РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Фарайдунов Осим Косумшоевич

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОСОБЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе – 2019

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: **Шабозов Мирганд Шабозович,**
академик Академии наук Республики Таджикистан, доктор физико-математических наук, профессор

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Азизов Музафар,**
доктор физико-математических наук, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, профессор кафедры математического анализа

Файзмамадова Лолазор,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики и естественно-научных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Защита состоится 18 сентября 2019 г. в 10:00 часов на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-012 на механико - математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2019 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор **Г. Джангибеков**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При исследовании определённого круга инженерных задач, связанных с механикой деформируемого тела, механикой жидкости газа, технической механикой, решением сингулярных интегральных уравнений и т.д., возникает необходимость в вычислении интегралов от функции одной и двух переменных. Поскольку в подавляющем большинстве случаев полученные интегралы невозможно выразить через элементарные функции, то их вычисляют приближённо, а значит существует оптимизационная проблема, связанная с выбором наилучшего метода приближённого интегрирования согласно выбранному критерию оптимальности. Постановки задач, связанных с построением наилучших (оптимальных) квадратурных формул, были сформулированы в 40-х годах двадцатого столетия А.Н.Колмогоровым, а первые результаты по оптимизации квадратурных формул были опубликованы в 50-х годах С.М.Никольским. Дальнейшие результаты в этом направлении исследований были получены в работах Н.П.Корнейчука, В.П.Моторного, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, Б.Д.Боянова, М.И.Левина, В.Ф.Бабенко, М.Ш.Шабозова и многих других. Несмотря на ряд полученных окончательных результатов, благодаря усилиям указанных математиков, большое количество оптимизационных задач, особенно на классах функций нескольких переменных и сингулярных интегралов, до сих пор остаются нерешенными. Также недостаточно изучены и экстремальные задачи, связанные с особенностями на отрезке интегрирования. В указанных направлениях исследований известно намного меньше окончательных результатов, полученных А.Л.Кузминой[1], Л.А.Онеговым[2], В.А.Бойковым[3], М.Ш.Шабозовым[4]. Поэтому рассмотренные в диссертации задачи, связанные с оптимизацией приближённого интегрирования с весом на некоторых классах функций одной и двух переменных, являются актуальными.

---

[1]Кузьмина А.Л. Об одной наилучшей квадратурной формуле для интегралов с ядром Коши. – Изв. вузов. Математика, 1980, т.216, №5, с.28-31.

[2]Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью. – Изв.вузов, Математика, 1981, №9, с.76-79.

[3]Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. – Саратов: Из-во Саратовского университета, 1983. - 210 с.

[4]Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью. – Укр.матем.журнал, 1995, т.47, №9, с.1300-1305.

Цель и задачи исследования

1. Найти наилучшие квадратурные формулы с заданным весом для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси.

2. Найти наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова как для функций одной, так и для функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности.

3. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a,b]$ старшей производной.

4. Найти наилучшую кубатурную формулу для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ p \geq 1$.

Основные методы исследования. В работе используются современные методы функционального анализа, методы исследования экстремальных задач отыскания квадратурных и кубатурных формул, а также метод Н.П.Корнейчука[5] оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены наилучшие квадратурные формулы с заданными весами для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси.

2. Найдены наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова для классов функций одной и двух переменных, задаваемых модулями непрерывности.

3. Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a,b]$ старшей производной.

4. Найдена наилучшая кубатурная формула для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ p \geq 1$.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты по оптимизации квадратурных и кубатурных формул, полученные в диссертационной работе имеют теоретическое и прикладное значение. Они могут быть использованы при приближённом вычислении как обыкновенных

[5]Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных. – Матем. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.

интегральных уравнений, так и сингулярных интегральных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2013-2019 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016г.);
- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации

Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 9 научных работах. Из них 6 статей опубликовано в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 3 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 43 наименований, занимает 81 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В первом параграфе первой главы приводится общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших весовых квадратурных формул, а также определение классов функций, рассматриваемых в дальнейшем.

Рассматривается квадратурная формула

$$\int\limits_a^b q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

(где весовая функция $q(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ может иметь особенности, но интегрируется в смысле главного значения Коши) $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ – вектор коэффициентов,

$$X = \{x_k : a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b\}$$

– вектор узлов, а $R_n(f) := R_n(f; q, P, X)$ – погрешность квадратурной формулы (1) на функции $f(x)$. Если $\mathfrak{M} = \{f(x)\}$ - некоторый класс функций $f(x)$, заданных и определенных на конечном или бесконечном отрезке $[a, b]$, то через

$$R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) = \sup\{|R_n(f; q, P, X)| : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$
$$= \sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\right| : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{2}$$

обозначим наибольшую допустимую погрешность квадратурной формулы (1) на классе функций $\mathfrak{M}$. Если $\mathcal{A}$ - множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (1) имеет смысл, то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = \inf\left\{R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) : \ (P, X) \subset \mathcal{A}\right\}. \tag{3}$$

При этом, если существуют векторы (P^0, X^0) узлов и коэффициентов, для которых достигается нижняя грань в (3), то есть если

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = R_n(\mathfrak{M}; q, P^0, X^0),$$

то квадратурная формула (1) называется *наилучшей* или *оптимальной* квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского[6], а векторы (P^0, X^0) называются наилучшим вектором коэффициентов и узлов квадратурной формулы (1).

[6]Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. - 254 с.

Иногда в число узлов квадратурной формулы (1) включают концы отрезка $[a,b]$, $x_0=a, x_n=b$. При этом на вектор узлов налагают условие

$$X=\{x_k:\ x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\},$$

обязательное включение концов отрезка в число узлов и тогда квадратурная формула (1) принимает вид

$$\int\limits_a^b q(x)f(x)dx=p_0f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}p_kf(x_k)+p_nf(b)+R_n(f). \qquad (4)$$

Квадратурная формула (4) называется квадратурной формулой типа Маркова. В некоторых задачах приближенного вычисления интегралов, когда значения $f(a)$ и $f(b)$ заданы, формула (4) предпочтительнее, чем формула (1).

Приводим определение классов функций, для которых решим экстремальную задачу (3) для квадратурных формул (1) или (4). Класс $H^\omega[a,b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x'')-f(x')|\le\omega\left(|x''-x'|\right), \quad \forall\, x',x''\in[a,b],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0,b-a]$ функция, для которой $\omega(0)=0$. При $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, класс $H^\omega[a,b]$ превращается в класс Гёльдера $H^\alpha[a,b]$:

$$|f(x'')-f(x')|\le|x''-x'|^\alpha, \quad \forall\, x',x''\in[a,b].$$

Очевидно, что класс $H^1[a,b]$ совпадает с классом $W^1[a,b]$ - функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, удовлетворяющую условию $\underset{a\le x\le b}{supvrai}|f'(x)|\le 1$. Обозначим через $W^{(r)}H^\omega[a,b]$ $(r=0,1,\ldots;W^{(0)}H^\omega[a,b]\equiv H^\omega[a,b])$ – множество функций $f(x)\in C^{(r-1)}[a,b]$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r)}(x)$, принадлежащая классу $H^\omega[a,b]$. $W^{(r)}L_p[a,b]$ - класс функций $f(x)$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывна, существует производная $f^{(r)}(x)$ порядка r, принадлежащая пространству $L_p[a,b]$ и удовлетворяющая условию

$$\left\|f^{(r)}\right\|_p:=\left\|f^{(r)}\right\|_{L_p[a,b]}=\left(\int\limits_a^b|f^{(r)}(x)|^pdx\right)^{1/p}\le 1,\ 1\le p<\infty,$$

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{\infty} := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_{\infty}[a,b]} = \underset{a\le x\le b}{supvrai}|f^{(r)}(x)| \le 1,\ p=\infty.$$

При отыскании оптимальных (наилучших) квадратурных формул для сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши и Адамару нам ещё понадобится следующий класс функций: пусть $c \in (a,b)$, где a и b – произвольные фиксированные действительные числа. Обозначим через $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L\left(M;(a,b)\right)$ – множество функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t) = f(c) + |t-c|^{m-1+\alpha} sgn(t-c)\varphi(t),\ c\in(a,b),$$

где $m \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \le 1$, а $\varphi(t) \in W^{(1)}L\left(M;[a,b]\right)$ - класс функций, для которых

$$\|\varphi'\|_{L[a,b]} = \int\limits_a^b |\varphi^{'}(t)|dt \le M.$$

Во втором параграфе первой главы рассматривается задача отыскания наилучшей квадратурной формулы для сингулярного интеграла Адамара

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt, a<c<b, \qquad (5)$$

где $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$. Интеграл (5) понимается в смысле конечной части или главного значения в смысле Коши, то есть когда существует предел

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \frac{\psi(c)}{\varepsilon^{m-1}}\right), \qquad (6)$$

где функция $\psi(c)$ выбирается так, чтобы указанный предел справа в (6) существовал[7]. Для приближённого вычисления сингулярного интеграла (5) введём в рассмотрение квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = Af(c) + \sum_{k=1}^n p_k f(t_k) + R_n(f), \qquad (7)$$

где c и $t_k : a \le t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_n \le b$ – различные узлы, A и p_k – коэффициенты, $R_n(f)$ – погрешность квадратурной формулы на функции f.

[7]Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. 1071 с.

Всюду далее при условии точности квадратурной формул (7) для функции $f(t) = const$ потребуем выполнения равенства

$$A = \frac{1}{m-1}\left[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\right] - \sum_{k=1}^{n} p_k. \tag{8}$$

Таким образом, задача состоит в том, что при выполнении условия (8) требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)\right) = \inf_{(T,P)} R_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b) : T, P\right). \tag{9}$$

Решение задачи (9) при выполнении условия (8) приводится к решению экстремальной задачи отыскания наилучшей весовой квадратурной формулы для класса $W^{(1)}L(M;a,b)$. Отыскание наилучшей квадратурной формулы вида (7) для класса $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)$ при выполнении условии (8) сводится к отысканию наилучшей квадратурной формулы вида

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi) \tag{10}$$

с узлами $t_k \neq c$ $(k = \overline{1,n})$ на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$. Одним из основных результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Среди всевозможных квадратурных формул вида (10) точной для $\varphi(t) \equiv const$, наилучшей на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$ является формула с коэффициентами*

$$A_k = \frac{(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha}{\alpha n},\ k = \overline{1,n}$$

и узлами t_k, являющаяся решениями системы уравнений

$$(b-c)^\alpha - |t_k - c|^\alpha sgn(t_k - c) =$$

$$= \left[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha\right]\left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right),\ k = \overline{1,n}.$$

При этом

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b), \frac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}\right) = \frac{M\left[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha\right]}{2\alpha n},\quad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Заметим, что результат теоремы 1.2.1 остаётся справедливым и для сингулярного интеграла Адамара более общего вида

$$\mathcal{J}_\gamma(f,\tau)=\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{|t-\tau|^\gamma},\quad f\in W_c^{[\gamma]}H^{(\alpha)}L(M;a,b),$$

где $\gamma\in R_+(\gamma\geqslant 1)$ – произвольное число из положительной полуоси и, в отличие от предыдущих параграфов, может принимать нецелые значения, а $[\gamma]$ – целая часть числа γ.

В этом же параграфе решается задача (3) для квадратурной формулы

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}p_kf(t_k)+R_n(f) \tag{11}$$

на классе $W^{(1)}L(M;-1,1)$. Имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Единственной наилучшей на классе* $W^{(1)}L(M;-1,1)$ *квадратурной формулой вида (11), точной для* $f(t)\equiv const$, *имеет вид*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi\right)+R_n(f). \tag{12}$$

Таким образом на всём классе функций $W^{(1)}L(M;-1,1)$ *для точной оценки погрешности наилучшей формулы (12) справедливо оценка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;-1,1),\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\frac{M\pi}{2n}.$$

Из утверждения теоремы 1.2.2 следует, что классическая квадратурная формула Эрмита – Чебышева не является наилучшей квадратурной формулой для класса функций $W^{(1)}L(M;[-1,1])$.

Пользуясь схемой рассуждения, приведенной в работах Ю.М.Гиршовича[8], М.Ш.Шабозова и С.Каландаршоева[9], в этом же параграфе доказаны следующие утверждения

[8]Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале. – Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ-мат. наук., 1975, №24/1, с.121-123.

[9]Шабозов М.Ш., Каландаршоев С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости. – ДАН РТ, 1998, т.41, №10, с.69-75.

Теорема 1.2.3. *Единственной наилучшей на классе* $W^{(1)}L(M;0,+\infty)$, *квадратурной формулой вида*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f),$$

точной для $f(t) \equiv const$, *является формула*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(f). \tag{13}$$

Точная оценка погрешности формулы (13) равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;0,+\infty), \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{M\pi}{4n}.$$

Теорема 1.2.4. *Единственной наилучший квадратурной формулой вида*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f)$$

на классе $W^{(1)}L\,(M,-1,1)$, *точной для* $f(t) = const$, *является формула*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right) + R_n(f). \tag{14}$$

При этом точная оценка погрешности формулы (14) на всём классе $W^{(1)}L\,(M;-1,1)$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\,(M;-1,1)\,, \frac{1}{(1+t)^\alpha}\right) = \frac{M}{2^\alpha(1-\alpha)n}, \quad (0<\alpha<1).$$

В третьем параграфе первой главы рассматривается квадратурная формула Эрмита-Чебышева-Маркова следующего вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = p_0 f(-1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \tag{15}$$

задаваемая векторами $(T;P)$ узлов

$$T=\Big\{t_k:\ -1=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=1\Big\}$$

и коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=0}^n$. Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (15), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка интегрирования: $t_0=-1$ и $t_n=1$, а узлы $t_1,t_2,...,t_{n-1}$ и коэффициенты $p_0,p_1,...,p_n$ следует выбрать оптимальным образом. Здесь доказана следующая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида (15) наилучшей на классе $H^\omega[-1,1]$ является квадратурная формула*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\left\{\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\}+R_n\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \qquad (16)$$

Для оценки погрешности формулы (16) на всём классе функций $H^\omega[-1,1]$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt.$$

В частности, отсюда для класса Гёльдера $H^\alpha[-1,1]$ $(0<\alpha\le 1)$ имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^\alpha[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\frac{\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha}.$$

Пусть $H_2^\omega[a,b]$ — класс функций f, определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых точек $\tau,\tau\pm x\in[a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(\tau+x)+f(\tau-x)-2f(\tau)|\le 2\omega(|x|).$$

Теорема 1.3.2. *Для точной оценки погрешности квадратурной формулы типа Маркова (16) на всём классе $H_2^\omega[-1;1]$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1],\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau.$$

Заметим, что между классами $H^\omega[-1,1]$ и $H_2^\omega[-1,1]$ можно определить промежуточный класс $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1](0\le\alpha\le 1)$ функций $f(x)$, определённых на отрезке $[-1,1]$ и для любых точек $x, x \pm t \in [-1,1]$ удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(x+t)+(1-\alpha)f(x-t)-2f(x)| \leq 2\omega(|t|). \qquad (17)$$

Таким образом, из (17) при $\alpha = 1$ следует неравенство

$$|f(x+t)-f(x)| \leq \omega(|t|), \qquad (18)$$

а при $\alpha = 0$ следующее неравенство

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \leq 2\omega(|t|). \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает следующее включение

$$H^{\omega}[-1,1] \subset H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1] \subset H^{\omega}_{2}[-1,1]. \qquad (20)$$

Имеет место следующая

Теорема 1.3.3. *Среди всевозможных квадратурных формул типа Маркова (15) единственной наилучшей формулой на классе функций* $H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]$ *при любых* α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *является формула (16). При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (16) на всем классе* $H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]$ *равна*

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]\right) = 2n \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega(t)dt.$$

Рассмотрим теперь квадратурную формулу общего вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \qquad (21)$$

задаваемую произвольными векторами узлов

$$T = \{t_k: \ -1 \leq t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \leq 1\}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$, $R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)$ — погрешность формулы на функции f. Требуется найти наилучшую весовую квадратурную формулу вида (21) для класса $H^{\omega}[-1,1]$. Имеет место следующая

Теорема 1.3.4. *Среди всех квадратурных формул вида (21) наилучшей на классах* $H^{\omega}[-1,1]$ *и* $H^{\omega}_{2}[-1,1]$ *является классическая квадратурная формула Эрмита-Чебышёва*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \qquad (22)$$

При этом для оценки погрешности формулы (22) на указанных выше классах функций справедливы равенства

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=$$

$$=2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau.$$

В четвертом параграфе первой главы мы дадим приложение теорем 1.2.2 и 1.3.1 к более общему сингулярному интегралу

$$\iint\limits_{(S)}\frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx, \tag{23}$$

имеющему сингулярности как в центре круга $r=0$, так и на границе круга $r=\pm1$. Отметим, что необходимым условием существования двумерного сингулярного интеграла (23) является условие

$$\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=0. \tag{24}$$

Интеграл (23) после перехода к полярным координатам сводится к следующему виду

$$\iint\limits_{(S)}\frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx=\int\limits_0^1\frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{25}$$

где положено

$$F_u(r)=\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)u(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta,$$

причем в силу (24) имеем

$$F_u(0)=\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)u(0,0)d\theta=u(0,0)\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=0. \tag{26}$$

Обозначим через $W_0^{(1)}(M;S)$ класс функций $u(x_1,x_2)$, и непрерывных в круге S и удовлетворяющих условию $F_u(r)\in W_0^{(1)}(M;0,1)$. Аналогичным образом класс $H^\omega(S)$ – функций $u(x_1,x_2)\subset C(S)$, таких, для которых $F_u(r)\in H^\omega[0,1]$.

Для нахождения наилучшей квадратурной формулы для сингулярного интеграла (23) в силу (25) введём в рассмотрение квадратурную формулу

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sum_{k=1}^n p_k F_u(r_k) + R(F_u), \tag{27}$$

которая задана векторами узлов $X=\{r_k\}_{k=1}^n$, $(0<r_1<...<r_n<1)$ и коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(F_u)=R_n(F_u;X,P)$ - погрешность формулы (27). Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Среди всевозможных кубатурных формул вида (27) наилучшей для класса функций $W_0^{(1)}(M;S)$ является формула*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n p_k F_u\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(F_u). \tag{28}$$

При этом для погрешности наилучшей кубатурной формулы (28) на всём классе функций $W_0^{(1)}(M;S)$ справедлива точная оценка

$$\mathcal{E}\big(W_0^{(1)}(M;S)\big) = \frac{\pi M}{4n}.$$

Применяя теорему 1.3.1 к формуле (27), приходим к следующему утверждению

Теорема 1.4.2. *Среди всевозможных кубатурных формул вида (27) наилучшей для класса функций $H^\omega(S)$ является формула*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left\{\frac{F_u(0)+F_u(1)}{2} + \sum_{k=1}^n F_u\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n\left(F_u;\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right). \tag{29}$$

При этом для оценки погрешности формулы (29) на всём классе функций $H^\omega(S)$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_n\big(H^\omega(S)\big) = n\int\limits_0^{\pi/n}\omega(t)dt.$$

В частности, для класса Гельдера $H^\alpha[0,1]$ $(0<\alpha\le 1)$

$$\mathcal{E}_n\left(H^\alpha(S);\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right)=\frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\ (0<\alpha\le 1).$$

Во второй главе диссертации решаются экстремальные задачи отыскания наилучших кубатурных формул для различных классов функций.

В первом параграфе второй главы приводится обобщение результатов третьего параграфа первой главы для двумерного случая. Для функции $f(x,y)$, заданных и интегрируемых на прямоугольнике
$Q=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$ рассмотрим кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f;q), \tag{30}$$

определяемую вектором $(X,Y;P)$ узлов

$$X:=\{x_k: a=x_0<x_1<...<x_{m-1}<x_m=b\},$$

$$Y:=\{y_i: c=y_0<y_1<...<y_{n-1}<y_n=d\}$$

и коэффициентов $P=\{p_{ki}\}_{k=0,i=0}^{m,n}$, а неотрицательная весовая функция $q(x,y)$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле Римана в области $Q, R_{mn}(f,q)=R_{mn}(f;q;X,Y;P)$ – погрешность формулы (30) на функцию f. Точки прямоугольника Q иногда обозначим через $M=M(x,y)$, а узлы решётки через $M_{kl}:=M(x_k,y_l)$ $(k=\overline{0,m};\ l=\overline{0,n})$.

Всюду далее введём в рассмотрении векторов узлов и коэффициентов $(X,Y;P)$, для которых кубатурная формула (30) имеет смысл, то есть только те векторов $(X,Y;P)$ для которых значение интеграла в левой части (30) приближённо равно кубатурной сумме стоящей в правой части равенства (30).

Напомним общую постановку экстремальной задачи отыскания наилучших или оптимальных весовых кубатурных формул в смысле С.М.Никольского[6,c.176].

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс заданных и определённых в области Q функций $\{f\}$, то положим

$$R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P)=\sup\{|R_{mn}(f;q;X,Y;P)|: f\in\mathfrak{M}\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := \inf\{R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P) : (X,Y;P)\} \tag{31}$$

и указать векторы узлов и коэффициентов $(X^0,Y^0;P^0)$ $(X^0 = \{x_k^0\}, Y^0 = \{y_i^0\}, P^0 = \{p_{ki}^0\})$, на котором реализуется нижняя грань в (31), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := R_{mn}(\mathfrak{M};q;X^0,Y^0;P^0).$$

Кубатурная формула (30) с решёткой узлов $M_{ki}^0 = (x_k^0, y_i^0)$ и коэффициентов p_{ki} даёт наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди кубатурных формул вида (30) и в этом смысле является *наилучшей* или *оптимальной* для класса функций $\mathfrak{M}$.

Отметим, что наилучшие весовые квадратурные и кубатурные формулы для некоторых классов функций найдены в работах А.Л.Кузьмина[1], Л.А.Онегова[2], М.Ш.Шабозова[4] и Ю.Гиршовича[8]. Приведём определение класса функций двух переменных, для которых решим задачу (31) для конкретных весовых функций.

Будем рассматривать класс $H^\omega(\rho_p, Q)$ функций $f(x,y)$, заданных и непрерывных на Q и таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega\left[\rho_p(M', M'')\right], \tag{32}$$

где $\rho_p(M',M'')$ – $l_p(1 \le p < \infty)$ - расстояние между точками $M'(x',y')$ и $M''(x'',y'')$ из Q: $\rho_p(M',M'') = \sqrt[p]{|x'-x''|^p + |y'-y''|^p}$ $(1 \le p < \infty)$, а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \le t \le \sqrt[p]{(b-a)^p + (d-c)^p}$, $(1 \le p < \infty)$ модуль непрерывности. Сформулируем основной результат параграфа

Теорема 2.1.1. *Пусть*

$$Q = \{-1 \le x, y \le 1\}, \quad q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Тогда среди всех кубатурных формул вида (30) наилучшей для класса $H^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \le p < \infty)$ *является обобщённая формула трапеций следующего вида*

$$\iint\limits_{(Q)} \frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{mn}\Big\{\frac{1}{4}[f(-1,-1) + f(-1,1) + f(1,-1) + f(1,1)] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f\left(-1,\cos\frac{i\pi}{n}\right)+f\left(1,\cos\frac{i\pi}{n}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\cos\frac{k\pi}{m},-1\right)+f\left(\cos\frac{k\pi}{m},1\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\cos\frac{k\pi}{m},\cos\frac{i\pi}{n}\right)\Big\}+R_{mn}(f,q). \tag{33}$$

При этом точная оценка погрешности наилучшей кубатурной формулы (33) равна

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p Q),q\right)=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \tag{34}$$

Пусть $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)\quad(1\le p\le\infty)$ - класс функций $f(x,y)$, определённых в квадрате $Q=\{-1\le x,y\le 1\}$, для которых в точках $(x,y)\in Q$ и $(x\pm t,y\pm\tau)\in Q$ выражение

$$|f(x+t,y+\tau)+f(x+t,y-\tau)+f(x-t,y+\tau)+f(x-t,y-\tau)-4f(x,y)|\le 4\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right).$$

Легко проверить, что имеет место включение $H^{\omega}(\rho_p,Q)\subset\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$, то есть вновь введенный класс функций $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$ шире, чем соответствующий класс $H^{\omega}(\rho_p,Q)$. Тем не менее имеет место следующая

Теорема 2.1.2. *Среди всех кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)}\frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f,q)$$

с произвольными векторами узлов и коэффициентов $(X,Y;P)$ наилучшей для класса $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$, $(1\le p\le\infty)$ является формула (33). При этом для погрешности формулы (33) справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q),q\right)=\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p,Q),q\right)=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau, \tag{35}$$

где величина, стоящая в правой части равенста (35), совпадает с соотношениями (34).

Из теоремы 2.1.2 вытекает следующее

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.2 справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, G)) =$$
$$= \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, G)) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau.$$

Во втором параграфе экстремальная задача (31) рассматривается для $q(x, y) \equiv 1$ и некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности от расстояния между точками решётки узлов области, а именно рассматривается кубатурная формула

$$\iint\limits_{(Q)} f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f), \tag{36}$$

определяемая вектором $(X, Y; P)$ узлов $X = \{x_k : a \le x_1 < x_2 < ... x_{m-1} < x_m \le b\}$, $Y = \{y_l : c \le y_1 < y_2 ... < y_{n-1} < y_n \le d\}$ и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = \overline{1, m};\ l = \overline{1, n})$, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f : X, Y; P)$ – погрешность формулы на функции $f(x, y)$.

В качестве $\mathfrak{M}$ во втором параграфе рассмотрен класс $H^{\omega}(\rho_p; Q)$ – функций $f(x, y)$, определённых на Q, для любых двух точек $(x^{'}, y^{'}), (x^{''}, y^{''}) \in Q$ удовлетворяющих условию

$$|f(x^{'}, y^{'}) - f(x^{''}, y^{''})| \le \omega\left(\sqrt[p]{|x' - x''|^p + |y' - y''|^p}\right), (1 \le p < \infty). \tag{37}$$

Сформулируем основной результат второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.1. *Среди всех кубатурных формул вида (36) наилучшей для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ является формула*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x, y) dx dy = 4h\eta \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2m},\ c + (2l-1)\frac{d-c}{2n}\right) + R_{mn}(f), \tag{38}$$

При этом

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q)) = 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^{\eta} \omega(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}) dt d\tau,\ 1 \le p < \infty.$$

Отметим, что из теоремы 2.2.1 в случае $p = 2$ следует результат Н.П.Корнейчука[5]. Приводим обобщение теоремы 2.2.1 для класса $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), 1 \le p < \infty$

Теорема 2.2.2. *Среди всех кубатурных формул вида (36) наилучшей для класса* $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p; Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ *является формула (38). При этом точная оценки погрешности на классах* $H^{\omega}(\rho_p; Q)$ *и* $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p; Q)$ *совпадают*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p; Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p; Q)\right) = 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau.$$

В заключении диссертации излагаются итоги проведённого исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Выражаю благодарность своему научному руководителю академику АН Республики Таджикистан, доктору физико-математических наук, профессору Мирганду Шабозовичу Шабозову за полезные советы, обсуждения и поддержку.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК РТ и ВАК РФ:

1. Фарайдунов О.К. Об оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва. Изв.АН РТ. Отд.физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2013, №4(153), с. 47-56.
2. Фарайдунов О.К. О приближении суммами Фурье-Чебышёва в L_2 и значение поперечников некоторых классов функций. ДАН РТ, 2014, т. 57, №5, с. 352-362.
3. Фарайдунов О.К. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярного интеграла Адамара. ДАН РТ, 2015, т. 58, №6, с. 476 - 482.
4. Фарайдунов О.К. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом и значение поперечников некоторых функциональных классов. ДАН РТ, 2016, т. 59, №3-4, с. 106-113.
5. Фарайдунов О.К. О погрешности наилучших весовых квадратурных формул для некоторых классов функций. ДАН РТ, 2016, т. 59, №9-10, с. 361 - 366.
6. Фарайдунов О.К. Оценки погрешности квадратурной формулы Чебышёва-Эрмита на некоторых классах функций. Труды международной летней математической школы-конференции С.Б. Стечкина по теории функций, 2016, с. 256-259.

В других изданиях:

7. Фарайдунов О.К. Наилучшая квадратурная формула для сингулярного интеграла Адамара. Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Душанбе, 2015, с. 51-53.
8. Фарайдунов О.К. Приближение в среднем алгебраическими полиномами с весом. Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел. Душанбе, 2015, с. 56-57.
9. Фарайдунов О.К. О погрешности весовых квадратурных формул типа Маркова. Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций. Душанбе, 2018, с. 162-164.

РЕЗЮМЕ

диссертации Фарайдунова Осима Косумшоевича на тему «Некоторые оптимальные квадратурные формулы для особых и многомерных интегралов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, погрешность, модуль непрерывности, двумерный сингулярный интеграл, кубатурная формула, экстремальная задача, вектор коэффициентов и узлов.*

Актуальность темы. При исследовании определённого круга инженерных задач, связанных с механикой деформируемого тела, механикой жидкости газа, технической механикой, решением сингулярных интегральных уравнений и т.д. возникает необходимость в вычислении интегралов от функции одной и двух переменных. Поскольку в подавляющем большинстве случаев полученные интегралы невозможно выразить через элементарные функции, то их вычисляют приближённо, а значит существует оптимизационная проблема, связанная с выбором наилучшего метода приближённого интегрирования согласно выбранному критерию оптимальности. Постановки задач, связанных с построением наилучших (оптимальных) квадратурных формул были сформулированы в 40-х годах двадцатого столетия А.Н.Колмогоровым, а первые результаты по оптимизации квадратурных формул были опубликованы в 50-х годах С.М.Никольским. Дальнейшие результаты в этом направлении исследования были получены в работах Н.П.Корнейчука, В.П.Моторного, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, Б.Д.Боянова, М.И.Левина, В.Ф.Бабенко, М.Ш.Шабозова и многих других. Несмотря на ряд полученных окончательных результатов, благодаря усилиям указанных математиков, большое количество оптимизационных задач, особенно на классах функций нескольких переменных и сингулярных интегралов, до сих пор остаются нерешенными. Также недостаточно изучены и экстремальные задачи, связанные с особенностями на отрезках интегрирования. В указанных направлениях исследований известно намного меньше окончательных результатов, полученных А.Л.Кузминой[1], Л.А.Онеговым[2], В.А.Бойковым[3], М.Ш.Шабозовым[4]. Поэтому рассмотренные в диссертации задачи, связанные с оптимизацией приближённого интегрирования с весом на некоторых классах функций одной и двух переменных, являются актуальными.

Методы исследования. В работе используются современные методы функционального анализа, методы исследования экстремальных задач отыскания квадратурных и кубатурных формул, а также метод Н.П.Корнейчука[5] оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Цель и задачи исследования. Найти наилучшие квадратурные формулы с заданным весом для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси; найти наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова как для функций одного, так и для функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности; найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченными по норме пространства $L_1[a,b]$ старшей производной; найти наилучшую кубатурную формулу для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие основные результаты: найдены наилучшие квадратурные формулы с заданными весами для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси; найдены наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова для классов функций одной и двух переменных, задаваемых модулями непрерывности; найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a,b]$ старшей производной; найдена наилучшая кубатурная формула для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты по оптимизации квадратурных и кубатурных формул, полученные в диссертационной работе, имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быт использованы при приближённом вычислении как обыкновенных интегральных уравнений, так и сингулярных интегральных уравнений..

ШАРҲИ МУХТАСАР

ба диссертатсияи Фарайдунов Осим Косумшоевич «Баъзе формулаҳои квадратурии оптималӣ барои интегралҳои махсус ва интегралҳои бисёрченака» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 - таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *формулаи квадратурии оптималӣ, хатогӣ, модули бефосилагӣ, интеграли снгулярии дученака, формулаи кубатурӣ, масъалаи экстремалӣ, вектори коэффисиентҳо ва гиреҳҳо.*

Муҳимияти мавзӯъ. Ҳангоми омӯзиши доираи муайяни масъалаҳои муҳандисӣ, ки бо механикаи ҷисми диформиронидашаванда, механикаи гази моеъ, механикаи техникӣ, ҳали муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва ғайраҳо алоқамандии зич доранд, зарурият барои ҳисоб кардани интегралҳо аз функсияҳои як ва дутағйирёбанда ба миён меояд. Азбаски, дар бисёр ҳолатҳо интегралҳои ҳосилшударо ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода кардан ғайри имкон аст, он гоҳ онҳо тақрибан ҳисоб карда мешаванд, яъне масъалаи оптимизатсиякуние мавҷуд аст, ки бо методи тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳо вобаста аст. Гузориши масъала оиди ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин дар солҳои 40 - уми асри XX аз тарафи А.Н. Колмогоров таҳия шудааст, аммо нахустин натиҷаҳо оид ба оптимизатсияи формулаҳои квадратурӣ дар солҳои 50-ум С.М. Николский нашр намуд.

Дар ин самт натиҷаҳои минбаъда дар корҳои Н.П. Корнейчук, В.П. Моторный, Н.Е. Лушпай, А.А. Лигун, А.А. Женсыкбаев, Б.Д. Боянов, М.И. Левин, В.Ф. Бабенко, М.Ш. Шабозов ва ғайраҳо тадқиқ карда шудаанд. Сарфи назар аз як қатор натиҷаҳои охирин, ки бо кушиши математикони дар боло зикршуда ба даст омадаанд, шумораи зиёди масъалаҳои оптимизатсионӣ, махсусан дар синфи функсияҳои якчандтағйирёбанда ва интегралҳои сингулярӣ то ҳол ҳали худро наёфтаанд. Инчунин тадқиқи масъалаҳои экстремалии интегронӣ, ки порчаи интегронӣ нуқтаҳои махсуси каниш дорад, пурра омӯхта нашудаанд. Дар самти тадқиқоти қайдшуда фақат натиҷаҳои охирини А.Л. Кузмина[1], Л.А. Онегов[2], В.А. Бойков[3] ва М.Ш. Шабозов[4] маълуманд. Аз ин сабаб, масъалаҳои дар диссертатсия дида баромадашуда, ки бо оптимизатсияи интегронии тақрибӣ бо вазн дар баъзе синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда алоқаманданд, хеле муҳим мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Дар диссертатсия методҳои замонавии таҳлили функсионалӣ, методи тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ барои ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, инчунин, методи Н.П. Корнейчук[5] барои аз поён баҳодиҳии хатогии квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратурӣ ба нул мубаддал мегардад, истифода шудаанд.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо додашуда дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ; ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии намуди Марков барои синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайян карда мешаванд; ёфтани формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳое, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарини функсия дар фазои $L_1[a, b]$ муайян мешаванд; ёфтани формулаи беҳтарини кубатурӣ барои синфи $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ 1 \le p \le \infty$.

Тавсиби натиҷаҳо ва навгониҳои онҳо. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд: формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо додашуда дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ ёфта шудаанд; формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии беҳтарини намуди Марков барои функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайян карда шудаанд; формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳое, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарин функсия дар фазои $L_1[a,b]$ муайян мешаванд; формулаи кубатурии беҳтарин барои синфи $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ 1 \le p \le \infty$ ёфта шуд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳо оид ба оптимизатсиякунии формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, дорои арзишҳои назариявӣ ва амалӣ мебошанд. Чунин натиҷаҳо метавонанд барои ҳисобкунии тақрибии ҳам муодилаҳои интегралии умумӣ ва ҳам муодилаҳои интегралии сингулярӣ истифода карда шаванд.

SUMMARY

of the thesis Faraidunov Osim Qosumshoevich on the topic «Some optimal square formulas for special and multidimensional integrals» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01. - real, complex, and functional analysis

Key words: *optimal quadrature formula, error, modulus of continuity, two-dimensional singular integral, cubature formula, extremal problem, vector of coefficients and nodes.*

Actuality of the work. When researching a specific range of engineering problems related to the mechanics of a deformable body, gas fluid mechanics, technical mechanics equations, etc. it becomes necessary to calculate the integrals of a function of one and two variables. Since in the overwhelming majority of cases the obtained integrals cannot be expressed in terms of elementary functions, they are calculated approximately, which means there is an optimization problem associated with choosing the best approximate integration method according to the chosen optimality criterion. The formulation of tasks related to the construction of the best (optimal) quadrature formulas was formulated by A.N.Kalmagorov in the 40s of the twentieth century, and the first results on the optimization of quadrature formulas were published in the 50s by S.M.Nikolskiy. Further results in this direction were obtained in the works

of N.P.Korneychuk, V.P.Motorny, N.E.Lushpay, A.A.Liguna, A.A.Zhensikbaeva, B.D.Boyanova, M.I.Levin, V.F.Babenko, M.Sh.Shabozov and many others. Despite a number of final results, thanks to the efforts of these mathematicians, a large number of optimization problems, especially in the classes of functions of several variables and singular integrals, still remain unsolved. Also, extremum problems associated with the features on the integration segment are also insufficiently studied. In these areas of research, much less final results obtained by A. L. Kuamina[1], L. A. Onegov[2], V. A. Boikov[3], M. Sh. Shabozov[4]. Therefore, the problems considered in the thesis related to the optimization of approximate integration with a weight on some classes of functions of one and two variables are relevant.

Methods of research. The work uses modern methods of functional analysis, methods for studying extremal problems of finding quadrature and cubature formulas, as well as N. P. Korneychuk[5], method of estimating the error from below and quadratures on classes of functions that reverse the quadratic sum.

Purpose and objectives of the research. To find the best quadrature formulas with a given weight for classes of functions defined by continuity modules on a finite segment and on a half-line to find the best quadrature and cubature formulas of Markov type for both functions one and two functions defined by modules of continuity to find the best weighted quadrature formulas for classes of functions with constraints in the norm , the space $L_1[a,b]$ of the highest derivative; to find the best cubature formula for class $H^\omega(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

The obtained results and their novelty. The following main results were obtained in the thesis: the best quadrature formulas with given weights were found for the functional classes defined by the moduli of continuity on a finite segment and on a semi-axis ; the best quadrature and cubature formulas of Markov type were found for classes of functions of one and two variables given by continuity modules ; the best weighted quadrature formulas for classes of functions with a norm-bounded space $L_1[a,b]$ of the highest derivative were found; was found the best cubature formula for the class $H^\omega(\rho_p, Q),\ 1 \leq p < \infty$.

Theoretical and practical value. Optimization results quadrature and cubature formulas obtained in the thesis works have both theoretical and applied value. They can life is used in the approximate calculation as ordinary integral equations, and singular integral equations.

Подписано в печать 30.04.2019.
Объем 1,5 п.л. Формат 60 × 84 1/16.
Тираж 100 экз. Заказ № 18.

Отпечатано в ООО «Mehroj Graf»,
проспект С.Айни, 126.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Фарайдунов Осим Қосумшоевич

БАЪЗЕ ФОРМУЛАҲОИ КВАДРАТУРИИ ОПТИМАЛӢ БАРОИ ИНТЕГРАЛҲОИ МАХСУС ВА БИСЁРЧЕНАКА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертасия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2019

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ: **Шабозов Мирганд Шабозович,**
академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ: **Азизов Музафар,**
доктори илмҳои физикаю математика, Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ, профессори кафедраи таҳлили математикӣ

Файзмамадова Лолазор,
номзади илмҳои физикаю математика, сармуаллими кафедраи математикаи олӣ ва фанҳои табиӣ-илмии Донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон

МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА: Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Ғафуров

Ҳимоя 18 сентябри соли 2019 соати 10:00 дар Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-012 дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонии: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи маркази Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат "___" ___________ соли 2019 фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор **Г. Ҷангибеков**

Тавсифи умумии кор

Муҳимияти мавзӯъ. Ҳангоми омӯзиши доираи муайяни масъалаҳои муҳандисӣ, ки бо механикаи ҷисми деформиронидашаванда, механикаи гази моеъ, механикаи техникӣ, ҳали муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва ғайраҳо алоқамандии зич доранд, зарурият барои ҳисоб кардани интегралҳо аз функсияҳои як ва дутағйирёбанда ба миён меояд. Азбаски, дар бисёр ҳолатҳо интегралҳои ҳосилшударо ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода кардан ғайриимкон аст, он гоҳ онҳоро тақрибан ҳисоб мекунанд, яъне масъалаи оптимизатсиякуние мавҷуд аст, ки бо интихоби методи тақрибӣ мувофиқи критерияи оптималӣ ҳисоб кардани интегралҳо вобаста аст. Гузориши масъала оиди ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин дар солҳои 40-уми асри бист аз тарафи А.Н. Колмогоров таҳия шудааст, аммо нахустин натиҷаҳо оид ба оптимизатсияи формулаҳои квадратурӣ дар солҳои 50-ум С.М. Николский нашр намуд.

Дар ин самт натиҷаҳои минбаъда дар корҳои Н.П. Корнейчук, В.П. Моторный, Н.Е. Лушпай, А.А. Лигун, А.А. Женсыкбаев, Б.Д. Боянов, М.И. Левин, В.Ф. Бабенко, М.Ш. Шабозов ва ғайраҳо тадқиқ карда шудаанд. Сарфи назар аз як қатор натиҷаҳои охирин, ки бо кушиши математикони дар боло зикршуда ба даст омадаанд, шумораи зиёди масъалаҳои оптимизатсионӣ, махсусан дар синфи функсияҳои якчандтағйирёбанда ва интегралҳои сингулярӣ то ҳол ҳали худро наёфтаанд. Инчунин тадқиқи масъалаҳои экстремалии интегронӣ, ки порчаи интегронӣ нуқтаҳои махсуси каниш дорад, пурра омӯхта нашудаанд. Дар самти тадқиқоти қайдшуда фақат натиҷаҳои охирини А.Л. Кузмина[1], Л.А. Онегов[2], В.А. Бойков[3] ва М.Ш. Шабозов[4] маълуманд. Аз ин сабаб, масъалаҳои дар диссертатсия дида баромадашуда, ки бо оптимизатсияи интегронии тақрибӣ бо вазн дар баъзе синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда алоқамананд, хеле муҳим мебошанд.

[1]Кузьмина А.Л. Об одной наилучшей квадратурной формуле для интегралов с ядром Коши. – Изв. вузов. Математика, 1980, т.216, №5, с.28-31.

[2]Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью. – Изв.вузов, Математика, 1981, №9, с.76-79.

[3]Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. – Саратов: Из-во Саратовского университета, 1983. - 210 с.

[4]Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью. – Укр.матем.журнал, 1995, т.47, №9, с.1300-1305.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот.

1. Ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо додашуда дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ;

2. Ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии намуди Марков барои синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайян карда мешаванд;

3. Ёфтани формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳое, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарин дар фазои $L_1[a,b]$ муайянанд;

4. Ёфтани формулаи беҳтарини кубатурӣ барои синфи $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ p \geq 1$.

Усулҳои тадқиқот. Дар диссертатсия методҳои замонавии таҳлили функсионалӣ, методи тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ барои ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, инчунин, методи Н.П. Корнейчук[5] барои аз поён баҳодиҳии хатогии квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратурӣ ба нул мубаддал мегардад, истифода шудаанд.

Навгонии натиҷаҳои тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

1. Формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ додашуда дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ ёфта шудаанд;

2. Формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии беҳтарини намуди Марков барои функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайянанд, ёфта шудаанд;

3. Формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳо, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарин функсия дар фазои $L_1[a,b]$ муайянанд, ёфта шудаанд;

4. Формулаи кубатурии беҳтарин барои синфи $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ \ p \geq 1$ ёфта шуд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳо оид ба оптимизатсиякунии формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, дорои арзишҳои назариявӣ ва амалӣ мебошанд. Чунин натиҷаҳо метавонанд барои ҳисобкунии тақрибии ҳам муодилаҳои интегралии умумӣ ва ҳам муодилаҳои интегралии сингулярӣ истифода шаванд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия якчанд маротиба дар семинарҳои илмӣ ва конфренсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- семинари шуъбаи назарияи функсияҳо ва таҳлили функсионалии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АИ ҶТ М.Ш.Шабозов (Душанбе, солҳои 2013-2019);
- конференсияи илмии байналхалқии «Проблемаҳои муосири математика ва таълими он» (Хуҷанд, 28-29 июни соли 2014);
- конференсияи илмии байналхалқии «Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (Душанбе, 27-28 апрели соли 2015);
- конференсияи илмии байналхалқии «Таҳлили математикӣ, муодилаҳои дифференсиалӣ ва назарияи ададҳо» (Душанбе, 29-30 октябри с. 2015);
- хонишҳои Мактаб-конференсияи математикии тобистонаи байналхалқии С.Б.Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Тоҷикистон, Душанбе, 15-25 августи соли 2016);
- конференсияи илмии байналхалқии «Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канории назарияи функсияҳо»(Душанбе, 27-28 феврали соли 2018).

Интишорот

Натиҷаҳои муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 9 мақола дарҷ гардидаанд. Аз ҷумла 6 мақола дар нашрияҳои тақризшавандаи рӯихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия мансуббуда ва 3 мақола дар осори конфронсияҳои байналхалқӣ чоп шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия

Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аз 43 номгӯй, ҳамагӣ 81 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст: рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Мӯҳтавои мухтасари диссертатсия

Дар параграфи якуми боби якум гузориши умумии масъалаҳои экстремалӣ барои ёфтани формулаҳои квадратурии вазндори беҳтарин, инчунин таърифи синфи функсияҳо, ки минбаъд баррасӣ мешаванд, дода шудааст. Формулаи квадратурии

$$\int_a^b q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f) \tag{1}$$

(дар инҷо функсияи вазндори $q(x) \geq 0$ дар порчаи $[a,b]$ метавонад дорои махсусият бошад, аммо бо маънои қимати асосии Коши интегронида мешавад) дида баромада шудааст, $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$ – вектори коэффисиентҳо,

$$X = \{x_k : a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b\}$$

– вектори гиреҳҳо ва $R_n(f) := R_n(f; q, P, X)$ – хатогии формулаи квадратурии (1) барои функсияи $f(x)$ мебошанд. Агар $\mathfrak{M} = \{f(x)\}$ - баъзе синфи функсияҳои $f(x)$, ки дар порчаи охирнок ё беохири $[a,b]$ муайян ва дода шудааст, он гоҳ ба воситаи

$$R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) = \sup\{|R_n(f; q, P, X)| : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int_a^b q(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\right| : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{2}$$

калонтарин хатогии имконпазири формулаи квадратурии (1) дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ ишора мекунем. Агар $\mathcal{A}$ - маҷмӯи вектори гиреҳҳо ва коэффисиентҳо, ки барояшон формулаи квадратурии (1) маъно дорад, он гоҳ талаб карда мешавад, ки бузургии

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = \inf\{R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) : \ (P, X) \subset \mathcal{A}\} \tag{3}$$

ёфта шавад. Агар вектори гиреҳҳо ва коэффисиентҳои (P^0, X^0) мавҷуд бошанд, ки барояшон ҳудуди поёнӣ дар (3) ёфта шудааст, яъне агар

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = R_n(\mathfrak{M}; q, P^0, X^0),$$

бошад, он гоҳ формулаи квадратурии (1) формулаи квадратурии *беҳтарин* ё *оптималӣ* бо мафҳуми С.М.Никольский[5] дар синфи $\mathfrak{M}$ номида мешавад.

[5] Никольский С.М.Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. - 254 с.

Векторҳои (P^0, X^0) бошанд, беҳтарин векторҳои коэффисиентҳо ва гиреҳҳои формулаи квадратурии (1) номида мешаванд.

Баъзан дар шумораи гиреҳҳои формулаи квадратурии (1) нуқтаҳои канории порчаи $[a, b]$ $(x_0 = a, x_n = b)$ дохил карада мешаванд. Бинобар ин дар вектори гиреҳҳо шарти зерин гузошта мешавад

$$X = \{x_k : \ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

ки дохилкунии нуқтаҳои канории порча дар шумораи гиреҳҳо ҳатмӣ мебошад ва он гоҳ формулаи квадратурии (1) намуди зеринро мегирад:

$$\int\limits_a^b q(x)f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f). \tag{4}$$

Формулаи квадратурии (4) формулаи квадратурии намуди Марков номида мешавад. Дар баъзе масъалаҳои ҳисобкунии тақрибии интегралҳо, ки қиматҳои $f(a)$ ва $f(b)$ дода шудаанд, формулаи (4) нисбат ба формулаи (1) афзалиятноктар мебошад.

Таърифи синфи функсияҳоро медиҳем, ки барояшон масъалаи экстремалии (3)-ро барои формулаҳои квадратурии (1) ё (4) ҳал мекунем. Синфи $H^\omega[a, b]$ – маҷмӯи функсияҳои дар порчаи $[a, b]$ бефосила, ки шарти зеринро қонеъ мекунанд

$$|f(x'') - f(x')| \leq \omega\left(|x'' - x'|\right), \quad \forall\, x', x'' \in [a, b],$$

ки дар ин ҷо $\omega(t)$ – модули бефосилагии додашуда дар порчаи $[0, b-a]$-и функсияи афзояндаи нимаддитивӣ мебошад, ки барои он $\omega(0) = 0$ аст.

Дар ҳолати $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, синфи $H^\omega[a, b]$ ба синфи Гёльдер $H^\alpha[a, b]$ мубаддал мегардад:

$$|f(x'') - f(x')| \leq |x'' - x'|^\alpha, \quad \forall\, x', x'' \in [a, b].$$

Аён аст, ки синфи $H^1[a, b]$ бо синфи $W^1[a, b]$-и функсияи $f(x)$ мувофиқ аст, дар порчаи $[a, b]$ бефосила ва дорои ҳосилаи қисман бефосилаи $f'(x)$, ки шарти $\underset{a \leq x \leq b}{supvrai} |f'(x)| \leq 1$ – ро қонеъ мекунад.

Ба воситаи $W^{(r)}H^\omega[a, b]$ $(r = 0, 1, \ldots; W^{(0)}H^\omega[a, b] \equiv H^\omega[a, b])$ – маҷмӯи функсияҳои $f(x) \in C^{(r-1)}[a, b]$-ро ишора мекунем, ки дар онҳо ҳосилаи қисман бефосилаи $f^{(r)}(x)$ ба синфи $H^{\omega}[a,b]$ таалуқдошта мавҷуд аст. $W^{(r)}L_p[a,b]$ - синфи функсияи $f(x)$, ки дар он ҳосилаи тартиби $r-1$-ум $f^{(r-1)}(x)$ мутлақ бефосила аст, ҳосилаи тартиби r-ум $f^{(r)}(x)$ ба фазои $L_p[a,b]$ таалуқдошта мавҷуд аст ва шартҳои зеринро қаноат мекунад:

$$\left\|f^{(r)}\right\|_p := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \le 1,\ 1 \le p < \infty,$$

$$\left\|f^{(r)}\right\|_\infty := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[a,b]} = \underset{a\le x\le b}{supvrai}|f^{(r)}(x)| \le 1,\ p = \infty.$$

Ҳангоми ёфтани формулаҳои квадратурии оптималӣ (беҳтарин) барои интегралҳои сингулярӣ аз рӯи маънои қимати асосии Коши ва Адамар барои мо синфи функсияи зерин лозим мешавад: бигзор $c \in (a,b)$, ки дар инҷо a ва b – ададҳои ихтиёрии ҳақиқӣ мебошанд. Ба воситаи $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L\left(M;(a,b)\right)$ маҷмӯи функсияҳои $f(t)$, ки намуди зерин

$$f(t) = f(c) + |t-c|^{m-1+\alpha} sgn(t-c)\varphi(t)$$

доранд, ишора мекунем, ки дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \le 1$ ва $\varphi(t) \in W^{(1)}L\left(M;[a,b]\right)$ - синфи функсияҳо мебошанд ва барояшон шарти зерин иҷро мешавад:

$$\|\varphi'\|_{L[a,b]} = \int\limits_a^b |\varphi'(t)|dt \le M.$$

Дар параграфи дуюми боби якум масъалаи ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин барои интеграли сингулярии Адамари намуди

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt,\ a < c < b \qquad (5)$$

дида баромада мешавад, ки дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$ мебошад. Интеграли (5) дар маънои аслии қисми ниҳоӣ ё ин ки бо маънои қимати асосии Коши фаҳмонда мешавад, яъне агар шарти

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \frac{\psi(c)}{\varepsilon^{m-1}}\right) \qquad (6)$$

ҷой дорад, дар ин ҷо функсияи $\psi(c)$ чунин интихоб карда мешавад, ки маҳдудияти нишондодашуда аз рост дар формулаи (6) мавҷуд бошад[6].

Барои ҳисобкунии тақрибии интеграли сингулярии (5) формулаи квадратурии зерин истифода бурда мешавад:

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = Af(c) + \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f), \tag{7}$$

ки дар ин ҷо c ва $t_k : a \le t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_n \le b$ – гиреҳои гуногун, A ва p_k – коэффисиентҳо, $R_n(f)$ – хатогии формулаи квадратурӣ барои функсияи f мебошанд. Минбаъд дар ҳама ҷо ба шарти дақиқ будани формулаи квадратурии (7) барои функсияи $f(t) = 1$ иҷро шудани баробарии

$$A = \frac{1}{m-1}\left[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\right] - \sum_{k=1}^{n} p_k \tag{8}$$

-ро талаб мекунем.

Ҳамин тариқ, масъала аз ин иборат аст, ки ҳангоми иҷрошавии шарти (8) ёфтани бузургии

$$\mathcal{E}_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)\right) = \inf_{(T,P)} R_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b) : T,P\right) \tag{9}$$

талаб карда мешавад.

Ҳали масъалаи (9) ҳангоми иҷрои шарти (8) ба ҳали масъалаи экстремалии ёфтани формулаи квадратурии беҳтарин барои синфи $W^{(1)}L(M;a,b)$ оварда мешавад. Ёфтани формулаи квадратурии беҳтарини намуди (7) барои синфи $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)$ ҳангоми иҷрои шарти (8) маънои ёфтани формулаи квадратурии беҳтарини намуди

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi) \tag{10}$$

бо гиреҳҳои $t_k \ne c$ $(k = \overline{1,n})$ дар синфи $W^{(1)}L(M;a,b)$ – ро дорад. Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби якум теоремаи зерин мебошад:

Теоремаи 1.2.1. *Ягона формулаи квадратурии намуди (10) дар синфи $W^{(1)}L(M;a,b)$ ки барои $\varphi(t) \equiv 1$ аниқ аст, формула бо коэфисиентҳои*

$$A_k = \frac{(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha}{\alpha n},\ k = \overline{1,n}$$

[6]Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. 1071 с.

ва гирехҳои t_k, ки ба ҳали системаи муодилаҳои

$$(b-c)^{\alpha}-|t_k-c|^{\alpha}sgn(t_k-c)=$$
$$=\left[(b-c)^{\alpha}+(c-a)^{\alpha}\right]\left(1-\frac{2k-1}{2n}\right),\ k=\overline{1,n}$$

баробаранд, мебошад. Дар ин сурат

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b),\frac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}\right)=\frac{M\left[(b-c)^{\alpha}+(c-a)^{\alpha}\right]}{2\alpha n},\quad (0<\alpha\leqslant 1).$$

Қайд мекунем, ки натиҷаи теоремаи 1.2.1 барои интеграли сингулярии Адамари намуди умумитари

$$\mathcal{J}_{\gamma}(f,\tau)=\int\limits_a^b\frac{f(t)dt}{|t-\tau|^{\gamma}},\quad f\in W_c^{[\gamma]}H^{(\alpha)}L(M;a,b)$$

низ ҷой дорад, ки дар ин ҷо $\gamma\in R_{+}(\gamma\geqslant 1)$ – адади ихтиёрии нимтири ададии мусбат буда бо фарқият аз параграфи пешина, инчунин метавонад қиматҳои ғайрибутунро низ қабул кунад, $[\gamma]$ – қисми бутуни адади γ мебошад.

Дар худи ҳамин параграф масъалаи (3) барои формулаи квадратурии

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}p_kf(t_k)+R_n(f)\tag{11}$$

барои синфи $W^{(1)}L(M;-1,1)$ ҳал карда шудааст.

Теоремаи 1.2.2. *Ягона формулаи квадратурии беҳтарини намуди (11) барои синфи $W^{(1)}L(M;-1,1)$, ки барои $f(t)\equiv const$ аниқ аст, формулаи квадратурии*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi\right)+R_n(f)\tag{12}$$

мебошад. Барои баҳои аниқи хатогии формулаи беҳтарини (12) дар синфи нишондодашуда баробарии зерин ҷой дорад

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;-1,1),\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\frac{M\pi}{2n}.$$

Исботи теоремаи 1.2.2 нишон медиҳад, ки формулаи квадратурии классикии Эрмит - Чебышев барои синфи функсияҳои $W^{(1)}L(M;[-1,1])$ формулаи квадратурии беҳтарин намебошад.

Бо истифода аз усули муҳокимаронӣ, ки дар корҳои Ю.М.Гиршович[7], М.Ш.Шабозов ва С.Қаландаршоев[8] оварда шудааст, дар худи ҳамин параграф теоремаҳои зерин исбот карда шудаанд.

Теоремаи 1.2.3. *Ягона формулаи квадратурии беҳтарини намуди*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f),$$

аниқ барои $f(t) \equiv const$*, барои синфи* $W^{(1)}L(M;0,+\infty)$ *формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(f). \qquad (13)$$

Баҳои аниқи формулаи (13) ба

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;0,+\infty), \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{M\pi}{4n}$$

баробар аст.

Теоремаи 1.2.4. *Ягона формулаи квадратурии беҳтарини намуди*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f)$$

барои синфи $W^{(1)}L\left(M,-1,1\right)$*, аниқ барои* $f(t) \equiv const$*, формулаи зерин мебошад:*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right) + R_n(f). \qquad (14)$$

Баҳодиҳии аниқи хатогӣ ба намуди зерин баробар аст

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\left(M;-1,1\right), \frac{1}{(1+t)^\alpha}\right) = \frac{M}{2^\alpha(1-\alpha)n}, \quad 0<\alpha<1.$$

[7]Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале. – Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ-мат. наук., 1975, №24/1, с.121-123.

[8]Шабозов М.Ш., Каландаршоев С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости. – ДАН РТ, 1998, т.41, №10, с.69-75.

Дар параграфи сеюми боби якум формулаи квадратурии Эрмит-Чебышёв-Маркови намуди

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = p_0 f(-1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \quad (15)$$

дида баромада мешавад, ки бо вектори $(T; P)$ гиреҳҳои

$$T = \left\{t_k : \ -1 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1\right\}$$

ва коэффисиентҳои $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$ дода шудааст. Масъалаи ёфтани формулаи квадратурии беҳтарини намуди (15), ҳангоме ки ба сифати гиреҳҳо, гиреҳҳои пешакӣ қайдкардашудаи охирҳои фосилаи интегронӣ: $t_0 = -1$ ва $t_n = 1$ дода шудаанд, гиреҳои $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ ва коэффисиентҳои $p_0, p_1, ..., p_n$ -ро метавон ба таври оптималӣ интихоб намуд, меомузем. Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 1.3.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди (15) беҳтаринаш дар синфи $H^\omega[-1,1]$ формулаи квадратурии*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{f(-1)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \quad (16)$$

мебошад.

Барои баҳодиҳии хатогии формулаи (16) дар тамоми синфи функсияҳои $H^\omega[-1,1]$ баробарии

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1]; \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int_{0}^{\pi/(2n)} \omega(t)dt$$

ҷой дорад. Дар ҳолати хусусӣ, аз ин ҷо барои синфи Гёлдер $H^\alpha[-1,1]$ $(0 < \alpha \le 1)$ ҳосил мекунем

$$\mathscr{E}_n\left(H^\alpha[-1,1]; \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

Бигзор $H_2^\omega[a,b]$ — синфи функсияҳои f, ки дар порчаи $[a,b]$ муайян ва барои ҳаргуна нуқтаҳои $\tau, \tau \pm x \in [a,b]$ шарти

$$|f(\tau+x) + f(\tau-x) - 2f(\tau)| \le 2\omega(|x|)$$

қаноат мекунонад, бошад. Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.3.2. *Барои баҳодии аниқи хатогии формулаи квадратурии намуди Маркови (16) дар тамоми синфи $H_2^\omega[-1;1]$ баробарии зерин дуруст аст*

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau.$$

Қайд мекунем, ки дар байни синфҳои $H^\omega[-1,1]$ ва $H_2^\omega[-1,1]$ синфи мобайнии $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1]$ ҷойгир аст, ки функсияҳои $f(x)$-и ба он тааллуқдошта барои дилхоҳ нуқтаҳои $x, x \pm t \in [-1,1]$ шарти зеринро қаноат мекунанд

$$|(1+\alpha)f(x+t) + (1-\alpha)f(x-t) - 2f(x)| \leq 2\omega(|t|). \tag{17}$$

Ҳамин тариқ аз (17) ҳангоми $\alpha = 1$ нобаробарии

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \omega(|t|) \tag{18}$$

мебарояд ва ҳангоми $\alpha = 0$ нобаробарии

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq 2\omega(|t|) \tag{19}$$

ҷой дорад. Аз (18) ва (19) дохилкунии

$$H^\omega[-1,1] \subset H_{2-\alpha}^\omega[-1,1] \subset H_2^\omega[-1,1] \tag{20}$$

мебарояд. Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.3.3. *Дар байни ҳамаи формулаҳои квадратурии намуди Маркови (15), ягона формулаи беҳтарин дар синфи функсияҳои $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1]$ барои ҳаргуна α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ формулаи (16) мебошад. Ҳамин тариқ баҳодии аниқи хатогии формулаи квадратурии (16) дар тамоми синфи функсияҳои $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1]$ ба намуди зерин баробар аст*

$$\mathscr{E}_n\left(H_{2-\alpha}^\omega[-1,1]\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt.$$

Формулаи квадратурии намуди умумии

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \tag{21}$$

-ро дида мебароем, ки бо вектори гиреҳҳои ихтиёрии

$$T=\{t_k:\ -1\le t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n\le 1\}$$

ва коэффисиентҳои $P=\{p_k\}_{k=1}^{n}$ дода шудааст. $R_n^{(1)}\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)$ — хатогии формула барои синфи $H^{\omega}[-1,1]$ мебошад.

Теоремаи 1.3.4. *Дар байни формулаҳои квадратурии намуди (21) беҳтаринаш барои синфҳои $H^{\omega}[-1,1]$ ва $H_2^{\omega}[-1,1]$ формулаи квадратурии классикии Эрмит-Чебышёви*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+R_n\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)\qquad(22)$$

мебошад.

Ҳамин тариқ барои баҳодиии хатогии формулаи (22) барои синфҳои дар боло номбаршуда баробарии зерин ҷой дорад

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\mathscr{E}_n\left(H_2^{\omega}[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=$$

$$=2n\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau.$$

Дар параграфи чоруми боби якум татбиқи теоремаи 1.2.2 ва 1.3.1 ба интегралҳои сингулярии намуди умумии

$$\iint\limits_{(S)}\frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx,\qquad(23)$$

ки ҳам дар марказ ва ҳам дар сарҳади доираи $r=0$ сингулярианд, дида мебароем. Қайд мекунем, ки шарти зарурии мавҷудияти интеграли сингулярии дукаратаи (23) ин шарти

$$\int\limits_{0}^{2\pi}f(\theta)d\theta=0\qquad(24)$$

мебошад. Интеграли (23) ҳангоми гузаштан ба координатаҳои қутбӣ намуди зеринро мегирад:

$$\iint\limits_{(S)}\frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}},\qquad(25)$$

ки дар ин ҷо

$$F_u(r) = \int\limits_0^{2\pi} f(\theta)u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta.$$

Инчунин бо истифода аз (24) ҳосил мекунем

$$F_u(0) = \int\limits_0^{2\pi} f(\theta)u(0,0)d\theta = u(0,0)\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \qquad (26)$$

Бо $W_0^{(1)}(M;S)$ синфи функсияҳои $u(x_1,x_2)$ ки дар доираи S бефосила ва шарти $F_u(r) \in W_0^{(1)}(M;0,1)$ қаноъат мекунонад, ишора мекунем. Ҳамин тавр $H^\omega(S)$ синфи функсияҳои $u(x_1,x_2) \subset C(S)$, ки барояшон $F_u(r) \in H^\omega[0,1]$ аст.

Барои ёфтани формулаи квадратурии беҳтарин барои интеграли сингулярии (23) дар асоси (25) формулаи квадратурии

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sum_{k=1}^n p_k F_u(r_k) + R(F_u) \qquad (27)$$

-ро дида мебароем, ки бо вектори гиреҳҳои $X = \{r_k\}_{k=1}^n$, $(0 < r_1 < ... < r_n < 1)$ ва коэффисиентҳои $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ дода шудааст. $R_n(F_u) = R_n(F_u;X,P)$ – хатогии формулаи (27) мебошад.

Теоремаи 1.4.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои кубатурии намуди (27) беҳтаринаш барои синфи функсияҳои $W_0^{(1)}(M;S)$, формулаи зерин мебошад*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n p_k F_u\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(F_u). \qquad (28)$$

Барои хатогии формулаи кубатурии беҳтарини (28) дар тамоми синфи функсияҳои $W_0^{(1)}(M;S)$ баҳодиии аниқи зерин дуруст аст

$$\mathcal{E}\big(W_0^{(1)}(M;S)\big) = \frac{\pi M}{4n}.$$

Теоремаи 1.3.1-ро ба формулаи (27) татбиқ намуда ба тасдиқоти зерин мегузарем.

Теоремаи 1.4.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои кубатурии намуди (27) беҳтаринаш барои синфи функсияҳои $H^\omega(S)$ формулаи зерин мебошад*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}} u(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left\{\frac{F_u(0)+F_u(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} F_u\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n\left(F_u; \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right). \qquad (29)$$

Ҳамин тариқ барои хатогии формулаи кубатурии (28) дар тамоми синфи функсияҳои $H^\omega(S)$ баҳодии аниқи зерин дуруст аст

$$\mathcal{E}_n\big(H^\omega(S)\big) = n\int\limits_0^{\pi/n} \omega(t)dt.$$

Дар ҳолати хусусӣ, барои синфи Гёльдер $H^\alpha[0,1]$ $(0<\alpha\le 1)$

$$\mathcal{E}_n\left(H^\alpha(S); \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\ (0<\alpha\le 1).$$

Дар боби дуюми диссертатсия масъалаҳои экстремалии ёфтани формулаҳои кубатурии беҳтарин барои ҳаргуна синфи функсияҳо ҳал карда мешаванд.

Дар параграфи якуми боби дуюм натиҷаҳои параграфи сеюми боби якум барои ҳолати дученака умумӣ карда шудаанд. Барои функсияи дар росткунҷаи $Q=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$ додашуда ва интегронидашавандаи $f(x,y)$ формулаи кубатурии

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki}f(x_k,y_i) + R_{mn}(f;q) \qquad (30)$$

-ро дида мебароем, ки аз рӯйи вектори $(X,Y;P)$ бо гиреҳҳои

$$X := \{x_k : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\},$$

$$Y := \{y_i : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d\}$$

ва коэффисиентҳои $P=\{p_{ki}\}_{k=0,i=0}^{m,n}$ муайян шудааст, инчунин функсияи вазндори ғайриманфии $q(x,y)$ дар соҳаи Q ақаллан дар маънои Риман интегронидашаванда бошад, $R_{mn}(f,q) = R_{mn}(f;q;X,Y;P)$ – хатогии формулаи (30) барои функсияи f мебошад. Нуқтаҳои росткунҷаи Q-ро бо $M = M(x,y)$ ва маҷмӯи гиреҳҳоро бо $M_{kl} := M(x_k, y_l)$ $(k = \overline{0,m};\ l = \overline{0,n})$ ишора мекунем.

Минбаъд гиреҳҳо ва коэффисиентҳои вектори $(X,Y;P)$-ро дида мебароем, ки барояшон формулаи кубатурии (30) маъно дорад. Гузориши умумии масъалаи экстремалии ёфтани формулаҳои кубатурии вазндори беҳтарин ба мафҳуми С.М.Никольский[6,с.176]-ро ба ёд меорем.

Агар $\mathfrak{M}$ – ягон синфи додашуда ва дар соҳаи Q барои маҷмӯи функсияҳои $\{f\}$ муайян бошад, он гоҳ гузориш мекунем

$$R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P) = \sup\{|R_{mn}(f;q;X,Y;P)| : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Ёфтани бузургии

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := \inf\{R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P) : (X,Y;P)\} \tag{31}$$

талаб карда шуда, гиреҳҳо ва коэффисиентҳои вектори $(X^0, Y^0; P^0)$ $(X^0 = \{x_k^0\}, Y^0 = \{y_i^0\},\ P^0 = \{p_{ki}^0\})$-ро нишон додан лозим аст, яъне баробарии

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := R_{mn}(\mathfrak{M};q;X^0,Y^0;P^0)$$

иҷро мешавад.

Формулаи кубатурии (30) бо маҷмӯи гиреҳҳои $M_{ki}^0 = (x_k^0, y_i^0)$ ва коэффисиентҳои p_{ki}^0 дар тамоми синфи $\mathfrak{M}$ байни формулаҳои кубатурии намуди (30) хатогии хурдтарин медиҳад ва бо ин мазмун барои синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ *беҳтарин* ва *оптималӣ* мебошад.

Қайд мекунем, ки беҳтарин формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии вазндор барои баъзе синфи функсияҳо дар корҳои илмии А.Л.Кузьмина[1], Л.А.Онегов[2], М.Ш.Шабозов[4] ва Ю.Гиршович[8] ёфт шудаанд. Таърифи синфи функсияҳои дутағйирёбандадорро оварда, масъалаи (31)-ро барои функсияҳои махсуси вазндор дида мебароем.

Синфи $H^{\omega}(\rho_p, Q)$-и функсияҳои $f(x,y)$-ро дида мебароем, ки дар Q бефосила буда, нобаробарии

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega\left[\rho_p(M',M'')\right] \tag{32}$$

қаноат мекунанд, ки дар ин ҷо $\rho_p(M',M'')$ – $l_p(1 \le p < \infty)$-масофа байни нуқтаҳои $M'(x',y')$ ва $M''(x'',y'')$ аз росткунҷаи Q мебошад:

$$\rho_p(M',M'') = \sqrt[p]{|x'-x''|^p + |y'-y''|^p} \ \ (1 \le p < \infty)$$

ва $\omega(t)$ – модули бефосилагӣ дар порчаи $0 \le t \le \sqrt[p]{(b-a)^p + (d-c)^p}$ $(1 \le p < \infty)$ мебошад. Натиҷаи асосии параграфро мебиёрем.

Теоремаи 2.1.1. *Бигзор*

$$Q = \{-1 \le x, y \le 1\}, \quad q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

бошад, он гоҳ дар байни ҳамаи формулаҳои намуди (30) барои синфи $H^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \le p < \infty)$ *беҳтаринаш формулаи умумикардашудаи трапетсияи намуди*

$$\iint\limits_{(Q)} \frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{\pi^2}{mn}\{\frac{1}{4}[f(-1,-1)+f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f\left(-1, \cos\frac{i\pi}{n}\right) + f\left(1, \cos\frac{i\pi}{n}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, -1\right) + f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, 1\right)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, \cos\frac{i\pi}{n}\right)\} + R_{mn}(f,q) \tag{33}$$

мебошад. Баҳодиҳии аниқи хатогии беҳтарини формулаи кубатурии (33) ба

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_p Q), q\right) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau \tag{34}$$

баробар аст.

Бигзор $\tilde{H}^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ – синфи функсияҳои $f(x,y)$ дар квадрати $Q = \{-1 \le x, y \le 1\}$ муайян бошанд, ки барои нуқтаҳои $(x,y) \in Q$ ва $(x \pm t, y \pm \tau) \in Q$ шарти зерин иҷро шавад

$$|f(x+t,y+\tau) + f(x+t,y-\tau) + f(x-t,y+\tau) + f(x-t,y-\tau) - 4f(x,y)| \le$$

$$\le 4\omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right).$$

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки дохилкунии $H^\omega(\rho_p, Q) \subset \tilde{H}^\omega(\rho_p, Q)$ ҷой дорад, яъне синфи $\tilde{H}^\omega(\rho_p, Q)$ нисбат ба синфи $H^\omega(\rho_p, Q)$ васеътар мебошад. Пас тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.1.2. *Байни ҳамаи формулаҳои кубатурии намуди*

$$\iint\limits_{(Q)} \frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f,q)$$

бо гиреҳҳо ва коэффисиентҳои ихтиёрии вектори $(X, Y; P) \subset \mathcal{A}$ *барои синфи* $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ *беҳтарин формула (33) мебошад. Дар ин маврид барои хатогии формулаи (33) баробарии*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), q\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p, Q), q\right) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)}\int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau \qquad (35)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо бузургии дар тарафи рости баробарии (35) буда бо баробарии (34) мувофиқ меояд.

Аз теоремаи 2.1.2 натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 2.1.2. *Дар сурати иҷрои шартҳои теоремаи 2.1.2 баробарии*

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, G)) =$$
$$= \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)}\int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau$$

дуруст аст.

Дар параграфи дуюм масъалаи экстремалии (31) барои $q(x, y) \equiv 1$ ва баъзе синфи функсияҳо дида баромада шудааст, ки ба воситаи модули бефосилагӣ масофаи байни нуқтаҳои маҷмӯи гиреҳҳои соҳа дода шудаанд. Формулаи кубатурии

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f) \qquad (36)$$

дида баромада мешавад, ки бо вектори $(X, Y; P)$, гиреҳҳои

$$X = \{x_k : a \le x_1 < x_2 < ...x_{m-1} < x_m \le b\},$$

$$Y = \{y_l : c \le y_1 < y_2... < y_{n-1} < y_n \le d\}$$

ва коэффисиентҳои $P = \{p_{kl}\}$ $(k = \overline{1, m};\ l = \overline{1, n})$ муайян шудааст, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f : X, Y; P)$ – хатогии формула дар $f(x, y)$ мебошад. Ба сифати $\mathfrak{M}$ дар параграфи дуюм синфи $H^{\omega}(\rho_p;Q)$ функсияҳои $f(x,y)$ муоина мешавад, ки барои ҳаргуна ду нуқтаи $(x^{'},y^{'}),(x^{''},y^{''}) \in Q$ шарти

$$|f(x^{'},y^{'})-f(x^{''},y^{''})| \leq \omega\left(\sqrt[p]{|x'-x''|^p+|y'-y''|^p}\right), (1 \leq p < \infty) \qquad (37)$$

– ро қаноат мекунанд.

Натиҷаи асосии параграфи дуюми боби дуро дар шакли теоремаи зерин мебиёрем.

Теоремаи 2.2.1. *Дар байни ҳамаи формулаҳои кубатурии намуди (36) барои синфи $H^{\omega}(\rho_p,Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ беҳтаринаш формулаи росткунҷаи*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = 4h\eta\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2m},\ c+(2l-1)\frac{d-c}{2n}\right)+R_{mn}(f) \qquad (38)$$

мебошад. Барои хатогии аниқи ин формула, баробарии

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p,Q)) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^{\eta}\omega(\sqrt[p]{t^p+\tau^p})dtd\tau,\ 1 \leq p < \infty.$$

дуруст аст.

Қайд мекунем, ки аз теоремаи 2.2.1 ҳангоми $p=2$ натиҷаи маълуми Н.П.Корнейчук[5] ҳосил мешавад. Барои синфи $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$ $(1 \leq p < \infty)$ теоремаи 2.2.1-ро умумитар мекунем.

Теоремаи 2.2.2. *Дар байни ҳамаи формулаҳои кубатурии намуди (36) барои синфи $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p;Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ формулаи (38) беҳтарин мебошад. Барои баҳодиҳии аниқи хатогӣ дар синфҳои $H^{\omega}(\rho_p;Q)$ ва $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p;Q)$ баробарии*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p;Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^{\eta}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau$$

дуруст аст.

Дар хулосаи диссертатсия ҷамъбасти таҳқиқоти гузаронидашуда баён карда шуда, тавсияҳо оиди истифодаи онҳо дода шудаанд.

Барои роҳбари илмиам академики АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Шабозов Мирганд Шабозович барои маслиҳатҳои муфид ва дастгирии ҳаматарафа сипосгузории хешро изҳор менамоям.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия нашр шудаанд:

1. Фарайдунов О.К. Об оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва. Изв.АН РТ. Отд.физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2013, №4(153), с. 47-56.
2. Фарайдунов О.К. О приближении суммами Фурье-Чебышёва в L_2 и значение поперечников некоторых классов функций. ДАН РТ, 2014, т. 57, №5, с. 352-362.
3. Фарайдунов О.К. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярного интеграла Адамара. ДАН РТ, 2015, т.58, №6, с. 476 - 482.
4. Фарайдунов О.К. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом и значение поперечников некоторых функциональных классов. ДАН РТ, 2016, т. 59, №3-4, с. 106-113.
5. Фарайдунов О.К. О погрешности наилучших весовых квадратурных формул для некоторых классов функций. ДАН РТ, 2016, т. 59, №9-10, с. 361 - 366.
6. Фарайдунов О.К. Оценки погрешности квадратурной формулы Чебышёва-Эрмита на некоторых классах функций. Труды международной летней математической школы-конференции С.Б. Стечкина по теории функций, 2016, с. 256-259.

Дар дигар нашрияҳо:

7. Фарайдунов О.К. Наилучшая квадратурная формула для сингулярного интеграла Адамара. Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Душанбе, 2015, с. 51-53.
8. Фарайдунов О.К. Приближение в среднем алгебраическими полиномами с весом. Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел. Душанбе, 2015, с. 56-57.
9. Фарайдунов О.К. О погрешности весовых квадратурных формул типа Маркова. Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций. Душанбе, 2018, с. 162-164.

ШАРҲИ МУХТАСАР

ба диссертатсияи Фарайдунов Осим Косумшоевич «Баъзе формулаҳои квадратурии оптималӣ барои интегралҳои махсус ва бисёрченака» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 - таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *формулаи квадратурии оптималӣ, хатогӣ, модули бефосилагӣ, интеграли снгулярии дученака, формулаи кубатурӣ, масъалаи экстремалӣ, вектори коэффисиентҳо ва гиреҳҳо.*

Муҳимияти мавзӯъ. Ҳангоми омӯзиши доираи муайяни масъалаҳои муҳандисӣ, ки бо механикаи ҷисми деформиронидашаванда, механикаи гази моеъ, механикаи техникӣ, ҳали муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва ғайраҳо алоқамандии зич доранд, зарурият барои ҳисоб кардани интегралҳо аз функсияҳои як ва дутағйирёбанда ба миён меояд. Азбаски, дар бисёр ҳолатҳо интегралҳои ҳосилшударо ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода кардан ғайриимкон аст, он гоҳ онҳоро тақрибан ҳисоб мекунанд, яъне масъалаи оптимизатсиякуние мавҷуд аст, ки бо интихоби методи тақрибӣ мувофиқи критерияи оптималӣ ҳисоб кардани интегралҳо вобаста аст. Гузориши масъала оиди ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин дар солҳои 40 - уми асри бистум аз тарафи А.Н. Колмогоров таҳия шудааст, аммо нахустин натиҷаҳо оид ба оптимизатсияи формулаҳои квадратурӣ дар солҳои 50-ум С.М. Николский нашр намуд.

Дар ин самт натиҷаҳои минбаъда дар корҳои Н.П. Корнейчук, В.П. Моторный, Н.Е. Лушпай, А.А. Лигун, А.А. Женсыкбаев, Б.Д. Боянов, М.И. Левин, В.Ф. Бабенко, М.Ш. Шабозов ва ғайраҳо тадқиқ карда шудаанд. Сарфи назар аз як қатор натиҷаҳои охирин, ки бо кушиши математикони дар боло зикршуда ба даст омадаанд, шумораи зиёди масъалаҳои оптимизатсионӣ, махсусан дар синфи функсияҳои якчандтағйирёбанда ва интегралҳои сингулярӣ то ҳол ҳали худро наёфтаанд. Инчунин тадқиқи масъалаҳои экстремалии интегронӣ, ки порчаи интегронӣ нуқтаҳои махсуси каниш дорад, пурра омӯхта нашудаанд. Дар самти тадқиқоти қайдшуда фақат натиҷаҳои охирини А.Л. Кузмина[1], Л.А. Онегов[2], В.А. Бойков[3] ва М.Ш. Шабозов[4] маълуманд. Аз ин сабаб, масъалаҳои дар диссертатсия дида баромадашуда, ки бо оптимизатсияи интегронии тақрибӣ бо вазн дар баъзе синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда алоқаманданд, хеле муҳим мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Дар диссертатсия методҳои замонавии таҳлили функсионалӣ, методи тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ барои ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, инчунин, методи Н.П. Корнейчук[5] барои аз поён баҳодиҳии хатогии квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратурӣ ба нул мубаддал мегардад, истифода шудаанд.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Ёфтани формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо додашуда дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ; ёфтани формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии намуди Марков барои синфи функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайян карда мешаванд; ёфтани формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳое, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарин дар фазои $L_1[a,b]$ муайянанд; ёфтани формулаи беҳтарини кубатурӣ барои синфи $H^{\omega}(\rho_p,Q),\ p\geq 1$.

Навгонии натиҷаҳои тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд: формулаҳои квадратурии беҳтарин бо вазнҳо дар синфи функсияҳо бо модули бефосилагӣ додашуда дар порчаи охирнок ва нимтири ададӣ ёфта шудаанд; формулаҳои квадратурӣ ва кубатурии беҳтарини намуди Марков барои функсияҳои як ва дутағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ муайянанд, ёфта шудаанд; формулаи квадратурии вазндор барои синфи функсияҳо, ки бо маҳдудияти нормаи ҳосилаи калонтарин дар фазои $L_1[a,b]$ муайянанд, ёфта шудаанд; формулаи кубатурии беҳтарин барои синфи $H^{\omega}(\rho_p,Q),\ p\geq 1$ ёфта шуд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳо оид ба оптимизатсиякунии формулаҳои квадратурӣ ва кубатурӣ, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, дорои арзишҳои назариявӣ ва амалӣ мебошанд. Чунин натиҷаҳо метавонанд барои ҳисобкунии тақрибии ҳам муодилаҳои интегралии умумӣ ва ҳам муодилаҳои интегралии сингулярӣ истифода шаванд.

РЕЗЮМЕ

диссертации Фарайдунова Осима Косумшоевича на тему «Некоторые оптимальные квадратурные формулы для особых и многомерных интегралов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, погрешность, модуль непрерывности, двумерный сингулярный интеграл, кубатурная формула, экстремальная задача, вектор коэффициентов и узлов.*

Актуальность темы. При исследовании определённого круга инженерных задач, связанных с механикой деформируемого тела, механикой жидкости газа, технической механикой, решением сингулярных интегральных уравнений и т.д. возникает необходимость в вычислении интегралов от функции одной и двух переменных. Поскольку в подавляющем большинстве случаев полученные интегралы невозможно выразить через элементарные функции, то их вычисляют приближённо, а значит существует оптимизационная проблема, связанная с выбором наилучшего метода приближённого интегрирования согласно выбранному критерию оптимальности. Постановки задач, связанных с построением наилучших (оптимальных) квадратурных формул были сформулированы в 40-х годах двадцатого столетия А.Н.Колмогоровым, а первые результаты по оптимизации квадратурных формул были опубликованы в 50-х годах С.М.Никольским. Дальнейшие результаты в этом направлении исследования были получены в работах Н.П.Корнейчука, В.П.Моторного, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, Б.Д.Боянова, М.И.Левина, В.Ф.Бабенко, М.Ш.Шабозова и многих других. Несмотря на ряд полученных окончательных результатов, благодаря усилиям указанных математиков, большое количество оптимизационных задач, особенно на классах функций нескольких переменных и сингулярных интегралов, до сих пор остаются нерешенными. Также недостаточно изучены и экстремальные задачи, связанные с особенностями на отрезках интегрирования. В указанных направлениях исследований известно намного меньше окончательных результатов, полученных А.Л.Кузминой[1], Л.А.Онеговым[2], В.А.Бойковым[3], М.Ш.Шабозовым[4]. Поэтому рассмотренные в диссертации задачи, связанные с оптимизацией приближённого интегрирования с весом на некоторых классах функций одной и двух переменных, являются актуальными.

Методы исследования. В работе используются современные методы функционального анализа, методы исследования экстремальных задач отыскания квадратурных и кубатурных формул, а также метод Н.П.Корнейчука[5] оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Цель и задачи исследования. Найти наилучшие квадратурные формулы с заданным весом для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси; найти наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова как для функций одного, так и для функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности; найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченными по норме пространства $L_1[a, b]$ старшей производной; найти наилучшую кубатурную формулу для класса $H^\omega(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие основные результаты: найдены наилучшие квадратурные формулы с заданными весами для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси; найдены наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова для классов функций одной и двух переменных, задаваемых модулями непрерывности; найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a, b]$ старшей производной; найдена наилучшая кубатурная формула для класса $H^\omega(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты по оптимизации квадратурных и кубатурных формул, полученные в диссертационной работе, имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быт использованы при приближённом вычислении как обыкновенных интегральных уравнений, так и сингулярных интегральных уравнений.

SUMMARY
of the thesis Faraidunov Osim Qosumshoevich on the topic «Some optimal square formulas for special and multidimensional integrals» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01. - real, complex, and functional analysis

Key words: *optimal quadrature formula, error, modulus of continuity, two-dimensional singular integral, cubature formula, extremal problem, vector of coefficients and nodes.*

Actuality of the work. When researching a specific range of engineering problems related to the mechanics of a deformable body, gas fluid mechanics, technical mechanics equations, etc. it becomes necessary to calculate the integrals of a function of one and two variables. Since in the overwhelming majority of cases the obtained integrals cannot be expressed in terms of elementary functions, they are calculated approximately, which means there is an optimization problem associated with choosing the best approximate integration method according to the chosen optimality criterion. The formulation of tasks related to the construction of the best (optimal) quadrature formulas was formulated by A.N. Kalmagorov in the 40s of the twentieth century, and the first results on the optimization of quadrature formulas were published in the 50s by S.M. Nikolskiy. Further results in this direction were obtained in the works of N. P. Korneychuk, V. P. Motorny, N. E. Lushpay, A.A. Liguna, A.A. Zhensikbaeva, B.D. Boyanova, M. I. Levin, V.F. Babenko, M.Sh. Shabozov and many others. Despite a number of final results, thanks to the efforts of these mathematicians, a large number of optimization problems, especially in the classes of functions of several variables and singular integrals, still remain unsolved. Also, extremum problems associated with the features on the integration segment are also insufficiently studied. In these areas of research, much less final results obtained by A. L. Kuamina[1], L. A. Onegov[2], V. A. Boikov[3], M. Sh. Shabozov[4]. Therefore, the problems considered in the thesis related to the optimization of approximate integration with a weight on some classes of functions of one and two variables are relevant.

Methods of research. The work uses modern methods of functional analysis, methods for studying extremal problems of finding quadrature and cubature formulas, as well as N. P. Korneychuk[5], method of estimating the error from below and quadratures on classes of functions that reverse the quadratic sum.

Purpose and objectives of the research. To find the best quadrature formulas with a given weight for classes of functions defined by continuity modules

on a finite segment and on a half-line to find the best quadrature and cubature formulas of Markov type for both functions one and two functions defined by modules of continuity to find the best weighted quadrature formulas for classes of functions with constraints in the norm , the space $L_1[a, b]$ of the highest derivative; to find the best cubature formula for class $H^\omega(\rho_p, Q), 1 \leq p < \infty$.

The obtained results and their novelty. The following main results were obtained in the thesis: the best quadrature formulas with given weights were found for the functional classes defined by the moduli of continuity on a finite segment and on a semi-axis ; the best quadrature and cubature formulas of Markov type were found for classes of functions of one and two variables given by continuity modules ; the best weighted quadrature formulas for classes of functions with a norm-bounded space $L_1[a, b]$ of the highest derivative were found; was found the best cubature formula for the class $H^\omega(\rho_p, Q),\ 1 \leq p < \infty$.

Theoretical and practical value. Optimization results quadrature and cubature formulas obtained in the thesis works have both theoretical and applied value. They can life is used in the approximate calculation as ordinary integral equations, and singular integral equations.

Ба чопаш 30.04.2019 имзо шуд.
1,5 ҷузъи чопӣ. Андозаи 60 × 84 1/16.
Адади нашр 100 нусха. Супориши № 18.

Дар ҶДММ «Меҳроҷ Граф»
хиёбони С.Айнӣ, 126 чоп шудааст.