На правах рукописи

Давлатбеков Фирдавс Давлатбекович

НАИЛУЧШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе – 2019

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научные руководители:	**Шабозов Мирганд Шабозович,** академик Академии наук Республики Таджикистан, профессор, доктор физико-математических наук;
	Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Сафаров Джумабой Сафарович** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава;
	Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Технологический университет Таджикистана
Оппонирующая организация:	Таджикский педогагический университет им. С.Айни

Защита состоится *12 июня 2019 г. в 10:00 часов* на заседании диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенном по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «____» ____________ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Г. Джангибеков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время вопросам наилучшего полиномиального приближения и вычисления точных значений различных поперечников классов аналитических в круге функций посвящено достаточно много работ, где уже получен целый ряд окончательных результатов.

Первый точный результат по решению экстремальной задачей о нахождении величины наилучшего полиномиального приближения аналитических функций в круге $|z| \leq 1$ с ограниченной в чебышёвской норме r-ой производной найдена К.И.Бабенко[1]. Затем в 1967 г. для дробных производных этот результат был обобщён J.T.Scheick[2] и независимо от него В.И.Белым[3].

В дальнейшем вопросами наилучшего полиномиального приближения и нахождения наилучших линейных методов приближения аналитических для некоторых классов функций с ограниченным по норме пространством $H_q,\ q \geq 1$ старшей производной и производной дробного порядка, в основном занимались В.М.Тихомиров[4], Л.В.Тайков[5–8] и М.З.Двейрин[9–11].

Затем в восьмидесятых годах указанная задача изучалась в серии работ S.D.Fisher[12], S.D.Fisher and C.A.Micchelli[13], М.З.Двейрина и И.В.Чеба-

[1]Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.

[2]Scheick J. T. Polinomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 6. P. 1238–1243.

[3]Белый В. И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал. 1967. Т. 19, № 2. С. 104–108.

[4]Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № 3(93). С. 81–120.

[5]Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, № 4(112). С. 183–189.

[6]Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций //Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.

[7]Тайков Л. В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. Т. 2, № 1. С. 77–85.

[8]Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.

[9]Двейрин М. З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. 1975. № 6. С. 41–54.

[10]Двейрин М. З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. № 23. С. 32–46.

[11]Двейрин М. З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. 1977. С. 129–132.

[12]Fisher S. D. Quantitative approximation theory // Amer. Math. Monthly. 1978. Vol. 85. P. 318–332.

[13]Fisher S. D., Micchelli C. A. The n-widths of sets analytic function // Duke Math. J. 1980. Vol. 47, no. 4. P. 789–801.

ненко[14], A.Pinkus[15], Л.В.Тайкова и Н.Айнуллоева[16], Н.Айнуллоева[17], С.Б.Вакарчука[18–20] для классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости r-ой производной и вычислены также точные значения колмогоровских n-поперечников.

В опубликованных работах М.Ш.Шабозова с соавторами[21–26] решены задачи наилучшего полиномиального приближения для классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ых производных, принадлежащих пространству H_2, а также найдены точные значения различных n-поперечников для указанных классов функций.

С.Б.Вакарчук[27–31] указал явный вид наилучших линейных методов прибли-

---

[14] Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. 1983. С. 62–73.

[15] Pinkus A. n-widths in approximation theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. P. 252.

[16] Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.

[17] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функции в единичном круге // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов. Калининский госуниверситет. 1986. С. 91–101.

[18] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди h_2 // Укр. мат. журнал. 1989. Т. 41, № 26. С. 799–802.

[19] Вакарчук С. Б. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 6. С. 838–843.

[20] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 7. С. 873–881.

[21] Шабозов М. Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // ДАН РТ. 1998. Т. 41, № 9. С. 48–53.

[22] Шабозов М. Ш. Значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Вестник Хорогского госуниверситета. 1999. Т. 1, № 1. С. 35–44.

[23] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.

[24] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.

[25] Шабозов М. Ш., Пиров Х. Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_p^r, $1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. 2003. Т. 394, № 4. С. 399–401.

[26] Шабозов М. Ш., Умеди Г. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве Харди $H_p, 1 \leq p \leq 2$ // ДАН России. 2005. Т. 403, № 5. С. 610–613.

[27] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.

[28] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.

[29] Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.

[30] Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журнал. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.

[31] Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.

жения, реализующих точные значения линейных поперечников для классов функций, рассмотренных Л.В.Тайковым. В совместной работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[32] указаны наилучшие линейные методы и оптимальные подпространства, реализующие точные значения поперечников для классов аналитических функций в круге $R \geq 1$, определяемые модулями гладкости в $H_{q,R}$ $(1 \leq q \leq \infty)$, и в весовых пространствах Бергмана.

В данной диссертационной работе найдены наилучшие линейные методы приближения для других классов функции в более общем пространстве $H_{q,\,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty,\ 0 \leq \rho < 1)$ и с помощи этих методов вычесляются точные значения n-поперечников.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является получение новых результатов, связанных с отысканием наилучших линейных методов приближения классов аналитических в круге функций. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- найти наилучшие линейные методы приближения классов функций типа Л.В.Тайкова[8] и для класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ вычислить точные значения ряда n-поперечников;
- построить наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций в метрике пространства Харди, усреднённый модуль непрерывности граничных значений r-ых производных которых мажорируется заданной функцией и также вычислить точные значения различных n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$;
- найти наилучшие линейные методы приближения аналитических функций для классов $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ и $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, изучавшихся Н.Айнуллоевым[17], и вычислить точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Методы исследования. В работе используются современные методы исследования экстремальных задач вариационного содержания и функционального анализа. При оценке снизу n-поперечников используется известный метод В.М.Тихомирова[33].

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- построены наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями

[32] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.

[33] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М. : МГУ, 1976. 325 с.

непрерывности, и вычислены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций;

- найдены наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Они и метод их доказательства могут быть использованы при вычислении n-поперечников классов функций в других банаховых пространствах аналитических функций, таких как весовые пространства Бергмана, Шильдса, Дюрена и Гварадзе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функций в ХоГУ (Хорог, 2013-2014 г.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений в ТНУ (Душанбе, 2014-2018 г.);
- семинарах отдела теории функций Института математики АН Республики Таджикистан под руководством академика АН Республики Таджикистан, профессор М.Ш.Шабозова (Душанбе 2014-2018 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Т.С.Собирова (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвящённой 90-летию доктора физико-математических наук, академика Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах и списка ВАК при президента РТ [1–4], 3 статьи в сборниках трудов конференций и тезисов докладов [**? ? ?**] [5–7].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с М.Ш.Шабозовым [1, 2, 4], причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 84 страницы, из них 78 страницы текста, и включая формулы, набранного на LaTeX. Библиография включает 45 наименований на 5 страницах.

Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем, лемм, формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации, состоящая из терёх параграфов, посвящена нахождению точных значений наилучших приближений аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$. В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего определения и обозначения, а в остальных двух параграфах излагаются результаты автора.

Приведем содержание этой главы.

Обозначим через $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ — множество вещественных, положительных, целых, натуральных, целых неотрицательных, комплексных чисел вида $a = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Говорят, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 < \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

подпространством алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n-1$:

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_{n-1}| \neq 0 \right\}$$

принадлежит пространству Харди $H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, если

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} \{M_q(\rho, f)\} := \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q} :=$$

$$:= \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^q dt \right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$F(t) := f(e^{it}) = \lim_{\rho \to 1-0} f(\rho e^{it})$$

— угловое граничное значение $f(z)$[34].

При $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функции $f \in \mathcal{A}(U)$ в замкнутом круге $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, которые непрерывны вплоть до границы с нормой

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\{|f(z)| : |z| \le 1\} = \max\left\{|f(e^{it})| : 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

Через $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим r-ю производную функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, то есть положим

$$f_a'(z) := \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z) z i,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}_a',\ r \ge 2, r \in \mathbb{N},$$

а через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ обозначим обычную r-ю производную функции $f(z)$.

Символом $F_a^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F_a^{(0)}(t) \equiv F(t))$ будем обозначать граничные значения аналитической функции $\partial^r f/\partial t^r \stackrel{def}{=} \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ r \in \mathbb{Z}_+$, а символом $F^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F^{(0)}(t) \equiv F(t))$ — граничные значения аналитической функции $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$.

Через H_q^r $(r \in \mathbb{Z}_+,\ H_q^0 = H_q), 1 \le q \le \infty$ обозначим множество аналитических в круге $|z| \le 1$ функции $f(z) \in H_q,\ q \ge 1$, у которых $f^{(r)}(z) \in H_q$, т.е.

$$H_q^r = \left\{ f(z) \in H_q : \ \left\| f^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\},\ 1 \le q \le \infty.$$

Аналогично полагаем:

$$H_{q,a}^r = \left\{ f(z) \in H_q : \ \left\| f_a^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\},\ 1 \le q \le \infty.$$

Во втором параграфе найден наилучший линейный метод приближения классов функций типа Л.В.Тайкова[8] и вычислены точные значения ряда n-поперечников для указанного класса.

[34]Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. : Гостехиздат, 1950. 350 с.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя функцию $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующий класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega) = \left\{ f \in H_q^{(r)}: \ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f^{(r)}; 2t)_q \, dt \leq \Phi(h) \right\}.$$

Пусть X — банахово пространство; S — единичный шар в нём; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X; $L_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство; $L^n \subset X$ — линейное подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}(X, L_n) := \{\Lambda : X \to L_n\}$ — множество линейных непрерывных операторов $\{\Lambda\}$, отображающих пространство X в L_n.

Равенствам

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\Big\{ \inf\big\{ \|f - \varphi\|_X : \ \varphi \in L_n \big\} : f \in \mathfrak{M} \Big\}$$

соответственно обозначим наилучшее приближение элемента $f \in X$ и фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством $L_n \subset X$.

Величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \inf\Big\{ \sup\big\{ ||f - \Lambda(f, L_n)||_X : f \in \mathfrak{M} \big\} : \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n) \Big\}$$

характеризует наилучшее линейное приближение $\mathfrak{M} \subset X$ элементами L_n.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\Big\{ \sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X \Big\}, \tag{1}$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \Big\}, \tag{2}$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{ \sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X \Big\}, \tag{3}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{ \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X : \ \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n)\} : L_n \subset X \Big\} \tag{4}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным n-поперечниками. Перечисленные аппроксимативные характеристики монотонны по n и между ними имеют место неравенства[15,33]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \leq \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{matrix} \leq \delta_n(\mathfrak{M}; X). \tag{5}$$

Из результата работы Л.В.Тайкова[8] следует, что если для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 1$, функция $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_* \, dt, \tag{6}$$

где

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t, \text{ если } \ 0 < t \leq \pi/2; \ \ 1, \text{ если } \ t \geq \pi/2\Big\},$$

то имеют место равенства

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\right) = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{7}$$

Через $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \leq 1, \ H_{q,1} \equiv H_q)$ обозначим банаховое пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ в круге $|z| < \rho$, для которых имеет место неравенство

$$\|f(\cdot)\|_{q,\rho} := \|f(\cdot)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho\cdot)\|_q < \infty.$$

Отметим, что на основе соображений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука[27], результат (7) распространяется на пространство $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty,$ $0 < \rho \leq 1)$ и мы получим

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{8}$$

Наша цель состоит в распространении результата (8) для линейных и гельфандовских n-поперечников. Для этого построим наилучшие линейные методы для изучаемого нами класса функций $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$.

С этой целью для произвольной функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k \in \mathcal{A}(U)$, следуя работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[32], запишем линейный полиномиальный оператор:

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}\rho^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \tag{9}$$

где $n > r$ и числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r} = (n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \cos(k-r)t\cos(n-r)tdt, \ k \geq r, \ k \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.2.1. *Пусть f — произвольная аналитическая функция из класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, $1\le q\le\infty$, n,r — любые натуральные числа, $n>r$ и $0<\rho\le 1$. Тогда*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\,\rho}}\le\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\;\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{10}$$

Если мажорирующая функция $\Phi(h)$ при любом $h\in(0,\pi/2]$ удовлетворяет условию (6), то неравенство (10) является точным в том смысле, что существует функция $f_1\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\le q\le\infty)$, для которой неравенство (10) обращается в равенство.

С помощью результата теоремы 1.2.1, сформулируем основной результат второго параграфа в виде следующего утверждения.

Теорема 1.2.2. *Пусть мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h\in(0,\pi/2]$ удовлетворяет условию (6) и пусть $\pi_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$. Тогда для всех $n,r\in\mathbb{N},\ n>r$ справедливы равенство*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\,\rho}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\,\rho}}=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);\Lambda_{n-1,r-1,\rho}\right)_{H_{q,\,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{11}$$

В третьем параграфе построены наилучшие линейные методы приближения классов функций, принадлежащих пространству H_q, $1\le q\le\infty$, усреднённые модули непрерывности граничных значений производных $f^{(r)}(z), r\in\mathbb{N}$ которых мажорируются функцией Φ. Также вычислены точные значения различных n-поперечников исследуемого класса функций.

Пусть $\Phi(x)$ $(x\ge 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0)=0$. Используя $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, рассмотрим следующую класс функций:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)=\left\{f\in H_q^{(r)}:\frac{1}{h}\int_0^h\omega(f^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt\le\Phi(h)\right\},$$

где $h\in(0,\pi/2],\ r\in\mathbb{N},\ 1\le q\le\infty$ и $\mu\ge 1$ — произвольное фиксированное число.

Из основного результата работы Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова[16] после некоторых простых вычислений следует, что для произвольной функции $f\in H_q^{(r)}$, при любом $\mu\ge 1$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \Big\{1 + (\mu^2 - 1) sin\mu(n-r)t\Big\} dt. \qquad (12)$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, из неравенства (12), получаем

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)}, 2t)_q \Big\{1 + (\mu^2 - 1) sin\mu(n-r)t\Big\} dt \right) \le$$

$$\le \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),\ 1 \le \mu < \infty,\ n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \le q \le \infty,$$

откуда следует оценка сверху

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_q = \sup\left\{E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} \le$$

$$\le \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (13)$$

Неравенством (13) пользуемся при оценке сверху n-поперечников.

Теорема 1.3.1. *Если при заданном $\mu \ge 1$ и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $h \in (0, \pi/2]$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2\mu(n-r))} \ge \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin(n-r)ht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) sin\frac{\pi t}{2}\right]\ dt, \qquad (14)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (15)$$

где $b_n(\cdot)$ — n-поперечник Бернштейна, $d_n(\cdot)$ — n-поперечник Колмогорова,

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{H_q} : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}$$

и $\alpha_{n,r} := n(n-1)...(n-r+1)$, $n \ge r$. Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (14), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, мажоранта $\Phi_*(u) = u^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int\limits_0^1 t\cos\frac{\pi t}{2\mu} \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]\ dt$$

и, в частности,

$$\alpha(1)=\frac{\pi}{2}-1, \lim_{\mu\to\infty}\alpha(\mu)=1,$$

причём для всех $\mu\in[1,\infty)$ выполняется неравенство $(\pi/2)-1\le\alpha(\mu)\le 1$.

Используя неравенство[33]

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}}\le\rho^n E_{n-1}(f)_{H_q},\ 1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1 \tag{16}$$

и определение бернштейновского n-поперечника, распространяем результат (15) теоремы 1.3.1 на пространство $H_{q,\rho}$ $(0<\rho\le 1, 1\le q\le\infty)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$ и мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию (14) при любом $h\in(0,\pi/2]$. Тогда при всех $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$ и $\mu\ge 1$ имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=$$
$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{17}$$

Имеет место следующее более общее утверждение.

Теорема 1.3.3. *Если при заданном $\mu\ge 1$, любых $n\in\mathbb{N}$, $0<h\le\pi/2$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет ограничения (14), то и для всех $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, $0<\rho\le 1$, $1\le q\le\infty$ справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=E\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu):\Lambda_{n-1,r-1,\rho}:\mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}}:=$$
$$=\sup\left\{\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}}:f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}=$$
$$=\frac{\pi\rho^n}{4\mu(n-r)}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{18}$$

Здесь $\pi_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot),d_n(\cdot),d^n(\cdot),\delta_n(\cdot)$, линейный полиномиальный оператор $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ определяется равенством

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f,z):=\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+$$
$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \tag{19}$$

где $n>r$ и $\gamma_{k,r}:=(n-r)\mu\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\cos kt\ \cos(n-r)\mu t dt.$

При этом: а) линейный полиномиальный непрерывный оператор (19) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,0<\rho\le 1)$;

б) $L^*_{n+1} := span\{1, z, ..., z^n\}$ есть оптимальное подпространство для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$;

в) $L^*_n := span\{1, z, ..., z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$;

г) $L^n_* := \{f : f \in H_{q,\rho}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, ..., n-1\}$ является для гельфандовского n-поперечника $d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$ оптимальным подпространством;

д) $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}$, определённый равенством (19), является оптимальным линейным методом (подпространством), реализующим линейный n-поперечник $\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu); H_{q,\rho}\right)$.

Доказательству теоремы предпошлём следующую лемму.

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ при любых $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$ и $1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1$ имеет место*

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{20}$$

Если мажорирующая функция $\Phi(h)$ при $0 < h \le \pi/2$ удовлетворяет условию (14), то неравенство (20) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, для которой оно обращается в равенство.

Результат, полученный в теореме 1.3.3, принимаем к задаче вычислению точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классе функций $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$, а именно имеет место следующая

Теорема 1.3.4. *Для любых $n, r \in \mathbb{N},\ n > r;\ \mu \ge 1$ и $1 \le q \le \infty$ справедливо равенство*

$$L_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right) = \sup\left\{\left|c_n(f)\right| : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} =$$
$$= \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Аналогичные результаты для классов функций, определяемых модулями непрерывности от производных по аргументу $f_a^{(r)}(z)$, получены в работы М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[35].

Вторая глава диссертации, состоящая из двух параграфов, посвящена нахождению наилучших линейных методов приближений аналитических в круге $|z| \le 1$ функций, задаваемыми усреднёнными с весом $\dfrac{1}{h}\left(1 + (\mu^2-1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$,

[35]Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2014. Т. 57, № 2. С. 97–102.

как значениями модулей гладкости r-ых обычных производных, так и r-ых производных по аргументу и вычислению точных значений линейных и гельфандовских n-поперечники. Решена также задача оптимальное восстановление и кодирование линейных функционалов по дискретной информации.

В первом параграфе найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических для классов функций, изучавшихся Н.Айнуллоевым[17], и вычислены точные значения их линейных и гельфандовских n-поперечников.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ рассмотрим класс функций[17]:

$$W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu) = \left\{ f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}, h \in (0, \pi/2]$ $1 \leq q \leq \infty$ и μ — произвольное фиксированное число.

В работе Н.Айнуллоева[17] доказано, что если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любом $h, t \in (0, \pi/2]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi h t}{2\tau\mu} \right)_* \left(1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right) \, dt \leq \frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)}, \tag{21}$$

где $(1 - \cos t)_* = \{1 - \cos t, \text{ если } 0 \leq t \leq \pi; 2 \text{ если } t \geq \pi\}$, то для любого натурального n справедливо равенство

$$d_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_q \right) = \frac{\pi}{2(\pi - 2) n^r} \, \Phi \left(\frac{\pi}{2n\mu} \right). \tag{22}$$

Условию (21) удовлетворяет мажоранта $\Phi(u) = u^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi - 2)} \int_0^1 t \left(1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2\mu} \right) \, dt. \tag{23}$$

Так как $\alpha(1/2) = 4/(3(\pi - 2))$ и $\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha(\mu) = 2$, причём $\alpha(\mu)$ непрерывна и возрастает, то границы значения $\alpha = \alpha(\mu)$ удовлетворяют неравенству

$$4/(3(\pi - 2)) \leq \alpha(\mu) \leq 2.$$

Пользуясь схемой рассуждений, изложенных в работе С.Б.Вакарчука[30], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[32], результат (22) можно распространить на более общее пространство $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$:

$$b_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho} \right) = d_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho} \right) =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \qquad (24)$$

Имеет место следующая утверждения

Теорема 2.1.1. *Если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любом $h, t \in (0, \pi/2]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию (21), то для любого $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) = \delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \sup\left\{\left\|f - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \qquad (25)$$

При этом

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f,z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-1}\right)^r \rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-(\frac{k}{2n-k})^2\right)-1\right]\right\}c_k z^k \quad (26)$$

— наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$, где

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\mu n}{\pi-2}\int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt(1-\sin\mu nt)\ dt.$$

Во втором параграфе найдены наилучшие линейные методы приближения аналитических в единичном круге функций для класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, задаваемых усреднёнными с весом $\dfrac{1}{h}\left(1+(\mu^2-1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$ значениями модулей гладкости r-ых обычных производных.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ — произвольная положительная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ рассмотрим класс функций[17,28]:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu) = \left\{f \in H_q^{(r)} : \frac{1}{h}\int_0^h \omega_2(F^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi(h)\right\},$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty$ и $h \in (0, \pi/2]$.

Сформулируем один из основных результатов.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ *и мажоранта* Φ *при всех* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/(2\mu(n-r))\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_0^h (1-\cos(n-r)t)_* \left(1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right) dt. \qquad (27)$$

Тогда для всех $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (28)$$

Для нахождения точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников нам потребуется построение наилучшего линейного метода приближения функций класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью для произвольной $f \in \mathcal{A}(U)$ запишем следующий линейный полиномиальный оператор

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \rho^{2(n-k)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\gamma_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k(f) z^k \qquad (29)$$

степени $n-1$, где

$$\gamma_{k,r} \stackrel{def}{=} \frac{2\mu(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \Big(1 - \sin\mu(n-r)x\Big) \cos(k-r)x dx,\ k \geq r > 1,\ k, r \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть произвольная функция* $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, $\mu \geq 1/2$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$, $n, r \in \mathbb{N},\ n > r$. *Тогда справедливо*

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (30)$$

Если мажорирующая функция Φ *при любом* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению (27), то неравенство (30) неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, *обращающая его в равенство.*

Одним из основных результатов второго параграфа второй главы является

Теорема 2.2.3. *Если при любых $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (27), то при всех $0 < \rho \leq 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (31)$$

где $\pi_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников: Гельфанда $d^n(\cdot)$, линейный $\delta_n(\cdot)$. Линейный полиномиальный непрерывный оператор $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$, определённый равенством (29), является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$.

В качестве следствия из теоремы 2.2.3 получаем решение экстремальной задачи вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на класса $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty,\ \mu \geq 1/2)$.

Отметим, что аналогичная задача на других классах аналитических функций ранее рассматривалась, например, в работах С.Б.Вакарчука[30], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[32].

Теорема 2.2.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.3 справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \qquad (32)$$

где $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \leq q \leq \infty$.

Экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников компактных множеств функций тесно связана с задачами оптимизационного содержания, такими как оптимальное восстановление и кодирование линейных функционалов по дискретной информации, задаваемой, например, значениями функций и её производными в фиксированных точках, коэффициентами Фурье, коэффициентами Тейлора и т.п. В этом пункте мы рассмотрим задачи оптимального восстановления и кодирования в интерпретации Н.П.Корнейчука[36].

Пусть задан набор $\mathcal{M}_n \overset{def}{=} \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ функционалов $\mu_j \in X^*,\ j = \overline{1,n}$ в нормированном функциональном пространстве X, где X^* — пространство, сопряжённое с X. Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий каждому элементу $f \in X$ числовой вектор

$$\Im(f,\mathcal{M}_n) \overset{def}{=} \left\{\mu_1(f), \mu_2(f), \ldots, \mu_n(f)\right\}.$$

[36]Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987. 424 с.

Пусть $\mathcal{P}_n \overset{def}{=} \Big\{p_k(z)\Big\}_{k=1}^{n}$ и $\Gamma_n \overset{def}{=} \Big\{\gamma_k\Big\}_{k=1}^{n}$ — соответственно, произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов. Сопоставляя вектору $\Im(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n, z\big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ \mu_k(f) \ p_k(z),$$

решают задачу восстановления f по информации $\Im$, позволяющую наилучшим образом приспособиться к рассматриваемому классу $\mathfrak{M}$. Величину

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X = \inf\Big\{ \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ \Gamma_n \in \mathbb{C}^n\Big\}$$

называют погрешностью восстановления на классе $\mathfrak{M}$ и полагают

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n\Big\}$$

$$\Big(\text{или} \ \ \mathcal{K}_n^{\mathcal{P}rime}(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n\Big\}\Big),$$

где $\mathcal{M}'_n$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов.

Метод восстановления $(\mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)$ $\big($или $\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)$, для которого

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

$$\Big(\text{или} \ \ \mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}\Big),$$

называют оптимальным (или оптимальным линейным) методом восстановления функций из класса $\mathfrak{M}$. При этом справедливы соотношения[36]

$$\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X),$$

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X). \tag{33}$$

Если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}} + L$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — компакт, L — конечномерное подпространство, то в (33) имеет место знак равенство.

Параллельно с $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X$ рассматривают также величину

$$\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{\|f_1 - f_2\| : \ f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, \ \Im(f_1, \mathcal{M}_n) = \Im(f_2, \mathcal{M}_n)\Big\},$$

которую с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$ интерпретируют как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$. Полагая при этом

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n)_X : \ \mathcal{M}_n\Big\},$$

получают
$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) \le 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если множество $\mathfrak{M}$ центрально-симметрично и выпукло, то
$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Результат, полученный в теореме 2.2.3, обеспечивает возможность сформулировать следующее утверждение в приведённых выше обозначениях.

Теорема 2.2.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r;\ \mu \ge 1/2,\ 0 < \rho \le 1,\ 1 \le q \le \infty$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению (27). Тогда оптимальным линейным методом восстановления* $\left(\mathcal{M}^{*\prime}_n, \mathcal{P}^*_n, \Gamma^*_n\right)$ *функций* f *из класса* $W^{(r)}H_q(\Phi; \omega, \mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ *является линейный метод* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z)$, *определённый равенством (29), а наилучший метод кодирования определяется набором функционалов*
$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

При этом
$$\gamma^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu); H_{q,\rho}\right) = 2\mathcal{K}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) =$$
$$= 2\mathcal{K}'_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi; \omega_2, \mu), H_{q,\rho}\right) = \frac{\pi\rho^n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН РТ М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

Работы автора по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК:

1. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2015. Т. 58, № 3. С. 179–185.
2. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения и точных значениях некоторых классов аналитических в круге функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 5-6. С. 188–194.
3. Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 9-10. С. 367–372.
4. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. 2016. 15-25 августа. С. 290–295.

В других изданиях:

5. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел». 2015. 29-30 октября. С. 46–48.
6. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений». 2015. 27-28 апреля. С. 17–19.
7. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения некоторых классов аналитических в круге функций // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции». 2018. 27-28 февраля. С. 43–46.

РЕЗЮМЕ

диссертации Давлатбекова Фирдавса Давлатбековича на тему «Наилучшие линейные методы приближения и поперечники множеств функций в пространстве Харди», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *аналитическая функция, пространство Харди, модуль непрерывности, граничные значения, модуль гладкости, наилучшие линейные методы приближения, мажоранта, n-поперечники.*

Актуальность темы. В настоящее время вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычисления точных значений различных поперечников классов аналитических функций посвящено достаточно много работ, где уже получен целый ряд окончательных результатов. В работах К.И.Бабенко, J.T.Scheick, В.И.Белый, В.М.Тихомирова, Л.В.Тайкова вопросы наилучшего полиномиального приближения и нахождения наилучших линейных методов приближения аналитических в круге функций в основном изучались для классов функций с ограниченным по норме пространством $H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$ старшей производной или производной дробного порядка.

В серии работ S.D.Fisher, C.A.Micchelli, М.З.Двейрина, A.Pinkus, Л.В.Тайкова, Н.Айнуллоева, С.Б.Вакарчука указанная задача изучалась для классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости производной r-го порядка. В вышеперечисленных работах вычислены также точные значения колмогоровских n-поперечников для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости производных заданного порядка, принадлежащих пространству $H_q, 1 \leq q \leq \infty$.

В опубликованных работах М.Ш.Шабозова с соавторами задачи наилучшего полиномиального приближения решены для классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ых производных, принадлежащих пространству H_2, а также найдены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций.

С.Б.Вакарчук указал явный вид наилучших линейных методов приближения, реализующих точные значения линейных поперечников для классов функций, рассмотренных Л.В.Тайковым. В совместной работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова указаны наилучшие линейные методы и оптимальные подпространства, реализующие точные значения поперечников для классов аналитических функций в круге радиуса $R \geq 1$, определяемые модулями гладкости в $H_{q,R}\,(1 \leq q \leq \infty)$, и в весовых пространствах Бергмана. В диссертационной работ найдены наилучшие линейные методы приближения для других классов функции в более общем пространстве $H_{q,\rho}\,(q \geq 1,\, 0 \leq \rho < 1)$.

Методы исследования. В работе используются современные методы исследования экстремальных задач вариационного содержания и функционального анализа. При оценке снизу n-поперечников используется известный метод В.М.Тихомирова.

Цели и задачи исследования. Найти наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности; вычислить точные значения различных n-поперечников указанных классов функций; построить наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Полученные результаты и их новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем: построены наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности, и вычислены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций; найдены наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть использованы при вычислении n-поперечников классов функций в других банаховых пространствах аналитических функций, например в весовых пространствах Бергмана, Шильдса, Дюрена и Гварадзе.

ШАРҲИ МУХТАСАР

ба диссертатсияи Давлатбеков Фирдавс Давлатбекович дар мавзӯи «Усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин ва қутрҳои маҷмӯи функсияҳо дар фазои Харди» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *функсияи аналитикӣ, фазои Харди, модули бефосилагӣ, қиматҳои сарҳадӣ, модули суфтагӣ, усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин, мажоранта, n-қутрҳо.*

Муҳимияти мавзуъ. Дар давраи ҳозира оид ба масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо дар давраи воҳидии функсияҳои аналитикӣ ва ҳисобкунии қимати аниқи баъзе қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ корҳои зиёде ба анҷом расидаанд, ки дар онҳо як қатор натиҷаҳои назаррас ба даст оварда шудаанд.

Дар натиҷаҳои К.И.Бабенко, J.T.Scheick, В.И.Белый, В.М.Тихомиров, Л.В.Тайков ва М.З.Двейрин масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо ва ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, асосан барои синфи функсияҳое, ба фазои $H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$ таалуқанд ва бо нормаи ҳосилаи тартиби олӣ ё ҳосилаи тартиби касрӣ маҳдуданд, омӯхта шудаанд.

Дар як қатор корҳои S.D.Fisher, C.A.Micchelli, М.З.Двейрин, A.Pinkus, Л.В.Тайков, Н.Айнуллоев, С.Б.Вакарчук масъалаҳои дар боло зикршуда, барои баъзе синфи функсияҳое, ки ба воситаи модулҳои бефосилагӣ ё суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайян шудаанд, омӯхта шудааст. Дар корҳои дар боло зикр шуда, инчунини дигар қимати аниқи қутрҳои колмогоровӣ барои синфҳои номбаршудаи ба фазои $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ таалуқ дошта, ҳисоб карда шудаанд.

Дар корҳои илмии М.Ш.Шабозов бо ҳаммуаллифонаш масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби m-уми ҳосилаи r-уми функсияҳо муайян шудаанд, дар фазои H_2 омӯхта шуда, қимати аниқи n-қутрҳо ҳисоб карда шудаанд.

С.Б.Вакарчук намуди ошкори усулҳои хаттии наздиккунии беҳтаринро ёфта, ба воситаи он n-қутрҳои хаттии синфи функсияҳоеро, ки Л.В.Тайков омӯхта буд, ҳисоб кард. Дар кори илмии якҷояи С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов усулҳои хаттии беҳтарин ва зерфазоҳои оптималӣ, ки қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳо дар давраи радиусаш $R \geq 1$, ки ба воситаи модулҳои суфтагӣ дар фазои $H_{q,R}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ ва фазои вазнии Бергман муайянанд, ёфта шудаанд. Дар рисола, усулҳои хаттии беҳтарин барои синфҳои функсияҳои дигар барои фазои умумитари $H_{q,\rho}\,(q \geq 1,\ 0 \leq \rho < 1)$ ёфта шуда, ба воситаи ин усулҳо n-қутрҳои хаттӣ ҳисоб карда шуданд.

Усулҳои тадқиқотӣ. Дар кор усулҳои муосири тадқиқоти масъалаҳои экстремалӣ ва таҳлили функсионалӣ, ки дорои мазмуни вариатсионӣ мебошанд, истифода шуданд. Барои баҳодиҳӣ аз поёни n-қутрҳо усулҳои маълуми В.М.Тихамиров истифода шуданд.

Мақсад ва масъалаҳои таҳқиқот. Ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар давраи воҳидӣ бо ёрии модули бефосилагӣ дода шудаанд; ҳисоб кардани қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни ин синфи функсияҳо; сохтани усулҳои хаттии беҳтарин барои синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ бо вазни миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум додашуда.

Тавсиби натиҷаҳо ва навгониҳои онҳо. Натиҷаҳои дар диссертатсия оварда шуда, чунинанд: усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар давраи воҳидӣ, ки бо модули бефосилагӣ муайянанд, сохта шуданд ва қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни ин синфи функсияҳо ҳисоб карда шуданд; усулҳои хаттии беҳтарин барои синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бо вазни миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайянанд, ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои гирифташуда ҳам аҳамияти назариявӣ ва ҳам аҳамияти амалӣ доранд. Онҳоро барои ҳисобкунии n-қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ дар дигар фазоҳои банахӣ, масалан барои фазои ваздори Бергман, Шилдс, Дюрен ва Гварадзе истифода бурдан мумкин аст.

SUMMARY

Davlatbekov Firdavs Davlatbekovich's dissertation on the topic «Best linear approximation methods and widths sets of functions in the Hardy space» represented on Candidate Degree in Physics and Mathematics sciences on a specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Key words: *analytic function, Hardy space, module continuity,boundary values, modulus of smoothness, best linear approximation methods, majorant, n-widths.*

Actuality of the work. Currently, the best polinominal approximation of analytic in the circle functions and calculations exact values of various widths of classes of analytic functions a lot of works have been devoted, where a number of graduates have already been received telny results.

In the works of K.I.Babenko, J.T.Scheick, V.I.Bely, V.M.Tikhomirov, L.V.Taykov, M.Z.Dvayrin the questions of the best polynomial approximation the best linear methods for analyzing functions in the circle were mainly studied for classes of functions with constraints by the space $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ with the highest derivative or fractional order derivative.

In the series of works by S.D.Fisher, S.D.Fisher and C.A.Micchelli, M.Z.Dveyrin and I.V.Chebanenko, A.Pinkus, L.V.Taykov and N.Aynulloyev, N.Aynulloyev, S.V.Vakarchuk the specified task was studied for classes of functions, given by modules of continuity and smoothness of the derivative of r-th order. In the above works, the exact values of Kolmogorov n-widths for some classes of functions, given by modules of continuity and smoothness of derivatives of a given order belonging to the space $H_q, 1 \leq q \leq \infty$.

In the published works of M.Sh.Shabozov with co-authors of the problem best polynomial approximation of functions from $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ solved for classes of functions defined by modules of continuity and smoothness. Similar problems have

been solved for the function classes of the specified modules by the m-th order continuity of the r-th derivatives belonging to the simple H_2, and also found the exact values of various n-widths specified classes of functions.

S.V.Vakarchuk in his works indicated a clear view of the best linear approximation methods that implement exact widths for classes of functions considered by L.V.Taykov. In collaboration S.V.Vakarchuk and M.Sh.Shabozov indicated the best linear methods and optimal subspaces that implement exact widths for classes of analytic functions in the circle $R \geq 1$, defined by modules smoothness in $H_{q,R}(1 \leq q \leq \infty)$, and the results are applied in weighted Bergman spaces.

In the dissertation work, the study of the above authors in the specified direction.

Methods of research. We use modern methods investigations of extremal problems of variational content and functions national analysis. In estimating the bottom, n-widths are used well known method V.M.Tikhomirov.

Goals and objectives of the reseach. Find the best linear methods approximation of some classes of functions analytic in the unit circle, specified by continuity modules; will calculate the exact values of various n-widths of the indicated classes of functions; build the best linear methods for classes of analytic functions in the circle defined by weight-averaged values of the modulus of smoothness of r-th derivatives.

The obtained results and their novelty. Dissertation results are new and are as follows: the best linear methods of approximation of certain classes of analytic in the unit circle functions defined by modules of continuity, and exact the values of different n-widths of the indicated classes of functions; found best linear methods for classes of analytic functions in a circle, the values of modules of smoothness r-th given by averaged with weight derivatives.

Theoretical and practical value. Received in thesis results have both theoretical and applied value. They can be used to calculate n-widths of function classes in other Banach spaces of analytic functions, for example, in Bergman, Shilds, Duren and Gvaradze weighted spaces.

Бо ҳуқуқи дастхат

Давлатбеков Фирдавс Давлатбекович

УСУЛҲОИ ХАТТИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИН ВА ҚУТРҲОИ МАҶМӮИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2019

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбарони илмӣ:	**Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академии илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, профессор, доктори илмҳои физикаю математика;
	Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, доктори илмҳои физикаю математика, профессор
Муқаризони расмӣ:	**Сафаров Ҷумабой Сафарович** доктори илмҳои физикаю математика профессор, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав;
	Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич кандидати илмҳои физикаю математика, дотсент, мудири кафедраи системаи информатсионӣ ва технологии Донишгоҳи технологии Тоҷикистон
Муассисаи тақриздиҳанда:	Донишгоҳи давлатии омузгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Ҳимоя *12-уми июни соли 2019 соати 10:00* дар Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-012 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, дар факултети механикаю математика аз рӯйи нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» ____________ 2019 г. фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика, профессор Г. Ҷангибеков

Тавсифи умумии диссертатсия

Муҳимияти мавзуъ. Дар давраи ҳозира оид ба масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо ва ҳисобкунии қимати аниқи баъзе қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ корҳои зиёд ба анҷом расиданд, ки дар онҳо як қатор натиҷаҳои назаррас ба даст оварда шудаанд.

Нахустин натиҷа дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ оид ба ёфтани бузургии наздиккунии беҳтарин дар давраи $|z| \leq 1$ ба воситаи бисёраъзогиҳо, ки бо нормаи чебишёви ҳосилаи тартиби r-ум маҳдуданд, аз тарафи К.И.Бабенко[1] ёфт шуд. Соли 1967 ин натиҷа барои ҳосилаҳои касрӣ аз тарафи J.T.Scheick[2] ва инчунин аз тарафи В.И.Белым[3] васеъ карда шуд.

Баъдтар масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо ва ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин барои функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, асосан барои синфи функсияҳое, ки ба фазои H_q, $1 \leq q \leq \infty$ таалуқанд ва бо нормаи ҳосилаи тартиби олӣ ё тартиби касрӣ маҳдуданд, аз тарафи В.М.Тихомиров[4], Л.В.Тайков[5–8] ва М.З.Двейрин[9–11] омӯхта шудаанд.

Солҳои 80-ум масъалаҳои дар боло қайдкардашуда дар як қатор корҳои S.D.Fisher[12], S.D.Fisher and C.A.Micchelli[13], М.З.Двейрина и И.В.Чеба-

---

[1]Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.

[2]Scheick J. T. Polinomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 6. P. 1238–1243.

[3]Белый В. И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал. 1967. Т. 19, № 2. С. 104–108.

[4]Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № 3(93). С. 81–120.

[5]Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, № 4(112). С. 183–189.

[6]Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций //Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.

[7]Тайков Л. В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. Т. 2, № 1. С. 77–85.

[8]Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.

[9]Двейрин М. З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. 1975. № 6. С. 41–54.

[10]Двейрин М. З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. № 23. С. 32–46.

[11]Двейрин М. З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. 1977. С. 129–132.

[12]Fisher S. D. Quantitative approximation theory // Amer. Math. Monthly. 1978. Vol. 85. P. 318–332.

[13]Fisher S. D., Micchelli C. A. The n-widths of sets analytic function // Duke Math. J. 1980. Vol. 47, no. 4. P. 789–801.

ненко[14], A.Pinkus[15], Л.В.Тайкова и Н.Айнуллоева[16], Н.Айнуллоева[17], С.Б.Вакарчука[18–20] барои баъзе синфи функсияҳое, ки ба воситаи модулҳои бефосилагӣ ё суфтагии ҳосилаи тартиби r-уми муайян шудаанд, омӯхта шуда, барояшон қимати аниқи n-қутрҳои колмогоровӣ ҳисоб карда шуданд.

Дар корҳои илмии М.Ш.Шабозов бо ҳаммуаллифонаш[21–26] масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби m-уми ҳосилаи r-уми функсияҳо муайянанд, дар фазои H_2 омӯхта шуда, қимати аниқи n-қутрҳои ин синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд.

С.Б.Вакарчук[27–31] намуди ошкори усулҳои хаттии наздиккунии беҳта-

[14] Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. 1983. С. 62–73.

[15] Pinkus A. n-widths in approximation theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. P. 252.

[16] Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.

[17] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функции в единичном круге // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов. Калининский госуниверситет. 1986. С. 91–101.

[18] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди h_2 // Укр. мат. журнал. 1989. Т. 41, № 26. С. 799–802.

[19] Вакарчук С. Б. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 6. С. 838–843.

[20] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 7. С. 873–881.

[21] Шабозов М. Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // ДАН РТ. 1998. Т. 41, № 9. С. 48–53.

[22] Шабозов М. Ш. Значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Вестник Хорогского госуниверситета. 1999. Т. 1, № 1. С. 35–44.

[23] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.

[24] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.

[25] Шабозов М. Ш., Пиров Х. Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_p^r, $1 \le p \le 2$ // ДАН России. 2003. Т. 394, № 4. С. 399–401.

[26] Шабозов М. Ш., Умеди Г. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве Харди $H_p, 1 \le p \le 2$ // ДАН России. 2005. Т. 403, № 5. С. 610–613.

[27] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.

[28] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.

[29] Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.

[30] Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журнал. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.

[31] Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \ge 1$, $0 < \rho \le 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.

ринро ёфта, ба воситаи он n-қутрҳои хатии синфи функсияҳоеро, ки Л.В.Тайков омӯхта буд, ҳисоб кард. Дар кори илмии якҷояи С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[32] усулҳои хатии беҳтарин ва зерфазоҳои оптималӣ, ки қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳо дар доираи радиусаш $R \geq 1$ ва ба воситаи модулҳои суфтагӣ дар фазои $H_{q,R}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ ва фазои вазнии Бергман муайянанд, ёфта шуданд. Дар диссертатсия, усулҳои хаттии беҳтарин барои синфҳои функсияҳои дигар барои фазои умумитари $H_{q,\rho}$ $(q \geq 1,\ 0 \leq \rho < 1)$ ёфта шуда, ба воситаи ин усулҳо n-қутрҳои хаттӣ ҳисоб карда шуданд.

Цели и задачи исследования. Мақсад ва масъалаҳои таҳқиқот. Мақсади асосӣ гирифтани натиҷаҳои нав буда, бо кофтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои аналитикӣ алоқаманд мебошад. Амалӣ гардидани мақсади гузошта шуда, масъалаҳои зеринро ҳал кардан зарур аст:

- ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои намуди Л.В.Тайков[8] ва барои синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ ҳисоб кардани қиматҳои аниқи як қатор n-қутрҳо;
- сохтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин барои функсияҳои аналитикӣ дар доираи воҳидии фазои метрикии Харди, ки аз рӯйи функсияи мажорантӣ қимати сарҳадии модули бефосилагии тартиби r-ум муайян шудааст ва инчунин барои синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ ҳисоб кардани қиматҳои аниқи n-қутрҳои гуногун;
- ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ барои синфҳои $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ ва $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, ки Н.Айнуллоев[17] омӯхта буд ва барои онҳо ҳисоб кардани қиматҳои аниқи n-қутрҳои хаттӣ ва гелфандӣ.

Усулҳои тадқиқотӣ. Дар кор усулҳои тадқиқоти масъалаҳои экстремалӣ ва таҳлили функсионалӣ, ки дорои мазмуни вариатсионӣ мебошанд, истифода шуданд. Барои баҳодиҳӣ аз поёни n-қутрҳо усулҳои маълуми В.М.Тихамиров[33] истифода шуданд.

Нововарии илмии тадқиқотӣ. Натиҷаҳои диссертатсия нав буда, чунинанд:

- усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин баъзе синфи функсияҳо дар доираи воҳидӣ, ки бо модули бефосилагӣ муайянанд, сохта шуданд ва қимати аниқи n-қутрҳои ин синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;

[32]Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.

[33]Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М. : МГУ, 1976. 325 с.

- усулҳои хаттӣ беҳтарин барои синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бо вазни миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайянанд, ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои гирифташуда аҳамияти назариявӣ ва амалӣ доранд. Онҳо ва усули исботи онҳоро барои ҳисобкунии n-қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ дар дигар фазоҳои банаховӣ, масалан барои фазои вазндори Бергман, Шилдс, Дюрен ва Гварадзе истифода бурдан мумкин аст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар:

- семинари кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои ДДХ (Хоруғ, с. 2013-2014);
- семинари кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии факултети механикаю математикаи ДМТ (Душанбе, с. 2014-2018);
- семинари шуъбаи назарияи функсияҳо ва таҳлили функсионалии Институт математикаи АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АИ ҶТ, профессор М.Ш.Шабозов (Душанбе с. 2014-2018);
- конференсияи илмии байналмилалии «Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 80-солагии узви аъзои корреспондентии АИ ҶТ В.Я.Стетсенко (Душанбе, 27-28 апрели с. 2015);
- конференсияи илмии байналмилалии «Таҳлили математикӣ, муодилаҳои дифференсиалӣ ва назарияи ададҳо», бахшида ба 75-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Т.С.Собиров (Душанбе, 29-30 октябри с. 2015);
- хонишҳои Мактаб-конференсияи математикии тобистонаи байналмилалии С.Б.Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Тоҷикистон, Душанбе, 15-25 августи с. 2016);
- конференсияи илмии байналмилалии «Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канории назарияи функсияҳо», бахшида ба 90-солагии доктори физикаю математика, академик Л.Г.Михайлов (Душанбе, 27-28 феврали с. 2018)

муҳокима ва баррасӣ карда шуданд.

Интишорот. Маводҳои асосии диссертатсия дар 7 номгӯи кор нашр шуданд, аз онҳо 4-то мақола дар нашрияҳои тақризшаванда [1–4], ки ба рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти ҶТ мансуббанд ва 3-тои дигараш дар осори конференсияҳои байналмилалӣ ва фишурдаҳо [5–7] аз чоп баромаданд.

Натиҷаҳои асосии муаллиф. Натиҷаҳо ва маълумоти асосии диссертатсия дар корҳои нашршуда, ки ба ҳимоя пешниҳод шуданд, маълумоти шахсии муаллифро нишон медиҳанд. Натиҷаҳои гирифта шуда бо ҳамроҳии М.Ш.Шабозов [1, 2, 4] барои нашр омода шудаанд, дар онҳо натиҷаҳои дисертант муайяншавандаанд. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия пешниҳодшуда шахсан аз тарафи худи муаллиф ба даст оварда шудааанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, хулоса ва феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аст. Ҳаҷми умумии диссертатсия 84 саҳифа буда, 78 саҳифаи он матн, формулаҳоро низ дар бар дорад, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ карда шудааст. Адабиёт 45 номгӯйро ташкил дода дар 5 саҳифа ҷо дода шудааст.

Барои қулай будан дар диссертатсия шуморагузории серақамаи теоремаҳо, лемммаҳо ва формулаҳо истифода шудаанд, ки дар он рақами якум бо шумораи боб, рақами дуюм бо шумораи параграф ва рақами сеюм бо шумораи теоремаҳо, лемммаҳо ва формулаҳои параграфи ҷорӣ мувофиқ меояд.

Мазмуни мухтасари диссертатсия

Боби якуми диссертатсия аз се параграф иборат буда, барои ёфтани қимати аниқи наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёъзогиҳои алгебравии комплексӣ дар давраи воҳидии функсияҳои аналитикии фазои Хардии H_q, $1 \le q \le \infty$ пешбинӣ шудааст. Дар параграфи якуми ин боб баъзе ишораҳо ва таърифҳои асосӣ, дар давоми кор истифода шуда, ҷой дода шудаанд ва дар ду параграфи навбатӣ бошад, натиҷаҳои муаллиф оварда шудаанд.

Бо $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ — маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ, мусбат, бутун, натуралӣ, бутуни мусбат ва комплексии намуди $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ишора мекунем.

Мегӯянд, ки дар давраи воҳидии функсияи аналитикии

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 < \rho \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi$$

зерфазои бисёраъзогии дараҷаи $\le n-1$-и алгебравии комплексӣ:

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_{n-1}| \ne 0 \right\}$$

ба фазои Харди $H_q,\ 1 \le q \le \infty$ таалуқ дорад, агар

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho\to 1-0}\{M_q(\rho,f)\} := \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q} :=$$

$$:= \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(e^{it})|^q dt\right)^{1/q} := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|F(t)|^q dt\right)^{1/q} < \infty$$

мавҷуд бошад, ки дар ин ҷо

$$F(t) := f(e^{it}) = \lim_{\rho\to 1-0} f(\rho e^{it})$$

— қимати кунҷии сарҳадии функсияи $f(z)$ мебошад[34].

Дар ҳолати $q = \infty$ будан, функсияи $f \in \mathcal{A}(U)$ дар давраи маҳдудшудаи $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ фарз мекунем, ки то сарҳад бо нормаи зерин бефосила аст:

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\{|f(z)| : |z| \le 1\} = \max\left\{|f(e^{it})| : 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

Бо $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ ҳосилаи тартиби r-уми функсияи $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ аз рӯйи аргументи t-и тағйирёбандаи комплексии $z = \rho e^{it}$ ишора мекунем, яъне

$$f_a'(z) := \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = f'(z)zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a',\ r \ge 2, r \in \mathbb{N}$$

ва бо $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ ҳосилаи одии тартиби r-уми функсияи $f(z)$-ро ишора мекунем.

Бо $F_a^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F_a^{(0)}(t) \equiv F(t))$ қиматҳои сарҳадии функсияҳои аналитикии $\partial^r f/\partial t^r \overset{def}{=} \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ r \in \mathbb{Z}_+$ ва бо $F^{(r)}(t)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ F^{(0)}(t) \equiv F(t))$ — қиматҳои сарҳадии функсияҳои аналитикии $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$-ро ишора мекунем.

Бо H_q^r $(r \in \mathbb{Z}_+,\ H_q^0 = H_q), 1 \le q \le \infty$ маҷмӯи функсияҳои аналитикӣ дар давраи $|z| \le 1$ функсияи $f(z) \in H_q,\ q \ge 1$ ишора мекунем, ки $f^{(r)}(z) \in H_q$, яъне

$$H_q^r = \left\{f(z) \in H_q :\ \left\|f^{(r)}\right\|_{H_q} < \infty\right\},\ 1 \le q \le \infty.$$

[34] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. : Гостехиздат, 1950. 350 с.

Мувофиқан гузориш мекунем:

$$H^r_{q,a} = \left\{ f(z) \in H_q : \ \left\| f_a^{(r)} \right\|_{H_q} < \infty \right\}, \ 1 \le q \le \infty.$$

Дар параграфи дуюм усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои намуди Л.В.Тайков[8] ёфт шудаанд ва барои ин синфи функсияҳо қиматҳои аниқи як қатор n-қутрҳо ҳисоб карда шуданд.

Бигзор $\Phi(x)$ $(x \ge 0)$ функсияи ихтиёрии бефосила афзуншаванда бошад, ки $\Phi(0) = 0$ аст. Функсияи $\Phi(x)$-ро ҳамчун мажоранта истифода карда, синфи функсияи зеринро дида мебароем:

$$W^{(r)} H_q(\Phi; \omega) = \left\{ f \in H_q^{(r)} : \ \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega(f^{(r)}; 2t)_q \, dt \le \Phi(h) \right\}.$$

Бигзор X — фазои банахӣ; S — курраи воҳидӣ дар он; $\mathfrak{M}$ — ягон зермаҷмӯи барҷастаи симметрӣ-марказонидашуда дар X; $L_n \subset X$ — зерфазои хаттии n-ченака; $L^n \subset X$ — зерфазои хаттии ҳамченакаи n; $\mathscr{L}(X, L_n) := \{\Lambda : X \to L_n\}$ — маҷмӯи операторҳои хаттии бефосилаи $\{\Lambda\}$, ки фазои X-ро ба L_n инъикос мекунад.

Ба воситаи баробарии

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup \Big\{ \inf \big\{ \|f - \varphi\|_X : \ \varphi \in L_n \big\} : f \in \mathfrak{M} \Big\}$$

мувофиқан наздиккунии беҳтарини функсияи $f \in X$ ва маҷмуи интихобшудаи $\mathfrak{M} \subset X$ бо зерфазои интихобшудаи $L_n \subset X$ ишора мекунем.

Ба восита бузургии

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \inf \Big\{ \sup \big\{ ||f - \Lambda(f, L_n)||_X : f \in \mathfrak{M} \big\} : \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n) \Big\}$$

бошад, наздиккунии беҳтарини хаттии маҷмуи $\mathfrak{M} \subset X$ элементҳои L_n ишора мекунем.

Бузургиҳои

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup \big\{ \sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X \big\}, \tag{1}$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf \big\{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \big\}, \tag{2}$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf \big\{ \sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X \big\}, \tag{3}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf \big\{ \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X : \ \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n)\} : L_n \subset X \big\} \tag{4}$$

мувофиқан n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ ва хаттӣ меноманд. Муносибатҳои дар боло қайдкардашуда аз рӯйи n монотонӣ буда, барояшон нобаробариҳои[15,33]:

$$b_n(\mathfrak{M};X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M};X) \\ d^n(\mathfrak{M};X) \end{array} \leq \delta_n(\mathfrak{M};X) \tag{5}$$

ҷой доранд

Аз натиҷаҳои кори Л.В.Тайков[8] бар меояд, ки агар барои ҳаргуна $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 1$ функсияи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна $h \in (0, \pi/2]$ шарти

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_* \, dt \tag{6}$$

-ро қаноат кунад, ки дар ин ҷо

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t, \text{ агар } 0 < t \leq \pi/2; \ \ 1, \text{ агар } \ t \geq \pi/2\Big\},$$

он гоҳ баробарии

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_q\right) = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \tag{7}$$

ҷой дорад.

Бо $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \leq 1, \ H_{q,1} \equiv H_q)$ дар давраи $|z| < \rho$ аналитикии функсияҳои $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ фазои банахии Хардиро ишора мекунем, ки барояшон нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\|f(\cdot)\|_{q,\rho} := \|f(\cdot)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho\cdot)\|_q < \infty.$$

Қайд мекунем, ки дар асоси пайравии натиҷаҳои кори С.Б.Вакарчук[27], натиҷаи (7)-ро дар фазои $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, \ 0 < \rho \leq 1)$ паҳн карда,

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega); H_{q,\rho}\right) = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{8}$$

-ро ҳосил мекунем.

Мақсади мо аз он иборат аст, ки натиҷаи (8)-ро барои n-қутрҳои хаттӣ ва гелфандӣ дида бароем. Аз ин сабаб, барои синфи функсияҳои аз худ карда шудаи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ беҳтарин усулҳои хаттиро месозем.

Бо ин мақсад барои функсияи ихтиёрии $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k \in \mathcal{A}(U)$, кори С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[32]-ро аз назар гузаронда, оператори полиномии хаттии

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k+$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}\rho^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \qquad (9)$$

-ро менависем, ки дар ин ҷо $n>r$ буда, адади $\gamma_{k,r}$ бо баробарии

$$\gamma_{k,r}=(n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\cos(k-r)t\cos(n-r)tdt,\ k\geq r,\ k\in\mathbb{N}.$$

муайян карда мешавад.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1.2.1. *Бигзор f — ихтиёрӣ функсияи аналитикӣ аз дохили синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$, $1\leq q\leq\infty$, n,r — ҳаргуна ададҳои натуралии $n>r$ ва $0<\rho\leq 1$ бошад, он гоҳ*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}}\leq\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (10)$$

Агар функсияи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна $h\in(0,\pi/2]$ шарти (6)-ро қаноат кунонад, он гоҳ нобаробарии (10) дуруст ба он маъно мешавад, ки барояш функсияи $f_1\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)$ ($r\in\mathbb{N}$, $1\leq q\leq\infty$) мавҷуд буда, нобаробарии (10)-ро ба баробарӣ табдил медиҳад.

Бо ёрии натиҷаи теоремаи 1.2.1 натиҷаи асосии параграфи дуюмро дар намуди тасдиқоти зерин формулагузорӣ мекунем:

Теоремаи 1.2.2. *Бигзор мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна $h\in(0,\pi/2]$ шарти (6)-ро қаноат кунонад ва бигзор $\pi_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ бошад. Он гоҳ барои ҳамаи $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$ бароибарии*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);H_{q,\rho}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega)\right)_{H_{q,\rho}}=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega);\Lambda_{n-1,r-1,\rho}\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \qquad (11)$$

дуруст аст.

Дар параграфи сеюм усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин синфи функсияҳое, ки ба фазои H_q, $1\leq q\leq\infty$ таалуқ дошта, аз рӯйи модули бефосилагии қимати сарҳадии ҳосилаи функсияи $f^{(r)}(z)$, $r\in\mathbb{N}$ миёнакардашуда ба воситаи функсияи Φ мажорант карда шудаанд, сохта мешаванд. Инчунин қимати аниқи ҳаргуна n-қутрҳои синфи додашуда ҳисоб карда мешаванд.

Бигзор $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ ихтиёрӣ функсияи бефосила афзуншаванда бошад, ки барояш $\Phi(0) = 0$. $\Phi(x)$-ро ҳамчун мажоранта истифода карда, синфи функсияҳои зеринро дида мебароем:

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)=\left\{f \in H_q^{(r)}:\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f^{(r)};2t)_q \left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi(h)\right\},$$

ки $h \in (0, 2\pi],\ r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty$ ва $\mu \geq 1$ — адади ихтиёрии интихобшуда.

Аз натиҷаҳои асосии кори Н.Айнуллоев ва Л.В.Тайков[16] баъди баъзе ҳисобкунӣ бар меояд, ки барои функсияи ихтиёрии $f \in H_q^{(r)}$ ва ҳаргуна $\mu \geq 1$ нобаробарии

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)} \omega(f^{(r)},2t)_q\left\{1+(\mu^2-1)sin\mu(n-r)t\right\}dt \qquad (12)$$

иҷро мешавад.

Барои ихтиёрӣ функсияи $f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ ва таърифи синфи функсияҳои $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ аз нобаробарии (12) ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\left(\frac{2\mu(n-r)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\omega(f^{(r)},2t)_q\left\{1+(\mu^2-1)sin\mu(n-r)t\right\}dt\right)\leq$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right),\ 1 \leq \mu < \infty,\ n,r \in \mathbb{N},\ n > r,\ 1 \leq q \leq \infty,$$

ки аз ин ҷо баҳодиҳӣ аз боло мебарояд:

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_q = \sup\left\{E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \qquad (13)$$

Нобаробарии (13)-ро барои n-қутрҳо ҳангоми баҳодиҳӣ аз боло истифода мебарем.

Теоремаи 1.3.1. *Агар барои қимати додашудаи* $\mu \geq 1$ *ва барои ҳаргуна* $n,r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \ h \in (0,\pi/2]$ *мажорантаи* $\Phi(h)$ *шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2\mu(n-r))} \geq \frac{\pi}{2\mu}\int\limits_0^1 (\sin(n-r)ht)_*\left[1+(\mu^2-1)sin\frac{\pi t}{2}\right]\ dt \qquad (14)$$

-ро қаноат кунонад, он гоҳ барои ихтиёрӣ $r \in \mathbb{N}$ баробарии

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right)=d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q}=\frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{15}$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо $b_n(\cdot)$ n-қутри бернштейнӣ, $d_n(\cdot)$ n-қутри колмогоровӣ, $\alpha_{n,r} := n(n-1)...(n-r+1)$, $n \geq r$ ва

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_q}:=\sup\left\{E_{n-1}(f)_{H_q}: f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}.$$

Маҷмӯи мажорантаҳои $\{\Phi\}$, ки шарти (14)-ро қаноат мекунонанд, холӣ нестанд. Ин шартро мажорантаи $\Phi_*(u) = u^{\alpha(\mu)}$ қаноат мекунонад, ки

$$\alpha(\mu)=\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\int_0^1 t\cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]\,dt$$

ва дар ҳолати хусусӣ

$$\alpha(1)=\frac{\pi}{2}-1,\lim_{\mu\to\infty}\alpha(\mu)=1,$$

ягне барои ҳамаи қиматҳои $\mu \in [1,\infty)$ нобаробарии $(\pi/2)-1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$ ҷой дорад.

Нобаробарии[33]

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q},\ 1\leq q\leq\infty,\ 0<\rho\leq 1 \tag{16}$$

ва таърифи n-қутри бернштейниро истифода карда, натиҷаи (15)-и теоремаи 1.3.1-ро барои фазои $H_{q,\rho}$ $(0<\rho\leq 1, 1\leq q\leq\infty)$ паҳн мекунем.

Теоремаи 1.3.2. *Бигзор $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ ва мажорантаи $\Phi(h)$ шарти (14)-ро қаноат кунонад, он гоҳ барои ҳагуна $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ баробарии*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{17}$$

ҷой дорад.

Тасдиқоти умумикардашудаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1.3.3. *Агар барои қимати додашудаи $\mu \geq 1$, ҳаргуна $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq \pi/2$ мажорантаи $\Phi(h)$ маҳдудияти (14)-ро қаноат кунонад, он гоҳ барои ҳамаи $n, r \in \mathbb{N}, n > r$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ баробарии*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)=E\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu):\Lambda_{n-1,r-1,\rho}:\mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}}:=$$

$$=\sup\left\{\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}}:f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\}=$$

$$=\frac{\pi\rho^n}{4\mu(n-r)}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{18}$$

дуруст аст. Дар ин ҷо $\pi_n(\cdot)$ *яке аз* n*-қутрҳои* $b_n(\cdot),d_n(\cdot),d^n(\cdot),\delta_n(\cdot)$ *мебошад ва оператори полиномии хаттии* $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ *бо баробарии*

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f,z):=\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+$$
$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k \tag{19}$$

муайян карда мешавад, ки $n>r$ *ва* $\gamma_{k,r}:=(n-r)\mu\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\cos kt\ \cos(n-r)\mu t dt.$

Барои ин: а) оператори бефосилаи полиномии хаттии (19) усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин барои синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *дар фазои метрикии* $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,0<\rho\le1)$ *мебошад;*

б) $L_{n+1}^*:=span\{1,z,...,z^n\}$ *зерфазои оптималӣ барои* n*-қутри бернштейнии* $b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)$ *мебошад;*

в) $L_n^*:=span\{1,z,...,z^{n-1}\}$ *барои* n*-қутри колмогоровии* $d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)$ *зерфазои оптималӣ мебошад;*

г) $L_*^n:=\{f:f\in H_{q,\rho},f^{(k)}(0)=0,k=0,1,...,n-1\}$ *зерфазои оптималӣ барои* n*-қутри гелфандии* $d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)$ *мебошад;*

д) $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}$*, ки аз рӯйи баробарии (19) муайян аст, усулҳои хаттӣ (зерфазо)-и оптималии* n*-қутри хаттии)* $\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu);H_{q,\rho}\right)$ *мебошад.*

Барои исботи теоремаи 1.3.3 леммаи зеринро истифода мебарем:

Леммаи 1.3.1. *Барои ихтиёрӣ функсияи* $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *барои ҳамаи* $n,r\in\mathbb{N},\ n>r$ *ва* $1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le1$ *нобаробари*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho}\le\frac{\pi\rho^n}{4\mu\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{20}$$

ҷой дорад.

Агар мажорантаи $\Phi(h)$ *ҳангоми* $0<h\le\pi/2$ *шарти (14)-ро қаноат кунонад, он гоҳ нобаробарии (20) беҳтарин ба он маъно мешавад, ки функсияи мавҷуд будаи* $f_1\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ *онро ба баробарӣ табдил диҳад.*

Натиҷаи теоремаи 1.3.3-и ба даст овардашударо барои масъалаи ҳисобкунии сарҳади саҳеҳи болоии модули коэффисиентҳои Тейлори $c_n(f)$ дар синфи функсияҳои $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ истифода бурдан мумкин аст, ҳамин тариқ тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1.3.4. *Барои ҳамаи $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$; $\mu \geq 1$ ва $1 \leq q \leq \infty$ баробарии*

$$L_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right) = \sup\left\{\left|c_n(f)\right| : f \in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4\mu\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)$$

дуруст аст.

Натиҷаҳои ҳаммонанд барои синфи функсияҳо, ки бо модули бефосилагии ҳосилаи тартиби r-ум аз рӯйи аргумент, яъне $f_a^{(r)}(z)$, муайян шудаанд, дар кори илмии М.Ш.Шабозов ва Г.А.Юсупов[35] ба даст оварда шудаанд.

Боби дуюми диссертатсия аз ду параграф иборат буда, барои ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ дар давраи $|z| \leq 1$, бо вазни $\dfrac{1}{h}\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\dfrac{\pi t}{2h}\right)$ миёнакардашудаи қиматҳои модули суфтагӣ, ки барояшон ҳам ҳосилаи одии тартиби r-ум ва ҳам хосилаи тартиби r-ум аз рӯйи аргумент дода шудааст, ва ҳисобкунии қимати аниқи n-қутрҳои хаттӣ ва гелфандӣ бахшида шудааст. Инчунини дигар дар он масъалаи барқароркунии оптималӣ ва кодиронии хаттии функсионалӣ аз рӯйи ахбороти дискретӣ ҳал карда шудааст.

Дар параграфи якум усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин барои синфи функсияҳое, ки аз тарафи Н.Айнуллоев[17] аз худ карда буданд, ёфт шудаанд ва барояшон қиматҳои аниқи қутрҳои хаттӣ ва гелфандӣ ҳисоб карда шудаанд.

Бигзор $\Phi(x)$ $(x \geq 0)$ функсияи ихтиёрии бефосила афзуншаванда бошад, ки барояш $\Phi(0) = 0$. Барои ҳаргуна қимати додашудаи параметрии $\mu \geq 1/2$ синфи функсияҳои[17]:

$$W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu) = \left\{f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f_a^{(r)};2t)_q \left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi(h)\right\}$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $r \in \mathbb{N}, h \in (0, \pi/2]$ $1 \leq q \leq \infty$ ва μ — адади ихтиёрии интихоб шуда мебошад.

[35]Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2014. Т. 57, № 2. С. 97–102.

Дар кори Н.Айнуллоев[17] исбот шудаст, ки барои қимати додашудаи $\mu \geq 1/2$ ва ҳаргуна $h, t \in (0, \pi/2]$ мажорантаи Φ шарти

$$\frac{\pi}{\pi-2}\int\limits_0^1 \left(1-\cos\frac{\pi h t}{2\tau\mu}\right)_* \left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right)\,dt \leq \frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)} \tag{21}$$

-ро қаноат кунонад, ки дар ин ҷо

$$(1-\cos t)_* = \{1-\cos t,\ \text{агар}\ 0 \leq t \leq \pi; 2\ \text{агар}\ t \geq \pi\},$$

он гоҳ барои ҳаргуна адади натуралии n баробарии

$$d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_q\right) = \frac{\pi}{2(\pi-2)n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right) \tag{22}$$

ҷой дорад.

Шарти (21)-ро мажорантаи $\Phi(u) = u^{\alpha(\mu)}$ қаноат мекунад, ки дар ин ҷо

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi-2)}\int\limits_0^1 t\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2\mu}\right)\,dt. \tag{23}$$

Инчунини дигар $\alpha(1/2) = 4/(3(\pi-2))$ ва $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu) = 2$ мебошад. Азбаски $\alpha(\mu)$ бефосила ва афзуншаванда аст, пас қимати сарҳадии $\alpha = \alpha(\mu)$ нобаробарии

$$4/(3(\pi-2)) \leq \alpha(\mu) \leq 2$$

-ро қаноат мекунонад.

Сохтор ва усули дар корҳои илмии С.Б.Вакарчук[30], С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[32] мавҷудбударо истифода карда, натиҷаи (22)-ро барои фазои умумикардашудаи $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$ паҳн кардан мумкин аст:

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu),H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \tag{24}$$

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.1.1. *Агар барои қимати дода шудаи $\mu \geq 1/2$ ва ҳаргуна $h, t \in (0, \pi/2]$ мажорантаи Φ шарти (21)-ро қаноат кунонад, он гоҳ барои ҳамаи $n \in \mathbb{N}$ ва $0 < \rho \leq 1$ баробарии*

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) = \delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \sup\left\{\left\|f-\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\} =$$

$$= \frac{\pi \rho^n}{2(\pi - 2)n^r} \; \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \tag{25}$$

дуруст аст. Барои ин

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f,z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-1}\right)^r \rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-(\frac{k}{2n-k})^2\right)-1\right]\right\}c_k z^k \tag{26}$$

— усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи $W_a^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ дар фозои метрикии $H_{q,\rho}$, ки дар ин ҷо

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\mu n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt(1-\sin\mu nt)\; dt.$$

Дар параграфи дуюм усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин барои функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидии синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, ки бо вазни $\frac{1}{h}\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right)$ миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайянанд, ёфт шудаанд.

Бигзор $\Phi(x)\,(x \geq 0)$ ихтиёрӣ функсияи мусбати камнашаванда бошад, ки барояш $\Phi(0) = 0$. Барои ҳаргуна қимати додашудаи $\mu \geq 1/2$ синфи функсияҳои[17,28]

$$W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu) = \left\{f \in H_q^{(r)} : \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi(h)\right\}$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty$ ва $h \in (0,\pi/2]$.

Яке аз натиҷаҳои асосиро формулагузорӣ мекунем.

Теоремаи 2.2.1. *Бигзор $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ \mu \geq 1/2$ ва мажорантаи Φ барои ҳамаи $h \in (0,\pi/2]$ маҳдудияти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/(2\mu(n-r))\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos(n-r)t)_*\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right)dt \tag{27}$$

-ро қаноат кунонад.

Он гоҳ барои ҳамаи $1 \leq q \leq \infty$ ва $0 < \rho \leq 1$ барбарии

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\;\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{28}$$

ҷой дорад.

Барои ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои гелфандӣ ва хаттӣ, сохтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ дар фазои $H_{q,\rho}$ бароямон лозим меояд. Бо ин мақсад барои функсияи ихтиёрии $f\in\mathcal{A}(U)$ оператори полиномии хаттии дараҷаи $n-1$-и

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k \tag{29}$$

-ро менависем, ки дар ин ҷо

$$\gamma_{k,r}\overset{def}{=}\frac{2\mu(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\Big(1-\sin\mu(n-r)x\Big)\cos(k-r)xdx,\ k\ge r>1,\ k,r\in\mathbb{N}.$$

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.2.2. *Бигзор функсияи ихтиёрии* $f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$, $\mu\ge 1/2$, $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$, $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$. *Он гоҳ нобаробарии*

$$\|f-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}}\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\;\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{30}$$

дуруст аст.

Агар мажорантаи Φ *барои ҳаргуна қимати* $h\in(0,\pi/2]$ *маҳдудияти (27)-ро қаноат кунонад, он гоҳ нобаробарии (30) беҳтарин ба он маъно мешавад, ки функсияи мавҷудбудаи* $f_1\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ *онро ба баробарӣ табдил медиҳад.*

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби ду тасдиқоти зерин мебошад:

Теоремаи 2.2.3. *Агар барои ҳаргуна* $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, $\mu\ge 1/2$ *мажорантаи* Φ *маҳдудияти (27)-ро қаноат кунонад, он гоҳ ҳангоми* $0<\rho\le 1$ *ва* $1\le q\le\infty$ *баробарии*

$$\pi_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);H_{q,\rho}\right)=\mathscr{E}\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}}=$$

$$=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\;\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right) \tag{31}$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо $\pi_n(\cdot)$ *яке аз* n*-қутрҳои гелфандии* $d^n(\cdot)$ *ё хаттии* $\delta_n(\cdot)$ *мебошад. Оператори бефосилаи хаттии полиномии* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$, *ки бо баробарии (29) муайян шудаст, усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини синфи* $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ *дар фазои* $H_{q,\,\rho}$ *мебошад.*

Ҳамчун натиҷа аз теоремаи 2.2.3 ҳалли масъалаи экстремалии ҳисобкунии аниқи саҳеҳи болоии модули коэффисиентҳои Тейлори $c_n(f)$ барои синфи функсияҳои $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\leq q\leq\infty,\ \mu\geq 1/2)$ мегирем.

Қайд мекунем, ки масъалаи ба ин монанд, барои синфи дигар функсияҳои аналитикӣ пештар дар корҳои С.Б.Вакарчук[30], С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[32] дида баромада шудаст.

Теоремаи 2.2.4. *Ҳангоми иҷро шудани шарти теоремаи 2.2.3 баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup\left\{|c_n(f)|: f\in W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu)\right\}=\frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\ \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{32}$$

ки дар ин $n,r\in\mathbb{N},\ n>r,\ 1\leq q\leq\infty.$

Масъалаи экстремалии қиматҳои аниқи n-қутрҳои маҷмӯи компакти функсияҳо бо масъалаи дорои маълумоти оптималӣ ба монанди барқароркунии оптималӣ ва кодиронии хаттии функсионалӣ аз рӯйи ахбороти дискретӣ алоқамандии зич дорад, барои мисол, қиматҳои функсия ва ҳосилаи он дар нуқтаҳои гирифташуда бо коэффисиентҳои Фурье, коэффисиентҳои Тейлор ва ба монанди инҳо дода шуда, кофта мешаванд. Дар ин банд мо масъалаи барқароркунии оптималӣ ва кодиронӣ дар кори Н.П.Корнейчук[36] оварда шударо дида мебароем.

Бигзор маҷмуи $\mathcal{M}_n\overset{def}{=}\{\mu_1,\mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}$ бо функсионалҳои $\mu_j\in X^*,\ j=\overline{1,n}$ дар фазои нормиронидашавандаи функсионалии X дода шуда бошад, ки дар ин ҷо фазои X^* ба фазои X ҳамроҳшуда мебошад. Маҷмуи $\mathcal{M}_n$-ро ҳамчун усули кодиронӣ дидан мумкин аст, ки барои ҳар як элементи гузошташудаи $f\in X$ вектори ададии

$$\Im(f,\mathcal{M}_n)\overset{def}{=}\left\{\mu_1(f),\mu_2(f),\ \ldots,\ \mu_n(f)\right\}$$

мувофиқ меояд.

Бигзор $\mathcal{P}_n\overset{def}{=}\left\{p_k(z)\right\}_{k=1}^{n}$ ва $\Gamma_n\overset{def}{=}\left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{n}$ — мувофиқан системаҳои ихтиёрии функсияҳои хаттӣ-новобаста аз фазои X ва маҷмӯи коэффисиентҳои ададӣ бошанд. Агар барои вектори $\Im\,(f,\mathcal{M}_n)$ функсияи

[36]Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987. 424 с.

$$U\big(f;\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n,\Gamma_n,z\big)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\ \mu_k(f)\ p_k(z)$$

мувофиқ гузошта шавад, он гоҳ масъалаи барқароркунии функсияи f аз рӯйи ахбороти $\mathfrak{I}$ ҳал карда мешавад, ки он барои синфи дидашавандаи $\mathfrak{M}$ беҳтарин намудро имконият медиҳад. Бузургии

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n)_X=\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-U\big(f;\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n,\Gamma_n\big)\|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ \Gamma_n\in\mathbb{C}^n\Big\}$$

-ро барқароркунии хатогӣ дар синфи $\mathfrak{M}$ меноманд ва бо

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M},X)=\inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n)_X:\ \mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n\Big\}$$

$$\Big(\text{или}\ \ \mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X)=\inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathcal{M}'_n,\mathcal{P}_n)_X:\ \mathcal{M}'_n,\mathcal{P}_n\Big\}\Big),$$

гузориш мекунанд, ки дар ин ҷо $\mathcal{M}'_n$ — маҷмӯи функсионалҳои хаттии маҳдудшудаи фазои X мебошад.

Усули барқароркунии $(\mathcal{M}^*_n,\mathcal{P}^*_n,\Gamma^*_n)$ $\big($ё $\mathcal{M}^{*'}_n,\mathcal{P}^*_n,\Gamma^*_n\big)$, ки барояш

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M},X)=\sup\Big\{\|f-U\big(f;\mathcal{M}^*_n,\mathcal{P}^*_n,\Gamma^*_n\big)\|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}$$

$$\Big(\text{или}\ \ \mathcal{K}_n(\mathfrak{M},X)=\sup\Big\{\|f-U\big(f;\mathcal{M}^{*'}_n,\mathcal{P}^*_n,\Gamma^*_n\big)\|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}\Big),$$

усули барқароркунии оптималӣ (ё хаттӣ оптималӣ) барои функсияи синфи $\mathfrak{M}$ номида мешавад. Барои ин муносибатҳои[36]

$$\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X)=\delta_n(\mathfrak{M},X),$$
$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M},X)\ge d_n(\mathfrak{M},X) \tag{33}$$

ҷой доранд.

Агар $\mathfrak{M}=\widetilde{\mathfrak{M}}+L$ бошад, ки дар ин ҷо $\widetilde{\mathfrak{M}}$ компакт ва L зерфазои охирнок аст, он гоҳ дар нобаробарии (33) рамзи баробарӣ ҷой дорад.

Бо $\mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n)_X$ якбора бузургии

$$\gamma(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n)_X\overset{def}{=}\sup\Big\{\|f_1-f_2\|:\ f_1,f_2\in\mathfrak{M},\ \mathfrak{I}(f_1,\mathcal{M}_n)=\mathfrak{I}(f_2,\mathcal{M}_n)\Big\}$$

-ро, ки ҳамчун хатогии усули кодиронӣ дар синфи $\mathfrak{M}$ бо ёрии маҷмӯи функсионалҳои интихобшудаи $\mathcal{M}_n$ қабул шудааст, дида мебароем. Барои ин

$$\gamma^n(\mathfrak{M},X)=\inf\Big\{\gamma(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n)_X:\ \mathcal{M}_n\Big\}$$

-ро дохил мекунем ва аз ин ҷо

$$\gamma^n(\mathfrak{M},X)\le 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X)$$

ҳосил мекунем.

Агар маҷмӯи $\mathfrak{M}$ симетрӣ марказонидашуда ва барҷаста бошад, он гоҳ

$$\gamma^n(\mathfrak{M}, X) = 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Натиҷае, ки дар теоремаи 2.2.3 гирифта шудааст, бо ёрии гузоришҳои дар боло оварда шуда, формулагузории тасдиқоти зеринро имконият медиҳад:

Теоремаи 2.2.5. *Бигзор $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$; $\mu \geq 1/2$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ ва мажорантаи Φ маҳдудияти (27)-ро қаноат кунонад. Он гоҳ усули хаттии барқароркунии оптималии $\left(\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\right)$ функсияи f аз синфи $W^{(r)}H_q(\Phi;\omega,\mu)$ дар фазои $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ усули хатии беҳтарини $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f,z)$ мебошад, ки аз рӯйи баробарии (29) муайян шудааст ва усули кодиронии беҳтарин бо маҷмӯи функсионалҳои*

$$\mu_k(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

муайян карда мешавад.

Дар ин маврид баробарии

$$\gamma^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu); H_{q,\rho}\right) = 2\mathcal{K}_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu), H_{q,\rho}\right) =$$
$$= 2\mathcal{K}'_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi;\omega_2,\mu), H_{q,\rho}\right) = \frac{\pi\rho^n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)$$

ҷой дорад.

Фурсати муносибро истифода бурда, муаллиф барои роҳбари илмӣ академики АИ ҶТ М.Ш.Шабозов изҳори сипос, барои гузоштани масъала ва диққати ҳаматарафа ҳангоми кор дар диссертатсия, баён мекунад.

Интишороти муаллиф оид ба мавзӯи диссертатсия

Дар нашрияҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти ҶТ:

1. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2015. Т. 58, № 3. С. 179–185.
2. Шабозов М. Ш., Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения и точных значениях некоторых классов аналитических в круге функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 5-6. С. 188–194.
3. Давлатбеков Ф. Д. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций // ДАН РТ. 2016. Т. 59, № 9-10. С. 367–372.
4. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. 2016. 15-25 августа. С. 290–295.

Дар дигар нашрияҳо:

5. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел». 2015. 29-30 октября. С. 46–48.
6. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений». 2015. 27-28 апреля. С. 17–19.
7. Давлатбеков Ф. Д. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения некоторых классов аналитических в круге функций // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции». 2018. 27-28 февраля. С. 43–46.

ШАРҲИ МУХТАСАР

ба диссертатсияи Давлатбеков Фирдавс Давлатбекович дар мавзӯи «Усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин ва қутрҳои маҷмӯи функсияҳо дар фазои Харди» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *функсияи аналитикӣ, фазои Харди, модули бефосилагӣ, қиматҳои сарҳадӣ, модули суфтагӣ, усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарин, мажоранта, n-қутрҳо.*

Муҳимияти мавзуъ. Дар давраи ҳозира оид ба масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо дар давраи воҳидии функсияҳои аналитикӣ ва ҳисобкунии қимати аниқи баъзе қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ корҳои зиёде ба анҷом расидаанд, ки дар онҳо як қатор натиҷаҳои назаррас ба даст оварда шудаанд.

Дар натиҷаҳои К.И.Бабенко, J.T.Scheick, В.И.Белый, В.М.Тихомиров, Л.В.Тайков ва М.З.Двейрин масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо ва ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, асосан барои синфи функсияҳое, ба фазои $H_q,\ 1 \le q \le \infty$ таалуқанд ва бо нормаи ҳосилаи тартиби олӣ ё ҳосилаи тартиби касрӣ маҳдуданд, омӯхта шудаанд.

Дар як қатор корҳои S.D.Fisher, C.A.Micchelli, М.З.Двейрин, A.Pinkus, Л.В.Тайков, Н.Айнуллоев, С.Б.Вакарчук масъалаҳои дар боло зикршуда, барои баъзе синфи функсияҳое, ки ба воситаи модулҳои бефосилагӣ ё суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайян шудаанд, омӯхта шудааст. Дар корҳои дар боло зикр шуда, инчунини дигар қимати аниқи қутрҳои колмогровӣ барои синфҳои номбаршудаи ба фазои $H_q, 1 \le q \le \infty$ таалуқ дошта, ҳисоб карда шудаанд.

Дар корҳои илмии М.Ш.Шабозов бо ҳаммуаллифонаш масъалаҳои наздиккунии беҳтарин ба воситаи бисёраъзогиҳо барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби m-уми ҳосилаи r-уми функсияҳо муайян шудаанд, дар фазои H_2 омӯхта шуда, қимати аниқи n-қутрҳо ҳисоб карда шудаанд.

С.Б.Вакарчук намуди ошкори усулҳои хаттии наздиккунии беҳтаринро ёфта, ба воситаи он n-қутрҳои хаттии синфи функсияҳоеро, ки Л.В.Тайков омӯхта буд, ҳисоб кард. Дар кори илмии якҷояи С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов усулҳои хаттии беҳтарин ва зерфазоҳои оптималӣ, ки қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳо дар давраи радиусаш $R \ge 1$, ки ба воситаи модулҳои суфтагӣ дар фазои $H_{q,R}$ $(1 \le q \le \infty)$ ва фазои вазнии Бергман муайянанд, ёфта шудаанд. Дар рисола, усулҳои хаттии беҳтарин барои синфҳои функсияҳои дигар барои фазои умумитари $H_{q,\rho}\,(q \geq 1,\ 0 \leq \rho < 1)$ ёфта шуда, ба воситаи ин усулҳо n-қутрҳои хаттӣ ҳисоб карда шуданд.

Усулҳои тадқиқотӣ. Дар кор усулҳои муосири тадқиқоти масъалаҳои экстремалӣ ва таҳлили функсионалӣ, ки дорои мазмуни вариатсионӣ мебошанд, истифода шуданд. Барои баҳодиҳӣ аз поёни n-қутрҳо усулҳои маълуми В.М.Тихамиров истифода шуданд.

Мақсад ва масъалаҳои таҳқиқот. Ёфтани усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар давраи воҳидӣ бо ёрии модули бефосилагӣ дода шудаанд; ҳисоб кардани қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни ин синфи функсияҳо; сохтани усулҳои хаттии беҳтарин барои синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ бо вазни миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум додашуда.

Тавсиби натиҷаҳо ва навгониҳои онҳо. Натиҷаҳои дар диссертатсия оварда шуда, чунинанд: усулҳои хаттии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар давраи воҳидӣ, ки бо модули бефосилагӣ муайянанд, сохта шуданд ва қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни ин синфи функсияҳо ҳисоб карда шуданд; усулҳои хаттии беҳтарин барои синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бо вазни миёнакардашудаи модули суфтагии ҳосилаи тартиби r-ум муайянанд, ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои гирифташуда ҳам аҳамияти назариявӣ ва ҳам аҳамияти амалӣ доранд. Онҳоро барои ҳисобкунии n-қутрҳои синфи функсияҳои аналитикӣ дар дигар фазоҳои банахӣ, масалан барои фазои вазндори Бергман, Шилдс, Дюрен ва Гварадзе истифода бурдан мумкин аст.

РЕЗЮМЕ

диссертации Давлатбекова Фирдавса Давлатбековича на тему «Наилучшие линейные методы приближения и поперечники множеств функций в пространстве Харди», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *аналитическая функция, пространство Харди, модуль непрерывности, граничные значения, модуль гладкости, наилучшие линейные методы приближения, мажоранта, n-поперечники.*

Актуальность темы. В настоящее время вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычисления точных значений различных поперечников классов аналитических функций посвящено достаточно много работ, где уже получен целый ряд окончательных результатов. В работах К.И.Бабенко, J.T.Scheick, В.И.Белый, В.М.Тихомирова, Л.В.Тайкова вопросы наилучшего полиномиального приближения и нахождения наилучших линейных методов приближения аналитических в круге функций в основном изучались для классов функций с ограниченным по норме пространством H_q, $1 \leq q \leq \infty$ старшей производной или производной дробного порядка.

В серии работ S.D.Fisher, C.A.Micchelli, М.З.Двейрина, A.Pinkus, Л.В.Тайкова, Н.Айнуллоева, С.Б.Вакарчука указанная задача изучалась для классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости производной r-го порядка. В вышеперечисленных работах вычислены также точные значения колмогоровских n-поперечников для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости производных заданного порядка, принадлежащих пространству $H_q, 1 \leq q \leq \infty$.

В опубликованных работах М.Ш.Шабозова с соавторами задачи наилучшего полиномиального приближения решены для классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ых производных, принадлежащих пространству H_2, а также найдены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций.

С.Б.Вакарчук указал явный вид наилучших линейных методов приближения, реализующих точные значения линейных поперечников для классов функций, рассмотренных Л.В.Тайковым. В совместной работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова указаны наилучшие линейные методы и оптимальные подпространства, реализующие точные значения поперечников для классов аналитических функций в круге радиуса $R \geq 1$, определяемые модулями гладкости в $H_{q,R}\,(1 \leq q \leq \infty)$, и в весовых пространствах Бергмана. В диссертационной работ найдены наилучшие линейные методы приближения для других классов функции в более общем пространстве $H_{q,\rho}\,(q \geq 1,\ 0 \leq \rho < 1)$.

Методы исследования. В работе используются современные методы исследования экстремальных задач вариационного содержания и функционального анализа. При оценке снизу n-поперечников используется известный метод В.М.Тихомирова.

Цели и задачи исследования. Найти наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности; вычислить точные значения различных n-поперечников указанных классов функций; построить наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Полученные результаты и их новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем: построены наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности, и вычислены точные значения различных n-поперечников указанных классов функций; найдены наилучшие линейные методы для классов аналитических в круге функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей гладкости r-ых производных.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть использованы при вычислении n-поперечников классов функций в других банаховых пространствах аналитических функций, например в весовых пространствах Бергмана, Шильдса, Дюрена и Гварадзе.

SUMMARY

Davlatbekov Firdavs Davlatbekovich's dissertation on the topic «Best linear approximation methods and widths sets of functions in the Hardy space» represented on Candidate Degree in Physics and Mathematics sciences on a specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Key words: *analytic function, Hardy space, module continuity,boundary values, modulus of smoothness, best linear approximation methods, majorant, n-widths.*

Actuality of the work. Currently, the best polinominal approximation of analytic in the circle functions and calculations exact values of various widths of classes of analytic functions a lot of works have been devoted, where a number of graduates have already been received telny results.

In the works of K.I.Babenko, J.T.Scheick, V.I.Bely, V.M.Tikhomirov, L.V.Taykov, M.Z.Dvayrin the questions of the best polynomial approximation the best linear methods for analyzing functions in the circle were mainly studied for classes of functions with constraints by the space $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ with the highest derivative or fractional order derivative.

In the series of works by S.D.Fisher, S.D.Fisher and C.A.Micchelli, M.Z.Dveyrin and I.V.Chebanenko, A.Pinkus, L.V.Taykov and N.Aynulloyev, N.Aynulloyev, S.V.Vakarchuk the specified task was studied for classes of functions, given by modules of continuity and smoothness of the derivative of r-th order. In the above works, the exact values of Kolmogorov n-widths for some classes of functions, given by modules of continuity and smoothness of derivatives of a given order belonging to the space $H_q, 1 \leq q \leq \infty$.

In the published works of M.Sh.Shabozov with co-authors of the problem best polynomial approximation of functions from $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ solved for classes of functions defined by modules of continuity and smoothness. Similar problems have

been solved for the function classes of the specified modules by the m-th order continuity of the r-th derivatives belonging to the simple H_2, and also found the exact values of various n-widths specified classes of functions.

S.V.Vakarchuk in his works indicated a clear view of the best linear approximation methods that implement exact widths for classes of functions considered by L.V.Taykov. In collaboration S.V.Vakarchuk and M.Sh.Shabozov indicated the best linear methods and optimal subspaces that implement exact widths for classes of analytic functions in the circle $R \geq 1$, defined by modules smoothness in $H_{q,R}(1 \leq q \leq \infty)$, and the results are applied in weighted Bergman spaces.

In the dissertation work, the study of the above authors in the specified direction.

Methods of research. We use modern methods investigations of extremal problems of variational content and functions national analysis. In estimating the bottom, n-widths are used well known method V.M.Tikhomirov.

Goals and objectives of the reseach. Find the best linear methods approximation of some classes of functions analytic in the unit circle, specified by continuity modules; will calculate the exact values of various n-widths of the indicated classes of functions; build the best linear methods for classes of analytic functions in the circle defined by weight-averaged values of the modulus of smoothness of r-th derivatives.

The obtained results and their novelty. Dissertation results are new and are as follows: the best linear methods of approximation of certain classes of analytic in the unit circle functions defined by modules of continuity, and exact the values of different n-widths of the indicated classes of functions; found best linear methods for classes of analytic functions in a circle, the values of modules of smoothness r-th given by averaged with weight derivatives.

Theoretical and practical value. Received in thesis results have both theoretical and applied value. They can be used to calculate n-widths of function classes in other Banach spaces of analytic functions, for example, in Bergman, Shilds, Duren and Gvaradze weighted spaces.