РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.968.220

На правах рукописи

ХУШВАХТОВ МУХИДИН БУРАКШОЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01-Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе – 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	**Раджабова Лутфия Нусратовна,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры “Высшая математика” Таджикского технического университета им. академика М.Осими
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Исхоков Сулаймон Абунасрович**, доктор физико-математических наук, профессор, член – корреспондент НАНТ, заместитель директора по научной работе Института математики НАНТ имени А. Джураева
	Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель исполнительного директора Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Российско-Таджикский (Славянский) Университет

Защита состоится *6 января 2021г в 10:00 часов* на заседании диссертационного совета 6D.КОА–012 при Таджикском национальном университете, на механико-математический факультет по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни – Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте: http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «___» _________________2020г.

Ученый секретарь диссертационного совета 6D.КОА–012, доктор физико-математических наук, доцент **Одинаев Р.Н.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и необходимость проведения исследований по теме диссертации. Основным объектом исследования данной диссертационной работы являются двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами. К изучению интегральных уравнений приводят задачи прикладного характера теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, механики, теоретической физики, теории упругости, гидродинамики, теория поля и других разделах математической физики.

Изучению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с непрерывными ядрами или из пространства L_2 посвящены много исследований.

В научных трудах Михайлова Л.Г.,[1] Бильмана Б.М.[2] изучены интегральные уравнения с однородным ядром -1 степени. Монографии Ф.Д. Гахова[3], Н.И. Мусхелишвили[4] посвящены исследованию одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши вида:

$$A(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathcal{K}(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, $\Gamma -$ некоторый замкнутый или разомкнутый контур в комплексной плоскости $Z, A(t), \mathcal{K}(x,t), f(t) -$ заданные функции, $\varphi(t) -$ искомая функция.

Монография Михлина С.Г.[5] посвящена изучению многомерных сингулярных интегральных уравнений, монография Джураева А.[6] и научные труды Джангибекова Г.,[7] также работы их учеников посвящены исследованию двумерных сингулярных интегральных уравнений в конечной области. Монография И.Н. Векуа[8] посвящена изучению обобщенных аналитических функций и связанных с ними двумерных сингулярных интегральных уравнений.

---

[1] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1// Душанбе, Дониш, 1966, 49с

[2] Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1. // В. сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами» //Изд-во «Дониш», Душанбе, 1969, с. 19-40.

[3] Гахов Ф.Д. Краевые задачи// Изд-во «Наука», М.: 1977, с. 640.

[4] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения// Наука М. 1968

[5] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения// М.: Физматгиз, 1962, с. 254.

[6] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений //М.: Наука, 1987, 415 с.

[7] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах// Матем. Заметки,1989, т.46, №46, С.91-93.

[8] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции // М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

В работах Н. Раджабова[9] изучены одномерные интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированным сингулярным или сверх-сингулярными ядром вида:

$$\varphi(x) + \int_{a}^{x} \frac{\mathcal{K}(x,t)}{|t|^{\alpha}} \varphi(t)\, dt = f(x),$$

где $\alpha \geq 1$. Согласно теории интегральных уравнений типа Вольтерра, если в интегральном уравнении второго рода ядро является непрерывной функцией или $\mathcal{K}(x,t) \in L_2$, такое уравнение имеет единственное решение. В монографиях Н. Раджабова[10] и Н. Раджабова., Л.Н. Раджабовой[11] изучены одномерные, двумерные и некоторые случаи многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными или сверхсингулярными точками, линиями или областями.

Доказано, что решения одномерных интегральных уравнений с фиксированными граничными или внутренними особыми точками могут иметь произвольные постоянные, соответственно решение двумерных интегральных уравнений с фиксированными граничными или внутренними особыми линиями содержат произвольные функции одной переменной. Поэтому двумерные интегральные уравнения могут иметь бесконечное число линейно – независимых решений или единственное решение.

Исследованию двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра для неограниченной области посвящена работа Л.Н. Раджабовой., Н.Раджабова.[12]

Степень изученности научной проблемы. Изложенные выше результаты относятся в основном к интегральным уравнениям типа Вольтерра с граничными сингулярными или сверхсингулярными точками, линиями или областями, а также к двумерным интегральным уравнениям типа Вольтерра с особыми линиями. Отметим, что одним из важных разделов теории интегральных уравнений является раздел двумерных интегральных уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе. Получение многообразия решений и разрешимость граничных задач для таких уравнений связанны с некоторыми

[9] Раджабов Н. Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения // Душанбе,2007, 221с.

[10] Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity kernels and their application// Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing; 2011, 282p.

[11] Раджабов Н. Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложении // Germany; LAPLAMBERT Academic Publishing 2011, 502p.

[12] Раджабова Л.Н., Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте// Доклады Академии Наук Республики Таджикистан – 2014.– Т. 57. №6. – С. 443-451.

трудностями принципиального характера, когда особая точка или линия находятся на границе области. В связи с вышеуказанным рассматриваемые в настоящей диссертации вопросы являются актуальными.

Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют результаты трудов отечественных и зарубежных ученых. В работе используются основные методы теории интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. При этом основополагающие значения имеют Послания Президента Республики Таджикистан, Лидера нации, уважаемого Эмомали Рахмона в Маджлиси Оли по вопросам изучения естественных, точных и математических наук.

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в дальнейшем развитии теории двумерных и многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе.

Объект исследования. Основными объектами исследования являются:

- модельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе,
- немодельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе.

Предмет исследования. Модельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линиями, сильно-особой и слабо-особой линиями, также немодельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой, сильно-особой и слабо-особой линиями на полосе.

Задачи исследования:

- получение представлений многообразия решений для модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе;
- получение представлений многообразия решений для немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра, с особыми линиями на полосе;
- постановка и исследование граничных задач, в случае, когда общее решение модельного двумерного интегрального уравнения содержит произвольные функции.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, метод получения интегральных представлений. В работе также используется метод решения интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированной сингулярной точкой, также широко используются методы, разработанные в работах Н. Раджабова и Л. Н. Раджабовой.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020гг. по теме «Некоторые классы особых интегральных уравнений типа Вольтерра для неограниченных областей».

Достоверность диссертационных результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы интегральных уравнений.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено многообразие решений модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, также могут быть использованы в различных прикладных вопросах.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о получении представлений многообразия решений для модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны и не связаны между собой;

- теоремы о получении представлений многообразия решений для немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе в случае, когда функции, присутствующие в ядрах связаны и не связаны между собой;
- теоремы о разрешимости граничных задач в случае, когда общее решение модельных двумерных интегральных уравнений содержат произвольные функции.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функции ТНУ под руководством д.ф.-м.н., академика АН РТ Раджабова Н.Р. (Душанбе, 2016-2020гг.);
- международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата «Современные проблемы математики и их приложения», (Душанбе, 25-26 сентября 2018г.);
- республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «Годом развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021гг.) и «400-летию Миробида Сайидо Насафи» (Душанбе, 20-27 апреля 2019г.);
- ежегодных Апрельских научно-теоретических конференциях профессорского- преподавательского состава Таджикского национального университета (2016-2019гг.);
- республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова «Математический анализ и его приложения», Душанбе, 10-11 июня 2019г;
- международной научной конференции, посвящённой 70-летию д.ф.-м.н., профессора Джангибекова Гулходжа «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Душанбе, 30-31 января 2020г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 13 печатных работах автора, список которых приведён в конце автореферата. Из них 6 статей входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан, две статьи в других изданиях, остальные в трудах международных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, списка литературы, состоящего из 65 наименований. Общий объём диссертации –95 страниц машинописного текста. Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем, следствий и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадают с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, следствий или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы рассматриваемой диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, а также приводятся основные результаты исследования.

В первом параграфе первой главы в области $\mathcal{D} = \{(x, y): 0 \leq a < x < \infty,\ 0 \leq b < y < b_0\}$ с граничными линиями $\Gamma_1 = \{y = b, 0 \leq a < x < \infty\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, 0 \leq b < y < b_0\}$ исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией вида:

$$u(x,y) + \lambda \int_x^\infty \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt + \mu \int_b^y \frac{u(x,s)}{s-b} ds + \delta \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b} ds =$$

$$= f(x,y), \qquad (1)$$

где λ, μ, δ — заданные постоянные числа, $0 < \alpha < 1$, $f(x,y)$ — заданная функция, $u(x,y)$ —искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_1}\right], \zeta_1 > 1 - \alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0.$$

В случае, когда в интегральном уравнении (1) $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, для уравнения (1) справедливо утверждение:

Теорема 1.1.1. *Пусть в уравнении (1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $f(x,y) \epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_2}\right], \zeta_2 > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{2}$$

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_1}], \eta_1 > \mu, y \to b.$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо. Общее решение неоднородного интегрального уравнения содержит четыре произвольные функции одного переменного и выражается равенством:*

$$u(x,y) = (y-b)^{-\mu}\Phi(x) + e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\Psi(y) + \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)] \equiv$$

$$\equiv \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x), \Psi(y), \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right], \tag{3}$$

где

$$\Phi(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1(x) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\Psi(y) = \psi_1(y) + \psi_2(y) - \mu\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{\psi_2(s)}{s-b}ds,$$

$$\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)] = f(x,y) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} -$$

$$-\mu\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b}ds + \lambda\mu\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(t,s)}{s-b}ds$$

и

$$\omega_a^\alpha(x) = \frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}.$$

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ − *произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2, *которые при* $x \to \infty$, $y \to b$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул*

$$\varphi_1(x) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_3}\right], \zeta_3 > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{4}$$

$$\varphi_2(x) = o\left[x^{-\zeta_4}\right], \zeta_4 > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{5}$$

$$\psi_1(y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0, y \to b,$$

$$\psi_2(y) = o[(y-b)^{\eta_2}], \eta_2 > \mu - 1, y \to b.$$

Следствие 1.1.1. *При выполнении условий теоремы 1.1.1 любое решение уравнения (1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_5}\right], \zeta_5 > 1-\alpha, x \to \infty,$
$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b.$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи, когда $\lambda > 0,\ \mu < 0$; $\lambda < 0,\ \mu > 0$;и $\lambda > 0,\ \mu > 0$.

В втором параграфе первой главы уравнение (1) изучено в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой.

В этом параграфе получено многообразие решений интегрального уравнения (1), представимое в виде обобщенного степенного ряда.

Теорема 1.2.2. *Пусть в интегральном уравнении (1)* $\lambda < 0, \mu < 0$ $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0,\ \delta_1 < 0,$ *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно-сходящего обобщённого ряда вида:*

$$f(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau} f_n(x)\,,$$

где $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическим поведением:*

$$f_n(x) = \mathrm{o}\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_6}\right], \zeta_6 > 1-\alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\dots.$$

Тогда любое решение интегрального уравнения (1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$*, представимого в виде*

$$u(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\mathcal{v}_n(x),$$

выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{-\mu}\mathcal{v}(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{|\mu|}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\times\right.$$
$$\times\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}\cdot C_n^1 + \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)\left(f_n(x) - \frac{\delta_1+\lambda(n+\tau)}{n+\tau}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\int_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n(t)dt}{(t-a)^{\alpha}}\right)\right]\right\},$$

где C_n^1 $(n = 0,1,2\dots) -$ *произвольные постоянные, для которых существует предел:*

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{|C_{n+1}^1|}{|C_n^1|} = C^1 \text{ и } |b-b_0|\cdot C^1 < 1.$$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи, когда $\lambda > 0,\ \mu < 0$; $\lambda < 0,\ \mu > 0$, и $\lambda > 0, \mu > 0$.

В третьем параграфе первой главы на основе полученных интегральных представлений для модельного двумерного интегрального уравнения типа

Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе ставятся и исследуются граничные задачи.

Задача $Q_{1.3.1}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничным условиям:*

$$[(y-b)^{\mu} u(x,y)]_{y=b} = \mathcal{N}_1(x),\ x \in \Gamma_1,$$
$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)} u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{K}_1(y),\ y \in \Gamma_2,$$

где $\mathcal{N}_1(x), \mathcal{K}_1(y) -$ *соответственно заданные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2.
О разрешимости задачи $Q_{1.3.1}$ справедлива:

Теорема 1.3.1. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры* λ, μ, δ *и функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1.1. Тогда задача* $Q_{1.3.1}$ *имеет единственное решение, которое выражается равенством (3), где функции* $\Phi(x), \Psi(y)$ *определяются из равенств:*

$$\Phi(x) = \mathcal{N}_1(x),$$
$$\Psi(y) = \mathcal{K}_1(y).$$

В четвертом параграфе первой главы в области $\mathcal{D}$ исследовано модельное двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией вида:

$$u(x,y) + \lambda \int_x^{\infty} \frac{u(t,y)}{(t-a)^{\alpha}} dt + \mu \int_b^{y} \frac{u(x,s)}{(s-b)^{\beta}} ds + \delta \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^{y} \frac{u(t,s)}{(s-b)^{\beta}} ds =$$
$$= f(x,y), \qquad (6)$$

где $0 < \alpha < 1, \beta > 1$.

Решение интегрального уравнения (6) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_7}\right], \zeta_7 > 1 - \alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_3}], \eta_3 > \beta - 1.$$

При $\lambda < 0, \mu < 0, \delta = \lambda\mu$ справедливо утверждение:

Теорема 1.4.1. *Пусть в уравнении (6)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2) и*

$$f(x,y) = o\left[e^{\mu\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\eta_4}\right], \eta_4 > \beta - 1, y \to b.$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (6) функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$*, обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2*, всегда разрешимо. Общее решение неоднородного интегрального уравнения содержит четыре произвольные функции одной переменной и выражается равенством:*

$$u(x,y) = e^{\mu\omega_b^\beta(y)}\mathcal{H}(x) + e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\mathcal{Q}(y) + \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] \equiv$$
$$\equiv \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[\mathcal{H}(x), \mathcal{Q}(y), \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \qquad (7)$$

где

$$\mathcal{H}(x) = \hbar_2(x) + \hbar_1(x) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\hbar_1(t)dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\mathcal{Q}(y) = q_1(y) + q_2(y) - \mu \int_b^y e^{-\mu\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right\}} \cdot \frac{q_2(s)ds}{(s-b)^\beta},$$

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = f(x,y) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt -$$

$$-\mu \int_b^y e^{\mu\left\{\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right\}} \cdot \frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds + \lambda\mu \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{\mu\left\{\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right\}} \cdot \frac{f(t,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

$\hbar_1(x)$, $\hbar_2(x)$, $q_1(y)$, $q_2(y)$ *− произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2*, которые при* $x \to \infty$, $y \to b$ *соответственно обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул*

$\hbar_1(x) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_8}\right], \zeta_8 > 1-\alpha, x \to \infty,$

$\hbar_2(x) = o\left[x^{-\zeta_9}\right], \zeta_9 > 1-\alpha, x \to \infty,$

$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_5}], \eta_5 > \beta - 1, y \to b,$

$q_2(y) = o\left[e^{\mu\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\eta_6}\right], \eta_6 > \beta - 1, y \to b.$

Следствие 1.4.1. *При выполнении условий теоремы 1.4.1 любое решение уравнения (6) из класса* $C(\overline{D})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2*, обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{10}}\right], \zeta_{10} > 1-\alpha, x \to \infty,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_7}], \eta_7 > \beta - 1, y \to b.$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи.

В пятом параграфе первой главы исследовано модельное двумерное интегральное уравнение (6) в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой, решение интегрального уравнения получено в виде функционального ряда.

Теорема 1.5.5. *Пусть в интегральном уравнении (6)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu < 0$, *функция* $f(x,y)$ *в области* $\overline{\mathcal{D}}$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида*

$$f(x,y) = e^{\mu\omega_b^\beta(y)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\, f_n^2(x)\,,$$

где функция $f_n^2(x) \epsilon\, C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращается в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$f_n^2(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{11}}\right], \zeta_{11} > 1 - \alpha, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty.$$

Тогда однородное интегральное уравнение (6) функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y)} \vartheta_n^2(x), \tag{8}$$

имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:

$$u_n(x,y) = e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y)+\left(\frac{|\delta_1|}{n+\tau}+\lambda\right)\omega_a^\alpha(x)},\ n = 0,1,2, \dots .$$

Неоднородное интегральное уравнение в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (8) всегда разрешимо и решение представимо в виде:*

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)+\mu\omega_b^\beta(y)} \vartheta_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y)} \Bigg[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} C_n^2 +$$

$$+\left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)[f_n^2(x) - \left(\lambda - \frac{\delta_1\lambda}{\delta_1 - \lambda\,(n+\tau)}\right) \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^2(t)}{(t-a)^\alpha} dt -$$

$$-\delta_1 \left(\frac{1}{n+\tau} + \frac{\lambda}{\delta_1 - \lambda\,(n+\tau)}\right) \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^2(t)}{(t-a)^\alpha} dt \Bigg]\Bigg],$$

где C_n^2 *—произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|C_{n+1}^2|}{|C_n^2|} = C^2 \ и\ C^2 \cdot e^{-\omega_b^\beta(b_0)} < 1.$$

Аналогичным образом исследуются случаи $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $\lambda < 0$, $\mu > 0$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

В шестом параграфе первой главы на основы полученных интегральных представлений ставятся и исследуются граничные задачи.

Задача $\mathcal{M}_{1.6.1}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (6) при* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничным условиям:*

$$\left[e^{-\mu\omega_b^{\beta}(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = \mathcal{N}_2(x),\ x \in \Gamma_1,$$

$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{K}_2(y),\ y \in \Gamma_2,$$

где $\mathcal{N}_2(x)$, $\mathcal{K}_2(y)$ − *соответственно заданные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2.

О разрешимости задачи $\mathcal{M}_{1.6.1}$ справедлива утверждение:

Теорема 1.6.1. *Пусть в интегральном уравнении (6) параметры* λ, μ, δ *и функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1. Тогда задача* $\mathcal{M}_{1.6.1}$ *имеет единственное решение, которое выражается равенством (7), где функции* $\mathcal{H}(x)$, $\mathcal{Q}(y)$ *определяются из равенств:*

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{N}_2(x),$$

$$\mathcal{Q}(y) = \mathcal{K}_2(y).$$

Вторая глава посвящена исследованию немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией и исследованию немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

В первом параграфе второй главы в области $\mathcal{D}$ рассмотрим двумерное интегральное уравнение вида:

$$u(x,y) + \int_x^{\infty} \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^{\alpha}}dt + \int_b^{y} \frac{B(s)u(x,s)}{s-b}ds +$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^{y} \frac{C(t,s)u(t,s)}{s-b}ds = f(x,y), \tag{9}$$

где $A(x)$, $B(y)$, $C(x,y)$, $f(x,y)$ −заданные функции соответственно точек Γ_1, Γ_2 и $\overline{\mathcal{D}}$, $u(x,y)$ −искомая функция, $0 < \alpha < 1$.

Интегральное уравнение (9) будем исследовать при предположении, что $A(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$, $C(a,b) \neq 0$.

Решение интегрального уравнения (9) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{12}}\right], \zeta_{12} > 1-\alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0.$$

Теорема 2.1.1. *Пусть в интегральном уравнении (9)* $0 < \alpha < 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в окрестности точки* $x = \infty$ *удовлетворяет условию*

$$A(x) - A(\infty) = o\left[\, x^{-\zeta_{13}}\right], \zeta_{13} > 1 - \alpha, x \to \infty, \tag{10}$$

$B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $y = b$ *удовлетворяет условию*

$$B(y) - B(b) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0,\ y \to b. \tag{11}$$

Далее, пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{14}}\right], \zeta_{14} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_8}\,],\ \eta_8 > |B(b)|, y \to b.$$

Тогда интегральное уравнение (9) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции и выражается равенством:*

$$u(x,y) = e^{-W_B^1(y)}(y-b)^{-B(b)}\Phi_1(x) + e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x)}\,\psi_1(y) +$$
$$+\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)] \equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right],$$

где

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) - \int\limits_x^{\infty} e^{[A(\infty)\{\omega_a^{\alpha}(t) - \omega_a^{\alpha}(x)\} + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)]}\,\frac{A(t)\varphi_1(t)}{(t-a)^{\alpha}}\,dt,$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)] = f(x,y) - \int\limits_x^{\infty} e^{[A(\infty)\{\omega_a^{\alpha}(t) - \omega_a^{\alpha}(x)\} + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)]}\,\frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^{\alpha}}\,dt -$$
$$-\int\limits_b^{y} e^{[W_B^1(s) - W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(x,s)ds}{s-b} +$$
$$+\int\limits_x^{\infty} e^{[A(\infty)\{\omega_a^{\alpha}(t) - \omega_a^{\alpha}(x)\} + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)]}\,\frac{A(t)dt}{(t-a)^{\alpha}} \times$$
$$\times \int\limits_b^{y} e^{[W_B^1(s) - W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(t,s)ds}{s-b},$$

$\varphi_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $\psi_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ – *произволные функции точек* Γ_1, Γ_2, *причём* $\varphi_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\varphi_1(x) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)}\, x^{-\zeta_{15}}\right], \zeta_{15} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$\psi_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\psi_1(y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0, y \to b.$$

Следствие 2.1.1. *При выполнении условий теоремы 2.1.1 любое решение интегрального уравнения (9) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств*

$u(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{16}}\right], \zeta_{16} > 1 - \alpha,$ *при* $x \to \infty$,

$u(x,y) = o[\,(y-b)^\varepsilon\,], \varepsilon > 0,$ *при* $y \to b$.

Утверждения, подобные теореме 2.1.1, получены и в других случаях $A(\infty) > 0, B(b) > 0; A(\infty) > 0, B(b) < 0; A(\infty) < 0, B(b) > 0$.

В втором параграфе второй главы исследовано немодельное интегральное уравнение (9) в случае, когда функции, присутствующие в ядрах, не связаны между собой.

Справедливы утверждения:

Теорема 2.2.1. *Пусть в интегральном уравнении (9)* $0 < \alpha < 1$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (10), (11).* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$$C_1(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{17}}\right], \zeta_{17} > 1 - \alpha \text{ при } x \to \infty, \tag{12}$$

$$C_1(x,y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b. \tag{13}$$

Функция $G_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением:*

$G_1(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{18}}\right], \zeta_{18} > 1 - \alpha$ *при* $x \to \infty$,

$G_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_9}], \eta_9 > B(b)$ *при* $y \to b$.

Тогда задача о нахождении интегрального уравнения (9) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *эквивалентна задаче о нахождении решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью*

$$\nu_1(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\nu_1(t,s)ds}{s-b} = G_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$G_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$$
$$\times\, U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right] = L_1[\varphi_1(x), \psi_1(y), f(x,y)],$$

$\nu_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} u(x,y), \nu_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *с асимптотическим поведением*:

$\nu_1(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{19}}\right], \zeta_{19} > 1 - \alpha$ *при* $x \to \infty$,

$\nu_1(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{10}}\,], \eta_{10} > B(b)$ *при* $y \to b$.

Теорема 2.2.2. *Пусть в интегральном уравнении (9)* $0 < \alpha < 1$, *функции* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *соответственно удовлетворяют условиям (10), (11),* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{20}}\right], \zeta_{20} > 1 - \alpha \text{ при } x \to \infty, \quad (15)$$
$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b.$$

Функция $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическим поведением (12), (13). Тогда интегральное уравнение (9) имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x) - W_B^{1}(y)}(y-b)^{-B(b)}\Bigg[L_1[0,0,f(x,y)] -$$
$$\left. - \int_x^{\infty} dt \int_b^{y} \Gamma_{1,1}(x,y,t,s) L_1[0,0,f(t,s)]ds \right] \equiv \mathcal{K}_1^1[f(x,y)], \quad (16)$$

где $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *− резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью (14).*

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий теоремы 2.2.2 решение интегрального уравнения (9) вида (16) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{21}}\right], \zeta_{21} > 1 - \alpha \text{ при } x \to \infty,$$
$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b.$$

Аналогичным образом изучены случаи $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$; $A(\infty) > 0$, $B(b) < 0$; $A(\infty) < 0, B(b) > 0$.

В третьем параграфе второй главы исследовано немодельное интегральное уравнение с сильно-особой и слабой - особой линией вида:

$$u(x,y) + \int_x^{\infty} \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^{\alpha}} dt + \int_b^{y} \frac{B(s)u(x,s)}{(s-b)^{\beta}} ds +$$
$$+ \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^{y} \frac{C(t,s)u(t,s)}{(s-b)^{\beta}} ds = f(x,y), \quad (17)$$

где $0 < \alpha < 1, \beta > 1$.

Решение интегрального уравнения (17) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{22}}\right], \delta_{22} > 1 - \alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{11}}], \eta_{11} > \beta - 1.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 2.3.1. *Допустим что, в интегральном уравнении (17) выполнены условия:* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в окрестности точки* $x = \infty$ *удовлетворяет условию (10),* $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $y = b$ *удовлетворяет условию*

$$B(y) - B(b) = o[\,(y-b)^{\eta_{12}}\,], \eta_{12} > \beta - 1, y \to b. \tag{18}$$

Далее, пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[\,e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{23}}\right], \zeta_{23} > 1-\alpha, x \to \infty.$$

$$f(x,y) = o\left[\,e^{B(b)\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\eta_{13}}\,\right], \eta_{13} > \beta - 1,\ y \to b.$$

Тогда интегральное уравнение (17) разрешимо в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и представимо в виде:*

$$u(x,y) = e^{\left[B(b)\omega_b^\beta(y) - W_B^1(y)\right]}\mathcal{H}_1(x) + e^{\left[-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x)\right]}q_1(y) +$$
$$+\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \tag{19}$$

где

$$\mathcal{H}_1(x) = \hbar_1(x) - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\} + W_a^\alpha(t) - W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)\hbar_1(t)dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = f(x,y) - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\} + W_a^\alpha(t) - W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} -$$
$$-\int_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right\} + W_B^1(s) - W_B^1(y)\right]}\frac{B(s)f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$
$$+\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\} + W_a^\alpha(t) - W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\times$$
$$\times\int_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right\} + W_B^1(s) - W_B^1(y)\right]}\frac{B(s)f(t,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

$\hbar_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $q_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ – *произволные функции точек* Γ_1, Γ_2, *причём* $\hbar_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\hbar_1(x) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\ x^{-\zeta_{24}}\right], \zeta_{24} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$q_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_{14}}], \eta_{14} > \beta - 1, y \to b.$$

Следствие 2.3.1. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 решение интегрального уравнения (17) вида (19) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств*
$u(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{25}}\right]$, $\zeta_{25} > 1-\alpha$, *при* $x \to \infty$,
$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{15}}]$, $\eta_{15} > \beta - 1$ *при* $y \to b$.
Аналогичным образом исследуются остальные случаи.

В четвертом параграфе второй главы исследовано немодельное интегральное уравнение (16) в случае, когда функции, присутствующие в ядрах, не связаны между собой: $C(x,y) \neq A(x)B(y)$.
Справедливы утверждения:

Теорема 2.4.1. *Пусть в интегральном уравнении (17)* $0 < \alpha < 1$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (10) и (18), также* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями (12) и*

$$C_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{16}}],\ \eta_{16} > \beta - 1 \ \text{при}\ y \to b. \tag{20}$$

Функция $\mathcal{H}_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$\mathcal{H}_1(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{26}}\right],\ \zeta_{26} > 1-\alpha \ \text{при}\ x \to \infty,$$
$$\mathcal{H}_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{17}}],\ \eta_{17} > \beta - 1 \ \text{при}\ y \to b.$$

Тогда задача о нахождении интегрального уравнения (17) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *эквивалентна задаче о нахождении решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью*

$$\vartheta_1(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\vartheta_1(t,s)ds}{(s-b)^\beta} = \mathcal{H}_1(x,y), \tag{21}$$

где
$$\vartheta_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) - B(b)\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} u(x,y),$$
$$\mathcal{H}_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) - B(b)\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} \times$$
$$\times\, U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] = \mathcal{H}_1[\hbar_1(x), q_1(y), f(x,y)].$$

Теорема 2.4.2. *Пусть в интегральном уравнении (17)* $0 < \alpha < 1$, *функции* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *соответственно удовлетворяют условиям (10), (18),* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{27}}\right],\ \zeta_{27} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty,$$
$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{18}}],\ \eta_{18} > \beta - 1 \text{ при } y \to b.$$

Функция $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (12), (20). Тогда интегральное уравнение (17) имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x) + B(b)\omega_b^\beta(y) - W_B^1(y)}\Bigg[\mathcal{H}_1[0,0,f(x,y)] -$$
$$- \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s)\mathcal{H}_1[0,0,f(t,s)]ds\Bigg] \equiv \mathcal{Q}_1^1[f(x,y)], \qquad (22)$$

где $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *− резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью (21).*

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.2 решение интегрального уравнения (17) вида (22) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty,\ y \to b$ *определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{28}}\right],\ \zeta_{28} > 1-\alpha, \text{ при } x \to \infty,$$
$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{19}}],\ \eta_{19} > \beta - 1 \text{ при } y \to b.$$

Аналогичным образом для случаев $A(\infty) < 0,\ B(b) < 0;\ A(\infty) > 0,\ B(b) < 0;\ A(\infty) < 0,\ B(b) > 0.$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- получено многообразие решений модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;

- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, также могут быть использованы в различных прикладных вопросах.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ:

[1–А] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.3-5.

[2–А] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2018. – Т. 61. – №4. – С. 331-337.

[3–А] Хушвахтов М.Б**.** О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №1. – С.44-49.

[4–А] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2019. – Т. 62. – №9-10. – С. 533-540.

[5–А] Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе. [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №2. – С.20 - 24.

[6–А] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо особой линией на полосе// Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №3. – С.19 - 23.

Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[7–А] Khushvakhtov M.B. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip[Текст]/ Rajabova L.N., Khushvakhtov M.B.// Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2019 – №4 (129) – С.67-72.

[8–А] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/М.Б. Хушвахтов// Международный научный журнал «Молодой ученый». –2019 – №49 (287) – часть 1 – С.1 - 3.

Материалы конференций, тезисы докладов:

[9–А] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов// Материалы международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата «Современные проблемы математики и их приложения» (Таджикистан, г.Душанбе, 25-26 сентября 2018г.). – С.205-210.

[10–А] Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ М.Б.Хушвахтов// Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова «Математический анализ и его приложения» (г. Душанбе, 10-11 июня 2019г.). – С.263-267.

[11–А] Хушвахтов М.Б. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе[Текст]/Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов //Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе» (Башкортостан, г. Стерлитамак, 23-25 мая 2019г.). 2019.– С.186-189.

[12–А] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда параметры

уравнения не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы республиканской научно-теоретический конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «Годом развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021гг.) и «400-летию Миробида Сайидо Насафи» (г. Душанбе, 20-27 апреля 2019г.). – Т. 1. – С.36-37.

[13–А] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда функции, присутствующие в ядрах не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию д.ф.-м.н., профессора Джангибекова Гулходжа «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Таджикистан, г. Душанбе, 30-31 января 2020г).

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.968.220

Бо ҳуқуқи дастхат

ХУШВАХТОВ МУҲИДИН БУРАКШОЕВИЧ

БАЪЗЕ СИНФҲОИ МАХСУСИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ НАМУДИ ВОЛТЕРРА БАРОИ СОҲАИ НОМАҲДУД

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2020

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ:	**Раҷабова Лутфия Нусратовна,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, профессори кафедраи математикаи олии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи ак. М.Осимӣ
МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:	**Исҳоқов Сулаймон Абунасрович,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, аъзо – кореспонденти Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, ҷонишини директор оиди корҳои илмӣ дар Институти математикаи бо номи Ҷураев А.
	Абдукаримов Маҳмадсалим Файзуллоевич, номзади илмҳои физикаю математика, дотсент, муовини директори Филиали донишгоҳи давлатии Москва бо номи М.В.Ломоносов дар шаҳри Душанбе
МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА:	Донишгоҳи славянии Русияву Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия *6 – уми январи соли 2021 соати 10:00* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6Д.КОА–012 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз рӯйи нишонии 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Ба диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «___» ____________ соли 2020 фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсонии 6Д.КОА–012 доктори илмҳои физикаю математика, дотсент **Одинаев Р.Н.**

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Мубрамӣ ва зарурати баргузории таҳқиқ аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Мақсади асосии таҳқиқи рисолаи диссертатсионии мазкур муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус мебошад. Ба омӯзиши муодилаҳои интегралӣ масъалаҳои характери амалӣ дошта аз назарияи муодилаҳои дифференсиалии одӣ, муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, механика, физикаи назариявӣ, назарияи чандирӣ, гидродинамика, назарияи майдон ва дигар қисмҳои физикаи математикӣ оварда мешаванд.

Ба омӯзиши муодилаҳои интегралии намуди Фредголм ва Волтерра бо ядроҳои бефосила ё аз фазои L_2 таҳқиқотҳои зиёд бахшида шудааст.

Дар корҳои илмии Михайлов Л.Г.[13] ва Б.М.Бильман[14] муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои якҷинсаи дараҷаи -1 омӯхта шудааст.

Монографияҳои Гахов Ф.Д.[15] ва Мусхелишвили Н.И.[16] ба таҳқиқи муодилаҳои интегралии якҷинсаи сингулярӣ бо ядрои Кошии намуди

$$A(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mathcal{K}(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t),$$

ки дар ин ҷо интеграл ба маънои асосӣ фаҳмида мешавад, $\Gamma-$ контури сарбаста ё кушод дар ҳамвории комплексии Z, $A(t)$, $\mathcal{K}(x,t)$, $f(t)-$ функсияҳои додашуда, $\varphi(t)-$ функсияи номаълум мебошанд, бахшида шудааст. Монографияи Михлин С.Г.[17] ба омӯзиши муодилаҳои интегралии бисёрченакаи сингулярӣ, монографияи Джураев А.[18] ва корҳои илмии Ҷангибеков Г.,[19] инчунин таҳқиқоти шогирдони онҳо ба омӯзиши муодилаҳои интегралии сингулярӣ барои соҳаи охирнок бахшида шудааст.

Монографияи И.Н. Векуа[20] ба омӯзиши функсияҳои аналитикии умумикардашуда ва вобастагии онҳо ба муодилаҳои интегралии дученакаи сингулярӣ бахшида шудааст.

---

[13] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1//Душанбе, Дониш, 1966, 49

[14] Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1. // В. сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами» // Изд-во «Дониш», Душанбе, 1969, с. 19-40.

[15] Гахов Ф.Д. Краевые задачи // Изд-во «Наука», М.: 1977, с. 640.

[16] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения // Наука М. 1968

[17] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения// М.: Физматгиз, 1962, с. 254.

[18] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений// М.: Наука, 1987, 415 с.

[19]Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах //Матем. Заметки,1989, т.46, №46, С.91-93.

[20] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции// М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

Дар таҳқиқотҳои Раҷабов Н.[21] муодилаҳои интегралии якченакаи намуди Волтерра бо ядроҳои махсус ё фавқулмахсуси қайдкардашудаи намуди

$$\varphi(x)+\int_{a}^{x}\frac{\mathcal{K}(x,t)}{|t|^{\alpha}}\varphi(t)\,dt=f(x),$$

ки дар инҷо $\alpha\geq 1$ аст, омӯхта шудаанд.

Мувофиқи назарияи муодилаҳои интегралии намуди Волтерра, агар ядрои муодилаи интегралии ҷинси дуюм функсияи бефосила ё $\mathcal{K}(x,t)\in L_2$, дошта бошад, онгоҳ чунин муодила ҳалли ягона дорад.

Дар монографияҳои Раҷабов Н.[22] ва Раҷабов Н., Раҷабова Л.Н.[23] муодилаҳои интегралии якченака, дученака ва баъзе ҳолатҳои муодилаи интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра ҷинси ду бо нуқтаҳо, хатҳо ё соҳаҳои сарҳадӣ ва дохилии махсус ё фавқулмахсуси қайдкардашуда омӯхта шудааст.

Исбот карда шудааст, ки ҳалли муодилаи якченакаи интегралӣ бо нуқтаҳои махсуси сарҳадӣ ё дохилии қайдкардашуда дорои доимии ихтиёрӣ мебошад, мувофиқан ҳалли муодилаи дученакаи интегралӣ бо хатҳои махсуси сарҳадӣ ё дохилии қайдкардашуда дорои функсияҳои ихтиёрии аз як тағйирёбанда вобаста буда мебошад. Бинобар ин муодилаҳои интегралии дученака метавонанд адади беохири ҳалҳои хаттии новобаста ё дорои ҳалли ягона бошанд.

Таҳқиқоти Раҷабова Л.Н., Раджабов Н[24] ба омӯхтани муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра барои соҳаи номаҳдуд бахшида шудааст.

Дараҷаи омӯзиши мушкилоти илмӣ. Натиҷаҳои асосие, ки дар боло тавсиф шудааст, ба муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо нуқтаҳо ва хатҳои сарҳадии сингулярӣ ва барзиёдсингулярӣ, инчунин муодилаҳои дученакаи намуди Вольтерра бо хатҳои махсус дохил мешавад. Бояд қайд кард, ки яке аз қисмҳои муҳими назарияи муодилаҳои интегралӣ, қисми муодилаи дученакаи намуди Вольтерра бо хатҳои махсус дар тасма мебошад. Як қатор мушкилотҳои принсипиалӣ дар вақти ҳосил кардани бисёртасвирии ҳалҳо ва ҳалшавандагии масъалаҳои канорӣ, дар ҳолате, ки нуқта ва ё хати

[21] Раджабов Н. Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения// Душанбе,2007, 221с.
[22] Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity kernels and their application// Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing; 2011, 282p.
[23] Раджабов Н. Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложении// Germany; LAPLAMBERT Academic Publishing 2011, 502p.
[24] Раджабова Л.Н., Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте// Доклады Академии Наук Республики Таджикистан – 2014-т. 57. №6. – С. 443-451.

махсус дар сарҳади соҳа мехобад, пайдо мешаванд. Аз ин рӯ масъалаҳои марбути дар рисолаи мазкур муоинашаванда мубрам мебошанд.

Асоси назариявӣ ва методологии диссертатсияро натиҷаҳои ба даст овардаи олимони ватанӣ ва хориҷӣ ташкил медиҳад. Дар рисолаи мазкур усулҳои асосии назарияи муодилаҳои интегралӣ, муодилаҳои дифференсиалии оддӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ васеъ истифода бурда мешавад. Аз ин лиҳоз, Паёми Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон, Пешвои миллат, муҳтарам Эмомалӣ Раҳмон ба Маҷлиси Олӣ оид ба масъалаҳои омӯзиши илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзи аҳамияти аввалиндараҷа дорад.

Мақсади таҳқиқ. Мақсади кори диссертатсионӣ ба рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии дученака ва бисёрченакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус дар тасма нигаронида шудааст.

Объекти таҳқиқ. Объектҳои асосии таҳқиқ чунинанд:

- муодилаҳои дученакаи моделии намуди Волтерра бо хатҳои махсус дар тасма;
- муодилаҳои дученакаи ғайримоделии намуди Волтерра бо хатҳои махсус дар тасма.

Мавзӯи таҳқиқ. Таҳқиқи муодилаҳои дученакаи моделии намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва махсусияти суст, фавқулмахсусият ва махсусияти суст, инчунин муодилаҳои дученакаи ғайримоделии намуди Волтерра бо хатҳои махсус ва махсусияти суст, фавқулмахсусият ва махсусияти суст дар тасма.

Масъалаҳои таҳқиқ:

- ёфтани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Вольтерра бо махсусиятҳо дар тасма;
- ёфтани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Вольтерра бо махсусиятҳо дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ кардани масъалаҳои канорӣ дар ҳолатҳое, ки ҳалли умумии муодилаҳои интегралии моделии дученака дорои функсияҳои ихтиёрӣ аст.

Усулҳои таҳқиқ. Дар кор усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ, усули ёфтани тасвирҳои интегралӣ истифода шудааст. Дар таҳқиқ инчунин усули ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерра бо нуқтаҳои махсуси қайдкардашуда, ки дар таҳқиқотҳои Раҷабов Н. ва Раҷабова Л.Н., коркард шудаанд истифода шудааст.

Алоқамандии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию таҳқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи “Баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии намуди Волтерра барои соҳаи номаҳдуд” иҷро карда шудааст.

Нуқтаҳои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оид ба ёфтани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Вольтерра бо махсусиятҳо дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста ва новобаста будани параметрҳо;
- теоремаҳо оид ба ёфтани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Вольтерра бо махсусиятҳо дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста ва новобаста будани функсияҳои дар ядро ҷойгирбуда;
- теоремаҳо оид ба гузошта ва таҳқиқ кардани масъалаҳои канорӣ дар ҳолатҳое, ки ҳалли умумии муодилаҳои интегралии моделии дученака дорои функсияҳои ихтиёрӣ аст.

Навгониҳои илмии таҳқиқ. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатанд аз:

- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо.
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Маводи диссертатсия асосан характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳо барои рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра бо нуқтаҳои махсус, инчунин барои ҳалли масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода шуда метавонанд.

Эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсионӣ. Эътимоднокии натиҷаҳои дар рисола ҳосилшуда бо ҳисобҳои асосноки назариявӣ ва исботҳои қатъии ба усулҳои муодилаҳои интегралӣ ва дифференсиалӣ такякунанда таъмин карда шудаанд.

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои рисола ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Тавсиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсонӣ муҳокима шудаанд дар:

- семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои ДМТ, зери роҳбарии д.и.ф.м, профессор, академики АИ ҶТ Раҷабов Н.Р. (Душанбе-2016-2020с.);
- конференсияи илмӣ-назариявии байналмилаллии «Масъалаҳои муосири математикӣ ва татбиқи онҳо», бахшида ба 70-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва 80-солагии академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор, АИ ҶТ Раҷабов Нусрат (Душанбе, 25-26 сентябри соли 2018);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии ҳайати устодону кормандони ДМТ бахшида ба «Солҳои рушди деҳот, саёйҳӣ ва ҳунарҳои мардумӣ (солҳои 2019-2021)» ва «400-солагии Миробид Сайидои Насафӣ» (20-27-уми апрели соли 2019)
- конференсияи апрелии илмӣ-назариявии ҳайати устодону кормандони Донишгоҳи миллии Тоҷикистон (солҳои 2016-2020);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмии «Анализи математикӣ ва татбиқи он», бахшида ба 80-солагии математики маъруф, профессор Бекназар Имомназаров (Душанбе, 10-11 июни соли 2019).
- конференсияи илмии байналмилаллии «Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ», бахшида ба 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор, Ҷангибеков Гулхоҷа (Душанбе, 30-31 январи соли 2020).

Интишорот. Натиҷаҳои асосӣ аз рӯйи мавзӯи диссертатсия дар 13 корҳои чопии муаллиф нашр шудаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Аз байни онҳо 6 мақола ба нашрияҳои тақризшавандаи руйхати амалкунандаи КОА-и назди президенти Ҷумҳурии

Муодилаи интегралии (9) – ро дар ҳолатҳои $A(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$, $C(a,b) \neq 0$ будан таҳқиқ мекунем.

Ҳалли муодилаи интегралии (9) – ро дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, $\underset{x\to\infty}{\ell im}\, u(x,y) = 0$ бо рафтори асимптотикии

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{12}}\right], \zeta_{12} > 1-\alpha,$$

$\underset{y\to b}{\ell im}\, u(x,y) = 0$ бо рафтори асимптотикии

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$$

ҷустуҷӯ мекунем.

Теорема 2.1.1. *Бигузор дар муодилаи интегралии (9)* $0 < \alpha < 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$. $A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *ва дар атрофи нуқтаи* $x = \infty$ *шарти*

$$A(x) - A(\infty) = o\left[\, x^{-\zeta_{13}}\right], \zeta_{13} > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{10}$$

$B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$ *ва дар атрофи нуқтаи* $y = b$ *шарти*

$$B(y) - B(b) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0,\ y \to b \tag{11}$$

қаноат кунанд.

Инчунин, бигузор $f(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, $\underset{x\to\infty}{\ell im}\, f(x,y) = 0$ *бо рафтори асимптотикии:*

$$f(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{14}}\right], \zeta_{14} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$\underset{y\to b}{\ell im}\, f(x,y) = 0$ *бо рафтори асимптотикии:*

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_8}\,],\ \eta_8 > |B(b)|, y \to b,$$

бошад.

Он гоҳ муодилаи интегралии (9) дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба нол мубаддалшаванда, ҳама вақт ҳалшаванда аст ва ҳалли умумӣ дорои ду функсияи ихтиёрии аз як тағйрёбанда вобаста иборат аст ва бо баробарии зерин ифода мешавад:*

$$u(x,y) = e^{-W_B^1(y)}(y-b)^{-B(b)}\Phi_1(x) + e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x)}\,\psi_1(y) +$$
$$+\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)] \equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right],$$

дар ин ҷо

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) - \int\limits_x^{\infty} e^{[A(\infty)\{\omega_a^{\alpha}(t) - \omega_a^{\alpha}(x)\} + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)]}\,\frac{A(t)\varphi_1(t)}{(t-a)^{\alpha}}\,dt,$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)] = f(x,y) - \int\limits_x^{\infty} e^{[A(\infty)\{\omega_a^{\alpha}(t) - \omega_a^{\alpha}(x)\} + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)]}\,\frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^{\alpha}}\,dt -$$

$$-\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(x,s)ds}{s-b}+$$
$$+\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\times$$
$$\times\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(t,s)ds}{s-b},$$
$\varphi_1(x)\in C(\overline{\Gamma_1}),\ \psi_1(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$ – *функсияҳои ихтиёрии бефосилаи нуқтаҳои* Γ_1, Γ_2, *ки шартҳои* $\varphi_1(\infty)=0$ *бо рафтори асимптотикии:*
$\varphi_1(x)=o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\,x^{-\zeta_{15}}\right],\zeta_{15}>1-\alpha,x\to\infty,$
$\psi_1(b)=0$ *бо рафтори асиптотикии:*
$\psi_1(y)=o[\,(y-b)^\varepsilon\,],\varepsilon>0,y\to b$
қаноат мекунанд.

Натиҷаи 2.1.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.1.1 ҳалли ихтиёрии муодилаи интегралии (9) аз синфи* $C(\mathcal{D})$ *ҳангоми* $x\to\infty,y\to b$ *ба нол мубаддал мегардад ва рафтори асимптотикии он аз руйи баробариҳои*
$u(x,y)=o\left[\,e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{16}}\right],\zeta_{16}>1-\alpha,x\to\infty,$
$u(x,y)=o[\,(y-b)^\varepsilon\,],\varepsilon>0,\ y\to b,$
муайян карда мешавад.

Ба монанди теоремаи 2.1.1, дар ҳолатҳои дигари $A(\infty)>0$, $B(b)>0$, $A(\infty)>0$, $B(b)<0$; $A(\infty)<0$, $B(b)>0$ тасдиқотҳо ба даст оварда мешаванд.

Дар **параграфи дуюми боби дуюм** муодилаи интегралии дученакаи ғайримоделии (9) дар ҳолати новобаста будани функсияҳои дар ядро буда таҳқиқ карда шудааст.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор дар муодилаи интегралии (9)* $0<\alpha<1$, *функсияҳои* $A(x),B(y)$ *шартҳои* $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ *ва* $B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$, *мувофиқан дар атрофи нуқтаҳои* $x=\infty,\ y=b$ *шартҳои (10), (11) – ро қаноат кунанд.* $A(\infty)>0$, $B(b)>0$, $C(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *функсияи* $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)\neq 0$ $C_1(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафтори асимптотикии*
$$C_1(x,y)=o\left[x^{-\zeta_{17}}\right],\zeta_{17}>1-\alpha \text{ ҳангоми } x\to\infty, \tag{12}$$
$$C_1(x,y)=o[(y-b)^\varepsilon],\varepsilon>0 \text{ ҳангоми } y\to b, \tag{13}$$
ба нол мубаддал гардад.

Функсияи $G_1(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии*
$G_1(x,y)=o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\,x^{-\zeta_{18}}\right],\delta_{18}>1-\alpha,x\to\infty,$
$G_1(x,y)=o[(y-b)^{\eta_9}],\eta_9>B(b),y\to b,$

ба нол мубаддал мегардад.

Он гоҳ ҳалли муодилаи интегралии (9) дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба нол мубаддалшаванда, ба ҳалли муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо махсусиятҳои сусти намуди зерин баробарқувва аст:*

$$\nu_1(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\nu_1(t,s)ds}{s-b} = G_1(x,y), \qquad (14)$$

дар ин ҷо

$G_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$

$\times\, U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right] = L_1[\varphi_1(x), \psi_1(y), f(x,y)]$,

$\nu_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}u(x,y)$,$\nu_1(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии*

$\nu_1(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{19}}\right]$, $\zeta_{19} > 1-\alpha$ *ҳангоми* $x \to \infty$,

$\nu_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{10}}]$, $\eta_{10} > B(b)$ *ҳангоми* $y \to b$,

ба нол мубаддал мегардад.

Теоремаи 2.2.2. *Бигузор дар муодилаи интегралии (9)* $0 < \alpha < 1$, *функсияҳои* $A(x)$, $B(y)$ *шартҳои* $A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *ва* $B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$, *мувофиқан дар атрофи нуқтаҳои* $x = \infty$, $y = b$ *шартҳои (10), (11) – ро қаноат кунанд.* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *функсияи* $f(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафтори асимптотикии*

$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{20}}\right]$, $\zeta_{20} > 1-\alpha$ *ҳангоми* $x \to \infty$, (15)

$f(x,y) = o[\,(y-b)^\varepsilon\,]$, $\varepsilon > 0$ *ҳангоми* $y \to b$,

ба нол мубаддал мегардад.

Функсияи $C_1(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии (12) ва (13) ба нол мубаддал мегардад. Он гоҳ муодилаи интегралии (9) ҳалли ягона дорад ва ба намуди зерин тасвир карда мешавад:*

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)-W_a^\alpha(x)-W_B^1(y)}(y-b)^{-B(b)}\Bigg[L_1[0,0,f(x,y)] - \\ - \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s) L_1[0,0,f(t,s)]ds\Bigg] \equiv \mathcal{K}_1^1[f(x,y)], \qquad (16)$$

дар ин ҷо $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *– резолвентаи муодилаи интегралии дученака бо махсусиятҳои сусти намуди (14) мебошад.*

Натиҷаи 2.2.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.2.2 ҳалли муодилаи интегралии (9) намуди (16) аз синфи* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *ба нол мубаддал мегардад ва рафтори асимптотикии он ҳангоми* $x \to \infty$, $y \to b$ *аз руйи формулаҳои*

$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{21}}\right]$, $\zeta_{21} > 1-\alpha$ *ҳангоми* $x \to \infty$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *ҳангоми* $y \to b$,
муайян карда мешаванд.

Ба монанди ҳамин ҳолатҳои $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$; $A(\infty) > 0$, $B(b) < 0$; $A(\infty) < 0, B(b) > 0$ омӯхта мешавад.

Дар **параграфи сеюми боби дуюм** муодилаи интегралии дученакаи ғайримодели бо хатҳои фавқулмахсус ва махсусияти сустдоштаи намуди:

$$u(x,y) + \int_x^{\infty} \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^{\alpha}} dt + \int_b^{y} \frac{B(s)u(x,s)}{(s-b)^{\beta}} ds +$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^{y} \frac{C(t,s)u(t,s)}{(s-b)^{\beta}} ds = f(x,y), \qquad (17)$$

дар ин ҷо $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ аст, таҳқиқ карда шудааст.

Ҳалли муодилаи интегралии (17) – ро дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in C(\overline{D})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ бо рафтори асимптотикии

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{22}}\right], \zeta_{22} > 1-\alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ бо рафтори асимптотикии

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{11}}], \eta_{11} > \beta - 1,$$

ҷустуҷӯ мекунем.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор дар муодилаи интегралии (17) шартҳои:* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, *иҷро шаванд, функсияи* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *дар атрофи нуқтаи* $x = \infty$ *шарти (10) – ро қаноат кунад, функсияи* $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *дар атрофи нуқтаи* $y = b$ *шарти зеринро қаноат кунад.*

$$B(y) - B(b) = o[\,(y-b)^{\eta_{12}}\,], \eta_{12} > \beta - 1, y \to b. \qquad (18)$$

Инчунин, бигузор функсияи $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *бо рафторҳои асимптотикии*

$$f(x,y) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)}\, x^{-\zeta_{23}}\right], \zeta_{23} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$f(x,y) = o\left[\, e^{B(b)\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\eta_{13}}\,\right], \eta_{13} > \beta - 1,\ y \to b,$$

бошад.

Он гоҳ муодилаи интегралии (17) дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба нол мубаддалшаванда, ҳама вақт ҳалшаванда аст ва ҳалли умумӣ дорои ду функсияи ихтиёрии аз як тағйирёбанда вобаста иборат аст ва бо баробарии зерин ифода мешавад:*

$$u(x,y) = e^{\left[B(b)\omega_b^{\beta}(y) - W_B^1(y)\right]}\mathcal{H}_1(x) + e^{\left[-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x)\right]}q_1(y) +$$

$$+\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \quad (19)$$

дар ин ҷо

$$\mathcal{H}_1(x) = \hbar_1(x) - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]} \frac{A(t)\hbar_1(t)dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = f(x,y) - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]} \frac{A(t)f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} -$$

$$-\int_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right\}+W_B^1(s)-W_B^1(y)\right]} \frac{B(s)f(x,s)}{(s-b)^\beta} ds +$$

$$+\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]} \frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right\}+W_B^1(s)-W_B^1(y)\right]} \frac{B(s)f(t,s)}{(s-b)^\beta} ds,$$

$\hbar_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $q_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ – *функсияҳои ихтиёрии нуқтаҳои* Γ_1, Γ_2, $\hbar_1(\infty) = 0$ *бо рафтори асимптотикии:*

$$\hbar_1(x) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{24}}\right], \zeta_{24} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$q_1(b) = 0$ *бо рафтори асимптотикии:*

$$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_{14}}], \eta_{14} > \beta - 1, y \to b,$$

мебошанд.

Натиҷаи 2.3.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.3.1 ҳалли муодилаи интегралии (17) намуди (19) аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба нол мубаддал мегардад ва рафтори асимптотикии он ҳангоми* $x \to \infty$, $y \to b$ *аз рӯйи формулаҳои*

$u(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{25}}\right], \zeta_{25} > 1-\alpha,$ *ҳангоми* $x \to \infty$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{15}}], \eta_{15} > \beta - 1$ *ҳангоми* $y \to b$,

муайян карда мешаванд.

Ҳолатҳои боқимонда низ ҳамин тавр таҳқиқ карда мешаванд.

Дар **параграфи чоруми боби дуюм** муодилаи интегралии дученакаи ғайримоделии (17) дар ҳолати байни ҳам вобаста набудани функсияҳои дар ядро ҷойгир буда таҳқиқ карда шудааст, яъне $C(x,y) \neq A(x)B(y)$.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор дар муодилаи интегралии (17)* $0 < \alpha < 1, \beta > 1$, *функсияҳои* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1}), B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *ва дар атрофи нуқтаҳои* $x = \infty, y = b$ *шартҳои (10), (18) – ро қаноат кунанд,инчунин* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$,

$C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *функсияи* $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии (12) ва*

$$C_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{16}}], \eta_{16} > \beta - 1, x \to \infty, \quad (20)$$

ба нол мубаддал мегардад, бошанд.

Функсияи $\mathcal{H}_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии*

$\mathcal{H}_1(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{26}}\right], \delta_{26} > 1-\alpha$, *ҳангоми* $x \to \infty$,

$\mathcal{H}_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{17}}], \eta_{17} > \beta - 1$, *ҳангоми* $y \to b$

ба нол мубаддал мегардад.

Он гоҳ ҳалли муодилаи интегралии (17) дар синфи функсияҳои $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *ба нол мубаддалшаванда ба ҳалли муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо махсусиятҳои сусти намуди зерин баробарқувва аст:*

$$\upsilon_1(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\upsilon_1(t,s)ds}{(s-b)^\beta} = \mathcal{H}_1(x,y), \quad (21)$$

дар ин ҷо

$\upsilon_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) - B(b)\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} u(x,y)$,

$\mathcal{H}_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) - B(b)\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} \times$

$\times\, U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] = \mathcal{H}_1[\hbar_1(x), q_1(y), f(x,y)]$.

Теоремаи 2.4.2. *Бигузор дар муодилаи интегралии (17)* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, *функсияҳои* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *ва дар атрофи нуқтаҳои* $x = \infty$, $y = b$ *мувофиқан шартҳои (10) ва (18)- ро қаноат кунанд,* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *функсияи* $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии*

$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{27}}\right], \zeta_{27} > 1-\alpha$, *ҳангоми* $x \to \infty$,

$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{18}}], \eta_{18} > \beta - 1$ *ҳангоми* $y \to b$

ба нол мубаддал мегардад.

Функсияи $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *ва дар* Γ_1 *ва* Γ_2 *бо рафторҳои асимптотикии (12) ва (20) ба нол мубаддал мегардад. Он гоҳ муодилаи интегралии (17) ҳалли ягона дорад ва ба намуди:*

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x) + B(b)\omega_b^\beta(y) - W_B^1(y)} \Bigg[\mathcal{H}_1[0,0,f(x,y)] - \\ - \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s)\mathcal{H}_1[0,0,f(t,s)]ds\Bigg] \equiv \mathcal{Q}_1^1[f(x,y)], \quad (22)$$

тасвир карда мешавад, дар ин ҷо $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *– резолвентаи муодилаи интегралии дученака бо махсусиятҳои сусти намуди (21) мебошад.*

Натиҷаи 2.4.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.4.2 ҳалли муодилаи интегралии (17) намуди (22) аз синфи* $C(\overline{D})$ *ба нол мубаддал мегардад ва рафтори асимптотикии он ҳангоми* $x \to \infty$, $y \to b$ *аз руйи формулаҳои*

$u(,y) = o\left[x^{-\zeta_{28}}\right], \zeta_{28} > 1 - \alpha$ *ҳангоми* $x \to \infty$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{19}}], \eta_{19} > \beta - 1$ *ҳангоми* $y \to b$

муайян карда мешавад.

Ба ҳамин монанд ҳолатҳои боқимонда $A(\infty) < 0, B(b) < 0; A(\infty) > 0, B(b) < 0; A(\infty) < 0, B(b) > 0$ таҳқиқ карда мешавад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо.
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ барои рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии бисёрченакаи намуди Волтерра бо нуқтаҳои махсус, инчунин барои ҳалли масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода шуда метавонанд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти ҶТ нашр шудаанд:

[1–М] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.3-5.

[2–М] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2018. – Т. 61. – №4. – С. 331-337.

[3–М] Хушвахтов М.Б**.** О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №1. – С.44-49.

[4–М] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2019. – Т. 62. – №9-10. – С. 533-540.

[5–М] Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе. [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №2. – С.20 - 24.

[6–М] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо особой линией на полосе // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №3. – С.19 - 23.

Мақолаҳои интишорёфта дар дигар маҷҷаллаву маҷмӯаҳои илмӣ:

[7– M] Khushvakhtov M.B. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip[Текст]/ Rajabova L.N., Khushvakhtov M.B.// Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2019 – №4 (129) – С.67-72.

[8–М] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/М.Б. Хушвахтов// Международный научный журнал «Молодой ученый». –2019 – №49 (287) – часть 1 – С.1 - 3.

Маводҳои конференсия ва фишурдаи маърӯзаҳо:

[9–М] Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов// Материалы международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата «Современные проблемы математики и их приложения» (Таджикистан, г.Душанбе, 25-26 сентября 2018г.). – С.205-210.

[10–М] Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ М.Б.Хушвахтов// Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова «Математический анализ и его приложения» (г. Душанбе, 10-11 июня 2019г.). – С.263-267.

[11–М] Хушвахтов М.Б. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе[Текст]/Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов //Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе» (Башкортостан, г. Стерлитамак, 23-25 мая 2019г.). 2019.– С.186-189.

[12–М] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы республиканской научно-теоретический конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «Годом развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021гг.) и «400-летию Миробида Сайидо Насафи» (г. Душанбе, 20-27 апреля 2019г.). – Т. 1. – С.36-37.

[13–М] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда функции, присутствующие в ядрах не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию д.ф.-м.н., профессора Джангибекова Гулходжа «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Таджикистан, г. Душанбе, 30-31 января 2020г).

Шарҳи мухтасар
ба кори диссертатсионии Хушвахтов Муҳидин Буракшоевич дар мавзӯи «Баъзе синфҳои махсуси муодилаҳои интегралии намуди Вольтерра барои соҳаи номаҳдуд» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01– Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *муодилаи интегралӣ, соҳаи номаҳдуд, тасма, махсусият, махсусияти суст, фавқулмахсусият, муодилаи моделӣ, муодилаи ғайримоделӣ, масъалаҳои канорӣ, ядро, функсия, параметрҳо, резолвента.*

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ ба рушди минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегралии дученака ва бисёрченакаи намуди Волтерра бо хатҳои махсус дар тасма нигаронида шудааст.

Навгониҳои илмӣ. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатанд аз:

- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма;
- гузошта ва таҳқиқ карда шудани масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои моделии дученакаи интегралии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма дар ҳолати байни ҳам вобаста будани параметрҳо.
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусият ва махсусияти суст дар тасма;
- ёфта шудани бисёршаклии ҳалҳои муодилаҳои дученакаи интегралии ғайримоделии намуди Волтерра бо махсусияти суст ва фавқулмахсусият дар тасма.

АННОТАЦИЯ

диссертации Хушвахтова Мухидина Буракшоевича на тему «Некоторые классы особых интегральных уравнений типа Вольтерра для неограниченных областей», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01–Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *интегральное уравнение, неограниченная область, полоса, особой, слабо-особой, сильно-особой, модельное интегральное уравнение, немодельное интегральное уравнение, граничные задачи, ядро, функция, параметры, резолвента.*

Цель работы. Основная цель диссертационной работы заключается в дальнейшем развитии теории двумерных и многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено многообразие решений модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

SUMMARY

Khushvakhtov Mukhidin Burakshoevich's dissertation on "Some classes of special integral equations of the Volterra type for infinite domains", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01-real, complex and functional analysis

Key words: *integral equation, infinite domain, band, special, weakly special, strongly special, model integral equation, non-model integral equation, boundary value problems, kernel, function, parameters, resolvent.*

Purpose of work. The main goal of the dissertation is to further develop the theory of two-dimensional and multidimensional Volterra integral equations with special lines on the strip.

Scientific novelty. The results of the dissertation are new, obtained by the author independently and consist of the following:

- a variety of solutions of two-dimensional Volterra-type model integral equations with a singular and weakly singular line on the band is obtained;
- boundary value problems for a two-dimensional Volterra integral equation with a singular and weakly singular line on the band are set and investigated in the case when the parameters of the equation are related to each other;
- a variety of solutions of two-dimensional Volterra integral equations with a strongly singular and weakly singular line on the band is obtained;
- boundary value problems for a two-dimensional Volterra integral equation with a strongly singular and weakly singular line on the band are set and investigated in the case when the parameters of the equation are related to each other;
- a variety of solutions of non-model two-dimensional Volterra integral equations with a singular and weakly singular line on the band is obtained;
- a variety of solutions of non-model two-dimensional Volterra integral equations with a strongly singular and weakly singular line on the band is obtained.