РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Хуромонов Хуромон Мамадамонович

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА И НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: **Шабозов Мирганд Шабозович,** академик Академии наук Республики Таджикистан, доктор физико-математических наук, профессор

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Сафаров Джумабой,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Бохтарского государственного университета им. Н. Хусрава

Саидусайнов Муким Саидусайнович, кандидат физико-математических наук, преподаватель математики Университета Центральной Азии

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова

Защита состоится *24 июня 2020 г. в 10:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г.Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Таджикского национального университета, а также на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-012,
доктор физико-математических наук **Р.Н. Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В последнее время экстремальным задачам наилучшего полиномиального приближения функций комплексного переменного посвящен целый ряд работ: Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.[1]; Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш.[2]; Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.[3,4]. Первые результаты, связанные с вычислением точных значения верхних граней наилучшего приближения и вычисления точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций в пространстве Харди принадлежат К.И.Бабенко, В.М.Тихомирову и Л.В.Тайкову. В дальнейшем эта тематика была развито в работах Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова[5], С.Б. Вакарчука[6], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[7] и других. В пространстве Бергмана исследование указанных вопросов начал С.Б.Вакарчук[8], а первые результаты в весовом пространстве Бергмана были получены М.Ш.Шабозовым и О.Ш.Шабозовым[9].

Настоящая диссертационная работа посвящена дальнейшему развитию указанных вопросов как в обычном пространстве Бергмана, так и в весовом пространстве Бергмана и тем самым является актуальной для дальнейшего развития теории аппроксимации функций комплексного переменного.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме „Теория аппроксимации

[1]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. 2010. Т.50, №6. С. 999-1004.

[2]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т.201, №8. С.3-22.

[3]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n—поперечников // Матем. заметки. 2018. Т.103, №4. С.617-631.

[4]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. УрО РАН. 2019. Т.25, №2. С.258-272.

[5]Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т.40. №3. С.341-351.

[6]Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т.65. №2. С.186-193.

[7]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т.382. №6. С.747-749.

[8]Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57. №1. С.30-39.

[9]Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. 2007. Т.412. №4. С.466-469.

функций".

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные константы неравенства Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- найти точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- найти наилучшие линейные методы приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- найти точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$, $p \geq 1$.

Основные методы исследования. В диссертации используется метод Н.П.Корнейчука оценки верхних граней наилучших приближений классов функций подпространством фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников в любом нормированном пространстве.

Научная новизна исследований. Основные результаты работы:

- найдены точные константы неравенства Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- найдены точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- найдены наилучшие линейные методы приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- найдены точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$, $p \geq 1$.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных константах в неравенствах Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;

- теоремы о точных верхних гранях среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- теорема о явном виде наилучших линейных методов приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi),\ p \geq 1$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$, $p \geq 1$;
- теоремы о точных значениях n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}, p \geq 1$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы можно использовать в случае функций двух комплексных переменных аналитических в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций комплексных переменных с ограниченными по норме смешанных производных в двумерном весовом пространстве Бергмана.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Математического анализа и теории функций“ и кафедры „Функционального анализа и дифференциальных уравнений“ Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг.);
- международной летней математической Школе – Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- республиканской научной конференции, посвященной 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2016 г.);
- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций“ (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);

- международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.).

Публикации. Основные результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах, из них 2 статьи опубликованы в научных журналах Российской Федерации, 6 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце автореферата. Из 8 работ 4 входят в списки ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 4 в других изданиях. Из совместных с М.Ш.Шабозовым двух статей соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 49 наименований, занимает 90 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении освещается цель работы, апробация и краткое изложение результатов диссертационной работы. В первой главе диссертации изучается ряд экстремальных задач теории среднеквадратического наилучшего приближения функций комплексного переменного конечными суммами Фурье в пространстве Бергмана.

Первый параграф посвящен общим сведениям о пространстве Бергмана, определениям, обозначениям и предварительным фактам, используемым в дальнейшем. Всюду далее в диссертации $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. При $R = 1$ вместо $A(U_1)$ будем писать просто $A(U)$.

Всюду далее полагаем $D := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и, полагая $B_2 := B_2(U)$, будем рассматривать пространство Бергмана B_2 функций $f \in A(U)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho|f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Во втором параграфе изучаются вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье функций f, регулярных в односвязной области $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, разложенных по ортогональным системам функций из B_2.

Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z), \quad a_k(f)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}d\sigma. \tag{1}$$

Пусть

$$S_{n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z) \tag{2}$$

– частичная сумма n-го порядка ряда (1). Множество всевозможных обобщенных полиномов вида $p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z)$ назовём обобщённым полиномом, где $d_k\in\mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты.

Лемма 1.2.1.[10] *Пусть $f\in B_2$. Тогда*

$$E_{n-1}(f)_2=\inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_{B_2} : d_k\in\mathbb{C}\right\}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{B_2}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|a_k(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f, а $S_{n-1}(f,z)$– частная сумма n–го порядка ряда (1), определённая равенством (2).

В случае приближения в среднем функции комплексной переменной, регулярной в односвязной области $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина изучалась в работе[1]. Напомним, что под неравенствами Джексона-Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной. В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах[3,4,11]. Пусть

$$T(\xi,\eta;h)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{4}$$

[10] Смирнов В.И., Лебедев Н.А.Конструктивная теория функций комплексного переменного // М.–Л.:Наука. 1964.

[11] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журнал. 2018. Т.20. №1. С.86-97.

где $h \in (0,1), (\xi,\eta) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}$, а равенство (4) понимается в смысле сходимости в $B_2(\mathcal{D}\times\mathcal{D})$. В пространстве B_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta)T(z,\zeta;1-h)d\sigma,$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Следуя работам[1,3,11], для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(z),$$

где

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z),\ \ F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1}f(z)),$$

$k = 1,2,...,m;\ m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2.

Величину

$$\Omega_m(f;t)_{B_2} = \sup\Big\{\|\Delta_h^m f\|_{B_2}:\ 0 < h \le t\Big\} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}|a_k(f)|^2\right\}^{1/2} \quad (5)$$

назовем обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$.

В третьем параграфе рассматривается задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности (5). Всюду далее через $B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U)$ $(B_2^{(0)} := B_2(U))$ обозначим класс функций $f \in B_2$, у которых $z^r f^{(r)} \in B_2$. Доказывается, что

$$\Omega_m^2(z^r f^{(r)};t)_{B_2} = \sum_{k=r}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}\alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Далее, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ автоматически предполагается, что $f \notin \mathcal{P}_r$.

Лемма 1.3.2. *Для любых чисел* $n \in \mathbb{N},\ r,s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \ge s$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^s f^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Одним из основных результатов третьего параграфа является следующая

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in B_2^{(r)}$ *при любых* $n,m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $t \in (0,1)$ *имеет место неравенство типа Джексона–Стечкина*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \alpha_{n,r}^{-1} \cdot [1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2}, \tag{6}$$

причём при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *константа в правой части неравенства (6) уменьшена быть не может.*

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2}} = \frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m}, \ 0 < t < 1. \tag{7}$$

Полагая в (7), в частности $t = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{B_2}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}. \tag{8}$$

Отметим, что теорему 1.3.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3.2. *Для произвольной функции* $f \in B_2^{(r)}$ *при любых* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ *и* $t \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot [1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2}, \tag{9}$$

причём при каждом фиксированном $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ *константа в правой части неравенства (9) уменьшена быть не может.*

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 при всех* $s = 0, 1, 2, \cdots, r$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $t \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2}} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, 1/n\big)_{B_2}} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}.$$

Наиболее общим результатом третьего параграфа является

Теорема 1.3.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r$, $h \in (0,1)$, q *– весовая на интервале* $(0, h)$ *функция. Тогда при всех* $0 < p \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 1.3.3 вытекает

Следствие 1.3.4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.3.3. Положим*

$$q(t) := n(1-t)^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ 0 < t < 1.$$

Тогда для любого $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^h \Omega_m^p \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h)^n\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}.$$

Отсюда, в частности при $h = 1/n,\ n \in \mathbb{N}, 0 < p \le \infty$, имеем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)^{m+1/p}}.$$

В свою очередь, при $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$ из последнего равенства следует, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m} \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^m} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

В четвёртом параграфе первой главы доказаны точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_2}$ функций f, принадлежащих классу $B_2^{(r)}$, посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре. Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$:

$$\mathscr{K}_m(f, t^m)_{B_2} := \mathscr{K}\left(f, t^m; B_2; B_2^{(m)}\right) = \inf\left\{ \|f-g\|_2 + t^m \|z^m g^{(m)}\|_2 : g \in B_2^{(m)} \right\}, \quad (10)$$

где $m \in \mathbb{N},\ 0 < t \le 1$. Представляет интерес точно вычислить экстремальную характеристику величины, подобной левой части (7), но содержащей вместо модуля непрерывности m-го порядка (5) $\mathscr{K}$-функционал (10). Весьма важной задачей является установление слабой эквивалентности $\mathscr{K}$-функционала и различных обобщенных модулей непрерывности m-го порядка. В нашем случае эквивалентности указанных гладкостных величин вытекает из сравнения результата теоремы 1.3.1 и нижеприведенного следствия 1.4.1. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо следующее соотношение*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m \left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}} \right)_{B_2}} = 1.$$

Следствие 1.4.1. *В условиях теоремы 1.4.1, при $r = 0$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m \left(f; \dfrac{1}{\alpha_{n,m}} \right)_{B_2}} = 1. \tag{11}$$

Отметим, что сравнивая результаты теорем 1.3.1 и 1.4.1, а также следствие 1.4.1, приходим к соотношению

$$\mathscr{K}\left(z^r f^{(r)}, t^m \right)_{B_2} \sim \Omega_m \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, 0 < t < 1$. Заметим, что из равенство (11) получаем точное на классе B_2 неравенство типа Джексона – Стечкина, в котором вместо обобщенного модуля непрерывности m-го порядка Ω_m использован $\mathscr{K}$-функционал (10), в то время как для неравенства типа Джексона – Стечкина с модулем непрерывности Ω_m в случае $r = 0$ из (8) вытекает лишь асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m(f; 1/n)_{B_2}} \sim \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-m}, \ m \in \mathbb{N}.$$

В пятом параграфе первой главы вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности. Приведём необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть S – единичный шар в пространстве B_2; $\Lambda_n \subset B_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_2$– подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : B_2 \to \Lambda_n$– линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^\perp : B_2 \to \Lambda_n$– непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$–выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \sup \left\{ \sup \left\{ \varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_2 \right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset B_2 \right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}B_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^{\perp}B_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset B_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве B_2. Приводим определение классов функций, естественно вытекающих из результатов теорем 1.3.1 − 1.4.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$. Обозначим через $W_m^{(r)}B_2(\Phi) := W^{(r)}B_2(\Omega_m;\Phi)$ - класс функций $f \in B_2^{(r)}$, обобщенный модуль непрерывности (5) которых удовлетворяет неравенству

$$\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, h\big)_{B_2} \leq \Phi(h),$$

где Φ — неотрицательная, монотонно возрастающая функция на положительной полуоси $\mathbb{R} := [0, +\infty)$, причем $\Phi(0) = 0$. Далее, пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, $0 < p \leq \infty$; $g(t)$ — весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Обозначим через $W_{2,m,p}^{(r)}(h,q) := W_p^{(r)}B_2(\Omega_m, h; q)$ - класс, состоящий из функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)}; t\big)_{B_2} q(t)dt \leq 1.$$

Напомним, что неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция Ψ называется k-мажорантой, если функция $t^{-k}\Psi(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+, \Psi(0) = 0$ и $\Psi(t) \to 0$ при $t \to 0$. При $k = 1$ функцию Ψ будем называть мажорантой.

Через $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\mathscr{K}_m(z^r f^{(r)}, t^m)_2 \leq \Psi(t^m),\ 0 < t < 1.$$

В определении введенного класса функция Ψ является некоторой мажорантой и $B_2^{(0)} \equiv B_2$, $W_2^{(0)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big) = W_2(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Для произвольного подмножества $\mathfrak{M} \subset B_2$ положим $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{B_2} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_2} :\ f \in \mathfrak{M}\right\}$.

Теорема 1.5.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}(W_m^{(r)}B_2(\Phi))_{B_2} = \alpha_{n,r}^{-1}\big[1 - (1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$.

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 при $h = 1/n, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi)\big)_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \sim \left(1 - e^{-1}\right)^{-m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

В ряде работ по теории приближений найдены верхние грани модулей коэффициентов Фурье, для определенных систем ортогональных с весом полиномами на определённых классах функций. Для введенных в этой работе классов функций данный вопрос тоже представляет определенный интерес.

Теорема 1.5.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n > r,\ h \in (0, 1)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\right\} = \frac{\left[1 - (1-h)^n\right]^{-m}}{\alpha_{n,r}\sqrt{n+1}}\Phi(h).$$

Одним из основных результатом пятого параграфа является

Теорема 1.5.3. *Пусть $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \le \infty,\ h \in (0, 1),\ q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}B_2; B_2) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}B_2; B_2\big) = \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Теорема 1.5.4. *Пусть Ψ — мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, где $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right)_{B_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

В качестве следствия из теоремы 1.5.4 вытекает следующее утверждение о точном значении модулей коэффициентов Фурье на рассматриваемом классе функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$.

Следствие 1.5.3. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство*

$$\sup\left\{\big|c_n(f)\big| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

В теореме 1.5.4, в частности, найдено значение точной верхней грани наилучшего приближения $E_{n-1}\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\big)_{B_2}$ класса функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$ комплексными полиномами из подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Поскольку для функции $f\in B_2^{(r)}$, $r\in\mathbb{N}$ её промежуточные производные $z^\nu f^{(\nu)}(z), 1\le\nu\le r$ также принадлежат классу B_2, то представляет интерес изучение поведения величины $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ на классе $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$. В этом случае имеет место

Теорема 1.5.5. *Пусть $r,\nu\in\mathbb{N}$ $(1\le\nu\le r)$. Тогда для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ справедливо точное на $B_2^{(r)}$ неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-1}^2\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}\le\frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,r})^{\nu/r}}\Big(E_{n-1}(f)\Big)_{B_2}^{1-\nu/r}\Big(E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)\Big)_{B_2}^{\nu/r},$$

обращающееся в равенство для $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)}$.

В заключительной теореме этого параграфа вычислена верхняя грань наилучшего совместного приближения самой функции и последовательности её производных $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ на классе функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$.

Теорема 1.5.6. *Пусть Ψ - некоторая мажоранта, задающая класс функций $W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)$ где $m\in\mathbb{N}, r=2,3,\ldots.$ Тогда для любого числа $n\ge m+r$ и произвольного натурального числа ν $(1\le\nu\le r-1)$ справедливо равенство*

$$\sup\Big\{E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_{B_2}: f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)\Big\}=\frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Во второй главе диссертационной работы решается ряд экстремальных задач отыскания наилучших линейных методов приближения и их приложения в задачах отыскания точных значений гельфандовских и линейных n-поперечников.

Задачи отыскания наилучших линейных методов в обычных пространствах Бергмана B_p, $1\le p\le\infty$ (без веса) в разное время решены С.Б.Вакарчуком[6,] С.Б.Вакарчуком и М.Ш.Шабозовым[2], М.Ш.Шабозовым и М.Р.Лангаршоевым[12,13] и многим другим.

В первом параграфе приведены общие сведения о весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$, а также некоторые обозначения и определения, используемые

[12] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. 2013. Т.450. №5. С.518-521.

[13] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сибирский мат. журнал. 2019. Т.60. №6. С.1414-1423.

в дальнейшем. Через $L_p := L_p(U), 1 \le p < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{U} |f(z)|^p dxdy \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^p dt d\rho \right)^{1/p},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(z)$ – некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $L_{p,\gamma} \stackrel{def}{=} L_p(U, \gamma), 1 \le p < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/p} f \in L_p(U),\ \|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{L_p}.$$

Определение 2.1.2.[9] *Пусть D — ограниченная область на плоскости комплексного переменного, $f \in A(D)$, $\gamma(|z|)$ — произвольная положительная суммируемая по области D весовая функция, причём*

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|) |f(z)|^p d\sigma < \infty,\ 1 \le p \le \infty, \tag{12}$$

где $d\sigma$ — элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множество всех аналитических функций $f \in D$, для которых выполнено условие (12), образует банахово пространство, которое называется весовым пространством Бергмана $B_{p,\gamma}(D),\ 1 \le p \le \infty$.

Рассмотрим пространство Бергмана $B_{p,\gamma}$ функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) \cdot |f(\rho e^{it})|^p d\rho dt \right)^{1/p} < \infty.$$

В работе С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[2] рассматривается конкретная весовая функция γ_*, которая позволяет получить пространство $B_{p,\gamma_*}(U_R)$ аналитических в U_R функций с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы $|z| = R$ круга U_R по сравнению с функциями, принадлежащими пространству $B_p(U_R)$.

Далее, в первом параграфе приводится определение модулей непрерывности в пространствах Харди $H_{p,R}$ $(p \ge 1)$ и весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$ $(p \ge 1)$, а также некоторые примеры вычисления конкретных задач.

Величину

$$\omega_m(f,t)_{B_{p,\gamma}} = \sup\left\{\|\Delta_m(f,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{p,\gamma}} : |h| \le t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f;\rho,u,h)|^p d\rho du\right)^{1/p} : |h| \le t\right\},$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

— разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Во втором параграфе решаются задачи наилучшего приближения функций в пространстве Харди $H_p, 1 \le p < \infty$ и найдены значения поперечников некоторых классов функций, точнее, в банаховых пространствах Харди H_p, Бергмана $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ 1 \le p < \infty$ с весом γ вычислены точные значения различных n-поперечников классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi),\ r \in \mathbb{N}$, аналитических в круге радиуса $R \ge 1$ функций, у которых усреднённые модули гладкости r-х производных $f^{(r)} \in H_{p,R}$ ограничены заданной мажорантой Φ. Пусть $\Phi(t),\ t \ge 0$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Выбирая в качестве мажоранты функцию $\Phi(t)$ для произвольной $h \in (0, \pi/2]$, вводим в рассмотрение следующий класс функций

$$W_{p,R}^{(r)}(\Phi) \stackrel{def}{=} \left(f \in A(U_R) :\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f^{(r)}; 2t)_{H_{p,R}} dt \le \Phi(h)\right),$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty,\ R \ge 1$. При $R = 1$ полагаем $W_{p,1}^{(r)}(\Phi) = W_p^{(r)}(\Phi)$.

Пусть X — произвольное банахово пространство; S — единичный шар в X; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $L : X \to \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор, отображающий X в Λ_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством Λ_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\{E(f, \Lambda_n)_X : f \in \mathfrak{M}\} := \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - L(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : LX \subset \Lambda_n\} \tag{13}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \in X$. Линейный оператор $L^*, L^*X \subset \Lambda_n$, если он существует и реализует в (13) точную нижнюю грань, то есть когда

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \sup\Big\{\|f - L^*(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения. Пусть

$$(1 - \cos x)_* = \{1 - \cos x, \text{ если } \ 0 \le x \le \pi; \ 2, \text{ если } x \ge \pi\}\,.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/2(n-r)\right)} \ge \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1 - \cos x)_* dx, \tag{14}$$

тогда при всех $1 \le p \le \infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) = d_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) =$$

$$= E\left(W_p^{(r)}(\Phi); \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_p} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \ n \ge r, \ n, r \in \mathbb{N}.$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (14), не пусто.

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие линейные методы приближения класса функций $W_{p,R}^{(r)}(\Phi), R \ge 1$ в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$ и распространен результат теоремы 2.2.1 на класс $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ для ряда n-поперечников. Приводим основной результат этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть $R \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (14). Тогда для любого натурального числа $n > r$ имеют место следующие равенства*

$$b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = d_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) =$$

$$= d^n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = d^n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = \delta_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}_{p,R};\overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} = E\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi);\overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup\left\{\|f - L_*(f)\|_{L_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}.$$

При этом:

1) в случае $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi);L_{p,\gamma}\right)$ *и* $\delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi);L_{p,\gamma}\right)$ *подпространство*

$$\Lambda^*_n \stackrel{def}{=} span\Bigg\{\{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \Bigg\{\Bigg[R^{2(n-k)}+$$

$$+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right)-1\right]|z|^{2(n-k)}\Bigg]z^k\Bigg\}_{k=r}^{n-1}\Bigg\},$$

где

$$\sigma_{k,r} \stackrel{def}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]}(1-sin(n-r)x)cos(k-r)xdx,\ k \geq r,$$

является экстремальным для класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ *в пространстве* $L_{p,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$L^*_{n-1}(f,z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right)-1\right]\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right\}c_k(f)z^k$$

является наилучшим для класса $W^{(r)}_{p,R}$ *линейным методом приближения в пространстве* $L_{p,\gamma}$;

3) подпространство $\Lambda^n_* \stackrel{def}{=} \{f \in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ *– экстремальное для n-поперечника* $d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi);B_{p,\gamma}\right)$;

4) экстремальным для n-поперечника $b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi);B_{p,\gamma}\right)$ *является подпространство* $\overline{\Lambda}_{n+1} \stackrel{def}{=} span\{1, z, \ldots, z^n\}$.

Заключительный четвертый параграф посвящен вычислению точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классе $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$.

Теорема 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 имеет место следующее равенство:*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

где $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ R \geq 1,\ 1 \leq p < \infty.$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- найдены точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- найдены наилучшие линейные методы приближения для классов $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$, $p \geq 1$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- найдены точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно использовать в случае аналитических функций двух комплексных переменных в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций двух комплексных переменных с ограниченными смешанных по норме производных в двумерном весовом пространстве Бергмана.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

[1-А] Хуромонов Х.М. О поперечниках некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2015. – Вып.4. – С.91-106.

[2-А] Хуромонов Х.М. Поперечники некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // Труды международной летней математической Школы – Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. – 2016. – С.266-269.

[3-А] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2017. – №1(166). – С.7-18.

[4-А] Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // Известия вузов. Математика. – 2020. – №2. – С.74-92.

В других изданиях:

[5-А] Хуромонов Х.М. О значениях верхних граней модулей коэффициентов Тейлора для некоторых классов функций в пространстве Харди [Текст]/ Х.М.Хуромонов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорского-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной „25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан" (Душанбе, 2016 г.). – С.29-30.

[6-А] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // „*Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ Михайлова Леонида Григорьевича. (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) – С.165-168.

[7-A] Хуромонов Х.М. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного рядами Фурье [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // „*Математический анализ и его приложения*” – Материалы республиканской научной конференции, посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.277-282.

[8-A] Хуромонов Х.М. Приближение в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной системе [Текст] / Х.М.Хуромонов // „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*” – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.300-304.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Хуромонов Хуромон Мамадамонович

НАЗДИККУНИИ МИЁНАКВАДРАТИИ ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКӢ БА ВОСИТАИ СУММАҲОИ ФУРЙЕ ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН ВА БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе — 2020

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ:	**Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор
МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:	**Сафаров Ҷумъабой,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав
	Саидусайнов Муқим Саидусайнович, номзади илмҳои физикаю математика, муаллими математикаи Донишгоҳи Осиёи Марказӣ
МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА:	Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б. Ғафуров

Ҳимоя *24-уми июни соли 2020 соати 10:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-012 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «______________» соли 2020 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои
диссертатсионии 6D.КОА-012,
доктори илмҳои физикаю математика **Р.Н. Одинаев**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммияти мавзӯъ. Дар солҳои охир оид ба масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои тағйирёбандаааш комплексӣ як қатор корҳои илмӣ: В.А.Абилов, Ф.В.Абилова, М.К.Керимов[1]; С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов[2]; М.Ш.Шабозов, М.С.Саидусайнов[3,4] бахшида шудаанд. Натиҷаҳои аввал оид ба ҳисобкунии қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии беҳтарин ва қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ дар фазои Харди ба К.И.Бабенко, В.М.Тихомиров ва Л.В.Тайков тааллуқ доранд. Дар оянда ин назария дар корҳои илмии Н.Айнуллоев ва Л.В.Тайков[5], С.Б.Вакарчук[6], М.Ш.Шабозова ва Г.А.Юсупов[7] ва дигарон тақвият дода шуд. Дар фазои Бергман тадқиқоти масъалаи мазкурро аввалин маротиба С.Б.Вакарчук[8] сар карда буд, лекин натиҷаҳои аввалин дар фазои вазндори Бергман аз тарафи М.Ш.Шабозов ва О.Ш.Шабозов[9] ёфта шудаанд.

Рисолаи диссертатсионии мазкур ба рушди минбаъдаи масъалаҳои нишондодашуда дар фазои муқаррарии Бергман ва дар фазои вазндори Бергман бахшида шудааст ва аз ин рӯ барои инкишофи минбаъдаи назарияи наздиккунии функсияҳои тағйирёбандаааш комплексӣ ниҳоят муҳим мебошад.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи

[1]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. 2010. Т.50, №6. С.999-1004.

[2]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш.О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т.201, №8. С.3-22.

[3]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Матем. заметки. 2018. Т.103, №4. С.617-631.

[4]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды УрО РАН. 2019. Т.25, №2. С.258-272.

[5]Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т.40. №3. С.341-351.

[6]Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т.65. №2. С.186-193.

[7]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т.382. №6. С.747-749.

[8]Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57. №1. С.30-39.

[9]Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. 2007. Т.412. №4. С.466-469.

таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи „Назарияи наздиккунии функсияҳо” иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ иборат аст аз:

- ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ;
- ёфтани қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии миёнаи баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бавоситаи модули бефосилагии махсуси тартиби m-ум дар фазои Бергман B_2 дода шудаанд;
- ёфтани усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ барои синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ $(p \geq 1)$ дар фазоҳои вазндори $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо бавоситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дар фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$.

Методҳои асосии тадқиқот. Дар диссертатсия усули Н.П. Корнейчук барои баҳодиҳии сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо бавоситаи зерфазоҳои ченакашон қайдкардашуда ва усули аз тарафи В.М. Тихомиров коркардашудаи аз поён баҳодиҳии қимати қутрҳо дар ихтиёри фазои нормиронидашуда истифода бурда шудаанд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Натиҷаҳои асосии рисола чунинанд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ ёфта шудаанд;
- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки ба воситаи модули бефосилагии махсуси тартиби m-ум дар фазои Бергман B_2 дода шудаанд, ҳисоб карда шудааст;
- усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ барои синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $p \geq 1$ дар фазоҳои вазндори $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$ ёфта шудааст;
- қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо бавоситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дар фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$ ҳисоб карда шудааст.

Мухтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳои асосӣ оид ба доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ;
- теоремаҳо дар бораи сарҳади аниқи болоии наздиккунии миёнаквадратии баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бавоситаи модули бефосилагии махсуси тартиби m-ум дар фазои Бергман B_2 дода шудаанд;
- теорема оид ба намуди ошкори усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ барои синфҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi),\ p \geq 1$ дар фазоҳои $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки бавоситаи қимати бо вазн миёнакардашудаи модули бефосилагии ҳосилаи тартиби r-ум дар фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро метавонанд дар ҳолати функсияи дутағйирёбандаи комплексӣ, ки дар бидавра аналитикӣ мебошад ва ёфтани қимати аниқи квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ аз рӯи нормаи ҳосилаи омехтаи маҳдуд дар фазои вазндори дученакаи Бергман истифода бурда шаванд.

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои рисола ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро дар асарҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ борҳо дар:

- семинари кафедраи „Таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо” ва кафедраи „Таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ” -и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АИ ҶТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2020);
- хонишҳои тобистонаи Мактаб-Конференсияи математикии С.Б. Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Душанбе, 15-25 августи соли 2016);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявӣ бахшида ба 25-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон (Душанбе, соли 2016);

- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канории назарияи функсияҳо” (Душанбе, 27-28 феврали соли 2018);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявии „Таҳлили математикӣ ва татбиқи он” (Душанбе, 10-11 июни соли 2019);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.)

муҳокима ва мавриди баррасӣ пешниҳод шуда буданд.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 8 мақола дарҷ гардидаанд, ки аз онҳо 2 мақола дар нашрияҳои илмии Федератсияи Руссия ва 6 мақола дар маҷаллаҳои илмии Ҷумҳурии Тоҷикистон чоп шудаанд ва рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Аз 8 кори илмӣ 4 мақола ба нашрияҳои тақризшавандаи рӯихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия мансуб буда, 4-тояш дар нашрияҳои дигар чоп шудаанд. Аз ду мақолаҳои бо ҳамроҳии М.Ш. Шабозов чоп шуда, ба ҳаммуаллиф фақат гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 49 номгӯй ва ҳамагӣ 90 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Дар муқаддима муҳиммияти мавзӯъи диссертатсия, мақсади кор, тасвиби кор ва мӯҳтавои мухтасари натиҷаҳои гирифташуда оварда шудааст. Дар боби якуми диссертатсия як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии миёнаи беҳтарини функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ бавоситаи суммаҳои охирноки Фурйе дар фазои Бергман омӯхта шудаанд.

Параграфи якум ба маълумотҳои умумӣ оид ба фазои Бергман, таърифҳо, ишораҳо ва далелҳои пешакӣ, ки дар оянда истифода бурда мешаванд, бахшида шудааст. Дар рисолаи диссертатсионӣ $\mathbb{N}$ — маҷмӯи ададҳои натуралӣ; $\mathbb{R}_+$ — маҷмӯи ададҳои мусбат; $\mathbb{C}$ — маҷмӯи ададҳои комплексӣ; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — доираи радиусаш $R \geq 1$ дар ҳамвории комплексии $\mathbb{C}$ ва $A(U_R)$ — маҷмӯи функсияҳои дар U_R аналитикӣ мебошанд. Ҳангоми $R = 1$ будан, ба ҷои $A(U_1)$ мухтасаран $A(U)$ менависем.

Дар оянда $D := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ва $B_2 := B_2(U)$ гузошта, фазои Бергман B_2 функсияҳои $f \in A(U)$ бо нормаи охирноки

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho|f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt\right)^{1/2} < \infty$$

– ро дида мебароем.

Дар параграфи дуюм масъалаҳои наздиккунии миёнаи суммаҳои Фурйеи функсияҳои f, дар соҳаи якалоқаманди $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ регулярӣ, аз рӯи системаи функсияҳои ортогоналӣ ба фазои $B_2 := B_2(\mathcal{D})$ тааллуқдошта омӯхта шудаанд. Функсияи f аз рӯи системаи функсияҳои $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ба қатори Фурйе ҷудо карда мешавад:

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z), \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}d\sigma. \tag{1}$$

Бигузор

$$S_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z) \tag{2}$$

— суммаи хусусии тартиби n-уми қатори (1) бошад. Маҷмӯи ҳамаи бисёраъзогиҳои намуди $p_{n-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z)$ – ро бисёраъзогии умумикардашуда меномем, ки дар ин ҷо $d_k \in \mathbb{C}$ — ихтиёри коэффисиентҳои комплексӣ мебошанд.

Леммаи 1.2.1.[10] *Бигузор $f \in B_2$ бошад. Он гоҳ*

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_2} : d_k \in \mathbb{C}\right\} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{B_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

[10]Смирнов В.И., Лебедев Н.А.Конструктивная теория функций комплексного переменного // Наука. – М.Л. 1964.

ки дар ин ҷо $a_k(f)$ — коэффисиентҳои Фурйеи функсияи f, $S_{n-1}(f,z)$ — суммаи хусусии тартиби n-уми қатори (1) буда, ба воситаи баробарии (2) муайян карда шудааст.

Ҳангоми миёнаназдиккунии функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ дар соҳаи якалоқаманди $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ регулярӣ ба воситаи қаторҳои Фурйе аз руӣ системаи функсияҳои $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ дар $\mathcal{D}$ ортогоналӣ, масъалаи ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин дар кори илмии[1] омӯхта шудааст. Қайд мекунем, ки ба сифати нобаробариҳои Ҷексон – Стечкин ифодаҳоеро мефаҳманд, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарини функсияҳо бавоситаи зерфазоҳои охирнок дар фазои нормиронидашудаи додашуда ба воситаи модули бефосилагии худи функсия ё ягон ҳосилаи он баҳо дода мешавад. Дар ҳолати муоинашаванда мо усулҳои дар корҳои[3,4,11] овардашударо истифода мебарем. Бигузор

$$T(\xi,\eta;h)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{4}$$

ки дар ин ҷо $h\in(0,1),(\xi,\eta)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ ва баробарии (4) ба маънои наздиккуни дар $B_2(\mathcal{D}\times\mathcal{D})$ фаҳмида мешавад. Дар фазои B_2 оператори

$$F_hf(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})}f(\zeta)T(z,\zeta;1-h)d\sigma$$

– ро дида мебароем, ки он оператори умумикардашудаи ғеҷиш номида мешавад.

Дар асоси корҳои[1,3,11] барои функсияи $f\in B_2$ фарқиятҳои охирноки тартиби якум ва тартиби олиро ба монанди ҳолати классикӣ чунин муайян мекунем:

$$\Delta_h^1f(z)=F_hf(z)-f(z)=(F_h-\mathbb{I})f(z),$$
$$\Delta_h^mf(z)=\Delta_h(\Delta_h^{m-1}f(z))=(F_h-\mathbb{I})^mf(z)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^kf(z),$$

ки дар ин ҷо

$$F_h^0f(z)=\mathbb{I}f(z)=f(z),\ \ F_h^kf(z)=F_h(F_h^{k-1}f(z)),$$

[11] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журнал. 2018. Т.20. №1. С.86-97.

$k=1,2,...,m;\ m\in\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — оператори воҳидӣ дар фазои B_2 мебошад.

Бузургии

$$\Omega_m(f;t)_{B_2}=\sup\Big\{\|\Delta_h^m f\|_{B_2}:0<h\le t\Big\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}|a_k(f)|^2\right\}^{1/2} \tag{5}$$

– ро модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m-ум барои функсияи $f\in B_2$ меномем.

Дар параграфи сеюм масъалаи ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии умумикардашудаи (5) дида баромада шудааст. Бавоситаи $B_2^{(r)}:=B_2^{(r)}(U)$ $(B_2^{(0)}:=B_2(U))$ синфи функсияҳои $f\in B_2$ ишора мекунем, ки барояшон $z^rf^{(r)}\in B_2$ мебошад. Исбот карда шудааст, ки

$$\Omega_m^2(z^rf^{(r)};t)_{B_2}=\sum_{k=r}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}\,\alpha_{k,r}^2\,\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Дар оянда, дар муносибатҳои умумӣ ҳангоми ҳисобкунии сарҳади саҳеҳи болоӣ аз руӣ функсияҳои $f\in B_2^{(r)}$ дар назар дошта мешавад, ки $f\notin\mathcal{P}_r$ аст.

Леммаи 1.3.2. *Барои ҳаргуна ададҳои $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(z^sf^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^rf^{(r)})_{B_2}}=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи сеюм теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 1.3.1. *Барои дилхоҳ функсияи $f\in B_2^{(r)}$ ва дилхоҳ ададҳои $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ва $t\in(0,1)$ нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин*

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\le\alpha_{n,r}^{-1}\cdot[1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2} \tag{6}$$

ҷой дорад, ки он барои ҳар як адади $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ доимии дар тарафи рости нобаробарии (6) камтар карда намешавад.

Натиҷаи 1.3.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 1.3.1 баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^rf^{(r)},t\right)_{B_2}}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m},\quad 0<t<1. \tag{7}$$

Дар ҳолати хусусӣ, дар (7) қимати $t=1/n$, $n\in\mathbb{N}$ гузошта меёбем:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{B_2}}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}=\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-m}. \qquad (8)$$

Қайд мекунем, ки теоремаи 1.3.1 – ро ба таври зерин умумӣ кунонидан мумкин аст.

Теоремаи 1.3.2. *Барои дилхоҳ функсияи $f\in B_2^{(r)}$ ва дилхоҳ ададҳои $n,m\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$ ва $t\in(0,1)$ баҳодиҳии зерин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}\leq\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot[1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}. \qquad (9)$$

Барои ҳар як $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$ – и қайдкардашуда доимии дар тарафи рости нобаробарии (9) мавҷудбуда, камтар карда намешавад.

Натиҷаи 1.3.2. *Дар асоси шартҳои теоремаи 1.3.2 барои ҳаргуна қимати $s=0,1,2,\cdots,r$, $r\in\mathbb{N}$ ва $t\in(0,1)$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}}=\frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^rf^{(r)},1/n\big)_{B_2}}=\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-m}.$$

Натиҷаи асосии параграфи сеюм теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 1.3.3. *Бигузор дилхоҳ ададҳои $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+,n\geq r$, $h\in(0,1)$ буда, q – функсияи вазнӣ дар интервали $(0,h)$ бошад. Он гоҳ барои ҳамаи ададҳои $0<p\leq\infty$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}q(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^n\big]^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Аз теоремаи 1.3.3 чунин натиҷа мебарояд.

Натиҷаи 1.3.4. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи 1.3.3 иҷро шаванд. Он гоҳ*

$$q(t):=n(1-t)^{n-1},\quad n\in\mathbb{N},\ 0<t<1$$

гузошта, барои дилхоҳ $h \in (0,1)$ баробарии

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)},t\right)_{B_2}(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h)^n\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p}$$

– ро ҳосил мекунем. Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $h = 1/n,\ n \in \mathbb{N}, 0 < p \le \infty$ будан

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)},t\right)_{B_2}(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1-\dfrac{1}{e}\right)^{m+1/p}}$$

мешавад. Дар навбати худ барои $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$ аз баробарии охирин ҳосил мекунем:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}\left(z^r f^{(r)},t\right)_{B_2}(1-t)^{n-1}dt\right)^{m}} = 2^m\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

Дар параграфи чоруми боби якум нобаробариҳои аниқ исбот карда шудаанд, ки онҳо вобастагии бузургии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}(f)_{B_2}$ функсияҳои f, ки ба синфи $B_2^{(r)}$ тааллуқ доранд, бо $\mathscr{K}$-функсионал Петре нишон медиҳанд. $\mathscr{K}$-функсионале, ки аз рӯи фазоҳои B_2 ва $B_2^{(m)}$ сохта шудааст, муайян мекунем:

$$\mathscr{K}_m(f,t^m)_{B_2} := \mathscr{K}\left(f,t^m;B_2;B_2^{(m)}\right) =$$
$$= \inf\left\{\|f-g\|_2 + t^m\|z^m g^{(m)}\|_2 : g \in B_2^{(m)}\right\}. \qquad (10)$$

ки дар ин ҷо $m \in \mathbb{N},\ 0 < t \le 1$ мебошад. Ҳисоб намудани бузургии характеристикаи экстремалӣ, ки ба тарафи чапи (7) шабоҳат дошта, ба ҷои модули бефосилагии тартиби m-ум (5) $\mathscr{K}$-функсионали (10) – ро дар бар мегирад, масъалаи муҳим мебошад. Яке аз масъалаҳои асосӣ ин исбот намудани эквивалентнокии $\mathscr{K}$-функсионал ва дилхоҳ модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m-ум мебошад. Дар ҳолати мо эквивалентнокии бузургиҳои нишондодашуда аз муқоисакунии натиҷаҳои теоремаи 1.3.1 ва натиҷаи 1.4.1 -и дар поён оварда шудаанд, бармеояд. Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.4.1. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – дилхоҳ ададҳои ихтиёрӣ, ки барояшон $n \geq r + m$ мебошад. Он гоҳ муносибати зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} = 1.$$

Натиҷаи 1.4.1. *Дар асоси шартҳои теоремаи 1.4.1, барои $r = 0$ ва дилхоҳ ададҳои $m, n \in \mathbb{N}$, баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(f; \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} = 1. \tag{11}$$

Қайд кардан зарур аст, ки аз муқоисакунии натиҷаи теоремаҳои 1.3.1 ва 1.4.1 ва натиҷаи 1.4.1, муносибати зеринро ҳосил мекунем:

$$\mathscr{K}\left(z^r f^{(r)}, t^m\right)_{B_2} \sim \Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2},$$

ки дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, 0 < t < 1$ мебошанд. Аз нобаробарии (11) дар синфи B_2 нобаробарии аниқи намуди Ҷексон – Стечкинро ҳосил мекунем, ки дар он ба ҷои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m-ум Ω_m аз $\mathscr{K}$-функсионали (10) истифода бурда шудааст. Бо модули бефосилагии Ω_m дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои ҳолати $r = 0$ аз (8) фақат баробарии асимптотикии

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m(f; 1/n)_{B_2}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

бармеояд.

Дар параграфи панҷуми боби якум қимати аниқи n-қутрҳои баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст, ки бавоситаи модули бефосилагӣ муайян карда мешаванд. Баъзе таърифҳо ва ишораҳоро меорем, ки дар оянда аз онҳо истифода хоҳем кард.

Бигузор S — курраи воҳидӣ дар фазои B_2; $\Lambda_n \subset B_2$ — зерфазои n-ченака; $\Lambda^n \subset B_2$ — зерфазои ҳамченакаи n; $\mathscr{L} : B_2 \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосила; $\mathscr{L}^\perp : B_2 \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосилаи инъикоскунӣ; $\mathfrak{M}$ —

зермаҷмӯи барҷастаи марказӣ-симметрӣ аз B_2 бошанд. Бузургиҳои

$$b_n\big(\mathfrak{M},B_2\big)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset B_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M},B_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_2:g\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset B_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{M},B_2\big)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_2:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathscr{L}B_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset B_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{M},B_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2:f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{M},B_2\big)=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_2:f\in\mathfrak{M}\Big\}:\mathscr{L}^{\perp}B_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset B_2\Big\}$$

мувофиқан, *n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ, проексионии* зермаҷмӯи $\mathfrak{M}$ дар фазои B_2 номида мешаванд. Таърифи синфи функсияҳоеро меорем, ки аз натиҷаҳои теоремаҳои 1.3.1 – 1.4.1, ки дар боло оварда шудаанд, бармеояд. Бигузор $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ва $h\in(0,1)$ бошанд. Ба воситаи $W_m^{(r)}B_2(\Phi):=W^{(r)}B_2(\Omega_m;\Phi)$ — синфи функсияҳои $f\in B_2^{(r)}$ ишора мекунем, ки модули бефосилагии умумикардашудаи (5) шарти

$$\Omega_m\big(z^rf^{(r)},h\big)_{B_2}\le\Phi(h)$$

– ро қаноат мекунонад, ки дар ин ҷо Φ — функсияи дар нимтири мусбати $\mathbb{R}:=[0,+\infty)$ ғайриманфӣ, монотонӣ афзуншаванда буда, барояш $\Phi(0)=0$ мебошад. Бигузор $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $h\in(0,1)$, $0<p\le\infty$; $g(t)$ — функсияи вазнӣ дар сегменти $[0,h]$ бошад. Бо символи $W_{2,m,p}^{(r)}(h,q):=W_p^{(r)}B_2(\Omega_m,h;q)$ — синфи функсияҳои $f\in B_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки ҳосилаи тартиби r-умашон $z^rf^{(r)}(z)$ шарти

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p\big(z^rf^{(r)};t\big)_{B_2}q(t)dt\le1$$

– ро қаноат мекунонад. Қайд мекунем, ки функсияи дар $\mathbb{R}_+$ камнашавандаи Ψ k-мажоранта номида мешавад, агар функсияи $t^{-k}\Psi(t)$ дар $\mathbb{R}_+$ афзуннашаванда буда, $\Psi(0)=0$ аст, $\Psi(t)\to0$ ҳангоми $t\to0$. Ҳангоми $k=1$ будан функсияи Ψ – ро мажоранта меноманд.

Бо символи $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)$ $(r\in\mathbb{Z}_+,m\in\mathbb{N})$ синфи функсияҳое, ки аз элементҳои $f\in B_2^{(r)}$ иборатанд ва ҳосилаҳои $z^rf^{(r)}(z)$ шарти

$$\mathscr{K}_m(z^rf^{(r)},t^m)_2\le\Psi(t^m),\quad 0<t<1$$

– ро қаноат мекунанд, ишора мекунем. Дар таърифи синфи воридшуда функсияи Ψ мажоранта буда, $B_2^{(0)} \equiv B_2$, $W_2^{(0)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big) = W_2(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Барои зермаҷмӯи ихтиёрии $\mathfrak{M} \subset B_2$ баробарии зеринро менависем:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{B_2} := \sup\Big\{E_{n-1}(f)_{B_2} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Теоремаи 1.5.1. *Барои дилхоҳ ададҳои $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $h \in (0,1)$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}(W_m^{(r)}B_2(\Phi))_{B_2} = \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h),$$

ки дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$ мебошад.

Натиҷаи 1.5.1. *Дар асоси шартҳои теоремаи 1.5.1 ҳангоми $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ баробарии асимптотикии зерин ҷой дорад:*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi)\big)_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \sim \big(1-e^{-1}\big)^{-m}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Дар як қатор корҳо оид ба назарияи наздиккунӣ сарҳадҳои болоӣ барои модулҳои коэффисиентҳои Фурйе барои системаҳои муайяни полиномҳо ортогоналӣ бо вазн додашуда дар синфҳои муайян ёфта шудаанд. Барои синфи функсияҳои дар ин кор воридшуда ҳалли масъалаи мазкур низ барои тадқиқот муфид мебошад.

Теоремаи 1.5.2. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $h \in (0,1)$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup\Big\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\Big\} = \frac{\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}}{\alpha_{n,r}\sqrt{n+1}}\Phi(h).$$

Яке аз натиҷаҳои асосии парагарфи панҷум теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 1.5.3. *Бигузор $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0,1)$, $q(t)$ — функсияи вазнӣ дар сегменти $[0,h]$ бошад. Он гоҳ барои дилхоҳ $n \in \mathbb{N}$ баробариҳои*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}B_2; B_2) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}B_2; B_2\big) = \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}$$

ҷой доранд, ки дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Теоремаи 1.5.4. *Бигузор Ψ — мажорантае, ки синфи $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)$ – ро муайян мекунад, ки дар ин ҷо $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{R}_+$ мебошанд. Он гоҳ барои дилхоҳ адади натуралии $n\in\mathbb{N}$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi),B_2\right)=E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\right)_{B_2}=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Ба сифати натиҷа аз теоремаи 1.5.4 чунин натиҷа оид ба қимати аниқи модули коэффисиентҳои Фурйе дар синфи функсияҳои дидабаромадашавандаи $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$ ҳосил мекунем.

Натиҷаи 1.5.3. *Бигузор $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N}$ бошанд. Он гоҳ барои ҳаргуна $n\in\mathbb{N}$, баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup\left\{\big|c_n(f)\big|:\ f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\right\}=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Дар теоремаи 1.5.4, дар ҳолати хусусӣ, қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\big)_{B_2}$ синфи функсияҳои $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$ бавоситаи бисёраъзогиҳои комплексӣ аз зерфазои $\mathcal{P}_{n-1}$ ёфта шудааст. Азбаски барои функсияҳои $f\in B_2^{(r)}$, $r\in\mathbb{N}$ ҳосилаҳои пайдарҳами он $z^\nu f^{(\nu)}(z)$, $1\le\nu\le r$ инчунин ба синфи B_2 тааллуқ доранд, он гоҳ тадқиқи рафтори бузургии $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ дар синфи $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$ ниҳоят муҳим мебошад. Дар ин ҳолат теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.5.5. *Бигузор $r,\nu\in\mathbb{N}$ $(1\le\nu\le r)$ бошад. Он гоҳ барои ихтиёри функсияи дар $B_2^{(r)}$ нобаробарии аниқи намуди Колмогоров*

$$E_{n-1}^2\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}\le\frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,r})^{\nu/r}}\Big(E_{n-1}(f)\Big)_{B_2}^{1-\nu/r}\left(E_{n-1}\big(z^rf^{(r)}\big)\right)_{B_2}^{\nu/r}$$

ҷой дорад, ки барои функсияи $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)}$ ба баробарӣ мубаддал мешавад.

Дар теоремаи ниҳоии ин параграф сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини муштараки худи функсия ва ҳосилаҳои парйдарҳами он $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ барои синфи функсияҳои $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$ ҳисоб карда шудааст.

Теоремаи 1.5.6. *Бигузор* Ψ — *мажорантаи ихтиёрии синфи функсияҳои* $W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)$ – *ро муайянкунанда бошад ва* $m\in\mathbb{N},\ r=2,3,\ldots$. *Он гоҳ барои ҳаргуна адади* $n\geq m+r$ *ва дилхоҳ адади натуралии* ν $(1\leq\nu\leq r-1)$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup\left\{E_{n-1}(z^{\nu}f^{(\nu)})_{B_2}:f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)\right\}=\frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Дар боби дуввуми рисолаи диссертатсионӣ як қатор масъалаҳои экстремалии ёфтани усулҳои наздиккунии беҳтарини хаттӣ ва татбиқи онҳо дар масъалаҳои ҳисоб кардани қиматхои аниқи n-қутрҳои гелфандӣ ва хаттӣ ҳал карда шудаанд.

Масъалаҳои ёфтани усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ дар фазои муқарраррии Бергман B_p, $1\leq p\leq\infty$ (бе вазн) дар мавридҳои гуногун аз тарафи С.Б.Вакарчук[6], С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[2], М.Ш.Шабозов ва М.Р.Лангаршоев[12,13] ва дигарон дида баромада шудааст.

Дар параграфи якум маълумотҳои умумӣ оид ба фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma}$, инчунин баъзе ишораҳо ва таърифҳо, ки дар оянда истифода бурда мешаванд, оварда шудааст. Ба воситаи $L_p:=L_p(U),\ 1\leq p<\infty$ фазои банахии функсияҳои тағйирёбандааш комплексии f дар U – ро ишора мекунем, ки нормаи охирноки

$$\|f\|_{L_p}=\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{U}|f(z)|^p dxdy\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho|f(\rho e^{it})|^p dtd\rho\right)^{1/p}$$

– ро доранд, ки дар ин ҷо интеграл дар маънои Лебег фаҳмида мешавад.

Бигузор $\gamma(z)$ – ихтиёри функсияи ғайриманфии ченшаванда ва ба нул эквивалентнабударо ишора мекунем, ки дар маҷмӯи U суммиронидашаванда мебошад. Ба воситаи $L_{p,\gamma}\overset{def}{=}L_p(U,\gamma)$, $1\leq p<\infty$ маҷмӯи функсияҳои f-и тағйирёбандааш комплексии дар соҳаи U ишора мекунем, ки барояшон

$$\gamma^{1/p}f\in L_p(U),\ \|f\|_{L_{p,\gamma}}=\|\gamma^{1/p}f\|_{L_p}$$

[12]Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. 2013. Т.450. №5. С.518-521.

[13]Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сибирский мат. журнал. 2019. Т.60. №6. С.1414-1423.

мебошад.

Таърифи 2.1.2.[9] *Бигузор D – соҳаи дар ҳамвории тағйирёбандааш комплексӣ маҳдуд бошад, $f \in A(D)$, $\gamma(|z|)$ – дилхоҳ функсияи вазнии мусбати дар соҳаи D суммиронидашаванда бошад, ки барояш*

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|)|f(z)|^p d\sigma < \infty, \quad 1 \le p \le \infty \tag{12}$$

мебошад, дар ин ҷо $d\sigma$ — элементи масоҳат буда, интеграл ба маънои Лебег фаҳмида мешавад. Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои аналитикии $f(z) \in D$, ки барояшон шарти (12) иҷро мегардад, фазои банахиро ташкил медиҳад, ки он фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma}(D)$, $1 \le p \le \infty$ номида мешавад.

Фазои Бергмани $B_{p,\gamma}$ функсияҳои $f(z)$ дар давраи воҳиди $|z| < R$ аналитикиро дида мебароем, ки нормаи охирноки

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \cdot |f(\rho e^{it})|^p d\rho dt \right)^{1/p} < \infty$$

– ро доранд. Дар ин ҷо $\gamma(|z|)$ — функсияи вазнии мусбати дар доираи $|z| < R$ суммиронидашаванда буда, $d\sigma$ — элементи масоҳат ва интеграл ба маънои Лебег фаҳмида мешавад. Дар кори С.Б.Вакарчук ва М.Ш.Шабозов[2] функсияи вазнии конкретии γ_* дида баромада шудааст, ки вай имконият медиҳад фазои $B_{p,\gamma_*}(U_R)$ – ро ҳосил кунад, ки назар ба функсияи дар U_R аналитикӣ маҳдудиятҳои камтар дошта ба фазои $B_{p,R}$ тааллуқ доранд.

Дар ин параграф таърифи модулҳои бефосилагӣ дар фазоҳои Харди $H_{p,R}(1 \le p \le \infty)$ ва фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma}(1 \le p \le \infty)$ оварда шуда, баъзе мисолҳо оид ба ҳисобкунии конкретии модулҳои бефосилагӣ нишон дода шудаанд.

Бузургии

$$\omega_m(f,t)_{B_{p,\gamma}} = \sup\left\{\|\Delta_m(f,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{p,\gamma}} : |h| \le t\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f;\rho,u,h)|^p d\rho du \right)^{1/p} : |h| \le t \right\},$$

ки дар ин ҷо

$$\Delta_m(f;\rho,u,h)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

— фарқияти охирноки тартиби m-уми функсияи $f\left(\rho e^{it}\right)$ аз рӯи аргументи t бо қадами h мебошад, модули интегралии тартиби m-ум номида мешавад.

Дар параграфи дуюм масъалаҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо дар фазои Харди H_p, $1\le p<\infty$ ҳал карда шуда, қиматҳои қутрҳои баъзе синфҳои функсияҳо, дар фазоҳои банахии Харди H_p, Бергман $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma}$, $1\le p<\infty$ қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни синфи $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $r\in\mathbb{N}$ функсияҳои дар доираи радиусаш $R\ge 1$ ҳисоб карда шудаанд, ки модули бефосилагии миёнакардашудаи ҳосилаи тартиби r-уми $f^{(r)}\in H_{p,R}$ онҳо бо мажорантаи Φ маҳдуданд. Бигузор $\Phi(t)$, $t\ge 0$ — дилхоҳ функсияи бефосилаи афзуншаванда бошад ва $\Phi(0)=0$ аст. Ба сифати мажоранта функсияи $\Phi(t)$ интихоб намуда, барои ихтиёри $h\in(0,\pi/2]$ синфи функсияҳои

$$W_{p,R}^{(r)}(\Phi)\overset{def}{=}\left\{f\in A(U_R):\ \frac{1}{h}\int_0^h\omega_2(f^{(r)};2t)_{H_{p,R}}dt\le\Phi(h)\right\}$$

– ро дида мебароем. Дар ин ҷо $r\in\mathbb{N},\ 1\le p\le\infty,\ R\ge 1$. Ҳангоми $R=1$ будан $W_{p,1}^{(r)}(\Phi)=W_p^{(r)}(\Phi)$ мегузорем.

Бигузор X — дилхоҳ фазои банахӣ бошад; S — курраи воҳидӣ дар X бошад; $\mathfrak{M}$ — дилхоҳ зермаҷмӯи марказӣ-симметрӣ дар X бошад; $\Lambda_n\subset X$ — зерфазои n-ченакаи хаттӣ; $\Lambda^n\subset X$ — зерфазои ҳамченакаи n бошад; $L: X\to\Lambda_n$ — оператори хаттии бефосила буда X – ро ба Λ_n инъикос мекунад. Наздиккунии маҷмӯи қайдкардашудаи $\mathfrak{M}\subset X$ – ро ба воситаи зерфазои қайдкардашудаи Λ_n – и фазои X ба воситаи бузургии

$$E(\mathfrak{M},\Lambda_n)_X\overset{def}{=}\sup\{E(f,\Lambda_n)_X: f\in\mathfrak{M}\}:=\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|_X:\ \varphi\in\Lambda_n\}:\ f\in\mathfrak{M}\}$$

ифода мекунем. Бузургии

$$E(\mathfrak{M},\Lambda_n)_X\overset{def}{=}\inf\left\{\sup\left\{\|f-L(f)\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\ LX\subset\Lambda_n\right\}\qquad(13)$$

наздиккунии беҳтарини хаттии маҷмӯи $\mathfrak{M}$ аз рӯи элементҳои зерфазои $\Lambda_n\in X$ – ро ифода мекунад. Оператори хаттии $L^*, L^*X\subset\Lambda_n$, агар он мавҷуд бошад ва дар (13) сарҳади аниқи болоиро доро бошад, яъне

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \sup\Big\{\|f - L^*(f)\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

барои $\mathfrak{M}$ усули наздиккунии беҳтарин меноманд. Бигузор

$$(1-\cos x)_* = \{1-\cos x,\ \text{агар}\ 0 \le x \le \pi;\ 2,\ \text{агар}\ x \ge \pi\}$$

бошад.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор $r, n \in \mathbb{N}$, $n > r$ ва мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна $h \in (0, \pi/2]$ шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/2(n-r)\right)} \ge \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1-\cos x)_* dx \tag{14}$$

– ро қаноат мекунонад, он гоҳ барои ҳаргуна $1 \le p \le \infty$ баробарии

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) = d_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) =$$

$$= E\left(W_p^{(r)}(\Phi); \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_p} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

дар ин ҷо

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \quad n \ge r,\ n, r \in \mathbb{N}$$

ҷой дорад. Маҷмӯи мажорантҳои $\{\Phi\}$, ки шарти (14) – ро қаноат мекунонад, холӣ намебошад.

Дар параграфи сеюми боби дуюм усулҳои наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $R \ge 1$ дар фазоҳои $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma}$ ёфта шуда, натиҷаҳои теоремаи 2.2.1 барои синфи $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ барои як қатор n-қутрҳо васеъ гардонида шудааст. Яке аз натиҷаҳои асосии ин параграфро меорем.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор $R \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ ва мажорантаи Φ шарти (14) – ро қаноат кунонад. Он гоҳ барои ҳаргуна адади натуралии $n > r$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = d_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) =$$

$$= d^n \left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = d^n \left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = \delta_n \left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}_{p,R}; \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} = E\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup\left\{\|f - L_*(f)\|_{L_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}.$$

Дар ин ҳолат:

1) барои $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ *ва* $\delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ *зерфазои*

$$\Lambda^*_n \stackrel{def}{=} span\Bigg\{\{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \Bigg\{\Bigg[R^{2(n-k)} +$$

$$+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]|z|^{2(n-k)}\Bigg] z^k\Bigg\}_{k=r}^{n-1}\Bigg\},$$

ки дар ин ҷо

$$\sigma_{k,r} \stackrel{def}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]} (1 - \sin(n-r)x)\cos(k-r)x dx, \quad k \geq r$$

аст, барои синфи функсияи $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ *дар фазои* $L_{p,\gamma}$ *экстремалӣ мебошад;*

2) оператори хатти бефосилаи

$$L^*_{n-1}(f,z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right\} c_k(f)z^k$$

барои синфи $W^{(r)}_{p,R}$ *усули наздиккунии беҳтарин дар фазои* $L_{p,\gamma}$ *мебошад;*

3) зерфазои $\Lambda^n_* \stackrel{def}{=} \{f \in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1\}$ *– барои* n*-қутри* $d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$ *экстремалӣ мебошад;*

4) барои n*-қутри* $b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$ *зерфазои* $\overline{\Lambda}_{n+1} \stackrel{def}{=} span\{1, z, \ldots, z^n\}$ *экстремалӣ мебошад.*

Параграфи охирини боби дуюм, ба ҳисобкунии қимати аниқи сарҳади болоии модули коэффисиентҳои Тейлор барои синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ бахшида шудааст.

Теоремаи 2.4.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.3.1 баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

ки дар ин ҷо $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ R \geq 1,\ 1 \leq p < \infty$ *мебошанд.*

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ инҳоянд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии тартиби олӣ ёфта шудаанд;
- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бавоситаи модули бефосилагии махсуси тартиби m-ум дар фазои Бергман B_2 дода шудаанд, ҳисоб карда шудааст;
- усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ барои синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $p \geq 1$ дар фазоҳои вазндори $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$ ёфта шудааст;
- қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо бавоситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дар фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$ ҳисоб карда шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ барои функсияи дутағйирёбандаи комплексӣ, ки дар бидавра аналитикӣ мебошад ва ёфтани қимати аниқи квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ аз рӯи нормаи ҳосилаи омехта маҳдуд дар фазои вазндори дученакаи Бергман истифода бурдан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия нашр шудаанд:

[1-М] Хуромонов Х.М. О поперечниках некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2015. – Вып.4. – С.91-106.

[2-М] Хуромонов Х.М. Поперечники некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // Труды международной летней математической Школы – Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. – 2016. – С.266-269.

[3-М] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2017. – №1(166). – С.7-18.

[4-М] Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // Известия вузов. Математика. – 2020. – №2. – С.74-92.

Дар дигар нашрияҳо:

[5-М] Хуромонов Х.М. О значениях верхних граней модулей коэффициентов Тейлора для некоторых классов функций в пространстве Харди [Текст]/ Х.М.Хуромонов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорского-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной „25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан" (Душанбе, 2016 г.). – С.29-30.

[6-М] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана [Текст] / Х.М.Хуромонов // *„Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами* *и краевые задачи теории функции*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ Михайлова Леонида Григорьевича. (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) – С.165-168.

[7-М] Хуромонов Х.М. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного рядами Фурье [Текст] / М.Ш.Шабозов, Х.М.Хуромонов // „*Математический анализ и его приложения*" – Материалы республиканской научной конференции, посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.277-282.

[8-М] Хуромонов Х.М. Приближение в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной системе [Текст] / Х.М.Хуромонов // „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.300-304.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Хуромонов Хуромон Мамадамонович дар мавзӯи «Наздиккунии миёнаквадратии функсияҳои аналитикӣ ба воситаи суммаҳои Фурйе дар фазои Бергман ва баъзе масъалаҳои экстремалӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *функсияи аналитикӣ, модули бефосилагии умумикардашуда, наздиккунии беҳтарини хаттӣ, фазои вазндори Бергман, сарҳади болоӣ, бисёраъзогии алгебравии комплексӣ, $\mathscr{K}$-функсионали Петре, қутрҳо.*

Мақсади кор. Мақсади тадқиқот аз ҳалли масъалаҳои экстремалии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини синфи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ ба воситаи суммаҳои охирноки Фурйе дар фазои Бергман ва ёфтани усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ ва татбиқи он дар масъалаҳои ҳисобкунии қимати аниқи n-қутрҳои гуногун иборат мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Дар рисолаи диссертатсионӣ усули Н.П.Корнейчук, яъне баҳодиҳии сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо бавоситаи зерфазои ченакаш қайдкардашуда ва усули татбиқкардашудаи В.М.Тихомиров аз поён баҳодиҳии қутрҳо дар ихтиёри фазои нормиронидашуда истифода бурда шудааст.

Навигариҳои илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия оврдашуда нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин ҳосил карда шудаанд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин барои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ;
- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ, ки бавоситаи модули бефосилагии махсуси тартиби m-ум дар фазои Бергман B_2 дода шудаанд;
- усули наздиккунии беҳтарини хаттӣ барои синфи функсияҳои $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $p \geq 1$ дар фазоҳои вазндори $B_{p,\gamma}$ ва $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дар фазои вазндори Бергман $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$ дода шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро метавонанд дар ҳолати функсияи дутағйирёбандаи комплексӣ, ки дар бидавра аналитикӣ мебошад ва ёфтани қимати аниқи квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ аз рӯи нормаи ҳосилаи омехтаи маҳдуд дар фазои вазндори дученакаи Бергман истифода бурда шаванд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Хуромонова Хуромона Мамадамоновича на тему «Среднеквадратическое приближение аналитических функций суммами Фурье в пространстве Бергмана и некоторые экстремальные задачи», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *аналитическая функция, обобщённый модуль непрерывности, наилучшее линейное приближение, весовое пространство Бергмана, верхняя грань, комплексный алгебраический полином, $\mathscr{K}$-функционал Петре, поперечники.*

Цель работы. Целью исследования является решение экстремальных задач теории среднеквадратического наилучшего приближении функций комплексного переменного конечными суммами Фурье в пространстве Бергмана и отыскания наилучших линейных методов приближения и их приложения в задачах отыскания точных значений различных n-поперечников.

Методы исследования. В работе используется метод Н.П.Корнейчука оценки верхних граней наилучших приближений классов функций подпространством фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников в любом нормированном пространстве.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- точные константы неравенства Джексона – Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- наилучшие линейные методы приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}, p \geq 1$;
- точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана$B_{p,\gamma}, p \geq 1$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно использовать в случае функций двух комплексных переменных аналитических в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций комплексных переменных с ограниченными по норме смешанных производных в двумерном весовом пространстве Бергмана.

SUMMARY

of the dissertation Khuromonov Khuromon Mamadamonovich on the topic «The average approximation of analytic functions by Fourier sums in the Bergman space and some extremal problems» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex, and functional analysis

Key words: *analytic function, generalized modulus of continuity, best linear approximation, Bergman weighted space, upper bound, complex algebraic polynomial, $\mathscr{K}$-functional Petre, widths.*

Work objectives. The work aims to solve extremal problems of the theory of the mean-square best approximation of functions of a complex and variable finite sums of Fourier in Bergman space and identifying the best linear approximation methods and their application in the problems of finding the exact values of various n-widths.

Research methods. In this work, the method of N.P.Korneychuk to estimate the upper bound of the best approximations of classes of functions by a subspace of fixed dimension and the estimation from the bottom of the diameters in any normalized space developed by V.M.Tikhomirov, and all the results obtained in the dissertation work are new.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following results were obtained:

- Exact constants in inequalities of Jackson – Stechkin for a generalized modulus of continuity of the highest order;
- Exact upper bounds of mean-square approximations of certain analytic classes in the unit circle of functions defined by special m-order continuity modules in the Bergman space B_2;
- Best linear approximation methods for classes $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ in weight spaces $B_{p,\gamma}$ and $L_{p,\gamma},\ p \geq 1$;
- Exact values of various n-diameters of classes of functions given by the values of higher-order continuity modules of r-th derivatives averaged with weight in the weighted Bergman space $B_{p,\gamma},\ p \geq 1$.

Theoretical and practical value. The work holds both theoretical and practical character. The results of the dissertation work can be used in the case of functions of two complex variables analytical in a bicircular and finding the exact values of Kolmogorov and linear quasi cross-section of certain classes of functions of complex variables with a bounded in norm and mixed derivatives in a two-dimensional Bergman weight space.