РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.55

На правах рукописи

КАБИРОВ АБУБАКР ТИЛЛОЕВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе - 2021

Работа выполнена на кафедре высшей математики Таджикского государственного финансово-экономического университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	**Усмонов Нурулло,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Таджикского государственного финансово-экономического университета
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Сафаров Джумабой,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава
	Холикова Мастона Бобоназаровна, кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни
ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Институт туризма, предпринимательства и сервиса

Защита диссертации состоится *«23» июня 2021. г. в 10 часов* на заседании Диссертационного совета 6Д.КОА – 012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу 734027, г.Душанбе, улица Буни Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан « _____» ______________ 2021 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета 6Д.КОА – 012,
доктор физико-математических наук Одинаев Р.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и необходимость проведения по теме диссертации.

Краевым задачам теории функций комплексного переменного посвящено большое число исследований. Существенный вклад в решение этих задач внесли Гахов Ф.Д., Мусхелишвили Н.И., Михайлов Л.Г., Векуа Н.П., Боярский Б.В., Маркушевич А.И., Сабитов И.Х., Юханонов Н.Н., Усманов Н. и другие.

Основной краевой задачей теории функций комплексного перемен - ного является задача Римана:

$$\varphi^{+}(t) = G(t)\varphi^{-}(t) + g(t). \qquad \text{(R)}$$

Её исследование и многочисленная литература по вопросам, связан - ным с ней, даны в монографиях Гахова Ф.Д.[1,2,3] Мусхелишвили Н.И.[4] и Михайлова Л.Г.[5,6]

В нескольких направлениях обобщалась краевая задача (R). Таким обобщением и является обобщение краевого условия, которое входит в неё наряду со значением искомой функции её комплексно-сопряжённого значения

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\varphi^{-}(t) + b(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t)\,. \qquad (A)$$

Эту задачу поставил впервые Маркушевич А.И.[7] и исследовал при $a(t) \equiv c(t) \equiv 0, b(t) \equiv 1$. Векуа Н.П.[8] преобразовав эту задачу в виде сингул - ярного интегрального уравнения, получил условие нормальной разреши - мости $a(t) \neq 0$.

При условии $|a(t)| > |b(t)|$ первые точные результаты для задачи (A) получены Боярским Б.В.[9]

В задаче (A) различаются случаи

$$\left.\begin{aligned} |a(t)| &> |b(t)| - \textit{эллиптический} \\ |a(t)| &\equiv |b(t)| - \textit{параболический} \\ |a(t)| &< |b(t)| - \textit{гиперболический} \end{aligned}\right\} \qquad (0.1)$$

---

[1] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. //–М.: Наука. –1977. – 640 С.

[2] Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы *n* пар функций //УМН. Т.VII, вып. 4(50). –1952. – С.3 – 54.

[3] Гахов Ф.Д. О современных проблемах теории краевых задач аналитических функций и особых интегральных уравнений //Дифференциальны уравнения. Т. 1. №6. –1965. – С.35 – 48.

[4] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения //–М.: Наука. –1968. –513с.

[5] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравне - ниям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183с.

[6] Михайлов Л.Г. Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследо - вания по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. -1964. – С.32 – 35.

[7] Маркушевич А.И. Об одной граничной задаче аналитических функций //Учёные зап. Московского универ - ситета. Т.100. –1946. – С.20 – 30.

[8] Векуа Н.П. Система сингулярных интегральных уравнений //–М.: Гостехиздат. –1950. – 252с.

[9] Боярский Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщения Академии наук Грузинской ССР, т. XXV, №4. –1960. – С.385 – 390.

Полная теория задачи (A) в случаях 1) и 2) дана в монографии и статье Михайлова Л.Г.[10,11]

Точные результаты в эллиптическом случае получены там при следующих условиях:

1) функция $a(t)$ – непрерывная и $a(t) \neq 0$, функция $b(t)$ – ограничен - ная и измеримая, функция $c(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, где Г – является контуром Ляпунова, который ограничивает многосвязную область;

2) функция $a(t)$ – удовлетворяет условию Гельдера на контуре Г, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, $b(t)$ и $c(t)$ – ограниченные измеримые функции. Там же исследован параболический случай, когда $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на Г, ограничивающем односвязную область.

Не предполагая ни одного из условий (0.1), Сабитов И.Х.[12] исследовал задачу (A) на окружности с требованием, чтобы коэффициенты $a(t), b(t), c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$ и $a(t) \neq 0\cdot$

В другой работе Сабитова И.Х. [13] даётся исследование краевой задачи (A) со сдвигом для односвязной области с границей, являющиеся кривой Ляпунова.

Михайлов Л.Г. в своей монографии исследовал обобщение краевой задачи (А) на случай, когда в краевом условии, наряду с искомыми функциями, входят члены, содержащие производные первого порядка и нелинейные членеы. А именно, рассматриваются задачи с одним из следующих условий:

$$\varphi^+(t) = a(t)\frac{d\varphi^-}{dt} + b(t)\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}} + p(t)\varphi^-(t) + q(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \qquad (A_1)$$

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + R[\varphi^-(t)] + c(t),\ \varphi^-(\infty) = 0, \qquad (B)$$

где R – некоторый оператор в $L_p(\Gamma)\cdot$

---

[10] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183 с.

[11] Михайлов Л.Г. Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. – 1964. – –С.32 – 35.

[12] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т.V, №1,– 1948. – С. 17 – 23.

[13] Сабитов И.Х. Об одной граничной задачи линейного сопряжения. //Математ. сборник. Т.64, №2. –1964. – С. 262 – 274.

В монографии Михайлова Л.Г.[14] задача (A_1) исследована в эллиптическом случае $|a(t)|>|b(t)|$, при малых $|p(t)|$, $|q(t)|$, и $a(t)\neq 0$, а задача (B) исследована при условиях: R – некоторый ограниченный оператор, действующий из $L_p(\Gamma)$ в $L_p(\Gamma)$, норма которого достаточна мала и $|a(t)|>|b(t)|$, $a(t)\neq 0$. В статье Михайлова Л.Г.[15] задача (A_1) исследована при условиях $|a(t)|>|b(t)|$ и $|a(t)|\equiv|b(t)|$, не требуя малости $|p(t)|$ и $|q(t)|$, а задача (B) – при условии, что R – вполне непрерывный оператор в $L_2(\Gamma)$ и $|a(t)|>|b(t)|$, $a(t)\neq 0$.

Исследование задачи (A), (A_1) и (B) при некоторых предположениях относительно коэффициентов рассматривались в работах Юханонова Н.Н. и Усмонова Н.

Юханонов Н.Н.[16,17,18] рассматривает сингулярные случаи задачи (A) в случае

$$a(t)=\frac{\prod_{i=1}^{N}(t-\alpha_i)^{m_i}}{\prod_{k=1}^{P}(t-\beta_k)^{\nu_k}}\cdot a_1(t); \qquad b(t)=\frac{\prod_{i=1}^{N}(t-\alpha_i)^{\mu_i}}{\prod_{k=1}^{P}(t-\beta_k)^{\omega_k}}\cdot b_1(t)$$

и требует, что $\mu_i\geq m_i, \nu_k\geq\omega_k$. Эти требования исключают сингулярность. Если требования выполняются, то схема исследований для непрерывных коэффициентов здесь без изменения проходит. Что касается исследования Усмонова Н.[19] там в краевое условие сингулярность допускается только для первого коэффициента. В другой работе Усманова Н.[20] рассматривается сингулярность модульного характера, там тоже имеется сингулярность только при первом коэффициенте. В настоящей диссертации допускается, что все коэффициенты краевого условия могут иметь сингулярность.

14 Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183 с.

15 Михайлов Л.Г. Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. – 1964. – –С.32 – 35.

16 Юханонов Н.Н. Об общей краевой задаче с производными для круга //Сборник исследований по краевым задачам теории функций и интегральным уравнениям //Физико-технический институт АН Тадж. ССР. 1967. С.216 – 228.

17 Юханонов Н.Н. Общая граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами и её исключительные случаи //Сборник аспирантских работ //ТГУ, серия естественных наук. Душанбе.«Ирфон». 1965. С.112–120.

18 Юханонов Н.Н. Общая граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами и её исключительные случаи //Сборник аспирантских работ //ТГУ, серия естественных наук. Душанбе.«Ирфон». 1965. С.112–120.

19 Усманов Н.Особые случаи краевой задачи сопряжения аналитических функций с производными //ДАН Тадж. ССР. т. XVII, №7, 1974. С.7–10.

20 Усманов Н., Михайлов Л.Г. Сингулярные краевые задачи сопряжения. Доклады РАН, 2002, т.387, №3. С. 309 – 313.

В предлагаемой диссертационной работе используется метод Сабитова И.Х. для нахождения числа решений однородной задачи – l и число условий разрешимости неоднородной задачи – p для круга.

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для односвязной области и круга. В ней рассматриваются не изучавшиеся случаи разрешимости поставленных граничных задач сопряжения аналитических функций с наличием нулей и бесконечностей сопряжённо-аналитического и неаналитического типа коэффициентов на границе.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Тема настоящей диссертации связана с научной темой кафедры высшей математики Таджикского государственного финансово-экономического университета на 2016 – 2020 годы по теме «Исследования сингулярных краевых задач теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения».

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертации является доказательство теорем о разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций. Точнее:

- исследование разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для односвязной области;
- исследование разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

Задачи исследования:

- найти точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами аналитического вида на границе;
- найти точные значения l– число решений однородной задачи и p–число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными типа Карлемана в сингулярном случае;
- найти точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными высших порядков в сингулярном случае;
- найти точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

Основные методы исследования. Для решения поставленных задач в работе использованы современные методы теории краевых задач аналитичес ких функций, теория сингулярных интегральных уравнений, теория рядов Фурье и элементы функционального анализа. Также используются другие методы, разработанные в работах Л.Г. Михайлова и И.Х. Сабитова.

Научная новизна исследований. Результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами аналитического вида на границе;
- найдены точные значения l– число решений однородной задачи и p–число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными типа Карлемана в сингулярном случае;
- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными высших порядков в сингулярном случае;
- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи некоторых сингуляр - ных краевых задач теории аналитических функций для круга.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы разрешимости для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами аналитического вида на границе;
- теоремы разрешимости для граничной задачи типа Карлемана в сингулярном случае;
- теоремы разрешимости для краевой задачи сопряжения аналитических функций с производными высших порядков в сингулярном случае;
- теоремы разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссерта - ционной работе результаты имеют теоретическое значение. Полученные результаты могут быть использованы для далнейшего развития теории краевых задач аналитических функций в сингулярном случае. Они могут быть применены также в прикладных задачах теории упругости, гидродинамики и т.д. Они могут быть применены также в прикладных задачах теории упругости, гидродинамики и т.д. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика”.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные резуль - таты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опублико - ванных работах. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Личный вклад соискателя учёной степени, состоит:

- в получении новых результатов для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами аналитического вида на границе;
- в получении новых результатов для общей граничной задачи типа Карлемана в сингулярном случае;

- в получении новых результатов для краевой задачи сопряжения аналитических функций с производными высших порядков в сингуляр - ном случае;
- в получении новых результатов для некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга;
- в подготовке публикаций по работе и личном участии в апробации результатов диссертации.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры высшей математики Таджикского государ - ственного Финансово–экономического университета под руководством доктора физико-математических наук, профессора Нурулло Усмонова (Душанбе, 2009 – 2021 гг.);
- научных семинарах кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета (ТГПУ) им. С.Айни;
- семинарах кафедры математического анализа и теории функций Таджик - ского национального университета под руководством академика НА РТ Н. Раджабова (Душанбе, 2020 – 2021 гг.);
- международной научной конференции, посвященной 85 – летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. (Душанбе, 17 – 18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы матема - тики и ее преподавания» (Курган-Тюбе, 10 –11 мая 2013 г.);
- международной научно-теоретической конференции «Актуальные проб - лемы развития образования и науки в современных условиях» (Душанбе, 26 декабря 2016 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы матема - тики и их приложения» (Душанбе, 15 –16 июня 2017 г.);
- республиканской научно–теоретической конференции «Роль математики в экономике» (Душанбе, 29 июня 2018 г.).

Публикации основных результатов. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 12 печатных работах автора, список которых приведён в конце диссертации. Из них 5 статей [1А, 2А, 3А, 4А, 5А] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ с научным руководителем Н. Усмоновым [1А, 2А, 5А, 9А, 10А, 11А, 12А] на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка использованной литературы из 55 наименований и составляет 112 страниц машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья - на порядковый номер теоремы или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Диссертационная работа начинается с введения. В нём освещается актуальность темы диссертации, цель работы, апробация и краткое изложение полученных результатов.

Диссертация состоит из двух глав и 7 параграфов.

Глава 1 состоит из трёх параграфов и посвящена разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для односвязной области.

В первом параграфе первой главы рассматриваются общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами аналитического вида на границе.

Постановка задачи. Пусть Γ есть действительная ось. Задача заклю - чается в том, чтобы найты две ограниченные аналитические соответ ственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $\varphi^{+}(z)$ и $\varphi^{-}(z)$ (кусочно аналити - ческую функцию $\varphi(z)$), предельные значения, которых на контуре удовлет - воряют условию

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{k_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_1(t)\cdot\varphi^{-}(t)+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{k_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_1(t)\cdot\overline{\varphi^{-}(t)}+c(t), \qquad (A_1)$$

$$-\infty<t<+\infty,\ \varphi^{+}(\infty)=\varphi^{-}(\infty)=c(\infty)=0,$$

где функции $a_1(t), b_1(t), c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$, $\eta_r\ (r=1,2,\dots,R)$, $\xi_m\ (m=1,2,\dots,M)$ - некоторые различные точки контура, k_r, q_m - натуральные числа, причём поиск решения этих функций проводится в ограниченных областях $\overline{D^{+}}$ и $\overline{D^{-}}$.

Введем обозначения $\sum_{r=1}^{R}k_r=k$, $\sum_{m=1}^{M}q_m=q$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Пусть* $a_1(t)\in \mathrm{H}(-\infty;+\infty)$, $a_1(t)\neq 0$, $b_1(t)$, $c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$, $c(t)$ - *дифференцируема в окрестности точки* $t=\eta_r$, *имеет производные порядка* k_r-1, $æ=Ind_{\Gamma}a_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\{\ln a_1(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$. *Рассматриваются решения представимые интегралом типа Коши.*

Пусть $\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\left|\frac{b_2(t)}{a_2(t)}\right|<1$ $\left(\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\left|\frac{b_1(t)}{a_1(t)}\right|<1\right)$. *Тогда*

1) *при* $æ-q\geq 0$, $l=2æ$ *и* $p=0$;

2) *при* $æ-q<0$, $l=0$ *и* $p=2|æ-q|$.

Необходимое и достаточное число условий разрешимости неоднородной задачи имеет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-i)^{-n}Q[c(t)]dt=0,\quad n=1,2,\ldots,|æ-q|,$$

где Q – линейный оператор.

Отсюда следует, что число решений задачи в классе функций, ограничен - ных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициентов задачи и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов.

ЗАДАЧА (A) С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НЕ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА И НЕ ГОЛОМОРФНОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим задачу

$$\varphi^{+}(t)=a(t)\varphi^{-}(t)+b(t)\overline{\varphi^{-}(t)}+c(t). \qquad (A)$$

с сингулярностью не целого порядка, и не голоморфной структуры.

Пусть в задаче (A) $|a(t)|>|b(t)|$. Рассматривается задача

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}a_1(t)\varphi^{-}(t)+\frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}b_1(t)\overline{\varphi^{-}(t)}+c(t), \qquad (0.0.1)$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$ и $c(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на Г, имеют в окрестностях τ_r, ξ_n производные соответственно порядков d и s, удовлетворяющие условию Гельдера и $a_1(t)\neq 0$, $b_1(t)\neq 0$.

Обозначим $\sum_{r=1}^{J}d_r=\sum_{r=1}^{J}(q_r^{(1)}-\varsigma_r^{(1)})$, $\sum_{n=1}^{N}s_n=\sum_{n=1}^{N}(q_n^{(2)}-\varsigma_n^{(2)})$, где $\sum_{r=1}^{J}q_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N}q_n^{(2)}$ - целые числа, $\sum_{r=1}^{J}\varsigma_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N}\varsigma_n^{(2)}$ – их дробная часть, т. е. $0<\operatorname{Re}\varsigma_r^{(1)}<1$, $0<\operatorname{Re}\varsigma_n^{(2)}<1$, $\sum_{r=1}^{J}d_r=d$, $\sum_{S=1}^{N}s_n=s$.

Для задачи (0.0.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.2.

1) *При* $æ-q\geq 0$, *однородная задача* (0.0.1) *имеет* $æ-q+1$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача безусловно разрешима*;

2) *При* $æ-q<0$, *однородная задача* (0.0.1) *имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи, необходимо и достаточно выполнение* $q-æ-1$ *условий. Условие разрешимости данной задачи записывается в виде*

$$\int_{\Gamma}t^{-s}R[c(t)]dt=0,\; s=0,1,2,\ldots,|æ-q|-1,$$

где R *– линейный оператор.*

Во втором параграфе первой главы изучается краевая задача с производ - ными типа Карлемана в сингулярном случае.

Пусть D^+ – односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой $\Gamma \in C'_\lambda$, $\lambda > \dfrac{1}{2}$, D^- – дополнение $D^+ + \Gamma$ по всей плоскости E. Пусть на Γ задана функция $a(t) \in C'_\lambda(\Gamma)$, $\alpha'(t) \neq 0$, отображающая Γ на себя взаимно однозначно с сохранением направления обхода.

Рассматривается следующая краевая задача: найти функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, аналитические, соответственно, в D^+ и D^-, представимые интегралом Коши, если их граничные значения $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ существуют, принадлежат $L_2(\Gamma)$ и удовлетворяют условию

$$\varphi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot A(t) \cdot \frac{dF^-}{dt} + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot B(t) \cdot \frac{d\overline{F^-}}{dt} +$$

$$+ \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot P(t) \cdot F^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot D(t) \cdot \overline{F^-(t)} + c(t)\,. \qquad (0.0.2)$$

Краевая задача (0.0.2) сводится к эквивалентной ей краевой задаче, вида:

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] = \frac{a(t)}{t} \cdot \psi^-(t) + \frac{b(t)}{\bar{t}} \cdot \overline{\psi^-(t)} + p(t) \cdot V(\psi^-) + q(t) \cdot \overline{V(\psi^-)} + c_1(t), \quad (0.0.3)$$

где $a(t) = A(t)$, $b(t) = \mathrm{B}(t) \cdot \exp\left(-2i\sum_{m=1}^{M} Q_m q_m\right) \cdot \overline{z^{-q}}$, $q(t) = D(t)$.

Сопряжённой к задаче (0.0.3), следовательно, и к задаче (0.0.2), назовём следующую задачу:

$$\Omega^-(t) = \frac{a(t)}{t} \cdot \alpha'(t) \cdot \Omega^+[\alpha(t)] + \overline{\frac{b(t)}{\bar{t}} \cdot t'^2(S) \cdot \alpha'(t) \cdot \Omega^+[\alpha(t)]} -$$

$$-2V'[p(\tau)] \cdot \alpha'(\tau)\Omega^+[\alpha(\tau)] - \overline{2 \cdot \overline{V'}[q(\tau)] \cdot \tau'^2(S) \cdot \alpha'(t)\Omega^+[\alpha(t)]}, \qquad (0.0.4)$$

где $t = t(S)$ – уравнение контура Γ, отнесенное к дуге S,

$$V' = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}{t} \cdot p(\tau)\Omega^+[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau) \cdot d\tau\,,$$

$$\overline{V'} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}{t} \cdot \overline{q(\tau)} \cdot \tau'^2(S) \cdot \Omega^+[\alpha(\tau)] \cdot \alpha'(\tau)\, d\tau\,.$$

В итоге исследования сформулирована следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $A(t), A(t)\neq 0,\ B(t),\ D(t),\ P(t)$ – *непрерывные функции,* $c(t)\in L_2(\Gamma), æ=Ind_\Gamma A(t)$, l *и* l' – *числа линейно независимых* (*над полем вещественных чисел*) *решений однородных задач* (A) *и* (0.0.2). *Тогда справедливы равенства* $l-l'=2(æ-1),\ p=l'$.

Условия разрешимости данной задачи записываются, в виде:

$$Re\int_\Gamma c_1(t)\cdot\Omega_j^+[\alpha(t)]\cdot\omega_j^-(t)\,dt=0\ ,\ j=1,2,\ldots,l'=p\,,$$

где Ω_j^+ – *решение сопряжённой задачи* (A_3^α).

Рассматривается следующая задача

$$\varphi^+[\alpha(t)]=a(t)\frac{d\varphi^-}{dt}+b(t)\frac{d\overline{\varphi^-}}{dt}+q(t)\overline{\varphi^-(t)}+c(t),\ \varphi^-(\infty)=0\,. \qquad (0.0.5)$$

Результат исследования сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $a(t), b(t), q(t)\in H_\lambda(\Gamma),\ \lambda>\frac{1}{2},\ c(t)\in L_2(\Gamma)$, $a(t)\neq 0$, $æ=Ind_\Gamma a(t)-1,\ n=\max\{m_1-1,\ n_1,\ m_2-1,\ n_2\}$ *и* $a(t)\in C'_\lambda$ *отображает контур* Γ *на себя взаимно однозначно с сохранением направления контура,* $\alpha'(t)\neq 0$. *Кроме того, пусть* $\varphi^\pm(t)\in L_2(\Gamma)$ *является решением задачи, представимой интегралом типа Коши. Тогда для задачи,* (0.0.5) *имеет место*:

1) *если* $æ\le -n+1,$ *то* $l=0,\ p=2|æ|$;

2) *если* $-n+1<æ<0,$ *то* $0\le l\le 2(n+æ-1),\ p=l-2æ$;

3) *если* $æ\ge 0,$ *то* $2æ\le l\le 2(n+æ-1),\ p=l-2æ$.

В третьем параграфе первой главы исследуется обобщение граничного условия задачи сопряжения аналитических функций, имеющей производные высших порядков в сингулярном случае.

В простых предположениях многосвязной области D^+, ограничиваю - щий контуром Γ, содержащую внутри себя начала координат и область D^- – дополнение $D^+ + \Gamma$ по всей плоскости E, рассматривается краевая задача аналитических функций

$$\frac{a_1(t)}{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{s_k}}\cdot\frac{d^m\varphi^+}{dt^m}+\frac{b_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\overline{(t-\beta_j)^{p_j}}}\cdot\frac{d^m\overline{\varphi^+}}{dt^m}=\frac{a_2(t)}{\prod\limits_{i=1}^{\delta}(t-\gamma_i)^{d_i}}\cdot\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}+\frac{b_2(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\omega}\overline{(t-\eta_r)^{p_r}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{d^n\overline{\varphi^+}}{dt^n}+q_1(t)\cdot K_1\left[\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}\right]+q_2(t)\cdot K_2\left[\frac{d^n\overline{\varphi^-}}{dt^n}\right]+c(t)\,. \qquad (0.0.6)$$

Здесь предполагается, что точки контура $\alpha_k,\beta_j,\gamma_i,\eta_r$ не совпадают между собой, где $\alpha_k\,(k=1,2,\ldots,\mu)$, $\beta_j\,(j=1,2,\ldots,\nu)$, $\gamma_i\,(i=1,2,\ldots,\delta)$, η_r (r = 1,2,…, ω) – некоторые различные точки контура; s_k, p_j, d_i, ρ_r – целые положительные числа, $a_1(t)$, $b_1(t), a_2(t), b_2(t), q_1(t), q_2(t), c(t) \in H(\Gamma)$, K_1, K_2 – линейные ограниченные операторы, действующие из Н(Г) в Н(Г). Ищутся решения, исчезающие на бесконечности и все производные, входящие в краевое условие, непрерывны вплоть до границы.

Глава 2 состоит из четырёх параграфов, посвящена разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

В первом параграфе второй главы даётся исследование сингулярных случаев общей краевой задачи на окружности с коэффициентами из более общих классов.

Рассматриваются сингулярные случаи задачи (А) на окружности при более общих условиях на коэффициенты $a(t),\ b(t),\ c(t)$:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{J}\left|t-\tau_r\right|^{d_r}}{\prod\limits_{n=1}^{N}\left|t-\xi_n\right|^{s_n}}\cdot a(t)\cdot\varphi^-(t)+\frac{\prod\limits_{r=1}^{J}\left|t-\tau_r\right|^{d_r}}{\prod\limits_{n=1}^{N}\left|t-\xi_n\right|^{s_n}}\cdot b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}+c(t). \qquad (0.0.7)$$

Здесь $\tau_r\ (r=1,2,...,J),\ \xi_n\ (n=1,2,...,N)$ - некоторые точки контура, d_r, s_n вещественные числа, $a(t)$ – непрерывная, $b(t)$ – ограниченная и измеримая функция, $c(t)\in L_p(\Gamma)$, $p>1, a(t)\neq 0, b(t)\neq 0.$

Обозначим через $\sum\limits_{r=1}^{J}d_r=\sum\limits_{r=1}^{J}(q_r^{(1)}-\zeta_r^{(1)})$, $\sum\limits_{n=1}^{N}s_n=\sum\limits_{n=1}^{N}(q_n^{(2)}-\zeta_n^{(2)})$, $\sum\limits_{r=1}^{J}q_r^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{N}q_n^{(2)}$ - целые числа, и через $\sum\limits_{r=1}^{J}\zeta_r^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{N}\zeta_n^{(2)}$ - их дробную часть.

Задача (0.0.7) сводится к равносильной задаче

$$\varphi^+(t)=a_2(t)\varphi_1^-(t)+b_2(t)\overline{\varphi_1^-(t)}+c_2(t). \qquad (0.0.8)$$

Для задачи (0.0.8) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть в* (0.0.8) Γ *– единичная окружность*: $|t|=1$, *ограничивающая область* D^+, *а* D^- *– внешность круга* $|z|<1$; $a_2(t)$ *– непрерывна,* $b_2(t)$ *– ограниченная и измеримая функция,* $c_2(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ=Jnd_\Gamma a_2(t)$, $a_2(t)\neq 0$. *Пусть* $\varphi^{\pm}(t)\in L_2(\Gamma)$ *являются решением задачи, представимые интегралом типа Коши и функция* $b_2(t)$ *является ограниченной и сходящийся в среднем* $L_2(\Gamma)$ *в ряды Фурье и* N *– наименьшее из всех чисел, для которых справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{b_2(t)-\sum\limits_{k=-N}^{N}b_kt^k}{a_2(t)}\right\|_{L_2}<1.$$

Если m выражается как индекс первого из коэффициентов

$b_{-N}, b_{-N+1},...,b_{-1}$, *которые не обращаются к нулю, то в случае* $m \geq 1$:

1) *если* $æ \geq m-1$, *то* $l = 2æ,\ p = 0$;
2) *если* $0 \leq æ \leq m-1$, *то* $p = l - 2æ$,
$2æ \leq l \leq m + æ$ *при* $m + æ$ *– чётном,*
$2æ \leq l \leq m + æ - 1$ *при* $m + æ$ *– нечётном;*
3) *если* $æ \leq -m+1$, *то* $l = 0,\ p = 2|æ|$;
4) *если* $-m+1 < æ < 0$, *то* $p = l - 2æ$ *и*
$0 \leq l \leq m + æ$ *при* $m + æ$ *– чётном,*
$0 \leq l \leq m + æ - 1$ *при* $m + æ$ *– нечётном.*

Рассматривается также задача (A) для полуплоскости в сингулярном случае

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{J} |t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N} |t-\xi_n|^{s_n}} \cdot a(t) \cdot \varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{J} |t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N} |t-\xi_n|^{s_n}} \cdot b(t) \cdot \overline{\varphi^-(t)} + c(t), \tag{0.0.9}$$

$$-\infty < t < \infty,\ \ \varphi^+(\infty) = \varphi^-(\infty) = C(\infty) = 0.$$

Краевая задача (0.0.9) сводится к эквивалентной ей краевой задаче, вида

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + B(t)\overline{\varphi^-(t)} + c\,(t),$$

где

$$A(t) = \prod_{r=1}^{j} (t-\tau_r)^{\zeta_r^{(1)}} \cdot \prod_{n=1}^{N} (t-\xi_n)^{-\zeta_n^{(2)}} \cdot \exp\left(i\sum_{n=1}^{N} \theta_n^{(2)} s_n - i\sum_{r=1}^{N} \theta_r^{(1)} d_r \right) \cdot a(t),$$

$$B(t) = \prod_{r=1}^{j} (t-\tau_r)^{\zeta_r^{(1)}} \cdot \prod_{n=1}^{N} (t-\xi_n)^{-\zeta_n^{(2)}} \cdot \exp\left(i\sum_{n=1}^{N} \theta_n^{(2)} s_n - i\sum_{r=1}^{N} \theta_r^{(1)} d_r \right) \cdot b(t).$$

Результат исследования может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема 2.1.2. *Пусть функция* $A(t)$ *на вещественной оси удовлетворяет условию Гельдера и* $A(t) \neq 0,\ æ = Ind_{\Gamma} A_1(t) = \frac{1}{2\pi}\{\ln A_1(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $B(t)$ *– ограниченная и измеримая функция,* $c(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ *и* $\varphi^{\pm}(t) \in L_2(-\infty,\infty)$. *Если выполняется неравенство* $\sup\limits_{-\infty<t<+\infty} \left|\frac{B(t)}{A(t)}\right| < 1$ $\left(\sup\limits_{-\infty<t<+\infty} \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| < 1 \right)$, *то*

1) *в случае* $æ \geq 0$ $l = 2æ,\ p = 0$;
2) *в случае* $æ < 0$ $l = 0,\ p = 2|æ|$.

Для того чтобы неоднородная задача (A) *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-i)^{-k} Q[c(t)]\,dt = 0,$$

где $k = 1, 2, \ldots, |æ|$, Q *– линейный оператор.*

Во втором параграфе этой главы исследуется общая граничная задача сопряжения с производными для единичного круга в сингулярном случае, где требуется найти функции $\varphi^{\pm}(z)$, аналитические, соответственно, в областях $D^{\pm}$, имеющие почти всюду на контуре Г вместе с их производными угловые граничные значения $\varphi^{\pm}(t)$, $\left(\dfrac{d\varphi^-}{dt}\right)$ и удовлетворяющие граничному условию:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot a(t)\frac{d\varphi^-}{dt}+\frac{\prod_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot b(t)\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}}+\frac{\prod_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot p(t)\varphi^-(t)+$$

$$+\prod_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}q(t)\overline{\varphi^-(t)}+c(t),\quad \varphi^-(\infty)=0. \qquad (A_1)$$

Будем предполагать, что Γ – единичная окружность: $|t|=1$, а D^+ – круг $|z|<1$ и D^- – внешность круга.

I. ЗАДАЧА (A_1) С КОЭФФИЦИЕНТОМ $p(t)\equiv 0$.

Краевая задача (A_1) в случае $p(t)\equiv 0$ сводится к эквивалентной ей краевой задаче, вида

$$\Phi_1^+(t)=A_3(t)\psi_2^-(t)+B_3(t)\overline{\psi_2^-(t)}+Q_1(t)V\left(\psi_1^-\right)+c_1(t). \qquad (0.0.10)$$

В задаче (0.0.10) разложим ограниченные измеримые функции $B_3(t)$ и $Q_1(t)$, соответственно, сходящиеся в среднем $L_2(\Gamma)$ в ряды Фурье[21]

$$B_3(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k t^k,\quad Q_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q_k t^k.$$

Через N обозначим наименьший номер, для которого имеет место неравенство

$$\left\|\frac{b(t)-\sum_{k=-N}^{N}b_k t^k}{A_3(t)}\right\|_{L_r}+\left\|\frac{q(t)-\sum_{k=-N}^{N}q_k t^k}{A_3(t)}\right\|_{L_r}\cdot\left\|\tilde{V}\right\|_{L_r}<1,$$

где $\tilde{V}(\psi)=\dfrac{1}{\chi^-(t)}\cdot V\left(\chi^-\psi\right)$, $\chi(z)$ – каноническая функция задачи Римана[22] с коэффициентом $A_3(t)$ и

$$V(\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi^-(\tau)}{\tau}\ln\left(1-\frac{\tau}{t}\right)d\tau.$$

---

[21] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1. 1964. С.17 – 23.

[22] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. //–М.: Наука. 1977. 640 стр.

Среди коэффициентов $b_{-N}, b_{-N+1}, \ldots, b_{-1}, q_{-N}, q_{-N+1}, \ldots, q_{-1}$ могут быть и равные нулю. Через m и n обозначим индексы, соответственно, первых из этих коэффициентов, отличных от нуля. Если $b_{-k}=0$ и $q_{-k}=0$, $(k=-N,\ldots,-1)$, то $m=0$ и $n=0$.

В итоге исследования сформулирована следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть* Γ *– единичная окружность*: $|t|=1$, D^{+} *– внутренняя и* D^{-} *– внешняя части круга,* $A_3(t)$ *– непрерывна,* $A_3(t)\neq 0,$, $B_3(t)$, $Q_1(t)$ *– ограниченные измеримые функции,* $c_1(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ = Ind_{\Gamma} A_3(t)-1$ *и* $\Phi_1^{+}(t)$, $\dfrac{d\Phi^{-}}{dt}\in L_2(\Gamma)$. *Рассматриваем решения, представимые интегралом типа Коши.*

Пусть $\nu=\max(m-1,n)$. *Тогда имеют место следующие результаты:*

1) *если* $æ=\nu-1$*, то* $l=2æ$, $p=0$;

2) *если* $0\le æ<\nu-1$, *то* $p=l-2æ$,

$2æ\le l\le \nu+æ$ *при* $\nu+æ$ *– чётном и*

$2æ\le l\le \nu+æ-1$ *при* $\nu+æ$ *– нечётном*;

3) *если* $-\nu+1<æ<0$, *то* $p=l-2æ$,

$0\le l\le \nu+æ$ *при* $\nu+æ$ *– чётном,*

$0\le l\le \nu+æ-1$ *при* $\nu+æ$ *– нечётном*;

4) *если* $æ<-\nu+1$, *то* $l=0$, $p=2|æ|$.

II. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА (A_1)

Пусть Γ – единичная окружность: $|t|=1$, $a(t)\in H(\Gamma), b(t), p(t), q(t)$ – ограниченные и измеримые функции, $c(t)\in L_2(\Gamma)$.

Введём функции $\chi^{+}(t)$ и $\chi^{-}(t)$ – каноническое решение задачи Римана[23] :

$$\chi^{+}(t)=t^{-æ}a(t)\chi^{-}(t),$$

где $æ=Ind_{\Gamma}a(t)$. Разложим ограниченные функции $b(t), p(t), q(t)$ в ряды Фурье, а $\dfrac{p(t)}{\chi^{+}(t)}$ в сходящиеся в среднем $L_2(\Gamma)$ ряды Фурье[24]:

$$\frac{p(t)}{\chi^{+}(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k t^k .$$

Пусть N - есть наименьший номер, в котором имеет место следующее неравенство

[23] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. //–М.: Наука. 1977. 640 стр.

[24] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1. 1964. С.17 – 23.

$$\left\{\left\|\frac{b(t)-\sum\limits_{k=-N}^{N} b_k t^k}{\chi^+(t)}\right\|_{L_2} + \left[\left\|\frac{q(t)-\sum\limits_{k=-N}^{N} q_k t^k}{\chi^+(t)}\right\|_{L_2} + \left\|\frac{p(t)}{\chi^+(t)} - \sum_{k=-N}^{N} p_k t^k\right\|_{L_2}\right]\cdot\|V\|_{L_2}\right\}\cdot\|R\|_{L_2} < 1,$$

где $\|R\| = \max\{\|R_2\|;\|R_3\|\}$, R_2, R_3 – линейные операторы.

Через m и n обозначим, соответственно, индексы первых из коэффициентов $b_{-N}, b_{-N+1},\dots, b_{-1}$ и $q_{-N}, q_{-N+1},\dots, q_{-1}$, отличающих от нуля, а через r индекс первого из коэффициентов $p_N, p_{N-1},\dots, p_2, p_1$.

Результат исследования может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема 2.2.2. *Пусть* Γ *– единичная окружность*: $|t|=1$, D^+ *– внутренняя, а* D^- *– внешняя части круга* $|z|<1$, $a(t)\in H(\Gamma)$, $a(t)\neq 0$, $b(t), p(t), q(t)$ *– ограниченные и измеримые функции,* $c(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ = Ind_\Gamma a(t)$. *Рассматриваются решения, представимые интегралом типа Коши и* $\varphi^+(t)$, $\frac{d\varphi^-}{dt}\in L_2(\Gamma)$, $\nu = \max(m-1, n)\geq 1$.

Тогда для задачи (A_1) *имеют место следующие результаты*:

1) *если* $æ \geq \nu + r$, *то* $p=0$ *и, вообще говоря,* $l = 2(æ-1)$, *а в некоторых случаях возможны ещё два решения*;

2) *если* $1 < æ < \nu + r$, *то* $2(æ-1)\leq l\leq \nu + r - 1$, $p = l - 2(æ-1)$, *но при* $r+1 < æ < \nu + r$ *имеются такие специальные случаи, что* $2æ \leq l \leq 2(\nu + r)$, $p = l - 2æ$;

3) *если* $æ \leq 1$, *то* $0\leq l\leq 2(\nu + r + 1)$, $p = l - 2(æ - 1)$.

В третьем параграфе второй главы изучается сингулярная краевая задача с производными со сдвигом.

Пусть D^+ и D^- – соответственно, внутренняя и внешняя части круга $|z|<1$, Γ – единичная окружность: $|t|=1$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$E^+[\alpha(t)] = \frac{\prod\limits_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod\limits_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}\cdot A(t)\frac{dE^-}{dt} + \frac{\prod\limits_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod\limits_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}\cdot B(t)\cdot\frac{d\overline{E^-}}{dt} +$$

$$+\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}\cdot D(t)\cdot\overline{E^-(t)} + q(t), \qquad (0.0.11)$$

где τ_r $(r=1,2,\dots,J)$, ξ_n $(n=1,2,\dots,N)$ – некоторые точки контура, d_r, s_n – произвольные вещественные числа.

Введём обозначения $\sum\limits_{r=1}^{J} d_r = \sum\limits_{r=1}^{J}(q_r^{(1)} - \zeta_r^{(1)})$, $\sum\limits_{n=1}^{N} s_n = \sum\limits_{n=1}^{N}(q_n^{(2)} - \zeta_n^{(2)})$, где

$\sum\limits_{r=1}^{J} q_r^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} q_n^{(2)}$ – целые числа, $\sum\limits_{r=1}^{J} \zeta_r^{(1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \zeta_n^{(2)}$ – их дробная часть, $A(t), B(t), D(t) \in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma)$, $\lambda > \frac{1}{2}$, $q(t) \in L_2(\Gamma)$.

Краевая задача (0.0.11) сводится к эквивалентной ей краевой задаче, вида

$$\varphi^+[\alpha(t)] = a(t)\frac{1}{t}\psi^-(t) + b(t)\frac{1}{t}\overline{\psi^-(t)} + q(t)\overline{V(\psi^-)} + c(t),\ \psi^-(\infty) = 0. \qquad (0.0.12)$$

Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема 2.3.1. *Пусть* $a(t), b(t), q(t) \in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma)$, $\lambda > \frac{1}{2}$, $c(t) \in L_2(\Gamma)$, $a(t) \neq 0$, $æ = Ind_\Gamma\, a(t) - 1$, $n = \max\{m_1 - 1,\ n_1,\ m_2 - 1,\ n_2\}$, $a(t) \in C_\lambda^1$, $\lambda > \frac{1}{2}$. *Если* $\varphi^\pm(t) \in L_2(\Gamma)$ *являются решениями задачи, представимые интегралом типа Коши, то для задачи* (0.0.12), *справедлива*:

1) *если* $æ \le -n+1$, *то* $l = 0$, $p = 2|æ|$;

2) если $-n+1 < æ < 0$, *то* $0 \le l \le 2(n+æ-1)$, $p = l - 2æ$;

3) *если* $æ \ge 0$, *то* $2æ \le l \le 2(n+æ-1)$, $p = l - 2æ$.

В четвёртом параграфе второй главы изучается одна общая краевая задача сопряжения для круга в сингулярном случае.

Рассматривается сингулярная задача

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot a(t)\cdot\varphi^-(t) + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)} +$$

$$+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot p(t)\cdot R_1(\varphi^-) + \prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\overline{R_2(\varphi^-)} + c(t),\ \varphi^-(\infty) = 0, \qquad (0.0.13)$$

где $\eta_r (r = 1,2,3,\ldots,R)$, $\xi_m (m = 1,2,\ldots,M)$ – некоторые несовпадающие точки контура, d_r, q_r – натуральные числа.

Введём обозначения $\sum\limits_{r=1}^{R} d_r = d$, $\sum\limits_{m=1}^{M} q_m = q$.

Пусть $a(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$, $a(t) \neq 0, b(t), p(t)$ – ограниченные и измеримые функции, $c(t) \in L_2(\Gamma)$, R_1, R_2 – линейные ограниченные аналитические операторы, действующие из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, кроме того оператор R_1 – такой, что функциональное уравнение

$$\varphi_0^-(t) - \psi_0^-(t)\cdot R_1 \cdot \varphi_0^-(t) = \Phi_0^-(t) \qquad (0.0.14)$$

является фредгольмовым. Здесь $\psi_0^-(t)$, $\Phi_0^-(t)$ – некоторые определённые функции, при этом как данные $\psi_0^-(t)$, $\Phi_0^-(t)$, так и искомая $\varphi_0^-(t)$ функции являются предельными значениями аналитических в D^-.

Обозначим: $\varphi_0^-(t) + R_1'(\varphi_0^-) = \Phi_0^-(t)\chi^-(t)$, (0.0.15)

где $R_1'(\varphi_0^-) = \chi^- \cdot t^{\text{r+m-æ}-1} \cdot P_3 \cdot R_1\left[\dfrac{\varphi_0^-(t)}{t^{m-1}}\right]$.

В итоге исследования сформулирована следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть* Γ – *единичная окружность*: $|t|=1$, $a(t)\in H(\Gamma)$, $a(t)\neq 0$, $b(t)$, $p(t)\in M(\Gamma)$, $c(t), \varphi^{\pm}(t)\in L_2(\Gamma)$, R_1, R_2 – *аналитические операторы, действующие из* $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, *кроме того, пусть* R_1 – *такой оператор, чтобы функциональное уравнение* (0.0.14) *было фредгольмовым и все решения этого уравнения были предельными значениями функции, аналитической в* D^-, *исчезающие на бесконечности,* $\text{æ} = Ind_\Gamma a(t)$.

Тогда имеют место следующие результаты:

1. *Случай* $\text{æ} \geq m + r - 1$:

a) *Если неоднородное уравнение* (0.0.15) *имеет единственное решение, то* $l = 2\text{æ},\ p = 0$;

b) *Если неоднородное уравнение* (0.0.15) *имеет* 2σ *линейно независимых* (*в поле вещественных чисел*) *решений, то при выполнении* 2σ *условий* $l = 2(\text{æ}+\sigma),\ p = 0\ \cdot$

2. *Случай* $0 \leq \text{æ} < m + r - 1$.

Если неоднородное уравнение (0.0.15) *имеет* $2s$ *линейно независимых решений,то при выполнении* $2s$ *условий*

$$2(\text{æ}+s) \leq l \leq 2(m+r+s-1),\ \ p = l - 2\text{æ}\,.$$

3. *Случай* $\text{æ} < 0$.

a) *Если неоднородное уравнение* (0.0.15) *имеет единственное решение, то* $0 \leq l \leq 2(m+r-1),\ \ p = l - 2\text{æ}$.

b) *Если неоднородное уравнение* (0.0.15) *имеет* 2δ *линейно независимых решений, то при выполнении* 2δ *условий, будет*

$$0 \leq l \leq 2(m+r+\delta-1),\ \ p = l - 2\text{æ}\,.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы

Диссертация посвящена исследованию точных теорем о разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для односвязной области и круга. Рассмотрены не изучавшиеся ранее разреши - мости указанных задач сопряжения аналитических функций с наличием нулей и бесконечностей сопряжённого аналитического и неаналитического видов коэффициентов на контуре.

В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами сопряженного вида на границе;
- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными типа Карлемана в сингулярном случае;
- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для граничной задачи с производными высших порядков в сингулярном случае;
- найдены точные значения l – число решений однородной задачи и p – число условий разрешимости неоднородной задачи для некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Все результаты диссертационной работы получены на основании строгих математических доказательств и их можно использовать для далнейшего развития теории краевых задач сопряжения аналитических функций в сингулярном случае.

Полученые в диссертации результаты могут быть исспользованы в научных учреждениях и вузах, в которых ведется исследование по краевой задаче сопряжения теории аналитических функций в сингулярном случае. Например, в Таджикском национальном университете, Институте математики АН РТ имени А. Джураева, Худжанском государственном университете, Таджикском государственном педагогическом университете имени С. Айни, Таджикском государственном финансово-экономическом университете и др.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ:

[1-А] Кабиров А.Т. Общая краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2013. – №1/1(102). – С. 47 - 60.

[2-А] Кабиров А.Т. Об одной сингулярной краевой задаче сопряжения для круга [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т. // Вестник педагогического университета. – 2013. – № 5(54). – С.94 - 98.

[3-А] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи общей граничной задачи линей - ного сопряжения на полуплоскости с коэффициентами из более общих классов [Текст] / Кабиров А.Т. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.78 – 83.

[4-А] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи общей граничной задачи линей - ного сопряжения на окружности с коэффициентами из более общих классов [Текст] / Кабиров А.Т.// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.14 - 18.

[5-А] Кабиров А. Т. О сингулярной граничной задаче сопряжения с произ - водными со сдвигом [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. –№1/5. – С.141 -145.

В других изданиях:

[6-А] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи задачи сопряжения аналитичес - ких функций на окружности [Текст] / Кабиров А.Т. // Сборник научных трудов ФЭИТ. Часть 2. –2013. – С.416 – 425.

[7-А] Кабиров А.Т. О краевой задаче с производными типа Карлемана в сингулярном случае [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т.// Материалы международной научной конференции, посвященной 85–летию академика Михайлова Л.Г. (г. Душанбе, 17 – 18 июня 2013г.) – С.134 –137.

[8-А] Кабиров А. Т. Краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т. //Материалы международной научно-теоретич. конференции (г. Курган–Тюбе, 10 – 11. 05. 2013 г.). – С.117 – 122.

[9-А] Кабиров А.Т. Об одной сингулярной краевой задаче с производ - ными со сдвигом [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т.// Материалы международной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения» (г.Душанбе, 26 декабря 2016). – С.74 – 82.

[10-А] Кабиров А.Т. Сингулярная граничная задача сопряжения аналити - ческих функций с производными высших порядков на окружности [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т.// Вестник Финансово-экономичес - кого института Таджикистана. Специальный выпуск. –2016. № 1(5). – С.143 – 145.
[11-А] Кабиров А.Т. Граничная задача линейного сопржения с разрыв - ными коэффициентами [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т.// Материалы республиканской научно-теоретич. конференции Таджик-ского государственного финансово-экономического университета (г. Душанбе, 29.06.2018г.). – С. 78 – 83.
[12-А] Кабиров А. Т. Случай, когда коэффициенты задачи сопряжения гармонических функции имеют разрыв первого рода /Усманов Н., Саидов Б.Б., Кабиров А.Т. //Материалы республиканской научно-теоретич. конференции ТГФЭУ, (г. Душанбе, 29 июня 2018г.). – С. 98 – 100.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.55

Бо ҳуқуқи дастхат

Кабиров Абубакр Тиллоевич

ОИДИ ҲАЛШАВАНДАГИИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРИИ СИНГУЛЯРИИ НАЗАРИЯИ ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКӢ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 - таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе - 2021

Диссертатсия дар кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон иҷро шудааст.

РОҲБАРИ ИЛМӢ: **Усмонов Нурулло**,
доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ: **Сафаров Ҷумабой,**
доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Холиқова Мастона Бобоназаровна,
номзади илмҳои физикаю математика, дотсент, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ

МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА: Донишкадаи сайёҳӣ, соҳибкорӣ ва хизмат

Ҳимоя 23 – *уми июни соли 2021 соати 10* дар ҷаласаи Шӯрои диссертат - сионии 6D.KOA-012 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз рӯи нишонаи: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни - Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи "_____ " ____________" соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои
диссертатсионии 6D.KOA-012,
доктори илмҳои физикаю математика **Одинаев Р.Н.**

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммият ва дараҷаи коркарди мавзӯи тадқиқот. Ба масъалаҳои канории назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ шумораи зиёди тадқиқотҳо бахшида шудаанд. Дар ҳалли ин масъалаҳо ҳиссаи асосиро Гахов Ф.Д., Мусхелишвили Н.И., Михайлов Л.Г., Векуа Н.П., Боярский Б.В., Маркушевич А.И., Сабитов И.Х., Юханонов Н.Н., Усмонов Н. ва дигарон гузоштаанд.

Масъалаи асосии канории назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон ком - плексӣ, масъалаи Риман:

$$\varphi^{+}(t) = G(t)\varphi^{-}(t) + g(t) \qquad (R)$$

мебошад

Тадқиқотҳо ва миқдори зиёди адабиётҳои оид ба ин масъала бахшидашуда ва ба он алоқаманд дар монографияҳои Гахов Ф.Д.[1, 2, 3] Мусхелишвили Н.И.[4] ва Михайлова Л.Г.[5, 6] оварда шудаанд.

Масъалаи канории Риман (R) дар якчанд самтҳо умумӣ карда шудааст. Яке аз ин самтҳо намуди умумикардашудаи шарти канорӣ мебошад, ки дар он дар баробари қимати функсияи матлуб инчунин қимати ҳамроҳшудаи он дохил карда шудааст:

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\varphi^{-}(t) + b(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t)\,. \qquad (A)$$

Ин масъаларо аввалин маротиба дар илм Маркушевич А.И.[7] пешниҳод намуда, тадқиқоташро, ҳангоми $a(t) \equiv c(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 1$ будан, гузаронд. Н.П. Векуа[8] ин масъаларо ба муодилаи интегралии сингулярӣ оварда, шарти муқаррарии ҳалшавандагии $a(t) \neq 0$ - ро ҳосил намуд.

Аввалин натиҷаҳои аниқро барои масъалаи (A) аз рӯи шарти $|a(t)| > |b(t)|$, Боярский Б.В.[9] ба даст овардааст.

Дар масъалаи (A) се ҳолат фарқ мекунанд:

$$\left.\begin{aligned} |a(t)| &> |b(t)| - \textit{эллиптический} \\ |a(t)| &\equiv |b(t)| - \textit{параболический} \\ |a(t)| &< |b(t)| - \textit{гиперболический} \end{aligned}\right\} \qquad (0.1)$$

---

1 Гахов Ф. Д. Краевые задачи. // –М.: Наука. –1977. – 640 с.

2 Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы *n* пар функций //УМН. Т.VII, вып. 4(50). –1952. С.3 – 54.

3 Гахов Ф.Д. О современных проблемах теории краевых задач аналитических функций и особых интегральных уравнений //Дифференциальны уравнения. Т. 1. №6. –1965. С.35 – 48.

4 Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения //–М.: Наука. –1968. –513С.

5 Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравне - ниям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183с.

6 Михайлов Л.Г.Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. 1964. С.32 – 35.

7 Маркушевич. А.И. Об одной граничной задаче аналитических функций //Учёние зап. Московского универси - тета. Т.100. –1946. – С.20 – 30.

8 Векуа Н.П. Система сингулярных интегральных уравнений //–М.: Гостехиздат. –1950. – 252 С.

9 Боярский Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщения Академии наук Грузинской ССР, т. XXV, №4. –1960. – С.385 – 390.

Назарияи пурраи масъалаи (A) барои ҳолатҳои 1 - ум ва 2 - юм дар монографияҳои Михайлов Л.Г.[10,11] оварда шудаанд, ки натиҷаҳои саҳеҳ дар ҳолати эллиптикӣ ҳангоми иҷрои шартҳои зерин ба даст оварда шудаанд:

1) функсияи $a(t)$ функсияи бефосила ва $a(t) \neq 0$, функсияи $b(t)$ – функсияи маҳдуд ва ченшаванда, функсияи $c(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$ ва Г – контури Ляпунов мебошад, ки соҳаи бисёралоқаро маҳдуд менамояд;

2) функсияи $a(t)$ – шарти Гёлдерро дар контури Г, бо истиснои нуқтаҳои охирноке, ки функсия дар онҳо каниши ҷинси якумро дорад, қаноат мекунонад, функсияҳои $b(t)$ ва $c(t)$ – функсияҳои маҳдуд ва ченшаванда мебошанд. Инчунин, дар ин ҷо ҳолати параболӣ, ҳангоме, ки функсияҳои $a(t)$, $b(t)$ ва $c(t)$ дар контури Г - и соҳаи якалоқанокро маҳдудкунанда, ки шарти Гёлдерро қаноат мекунанд, низ тадқиқ карда шудааст.

Сабитов И.Х.[12] масъалаи (A) - ро дар давра бе назардошти ҳеҷ ягон шарти (0.1) тадқиқ намуда, талаб намудааст, ки функсияҳои $a(t)$, $b(t)$ ва $c(t)$ шарти Гёлдерро қаноат менамоянд ва $a(t) \neq 0$ мебошад.

Дар кори дигари Сабитов И.Х.[13] тадқиқи масъалаи канории (A) бо ҷаҳиш барои соҳаи якалоқанок, ки сарҳади он хати каҷи Ляпунов мебошад, дода шудааст.

Дар монографияҳои Михайлов Л.Г. масъалаи канории умумикардашудаи (A) дар ҳолате, ки шарти канорӣ дар худ дар баробари функсияҳои матлуб инчунин узвҳои ҳосиладори тартиби якум ва ғайрихаттӣ доранд, тадқиқ шудааст. Аз он ҷумла, масъалаҳое, ки бо яке аз ин шартҳо дида мешаванд, намуди зеринро доранд:

$$\varphi^+(t) = a(t)\frac{d\varphi^-}{dt} + b(t)\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}} + p(t)\varphi^-(t) + q(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t); \qquad (A_1)$$

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + R[\varphi^-(t)] + c(t), \ \varphi^-(\infty) = 0, \qquad (B)$$

ки дар ин ҷо R – оператор аз $L_p(\Gamma)$, $p > 1$.

---

[10] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравне - ниям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183с.

[11] Михайлов Л.Г. Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. 1964. С.32 – 35.

[12] Сабитов И.Х. Об одной краевой задачи сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1, –1948. – С. 17–23.

[13] Сабитов И.Х. Об одной граничной задачи линейного сопряжения. //Математ. сборник. Т.64, №2.–1964. Стр. 262 - 274.

Дар монографияи Михайлов Л.Г.[14] масъалаи (A_1) дар ҳолати эллиптикӣ $|a(t)|>|b(t)|$, ҳангоми хурд будани $|p(t)|$, $|q(t)|$ ва $a(t)\neq 0$ дида баромада шуда, масъалаи (B) бошад бо шартҳои зерин тадқиқ шудааст: R – оператори ихтиёрии маҳдуд, ки аз $L_p(\Gamma)$ ба $L_p(\Gamma)$ амал мекунад ва андозаи он то ҳади имкон хурд буда, $|a(t)|>|b(t)|$, $a(t)\neq 0$ аст. Дар монографияи дигари Михайлов Л.Г.[15] масъалаи (A_1) дар ҳолатҳои $|a(t)|>|b(t)|$ ва $|a(t)|\equiv|b(t)|$ тадқиқ карда шуда, хурд будани $|p(t)|$, $|q(t)|$ талаб карда намешавад. Масъалаи (B) бошад, бо шарти зерин: R – оператори комилан бефосила аз $L_p(\Gamma)$ ва $|a(t)|>|b(t)|$ будан, тадқиқ карда шудааст.

Ҳолати махсус (сингулярӣ) - и масъалаҳои (A), (A_1) ва (B) ҳангоми баъзе фарзҳо вобаста ба коэффитсиентҳо дар корҳои Юханонов Н.Н. ва Усмонов Н. дида баромада шудаанд.

Юханонов Н.Н.[16,17,18] ҳолати сингулярии масъалаи (A) – ро дар ҳолати

$$a(t)=\frac{\prod_{i=1}^{N}(t-\alpha_i)^{m_i}}{\prod_{k=1}^{P}(t-\beta_k)^{\nu_k}}\cdot a_1(t);\qquad b(t)=\frac{\prod_{i=1}^{N}(t-\alpha_i)^{\mu_i}}{\prod_{k=1}^{P}(t-\beta_k)^{\omega_k}}\cdot b_1(t),$$

бо талаб намудани шартҳои $\mu_i\geq m_i$, $\nu_k\geq\omega_k$ дида баромадааст. Талаботи мазкур ҳолати сингулярии масъаларо истисно менамояд. Агар ин талабот иҷро гарданд, он гоҳ дар ин ҷо нақшаву тарҳи тадқиқи масъала барои коэффитсиентҳои бефосила бе ягон тағйирот гузаронида мешавад.

Усмонов Н.[19] дар шарти канорӣ ҳолати сингуляриро танҳо дар коэффит - сиенти якум - $a(t)$ мавриди тадқиқ қарор додааст. Усмонов Н.[20] дар кори дигари худ ҳолати сингулярии характери модулдоштаро тадқиқ намудааст. Дар ин тадқиқ низ ҳолати сингулярӣ танҳо барои коэффитсиенти якум ҷой дорад.

---

[14] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравне - ниям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183с. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравне - ниям с сингулярными коэффициентами // – Душанбе: Дониш. –1963. – 183с.

[15] Михайлов Л.Г. Точные теоремы о разрешимости сингулярных задач с производными //Сборник «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений» //Академии наук Таджикской ССР. Физико-технический институт, Душанбе. 1964. С.32 – 35.

[16] Юханонов Н.Н. О краевой задаче с производными на окружности //ДАН Тадж. ССР, т.VII, №4.1965.С.35 – 47.

[17] Юханонов Н.Н. Об общей краевой задаче с производными для круга //Сборник исследований по краевым задачам теории функций и интегральным уравнениям //Физико-технический институт АН Тадж. ССР. 1967. С.216 – 228.

[18] Юханонов Н.Н. Общая граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами и её исключительные случаи //Сборник аспирантских работ //ТГУ, серия естественных наук. Душанбе.«Ирфон». 1965. С.112–120.

[19] Усмонов Н. Особые случаи краевой задачи сопряжения аналитических функций с производными //ДАН Тадж. ССР. т. XVII, №7, 1974. С.7–10.

[20] Усмонов Н., Михайлов Л.Г. Сингулярные краевые задачи сопряжения. Доклады РАН, 2002, т.387, №3. С. 309 – 313.

Дар диссертатсияи мазкур истифода аз методи Сабитов И.Х. масъалаҳои ёфтани l – миқдор ҳалли масъалаҳои якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаҳои ғайриякҷинсаи намуди (A), (A_1) ва (B) дар доира дида баромада шудааанд.

Диссертатсияи мазкур ба тадқиқи ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқанок ва доира бахшида шудааст. Дар он ҳолати ҳалшавандагии масъалаҳои канории ҳамроҳшудаи функсияҳои аналитикии гузошташуда бо мавҷудияти шакли нулҳо ва беохириҳои ҳамроҳшудаи аналитикӣ ва ғайрианалитикидоштаи коэффитсиентҳо дар сарҳади соҳа, ки пештар тадқиқ карда нашудаанд, дида баромада шудааст.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии мазкур бо мавзуъи илмию тадқиқотии кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон «Назарияи масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ ва муодилаҳои интегралии сингулярӣ» алоқаманд мебошад.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатси - онӣ ба рушди ояндаи масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ бахшида шудааст. Асоси ин тадқиқотро исботи теоремаҳо оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқанок ва доира ташкилнамуда, аз инҳо иборат аст:

- тадқиқ намудани ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои сингулярии канории назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқанок;
- тадқиқ намудани ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои сингулярии канории назарияи функсияҳои аналитикӣ барои доира.

Вазифаҳои тадқиқот:

- ёфтани қиматҳои аниқи шумораи ҳаллҳои масъалаи якҷинса – l ва шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса – p барои масъалаи умумии канории масъалаи ҳамроҳшудаи хаттӣ барои нимҳамворӣ бо нулҳо ва қутбҳои ҳамроҳшуда дар сарҳад;
- ёфтани қиматҳои аниқи шумораи ҳаллҳои масъалаи якҷинса – l ва шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса – p барои масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ;
- ёфтани қиматҳои аниқи шумораи ҳаллҳои масъалаи якҷинса – l ва шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса – p барои масъалаи канории дорои ҳосилаҳои тартиби олӣ дар ҳолати сингулярӣ;
- ёфтани қиматҳои аниқи шумораи ҳаллҳои масъалаи якҷинса – l ва шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса – p барои баъзе масъалаи канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои доира.

Методҳои асосии тадқиқот. Барои ҳалли масъалаҳои гузошташуда дар кори мазкур методҳои муосири назарияи масъалаҳои канории функсияҳои аналитикӣ, назарияи муодилаҳои интегралии сингулярӣ, назарияи қаторҳои

Фурье ва элементҳои таҳлили функсионалӣ истифода шудаанд. Дар тадқиқоти мазкур инчунин дигар методҳо, ки аз ҷониби Л.Г. Михайлов ва И.Х. Сабитов коркард карда шудаанд, истифода бурда шудаанд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, аз инҳо иборат мебошанд:

- қиматҳои аниқи l – шумораи ҳалли масъалаи якҷинса ва p – шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо нулҳо ва қутбҳои шакли ҳамроҳшудадошта дар сарҳад ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – шумораи ҳалли масъалаи якҷинса ва p – шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – шумораи ҳалли масъалаи якҷинса ва p – шумораи шартҳои ҳалшавандагии масъалаҳои канории ҳосиладори тартиби олидошта дар ҳолати сингулярӣ ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – шумораи ҳалли масъалаи якҷинса ва p – шумораи шартҳои ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои доира ёфта шудаанд.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оиди ҳалшавандагии масъалаи канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо нулҳо ва қутбҳои намудашон ҳамроҳшуда дар сарҳад;
- теоремаҳо оиди ҳалшавандагии масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ;
- теоремаҳо оиди шарти канории умумикардашудаи масъалаи ҳамроҳшу - даи функсияҳои аналитикӣ бо ҳосилаҳои тартиби олӣ дар ҳолати сингулярӣ;
- теоремаҳо оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаи канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ дар доира.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои бадастовардашудаи диссертатсия аҳамияти назариявӣ дошта, онҳоро метавонанд дар ташаккули минбаъдаи назарияи масъалаҳои канории функсияҳои аналитикӣ дар ҳолати сингулярӣ истифода бурд. Инчунин натиҷаҳои ба даст овардашударо дар гидродинамика, назарияи чандирӣ ва дигар илмҳо истифода намоянд. Бобҳои рисолаи диссертатсионии мазкур дар алоҳидагӣ метавонанд мазмун ва мундариҷаи курсҳои махсуси донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси “Математика” таҳсил мекунанд, бошанд.

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои рисола ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро дар мақолаҳои илмии нашршуда инъикос мекунад. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Саҳми шахсии унвонҷӯи дараҷаи илмӣ дар:

- дарёфт намудани натиҷаҳои нав оиди ҳалшавандагии масъалаи канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо нулҳо ва қутбҳои намудашон ҳамроҳ - шуда дар контур;

- дарёфт намудани натиҷаҳои нав оиди ҳалшавандагии масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ;
- дарёфт намудани натиҷаҳои нав оиди шарти канории умумикардашудаи масъалаи ҳамроҳшудаи функсияи аналитикӣ бо ҳосилаҳои тартиби олӣ дар ҳолати сингулярӣ;
- дарёфт намудани натиҷаҳои нав оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаи канории назарияи функсияҳои аналитикӣ дар доира;
- тайёр намудани мақолаҳо оиди рисолаи илмӣ ва иштироки шахсӣ дар тасвиби натиҷаҳои диссертатсия иборат мебошад

Тасвиби кор. Кори диссертатсионии додашуда ба тадқиқи ёфтани тео - ремаҳои аниқ оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ бахшида шуда, натиҷаҳои асосии рисола борҳо дар:

- с е м и н а р ҳ о и илмии кафедраи «Математикаи олӣ» - и Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон (пештара ДМИТ) таҳти роҳбарии профессор Н.Усмонов (Душанбе, солҳои 2009 -2020);
- с е м и н а р ҳ о и илмии кафедраи «Таҳлили риёзӣ» - и Донишгоҳи давлатии педагогии ба номи Садриддин Айнӣ (Душанбе, солҳои 2009 - 2020);
- конференсияи илмӣ-байналмилалӣ, бахшида ба 85 – солагии академики АИ ҶТ Михайлов Л.Г. (Душанбе,17 – 18 июни соли 2013);
- к о н ф е р е н с и я и илмӣ - байналмилалии «Масъалаҳои ҳалталаби математикаи муосир ва таълими он» (Қурғонтеппа, 10 –11 майи соли 2013);
- к о н ф е р е н с и я и илмӣ - байналмилалии «Масъалаҳои ҳалталаби математикаи муосир» (Душанбе, 26 декабри соли 2016);
- конференсияи илмӣ - байналмилалии «Масъалаҳои ҳалталаби математикаи муосир ва тадбиқи он» (Душанбе, 15 – 16 июни соли 2017);
- к о н ф е р е н с и я и илмӣ-ҷумҳуриявии «Нақши математика дар иқтисодиёт» (Душанбе, 29 июни соли 2018);
- с е м и н а р и илмии кафедраи “Таҳлили риёзӣ ва назарияи функсияҳо”- и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМ ҶТ Н. Раҷабов (Душанбе, солҳои 2019 -2020) муҳокима шудаанд.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсияи мазкур дар 12 мақола, ки номгӯи онҳо дар охири диссертатсия оварда шудаанд, дарҷ гардидааст. Рӯйхати мақолаҳо дар интиҳои автореферат низ оварда шудааст, ки аз он 5 мақола [1М, 2М, 3М, 4М, 5М] ба нашрияҳои тақризшавандаи рӯйхати амалкунандаи КОА - и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон мансуб буда, 10 - тояш дар нашрияҳои дигари ҷумҳурӣ чоп шудаанд. Аз натиҷаҳои бо ҳамроҳии роҳбари илмӣ Н. Усмонов чопшуда [1М, 2М, 5М, 7М, 8М, 9М, 10М, 11М, 12М] ба ҳаммуаллиф гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи аз 55 номгӯй иборат буда, ҳамагӣ 112 саҳифаи компютериро дар бар мегирад. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудаанд, ки рақами якум рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ва рақами сеюм рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграфро нишон медиҳанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Рисолаи диссертатсионӣ аз муқаддима оғоз ёфта, дар он муҳиммияти мавзуъ,мақсади кор, тасвиби кор ва мӯҳтавои мухтасари натиҷаҳои гирифта - шуда тавзеҳ гардидаанд.

Диссертатсияи мазкур аз ду боб ва ҳафт параграф иборат аст.

Боби 1 аз 3 параграф иборат буда, ба ҳалшавандагии баъзе масъала - ҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқанок бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми ин боб масъалаи канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо нулҳо ва қутбҳои намудашон ҳамроҳшуда дар сарҳад тадқиқ карда шудааст.

Гузориши масъала. Бигузор Г тири ҳақиқӣ бошад. Талаб карда мешавад, ки ду функсияҳои маҳдуди аналитикии $\varphi^{+}(z)$ ва $\varphi^{-}(z)$ мувофиқан дар нимҳамвориҳои боло ва поён (қисм-қисм аналитикии $\varphi(z)$), ки қиматҳои ҳудудии онҳо дар контур шарти

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{k_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_1(t)\cdot\varphi^{-}(t)+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{k_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_1(t)\cdot\overline{\varphi^{-}(t)}+c(t), \qquad (A_1)$$

$$-\infty<t<+\infty,\ \varphi^{+}(\infty)=\varphi^{-}(\infty)=c(\infty)=0,$$

- ро қаноат мекунанд, ёфта шаванд. Дар ин ҷо $a_1(t), b_1(t), c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$, $\eta_r\ (r=1,2,\dots,R)$, $\xi_m\ (m=1,2,\dots,M)$ - баъзе нуқтаҳои гуногуни контур, k_r, q_m - ададҳои натуралӣ мебошанд, ки .ҷустуҷӯи ёфтани ҳалли функсияҳои $\varphi^{+}(z)$ ва $\varphi^{-}(z)$ дар соҳаҳои маҳдуди $\overline{D^{+}}$ ва $\overline{D^{-}}$ гузаронида мешавад.

Ишораҳои $\sum_{r=1}^{R}k_r=k$, $\sum_{m=1}^{M}q_m=q$ - ро ворид мекунем.

Натиҷаи асосии ин тадқиқро дар теоремаи зерин баён мекунем.

Теоремаи 1.1.1. *Бигузор* $a_3(t)\in \mathrm{H}(-\infty;+\infty)$, $a(t)\neq 0,\quad b_3(t), c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$, $c(t)$ *- дар атрофи нуқтаи* $t=\eta_r$ *дифференсиронидашаванда буда, ҳосилаи тартиби* k_r-1 *дошта бошад ва* $æ=Ind_{\Gamma}a_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\{\ln a_1(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$. *Ҳалли масъалае, ки бо интеграли намуди Коши дода шудааст, дида баромада мешавад.*

Бигузор $\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\left|\frac{b_3(t)}{a_3(t)}\right|<1$ $\left(\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\left|\frac{b_1(t)}{a_1(t)}\right|<1\right)$ *бошад. Он гоҳ*

1) *ҳангоми* $æ - k \geq 0$, $l = 2æ$ *ва* $p = 0$ *мешавад*;

2) *ҳангоми* $æ - k < 0$, $l = 0$ *ва* $p = 2|æ - k|$ *мешавад*.

Шарти зарурӣ ва кифоягии шумораи ҳалшавандагии масъалаи ғайри - якҷинса намуди

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-i)^{-n}Q[c(t)]dt = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, |æ - k|.$$

- ро дорад, ки дар ин ҷо Q *– оператори хаттӣ мебошад*.

Аз ин бармеояд, ки шумораи ҳалли масъала дар синфи функсияҳои дар контур маҳдудбуда, аз мавҷудияти қутбҳои намуди ҳамроҳшуда-аналитики - дошта тағйир наёфта, ба тартиби суммавии ҳамаи нулҳои намуди ҳамроҳшуда - аналитикидошта кам мешавад.

МАСЪАЛАИ СИНГУЛЯРИИ КАНОРИИ (A) – И ТАРТИБАШ ҒАЙРИБУТУН ВА СОХТАШ ҒАЙРИГОЛОМОРФӢ

Масъалаи канории

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\varphi^{-}(t) + b(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t). \qquad (A)$$

- ро мавриди тадқиқ қарор медиҳем.

Бигузор дар масъалаи (A) $|a(t)| > |b(t)|$ бошад. Масъалаи

$$\varphi^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}} a_1(t)\varphi^{-}(t) + \frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}} b_1(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t) \qquad (0.0.1)$$

- ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $a_1(t) \neq 0$, $b_1(t) \neq 0$ ва $c(t)$ шарти Гёлдерро дар контури Г қаноат намуда, дар атрофи нуқтаҳои τ_r ва ξ_n мувофиқан дорои ҳосилаҳои тартиби d ва s, ки шарти Гёлдерро қаноат менамоянд, бошанд.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$\sum_{r=1}^{J} d_r = \sum_{r=1}^{J}\left(q_r^{(1)} - \varsigma_r^{(1)}\right), \ \sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N}\left(q_n^{(2)} - \varsigma_n^{(2)}\right),$$

ки дар ин ҷо $\sum_{r=1}^{J} q_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N} q_n^{(2)}$ - ададҳои бутун, $\sum_{r=1}^{J} \varsigma_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N} \varsigma_n^{(2)}$ - қисми касрии онҳо, яъне $0 < \mathrm{Re}\,\varsigma_r^{(2)} < 1$, $0 < \mathrm{Re}\,\varsigma_n^{(2)} < 1$, $\sum_{r=1}^{J} d_r = d$, $\sum_{s=1}^{N} s_n = s$ мебошанд.

Натиҷаи тадқиқ дар намуди теоремаи зерин сохта шудааст.

Теоремаи 1.1.2.

1) *Ҳангоми* $æ - q \geq 0$ *будан, масъалаи якҷинсаи* (0.0.1) дорои $æ - q + 1$ *ҳалли хаттӣ новобаста буда, масъалаи ғайриякҷинса бошад, бе талаби ягон шарт ҳалшаванда мебошад*;

2) *Ҳангоми* $æ - q < 0$ *будан масъалаи якҷинсаи* (0.0.1) *танҳо дорои ҳалли нулӣ буда, барои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти* $q - æ - 1$ *иҷро гардад. Шарти ҳалшавандагӣ масъалаи мазкур*

дар намуди зерин навишта мешавад

$$\int\limits_{\Gamma} t^{-s} R[c(t)]dt = 0\,,\ s = 0,1,2,...,|æ - q| - 1,$$

ки ар ин ҷо R - оператори хаттӣ мебошад.

Дар параграфи дуюми боби якум масъалаҳои канорӣ дар ҳолати сингулярӣ бо ҳосилаҳои шакли Карлемандошта омӯхта мешавад.

Бигузор D^+ - соҳаи якалоқаноке, ки бо хати каҷи сарбасти оддии $\Gamma \in C'_\lambda$, $\lambda > \frac{1}{2}$ маҳдуд, D^- – иловаи $D^+ + \Gamma$ барои ҳамвории пурраи *E* бошанд. Бигузор дар контури Г функсияи $a(t) \in C'_\lambda(\Gamma)$, $\alpha'(t) \neq 0$, ки контури Г - ро ба худ бо нигоҳ доштани самти даврзанӣ байни ҳам яккимата, инъикос мекунад, дода шуда бошад.

Масъалаи канории зерин аз назар гузаронида мешавад: ду функсияи мувофиқан дар соҳаҳои D^+ ва D^- аналитикии $\varphi^+(z)$ ва $\varphi^-(z)$, ки бо интеграли Коши пешниҳод шудаанд, ёфта шаванд, агар қиматҳои канории онҳо $\varphi^+(t)$ ва $\varphi^-(t)$ мавҷуд буда, ба $L_2(\Gamma)$ тааллуқ дошта бошанд ва шарти

$$\varphi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot A(t) \cdot \frac{dF^-}{dt} + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot B(t) \cdot \overline{\frac{dF^-}{dt}} +$$

$$+ \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot D(t) \cdot \overline{F^-(t)} + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot P(t) \cdot F^-(t) + c(t) \qquad (0.0.2)$$

- ро қонеъ намояд, ёфта шаванд.

Масъалаи канории (0.0.2) ба масъалаи канории ба он эквиваленти

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] = \frac{a(t)}{t} \cdot \psi^-(t) + \frac{b(t)}{\bar{t}} \cdot \overline{\psi^-} + p(t) \cdot V(\psi^-) + q(t) \cdot \overline{V(\psi^-)} + c_1(t), \quad (0.0.3)$$

оварда мешавад, ки дар ин ҷо

$$a(t) = A(t),\ b(t) = \mathrm{B}(t) \cdot e^{-2i\sum\limits_{m=1}^{M} Q_m q_m} \cdot \overline{z^{-q}}\,,\ q(t) = D(t)\,.$$

Масъалаи ба масъалаҳои (0.0.3) ва (0.0.2) ҳамроҳшудаи зеринро дида мебароем:

$$\Omega^-(t) = \frac{a(t)}{t} \cdot \alpha'(t) \cdot \Omega^+[\alpha(t)] + \overline{\frac{b(t)}{\bar{t}} \cdot t'^2(S) \cdot \alpha'(t) \cdot \Omega^+[\alpha(t)]} -$$

$$-2V'[p(\tau)] \cdot \alpha'(\tau)\Omega^+[\alpha(\tau)] - \overline{2 \cdot \overline{V'} \cdot [q(\tau) \cdot \tau'^2 \cdot \alpha'(t)\Omega^+[\alpha(t)]}], \quad (0.0.4)$$

ки дар ин ҷо $t = t(s)$ – муодилаи контури Γ, ки ба камони *S* мансуб,

$$V' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}{t} \cdot p(\tau)\Omega^{+}\left[\alpha(\tau)\right]\alpha'(\tau)\cdot d\tau,$$

$$\overline{V'} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\Gamma} \frac{\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}{t} \cdot \overline{q(\tau)}\cdot\tau'^{2}(S)\,\alpha'(\tau)\cdot\Omega^{+}\left[\alpha(\tau)\right]\cdot d\tau$$

мебошанд.

Аз натиҷаи ҳосилшуда теоремаи зерин бармеояд.

Теоремаи 1.2.1. *Бигузор* $A(t),\ A(t)\neq 0,\ B(t),\ D(t),\ P(t)$ *– функсияҳои бефосила,* $c(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ = Ind_{\Gamma}a(t)$, l *ва* l' *– мувофиқан миқдори ҳалҳои хаттӣ новобаста* (*дар майдони ададҳои ҳақиқӣ*) *– и масъалаҳои якҷинсаи* (A) *ва* (0.0.2). *Он гоҳ баробариҳои* $l' = 2(æ-1)$, $p = l'$ (l' *– миқдори шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинсаи* (0.0.2)) *дуруст мебошанд. Шарти ҳалшавандагӣ намуди зеринро дорад*:

$$Re\int_{\Gamma} C_1(t)\cdot\Omega_j^{+}\cdot\left[\alpha(t)\right]\cdot\omega_j^{-}(t)\,dt = 0,\quad j = 1,2\ldots,\ l' = p,$$

ки дар ин ҷо Ω_j^{+} *– ҳалли масъалаи ҳамроҳшудаи* (0.0.4).

Масъалаи зерин дида баромада мешавад:

$$\varphi^{+}\left[\alpha(t)\right] = a(t)\frac{d\varphi^{-}}{dt} + b(t)\overline{\frac{d\varphi^{-}}{dt}} + q(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t),\ \varphi^{-}(\infty) = 0. \qquad (0.0.5)$$

Барои масъалаи (0.0.5) теоремаи зерин дуруст аст.

Теоремаи 1.2.2. *Бигузор* $a(t),\ b(t),\ q(t)\in H_{\lambda}(\Gamma),\ \lambda > \frac{1}{2},\ c(t)\in L_2(\Gamma)$, $a(t)\neq 0,\ æ = Ind_{\Gamma}a(t)-1,\ n = \max\{m_1-1,\ n_1,\ m_2-1,\ n_2\}$. *Функсияи* $a(t)\in C_{\lambda}^{1}$ *контури* Γ *- ро ба худ байни ҳам якқимата, бо нигоҳ доштани самти контур, инъикос мекунанд,* $\alpha'(t)\neq 0$. *Ҳалли масъалаи ба интеграли намуди Коши додашуда дида баромада мешавад ва* $\varphi^{\pm}(t)\in L_2(\Gamma)$ *мебошад.*

Он гоҳ барои масъалаи $\left(A_4^{\alpha}\right)$ *натиҷаи зеринро соҳиб мешавем*:

1) *агар* $æ \leq -n+1$, *он гоҳ* $l = 0,\ p = 2|æ|$;

2) *агар* $-n+1 < æ < 0$, *он гоҳ* $0\leq l\leq 2(n+æ-1),\ p = l-2æ$;

3) *агар* $æ\geq 0$, *он гоҳ* $2æ\leq l\leq 2(n+æ-1),\ p = l-2æ$.

Дар параграфи сеюми боби якум шарти канорӣ умумикардашудаи масъалаи ҳамроҳшудаи функсияҳои аналитикӣ бо ҳосилаҳои тартиби олӣ дар ҳолати сингулярӣ дида баромада мешавад.

Дар фарзи оддии соҳаи бисёралоқаи D^{+}, ки бо сарҳади Γ маҳдуд шуда, дар дохили худ ибтидои координатиро нигоҳ медорад ва соҳаи D^{-} – илова ба $D^{+}+\Gamma$ аз рӯи ҳамвории пурраи E, масъалаи канорӣ функсияи аналитикии

$$\frac{a_1(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{s_k}}\cdot\frac{d^m\varphi^+}{dt^m}+\frac{b_1(t)}{\prod_{j=1}^{\gamma}\overline{(t-\beta_j)}^{p_j}}\cdot\overline{\frac{d^m\varphi^+}{dt^m}}=\frac{a_2(t)}{\prod_{i=1}^{\delta}(t-\gamma_i)^{d_i}}\cdot\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}+\frac{b_2(t)}{\prod_{r=1}^{\omega}\overline{(t-\eta_r)}^{\rho_r}}\cdot$$

$$\cdot\overline{\frac{d^n\varphi^+}{dt^n}}+q_1(t)\mathrm{K}_1\left[\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}\right]+q_2(t)\overline{\mathrm{K}_2\left[\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}\right]}+c(t) \qquad (0.0.6)$$

дида баромада мешавад.

Фарз карда мешавад, ки дар масъалаи (0.0.6) нуқтаҳои $\alpha_k, \beta_j, \gamma_i, \eta_r$ байни ҳам мувофиқат намекунанд. Дар ин ҷо α_k (i = 1,2,…, μ), β_j(j = 1,2,…,ν), γ_i (i = 1,2,…, δ), η_r (r = 1,2,…, ω) – баъзе аз нуқтаҳои контур, s_k, p_j, d_i, ρ_r – ададҳои бутуни мусбат, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $c(t)$ – функсияҳое, ки шарти Гёлдерро қаноат мекунанд, K_1, K_2 – операторҳои хаттии маҳдуд, ки аз Н(Г) ба Н(Г) амал мекунанд.

Ҳалҳои масъалаи дар беохирӣ гумшуда ва ҳамаи ҳосилаҳои ба шарти канорӣ дохилшуда, ки то сарҳад бефосила мебошанд, ҷустуҷу карда мешаванд.

Боби 2 аз чор параграф иборат буда, ба ҳалшавандагии баъзе масъ - алаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ дар давра бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби дуюм тадқиқи ҳолати сингулярии масъалаҳои канории умумӣ дар давра бо коэффитсиентҳои синфҳои умумӣ дода шудааст.

Ҳолати сингулярии масъалаи канории (А) - ро дар давра ҳангоми дода - шудани шартҳои умумӣ барои функсияҳои $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ дида мебароем.

Масъалаи канории

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}\cdot a(t)\cdot\varphi^-(t)+\frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}}\cdot b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}+c(t) \qquad (0.0.7)$$

ба масъалаи канории ба он баробарқувваи

$$\Phi^+(t)=a_2(t)\Phi_1^-(t)+b_2(t)\overline{\Phi_1^-(t)}+c_2(t). \qquad (0.0.8)$$

оварда мерасонад.

Теорема 2.1.1. *Бигузор дар* (0.0.8) Г – *давра*, | t | = 1 *соҳаи* D^+ - *ро маҳдуд мекунад ва* D^- – *соҳаи берунаи доираи* | z | < 1, *функсияи* $a_2(t)$ – *бефосила,* $b(t)$ – *функсияи маҳдуд ва ченшаванда,* $c_2(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ = Ind_\Gamma a_2(t)$, $a_2(t)\neq 0$. *Ҳалли масъалаи дар интеграли намуди Коши додашуда дида баромада мешавад ва* $\varphi^\pm(t)\in L_2(\Gamma)$ *аст.*

Функсияи маҳдуди $b_2(t)$ – *ро ба квадрати миёнаи наздикшавандаи* $L_2(\Gamma)$ – *и қатори Фуре*[21] *ҷудо мекунем*:

[21] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1. 1964. С.17 – 23.

$$b_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k t^k .$$

Бигузор N – адади хурдтарин аз ҳамаи ададҳои додашуда бошад, ки барои он нобаробарии

$$\left\| \frac{b_2(t) - \sum_{k=-N}^{N} b_k t^k}{a_2(t)} \right\|_{L_2} < 1$$

ҷой дорад.

Бо m индекси аввалин аз коэффитсиентҳои $b_{-N}, b_{-N+1}, \ldots, b_{-1}$, *ки ба сифр баробар нест, ишора мекунем.*

Бигузор $m \geq 1$ *бошад, он гоҳ*:

1) *агар* $æ \geq m-1$, *он гоҳ* $l = 2æ$, $p = 0$;

2) *агар* $0 \leq æ \leq m-1$, *он гоҳ* $p = l - 2æ$,

$2æ \leq l \leq m + æ$, *ҳангоми* $m + æ$ *– ҷуфт,*

$2æ \leq l \leq m + æ - 1$, *ҳангоми* $m + æ$ *– тоқ*;

3) *агар* $æ \leq -m+1$, *то* $l = 0$, $p = 2|æ|$;

4) *агар* $-m + 1 < æ < 0$, *он гоҳ* $p = l - 2æ$,

$0 \leq l \leq m + æ$ *ҳангоми* $m + æ$ *– ҷуфт,*

$0 \leq l \leq m + æ - 1$ *ҳангоми* $m + æ$ *– тоқ.*

Инчунин масъалаи (A) барои нимҳамворӣ дар ҳолати сингулярӣ дида баромада мешавад.

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{J} |t - \tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N} |t - \xi_n|^{s_n}} \cdot a(t) \cdot \varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{J} |t - \tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N} |t - \xi_n|^{s_n}} \cdot b(t) \cdot \overline{\varphi^-(t)} + c(t), \qquad (0.0.9)$$

$$-\infty < t < \infty, \ \varphi^+(\infty) = \varphi^-(\infty) = C(\infty) = 0.$$

Масъалаи канории (0.0.9) ба масъалаи канории ба он эквиваленти намуди

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + B(t)\overline{\varphi^-(t)} + c\,(t)$$

оварда мерасонад, ки дар ин ҷо

$$A(t) = \prod_{r=1}^{J} (t - \tau_r)^{\zeta_r^{(1)}} \cdot \prod_{n=1}^{N} (t - \xi_n)^{-\zeta_n^{(2)}} \cdot \left(\exp i \sum_{n=1}^{N} \theta_n^{(2)} s_n - i \sum_{r=1}^{N} \theta_r^{(1)} d_r \right) \cdot a\,(t),$$

$$B(t) = \prod_{r=1}^{J} (t - \tau_r)^{\zeta_r^{(1)}} \cdot \prod_{n=1}^{N} (t - \xi_n)^{-\zeta_n^{(2)}} \cdot \left(\exp i \sum_{n=1}^{N} \theta_n^{(2)} s_n - i \sum_{r=1}^{N} \theta_r^{(1)} d_r \right) \cdot b\,(t).$$

Аз натиҷаи ҳосилшуда теоремаи зерин бармеояд.

Теоремаи 2.1.2. *Бигузор* $A(t)\in \mathrm{H}(-\infty,\infty),\ A(t)\neq 0,\ B(t)-$ *функсияи маҳдуд ва ченшаванда,* $c(t)\in L_2(-\infty,\infty)$, $æ\ = Ind_{\Gamma}A_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\{\ln A_1(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ *ва* $\varphi^{\pm}(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ *бошад. Ҳалли масъалаи ба интеграли намуди Коши додашуда дида баромада мешавад.*

Бигузор $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B(t)}{A(t)}\right|<1\ \left(\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<1\right)$ *Бинобар ин*

1) *агар* $æ\geq 0$ *бошад, он гоҳ* l = 2æ, p = 0;

2) *агар* æ < 0 *бошад, он гоҳ* l = 0, p = 2|æ|.

Шарти зарурӣ ва кифоягии ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинсаи (A) *намуди зеринро дорад:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(t-i)^{-k}Q[c(t)]\,dt=0,$$

ки дар ин ҷо k = 1, 2,…, – æ, Q – *оператори хаттӣ.*

Дар параграфи дуюми боби дуюми диссертатсияи мазкур масъалаи канории ҳамроҳшудаи умумӣ бо ҳосила барои давра дар ҳолати сингулярӣ дида баромада шудааст.

Функсияҳои $\varphi^{+}(z)$ ва $\varphi^{-}(z)$ мувофиқан аналитикӣ дар соҳаҳои D^{+} и D^{-} ёфта шаванд, ки бо ҳосилаҳояшон дар ҳамаи ҷои Г қиматҳои канории кунҷии $\varphi^{\pm}(t)$, $\left(\frac{d\varphi^{-}}{dt}\right)$ дошта, шарти канории

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod\limits_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot a(t)\frac{d\varphi^{-}}{dt}+\frac{\prod\limits_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod\limits_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot b(t)\overline{\frac{d\varphi^{-}}{dt}}+\frac{\prod\limits_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}}{\prod\limits_{k=1}^{N}|t-\zeta_k|^{s_k}}\cdot p(t)\varphi^{-}(t)+$$

$$+\prod_{r=1}^{\omega}|t-\xi_r|^{p_r}q(t)\overline{\varphi^{-}(t)}+c(t),\qquad \varphi^{-}(\infty)=0 \qquad (A_1)$$

- ро қаноат менамоянд.

Фарз мекунем, ки Г – давраи воҳидӣ: $|t|=1$, D^{+} – қисми дохилии доира ва D^{-} – қисми берунии доира бошанд.

МАСЪАЛАИ (A_1) БО КОЭФФИТСИЕНТИ $p(t)\equiv 0$

Масъалаи канории (A_1) дар ҳолати $p(t)\equiv 0$ ба масъалаи канории ба он эквиваленти

$$\Phi_1^{+}(t)=A_3(t)\psi_2^{-}(t)+B_3(t)\overline{\psi_2^{-}(t)}+Q_1(t)V\left(\psi_1^{-}\right)+c_1(t) \qquad (0.0.10)$$

оварда мерасонад.

Дар масъалаи канории (0.0.10) функсияҳои маҳдуди ченшавандаи $B_3(t)$ ва $Q_1(t)$ - ро мувофиқан ба квадрати миёнаи наздикшавандаи $L_2(\Gamma)$ – и қатори Фуре[22] ҷудо мекунем:

$$B_3(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k t^k,\quad Q_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k t^k.$$

Бо N номери хурдтаринеро ишора мекунем, ки барои он нобаробарии

$$\left(\left\|\frac{b(t)-\sum\limits_{k=-N}^{N} b_k t^k}{A_3(t)}\right\|_{L_r}+\left\|\frac{q(t)-\sum\limits_{k=-N}^{N} q_k t^k}{A_3(t)}\right\|_{L_r}\right)\cdot\left\|\tilde{V}\right\|_{L_r}<1$$

ҷой дорад. Дар ин ҷо $\tilde{V}(\psi)=\frac{1}{\chi^-(t)}\cdot V(\chi^-\psi)$, $\chi(z)$ - функсияи каноникии масъалаи Риман[23] бо коэффитсиенти $A_3(t)$ ва $V(\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\psi^-(\tau)}{\tau}\ln\left(1-\frac{\tau}{t}\right)d\tau$ мебошад.

Дар байни коэффитсиентҳои $b_{-N}, b_{-N+1},..., b_{-1}, q_{-N}, q_{-N+1},..., q_{-1}$ коэффитси - ентҳои сифрӣ буда ҳам метавонанд. Бо m ва n индексҳои ба коэффитсиентҳои аввал мувофиқро ишора мекунем, ки аз сифр фарқ мекунанд. Агар $b_{-k}=0$ ва $q_{-k}=0$, $(k=-N,\ldots,-1)$ шаванд, он гоҳ $m=0$ ва $n=0$ мешаванд.

Натиҷаи тадқиқ дар намуди теоремаи зерин сохта шудааст.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор* Γ *– давраи воҳидӣ:* $|t|=1$, D^+ *– қисми дохилии доира ва* D^- *– қисми берунии доира,* $A_3(t)$ *– функсияи бефосила,* $A_3(t)\neq 0$, $Q_1(t)$ *– функсияҳои маҳдуд ва ченшаванда,* $æ=Ind_L A_3(t)-1$, $B_3(t)$, $c_1(t)\in L_2(\Gamma)$, $\Phi_1^+(t), \frac{d\Phi^-}{dt}\in L_2(\Gamma)$ *бошанд. Ҳалли масъалаи ба интеграли намуди Коши пешни - ҳодшуда дида баромада мешавад.*

Бигузор $\nu=\max(m-1,n)$ *бошад.*

Бинобар ин натиҷаҳои зерин ҷой доранд:

1) *агар* $æ=\nu-1$ *бошад, он гоҳ* $l=2æ,\ p=0$;

2) *агар* $0\le æ<\nu-1$ *бошад, он гоҳ* $p=l-2æ$,
$2æ\le l\le\nu+æ$ *ҳангоми* $\nu+æ$ *– ҷуфт будан,*
$2æ\le l\le\nu+æ-1$ *ҳангом и* $\nu+æ$ *– тоқ будан*;

3) *агар* $-\nu+1<æ<0$ *бошад, он гоҳ* $p=l-2æ$,
$0\le l\le\nu+æ$ *ҳангоми* $\nu+æ$ *– ҷуфт будан,*
$0\le l\le\nu+æ-1$ *ҳангоми* $\nu+æ$ *– тоқ будан;*

4) *агар* $æ<-\nu+1$, *он гоҳ* $l=0,\ p=2|æ|$ *мешавад.*

---

[22] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1. 1964. С.17 – 23.

[23] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. //–М.: Наука. 1977. 640 стр.

МАСЪАЛАИ КАНОРИИ (A_1)

Бигузор Γ - давраи воҳидӣ: $|t| = 1$, $a(t) \in H(\Gamma)$, $b(t)$, $p(t)$, $q(t)$ - функсияҳои маҳдуд ва ченшаванда ва $c(t) \in L_2(\Gamma)$ бошанд.

Функсияҳои $\chi^+(t)$ ва $\chi^-(t)$ - ҳалли каноникии масъалаи Риман[24] - ро дохил мекунем:

$$\chi^+(t) = t^{-æ} a(t) \chi^-(t),$$

ки дар ин ҷо $æ = Ind_\Gamma a(t)$ мебошад.

Функсияҳои маҳдуди $b(t)$, $p(t)$, $q(t)$ - ро мувофиқан ба қатори Фуре ва $\frac{p(t)}{\chi^+(t)}$ - ро ба квадрати миёнаи наздикшавандаи қатори Фуре[25] ҷудо мекунем:

$$\frac{p(t)}{\chi^+(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k t^k .$$

Бо N номери хурдтаринеро ишора мекунем, ки барои он нобаробарии

$$\left\{ \left\| \frac{b(t) - \sum\limits_{k=-N}^{N} b_k t^k}{\chi^+(t)} \right\|_{L_2} + \left[\left\| \frac{q(t) - \sum\limits_{k=-N}^{N} q_k t^k}{\chi^+(t)} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{p(t)}{\chi^+(t)} - \sum_{k=-N}^{N} p_k t^k \right\|_{L_2} \right] \cdot \|V\|_{L_2} \right\} \cdot \|R\|_{L_2} < 1$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо $\|R\| = \max\{\|R_2\|; \|R_3\|\}$, R_2, R_3 - операторҳои хаттӣ.

Бо m ва n мувофиқан индексҳои коэффитсиентҳои аввали аз сифр фарққу - нандаи $b_{-N}, b_{-N+1}, \ldots, b_{-1}$ ва $q_{-N}, q_{-N+1}, \ldots, q_{-1}$ ва бо r индекси аввали коэффитсиентҳои $p_N, p_{N-1}, \ldots, p_2, p_1$ - ро, ки баъзе аз онҳо ба сифр баробар настанд, ишора мекунем.

Натиҷаи тадқиқ дар намуди теоремаи зерин сохта шудааст.

***Теоремаи* 2.2.2.** *Бигузор Γ давраи воҳидӣ*: $|t| = 1$, D^+ – *қисми дохилӣ*, D^- – *қисми берунии доира*, $a(t) \in H(\Gamma)$, $a(t) \neq 0$, $æ = Ind_\Gamma a(t)$, $b(t)$, $p(t)$, $q(t)$ – *функ - сияҳои маҳдуд ва ченшаванда*, $c(t) \in L_2(\Gamma)$ *бошанд. Ҳалли масъалаи ба интегрели намуди Коши пешниҳодшуда дида баромада мешавад ва* $\varphi^+(t)$, $\frac{d\varphi^-}{dt} \in L_2(\Gamma)$, $\nu = \max(m-1, n) \geq 1$. *Он гоҳ барои масъалаи* (A_1) *натиҷаҳои зерин ҷой доранд:*

1) *агар* $æ \geq \nu + r$ *бошад, он гоҳ* $p = 0$ *ва умуман* $l = 2(æ - 1)$ *мешаванд ва дар баъзе ҳолатҳои махсус ду ҳалли дигар низ имконпазир аст:*

2) *агар* $1 < æ < \nu + r$ *бошад, он гоҳ* $2(æ - 1) \leq l \leq (\nu + r - 1)$ ва $p = l - 2(æ - 1)$ *мешаванд, аммо ҳангоми* $r + 1 < æ < \nu + r$ *будан, ҳолатҳои махсуси зерин низ ҷой доранд*: $2æ \leq l \leq 2(\nu + r)$ *ва* $p = l - 2æ$;

[24] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. //–М.: Наука. 1977. 640 стр.

[25] Сабитов И.Х. Об одной краевой задаче сопряжения на окружности //Сибир. математ. журнал, т. V, №1. 1964. С.17 – 23.

3) *агар* $æ \le 1$ *бошад, он гоҳ* $0 \le l \le (\nu + r - 1)$ *ва* $p = l - 2(æ - 1)$ *мешаванд*.

Дар параграфи сеюми боби дуюм масъалаи канории сингулярии ҳосиладор бо ҷаҳиш омӯхта мешавад.

Бигузор D^+ ва D^- – мувофиқан қисмҳои дохилӣ ва берунии доира, Γ – давраи воҳидӣ: $|t| = 1$ бошанд.

Масъалаи зеринро дида мебароем:

$$\mathrm{E}^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}} \cdot A(t)\frac{d\mathrm{E}^-}{dt} + \frac{\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}|t-\xi_n|^{s_n}} \cdot B(t)\cdot\frac{d\overline{\mathrm{E}^-}}{dt} +$$

$$+\prod_{r=1}^{J}|t-\tau_r|^{d_r} \cdot D(t)\cdot\overline{\mathrm{E}^-(t)} + q(t), \qquad (0.0.11)$$

ки дар ин ҷо τ_r $(r = 1,2,..., j)$, ξ_n $(n = 1,2,..., N)$ – баъзе аз нуқтаҳои контур, d_r, s_n - ададҳои комплексии ихтиёрии қисми ҳақиқиашон мусбат мебошанд.

Бо $\sum_{r=1}^{j} d_r = \sum_{r=1}^{j}(q_r^{(1)} - \zeta_n^{(1)})$, $\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N}(q_n^{(2)} - \zeta_n^{(2)})$, $\sum_{r=1}^{j} q_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N} q_n^{(2)}$ – ададҳои бутун, бо $\sum_{r=1}^{j}\zeta_r^{(1)}$, $\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^{(2)}$ – қисми касрии онҳоро ишора мекунем, ки дар ин ҷо $0 < \mathrm{Re}\,\zeta_r^{(1)} < 1$, $0 < \mathrm{Re}\,\zeta_n^{(2)} < 1$.

Бигузор $A(t),\ B(t), D(t) \in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma),\ \lambda > \frac{1}{2},\ q(t) \in L_2(\Gamma)$.

Масъалаи канории (0.0.11) ба масъалаи канории ба он эквиваленти намуди

$$\varphi^+[\alpha(t)] = a(t)\frac{1}{t}\psi^-(t) + b(t)\frac{1}{t}\overline{\psi^-(t)} + q(t)\overline{V(\psi^-)} + c(t),\ \psi^-(\infty) = 0 \quad (0.0.12)$$

оварда мерасонад.

Теорема 2.3.1. *Бигузор* $a(t), b(t), q(t) \in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma),\ \lambda > \frac{1}{2},\ c(t) \in L_2(\Gamma),\ a(t) \ne 0$, $æ = Ind_\Gamma\, a(t) - 1,\ n = \max\{m_1 - 1,\ n_1,\ m_2 - 1, n_2\},\ a(t) \in C_\lambda^1$. *Агар* $\varphi^\pm(t) \in L_2(\Gamma)$ *ҳалли масъала буда, бо интеграли намуди Коши пешниҳод шуда бошад, он гоҳ барои масъалаи* (0.0.12) *натиҷаҳои зеринро соҳиб мешавем*:

1) *агар* $æ \le -n + 1$ *бошад, он гоҳ* $l = 0,\ p = 2|æ|$;
2) *агар* $-n + 1 < æ < 0$ *бошад, он гоҳ* $0 \le l \le 2(n + æ - 1),\ p = l - 2æ$;
3) *агар* $æ \ge 0$ *бошад, он гоҳ* $2æ \le l \le 2(n + æ - 1),\ p = l - 2æ$.

Дар параграфи чоруми боби дуюм як ҳалли умумии масъалаи канории ҳамроҳшуда барои давра дар ҳолати сингулярӣ омӯхта мешавад.

Масъалаи сингулярии

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot a(t)\cdot\varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)} +$$

$$+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot p(t)\cdot R_1(\varphi^-)+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\overline{R_2(\varphi^-)}+c(t),\ \varphi^-(\infty)=0, \quad (0.0.13)$$

дида баромада мешавад, ки дар ин ҷо $\eta_r(r=1,2,3,\ldots,R)$, $\xi_m(m=1,2,\ldots,M)$ – баъзе аз нуқтаҳои контур, d_r, q_r – ададҳои бутуни мусбат мебошанд.

Ишораҳои $\sum_{r=1}^{R}d_r=d$, $\sum_{m=1}^{M}q_m=q$ - ро дохил мекунем.

Бигузор дар масъалаи (7) $a(t)\neq 0, b(t), p(t)$ - функсияҳои маҳдуд ва ченшаванда, $c(t)\in L_2(\Gamma)$, R_1,R_2 – операторҳои маҳдуди хаттии аналитикии амалкунанда аз $L_2(\Gamma)$ ба $L_2(\Gamma)$ бошанд. Ғайр аз ин R_1 чунин операторест, ки муодилаи функсионалии

$$\varphi_0^-(t)-\psi_0^-(t)\cdot R_1\varphi_0^-(t)=\Phi_0^-(t) \quad (0.0.14)$$

фредголӣ мебошад. Дар ин ҷо $\psi_0^-(t)$, $\Phi_0^-(t)$ баъзе аз функсияҳои муайян буда, дар навбати худ ҳам функсияҳои додашудаи $\psi_0^-(t)$, $\Phi_0^-(t)$ ва ҳам функсияи хусусии $\varphi_0^-(t)$ қиматҳои худудии функсияи аналитикӣ дар D^- мебошанд.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор* Γ – *давраи воҳидӣ*: $|t|=1$, $a(t)\in H(\Gamma), a(t)\neq 0$, $b(t)$, $p(t)\in M(\Gamma)$, $c(t), \varphi^{\pm}(t)\in L_2(\Gamma)$, R_1,R_2 – *операторҳои аналитикии амал - кунанда аз* $L_2(\Gamma)$ *ба* $L_2(\Gamma)$, *ғайр аз ин, бигузор* R_1 – *чунин операторест, ки муодилаи функсионалии* (0.0.14) *фредголӣ буда, ҳамаи ҳалҳои ин муодила қиматҳои ҳудудии функсия дар* D^- *аналитикӣ мебошанд, ки дар беохирӣ нестшавандаанд,* $æ=Ind_{\Gamma}a(t)$.

Ишора мекунем: $$\varphi_0^-(t)+R_1'(\varphi_0^-)=\Phi_0^-(t)\chi^-(t), \quad (0.0.15)$$

ки дар ин ҷо $R_1'(\varphi_0^-)=\chi^-\cdot t^{r+m-æ-1}\cdot P_3\cdot R_1\left[\frac{\varphi_0^-(t)}{t^{m-1}}\right]$ мебошад.

Натиҷаҳои зерин ҷой доранд:

1. *Ҳангоми* $æ\geq m+r-1$:

a) *агар муодилаи ғайриякҷинсаи* (0.0.15) *ҳалли ягона дошта бошад, он гоҳ* $l=2æ$, $p=0$ *мешавад;*

b) *агар муодилаи ғайриякҷинсаи* (0.0.15) *ҳалли* 2σ – *хаттӣ новобаста* (*дар майдони ададҳои ҳақиқӣ*) *дошта бошад, он гоҳ ҳангоми иҷрои шарти* 2σ $l=2(æ+\sigma)$, $p=0$ *мешавад*;

2. *Ҳангоми* $0\leq æ<m+r-1$:

агар муодилаи ғайриякҷинсаи (0.0.15) *ҳалли* $2s$ – *хаттӣ новобаста* (*дар майдони ададҳои ҳақиқӣ*) *дошта бошад, он гоҳ ҳангоми иҷрои шарти* $2s$ $2(æ+s)\leq l\leq 2(m+r+s-1)$, $p=l-2æ$ *мешавад*;

3. *Ҳангоми* $æ<0$:

a) *агар муодилаи ғайриякҷинсаи* (0.0.15) *ҳалли ягона дошта бошад, он гоҳ* $0\leq l\leq 2(m+r-1)$, $p=l-2æ$ *мешавад*;

b) *агар муодилаи ғайриякҷинсаи* (0.0.15) *ҳалли* 2δ – *хаттӣ новобаста дошта бошад, он гоҳ ҳангоми иҷрои шарти* 2δ $0\leq l\leq 2(m+r+\delta-1)$, $p=l-2æ$ *мешавад.*

ХУЛОСА

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Диссертатсия ба ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқа ва доира бахшида шуда, ҳолати ҳалшавандагии масъалаҳои канории ҳамроҳшудаи функсияҳои аналитикӣ бо мавҷудияти сифрҳо ва беохирии ҳамроҳшудаи аналитикӣ ва ғайрианалитикии намуди коэффитсиентҳо дар сарҳад, ки пеш аз ин мавриди омӯзиш қарор нагирифта буданд, тадқиқ карда шудааст.

Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаҳои канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо сифрҳо ва қутбҳои намудашон ҳамроҳшуда дар контур ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p - миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p - миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаҳои канории ҳосиладори тартиби олидошта дар ҳолати сингулярӣ ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p - миқдор шарти ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои доира ёфта шудаанд.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда дар асоси исботҳои қатъии математикӣ ба даст оварда шудаанд ва ин натиҷаҳоро дар такмили оянидаи назарияи масъалаҳои канории ҳамроҳшудаи функсияҳои аналитикӣ дар ҳолати сингулярӣ истифода намудан мумкин аст.

Аз натиҷаҳои кори диссертатсионӣ унвонҷӯён ва магистрҳои муасси - саҳои илмӣ ва мактабҳои олии кишвар, ки оиди назарияи масъалаҳои канории функсияҳои аналитикӣ корҳои илмӣ-тадқиқотӣ мебаранд, истифода бурда метавонанд. Масалан, дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, Институти математикаи АМ ҶТ ба номи А.Ҷураев, Донишгоҳи давлатии Хуҷанд, Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон, Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон ва ғайра.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮЪИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА - и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Кабиров А.Т. Общая краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2013. – №1/1(102). – С. 47 - 60.

[2-М] Кабиров А.Т. Об одной сингулярной краевой задаче сопряжения для круга [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т. // Вестник педагогического университета. – 2013. – № 5(54). – С.94 - 98.

[3-М] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения на полуплоскости с коэффициентами из более общих классов [Текст] / Кабиров А.Т. // Вестник Таджикского национального универси - тета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.78 – 83.

[4-М] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи общей граничной задачи линей -ного сопряжения на окружности с коэффициентами из более общих классов [Текст] / Кабиров А.Т.// Вестник Таджикского национального универси - тета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.14 - 18.

[5-М] Кабиров А. Т. О сингулярной граничной задаче сопряжения с производ - ными со сдвигом [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т. //Вестник Таджик - ского национального университета. Серия естест венных наук. – 2017. – №1/5. – С.141 -145.

Дар дигар нашрияҳо:

[6-М] Кабиров А.Т. Сингулярные случаи задачи сопряжения аналитичес -ких функций на окружности [Текст] / Кабиров А.Т. // Сборник научных трудов ФЭИТ. Часть 2. –2013. – С.416 – 425.

[7-М] Кабиров А.Т. О краевой задаче с производными типа Карлемана в сингулярном случае [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т. //Материалы международной научной конференции, посвященной 85 – летию академика Михайлова Л.Г. (г. Душанбе, 17 – 18 июня 2013г.) – С.134 –137.

[8-М] Кабиров А. Т. Краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т. //Материалы международной научно-теоретич. конференции (г. Курган–Тюбе, 10 – 11. 05. 2013 г.). – С.117 – 122.

[9-М] Кабиров А.Т. Об одной сингулярной краевой задаче с производ -ными со сдвигом [Текст] / Усманов Н., Кабиров А.Т.// Материалы

международной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения» (г.Душанбе, 26 декабря 2016). – С.74 – 82.

[10-М] Кабиров А.Т. Сингулярная граничная задача сопряжения аналити - ческих функций с производными высших порядков на окружности [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т.// Вестник Финансово-экономичес - кого института Таджикистана. Специальный выпуск. –2016. № 1(5). – С.143–145.

[11-М] Кабиров А.Т. Граничная задача линейного сопржения с разрывными коэффициентами [Текст] /Усманов Н., Кабиров А.Т.// Материалы республиканской научно-теоретич. конференции Таджикского госу - дарственного финансово-экономического университета (г. Душанбе, 29.06.2018г.). – С. 78 – 83.

[12-М] Кабиров А. Т. Случай, когда коэффициенты задачи сопряжения гармонических функции имеют разрыв первого рода /Усманов Н., Саидов Б.Б., Кабиров А.Т. //Материалы республиканской научно-теоретич. конференции ТГФЭУ, (г. Душанбе, 29 июня 2018г.). – С. 98 – 100.

ШАРҲИ МУХТАССАР

ба диссертатсияи Кабиров Абубакр Тиллоевич дар мавзӯи «Оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ.

Вожаҳои калидӣ: *Масъалаи канорӣ, функсияи аналитикӣ, соҳаи якалоқа, доира, ҳалшавандагӣ, ҳамроҳшуда, шарти Гёлдер, бефосилагӣ, ҳосила, ҳолати сингулярӣ, каниши навъи якум, қутб, бисёраъзогии интерполятсионӣ, интеграли намуди Коши, муодилаи интегралӣ, қатори Фуре.*

Мақсади кор. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ ба рушди оянда масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ бахшида шудааст. Асоси ин тадқиқотро исботи теоремаҳо оиди ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои соҳаи якалоқа ва доира ташкил медиҳанд.

Навгониҳои илмӣ. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатанд аз:

– гузоштан ва таҳқиқ кардани ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ дар соҳаи якалоқанок:

- ёфта шудани қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаҳои канории умумии ҳамроҳшудаи хаттӣ бо сифрҳо ва қутбҳои намудашон ҳамроҳшуда дар контур;
- ёфта шудани қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаи канории ҳосиладори намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ;
- ёфта шудани қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии масъалаҳои канории ҳосиладори тартиби олидошта дар ҳолати сингулярӣ;

– гузоштан ва таҳқиқ кардани ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ дар доира:

- ёфта шудани қиматҳои аниқи l – миқдор ҳалли масъалаи якҷинса ва p – миқдор шарти ҳалшавандагии баъзе масъалаҳои канории сингулярии назарияи функсияҳои аналитикӣ барои доира.

АННОТАЦИЯ

диссертации Кабирова Абубакра Тиллоевича на тему «О разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специаль - ности 01.01.01– вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Ключевые слова: *краевая задача, аналитическая функция, односвязный область, круг, разрешимость, сопряженость, условия Гельдера, непрерыв - ность, производная, сингулярные случаи, разрыв первого рода, интеграл типа Коши, полюс, интерполятсионий многочлен, интегральная уравнения, ряд Фурье.*

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключа - ется в дальнейщем развитии сингулярных краевых теории аналитических функций. А именно доказательства теорем о разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для одно -связной области и круга.

Научная новизна исследования. Результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

– ставятся и исследуются разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для односвязной области:
  найдены точные значения $l-$ число решений однородной задачи и $p-$ число условий разрешимости неоднородной задачи для общей граничной задачи линейного сопряжения для полуплоскости с нулями и полюсами сопряженного вида на границе;
- найдены точные значения $l-$число решений однородной задачи и $p-$ число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными типа Карлемана в сингулярном случае;
- найдены точные значения $l-$ число решений однородной задачи и $p-$ число условий разрешимости неоднородной задачи для краевой задачи с производными высших порядков в сингулярном случае.

– ставятся и исследуются разрешимости некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга:
- найдены точные значения $l-$число решений однородной задачи и $p-$ число условий разрешимости неоднородной задачи некоторых сингулярных краевых задач теории аналитических функций для круга.

SUMMARY

to the dissertation of Kabirov Abubakr Tilloevich on the theme of "The solvability of some singular boundary value problems in the theory of analytic functions", submitted for defending scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty of 01.01.01 – real, complex and functional analysis

Keywords: *boundary value problem, analytic function, simply connected domain, circle, solvability, conjugation, Gilder's conditions, continuity, derivative, singular cases, discontinuity of the first kind, Cauchy-type integral, pole, interpolation polynomial, integral equations, Fourier series.*

The purpose of the research. The main goal of the research is dedicated to further develop of the singular boundary value theory of analytic functions. It is precisely this fact that explains finding exact theorems on the solvability of some singular boundary value problems in the theory of analytic functions for a simply connected domain and a circle.

Scientific novelty of the research. The results of the research are new and submitted as follows:

– the solvability of some singular boundary value problems of the theory of analytic functions for a simply connected domain is posed and investigated: exact values of l - the number of solutions of the homogeneous problem and p - the number of conditions for the solvability of the inhomogeneous problem for the general boundary value problem of linear conjugation for a half-plane with zeros and poles of the conjugate form on the boundary are found;

- exact values of l - the number of solutions of the homogeneous problem and p - the number of conditions for the solvability of the inhomogeneous problem for a boundary value problem with derivatives of Carleman type in the singular case are found;
- exact values of l - the number of solutions of the homogeneous problem and p - the number of conditions for the solvability of the inhomogeneous problem for a boundary value problem with derivatives of higher orders in the singular case are found.

– the solvability of some singular boundary value problems of the theory of analytic functions for the circle is submitted and investigated:

- exact values of l - the number of solutions of the homogeneous problem and p - the number of conditions for the solvability of the inhomogeneous problem of some singular boundary value problems of the theory of analytic functions for the circle are found.