣ, махсусият, фавқулмахсусият, масъалаҳои намуди Кошӣ, ҳақиқӣ ва гуногун, ҳақиқӣ ва баробар, комплексии ҳамроҳшуда, ҳақиқӣ-гуногун ва баробар, ҳақиқӣ-гуногун ва комплексии ҳамроҳшуда, ҳақиқӣ-баробар ва гуногун, ҳақиқӣ-баробар ва комплексии ҳамроҳшуда, комплексии ҳамроҳшуда ва ҳақиқӣ-гуногун, комплексии ҳамроҳшуда ва ҳақиқӣ-баробар.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии рисолаи илмии нешниҳодгардида ин ба даст овардани бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус мебошад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ, усули ҳосил намудани тасвирҳои интегралӣ истифода карда шудааст. Ҳангоми таҳқиқ инчунин усули ҳалли муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо нуқтаи махсус қайдкардашуда ва махсусияти барзиёддошта истифода бурда мешавад, инчунин усулҳои дар корҳои Н.Раҷабов ва Л.Н.Раҷабова коркард шудаанд, ба таври васеъ истифода шудаанд.

Навгониҳои илмӣ. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатанд аз:

- тасвири бисёршаклаи ҳалҳои ошкори муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус, барои ҳамаи ҳолатҳои имконпазири решаҳои муодилаҳои характеристикӣ дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- гузоштан ва ҳал намудани масъалаҳои намуди Кошӣ барои муодилаи интегралии омӯхташаванда бо ядроҳои махсус, дар ҳолати ба ҳам вобаста будани параметрҳо;
- тасвири бисёршаклаи ҳалҳои муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ба намуди қаторҳои умумикардашудаи функсионалӣ ва дараҷагӣ, дар ҳолати бо ҳам вобаста набудани параметрҳо.

Аҳамияти назариявӣ ва амалӣ. Тадқиқотҳои дар рисола мавҷудбуда хусусияти назариявӣ доранд. Натиҷаҳои кори диссертатсионии бадастомада метавонанд барои рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ва фавқулмахсус истифода шаванд, инчунин барои ҳалли масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода шуда метавонанд. Маводҳои ин кори диссертатсиониро метавон ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрҳо ва докторантҳои донишгоҳҳои олӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, истифода бурд.

ANNOTATION

Akhmadov Farvariddin Mufazalovich's dissertation on "Construction of solutions of one class of Volterra integral equations with boundary special and strongly special lines", submitted for the degree of candidate of Physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.02 – Differential equations, dynamic systems and optimal control

Keywords: two-dimensional integral equation, characteristic equation, special, strongly special, Porridge type problems, real and different, real and equal, complex-conjugate, real-different and equal, real-different and complex-conjugate, real-equal and different, real-equal and complex-conjugate, complex-conjugate and the real ones are different, the complex conjugate and the real ones are equal.

Purpose of the study. In the proposed dissertation work, the main goal is to obtain explicit varieties of solutions to a two-dimensional integral equation of Volterra type with special kernels.

Research methods. The paper uses general methods of the theory of differential and integral equations, a method for obtaining integral representations. The work also uses a method for solving Volterra-type integral equations with a fixed singular and super-singular point, and methods developed in the works of N.Radjabov and L.N.Radjabova are also widely used.

Scientific novelty. The results of the dissertation work were obtained by the author independently, are new results and include:

- explicit representations of the variety of solutions to a two-dimensional integral equation of Volterra type with special kernels, when the roots of the characteristic equations take all possible values and the coefficients of the equation are related by certain equalities;
- formulation and solution of Cauchy type problems of the studied integral equation in the case when the coefficients are related by certain equalities;
- a variety of solutions in the form of a generalized power and functional series of a two-dimensional integral equation of Volterra type with special kernels, when the coefficients of the equation are not related by certain equalities.

Theoretical and practical value. The research presented in the dissertation is theoretical in nature. The obtained results of the dissertation work can be used for further development of the theory of multidimensional integral equations of Volterra type with singular and supersingular kernels, and can also be used in solving various applied problems. The materials of this dissertation work can be used in the presentation of special courses for students, masters and doctoral students of universities studying in the specialty “Mathematics”.