ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК-517.968.2 Бо ҳуқуқи дастхат

Қозиев Гулназар Мавлоназарович

БАЪЗЕ ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ ДУЧЕНАКА БО ХАРАКТЕРИСТИКАИ ТОҚ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 - таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Ҷангибеков Гулхоҷа**
доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муқарризони расмӣ: **Раҷабова Лутфия Нусратовна**
доктори илмҳои физикаю математика, Раиси комитети Маҷлиси намояндагони Маҷлиси Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон оид ба илм, маориф, фарҳанг ва сиёсати ҷавонони Тоҷикистон

Одинабеков Ҷасур Музофирович
номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи илмҳои табиӣ ва фундаменталии филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар ш.Душанбе

Муассисаи пешбар: Институти математикаи ба номи А.Ҷўраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия *24 апрели соли 2019 соати 10:00* дар ҷаласаи Шўрои диссертатсионии 6D КОА-012 дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз руйи нишонии: 734027, ш. Душанбе, кўчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.
Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат "___" __________ соли 2019 фиристода шуд.

Котиби илмии Шўрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор **Г. Ҷангибеков**

Тавсифи умумии диссертатсия

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқшаванда. Объекти асосии тадқиқотии ин диссертатсия оператори дученакаи интегралии сингулярии дар фазои лебегии вазндори $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ амалкунандаи Михлин-Кальдерон-Зигмунди

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{1}$$

(С.Г.Михлин,[1] A.Calderon, A.Zygmund,[2] A.Calderon, A.Zygmund,[3] A.Zygmund,[4] E.M.Stein[5]) мебошад, ки дар он D - соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ, бо сарҳади Γ аз миқдори охирноки хатҳои каҷи Ляпунов бо ҳам ғечиш надошта иборат буда, m - ададди ғайринулии бутун аст.

Муодилаҳои интегралӣ бо чунин операторҳо дар бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои аналитикии умумишуда (И.Н.Векуа [6]), назарияи инъикосҳои квазиконформӣ (Л.Альфорс[7], М.Шиффер [8]), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.Боярский [9], А.Д.Ҷураев [10,11,12] В.Н.Монахов [13]) ва дигарон вомехуранд. Бори нахуст чунин муодилаҳоро И.Н.Векуа [6] бо усули инъикосҳои фишурдашаванда дида баромадааст. А.Д.Ҷураев [10] муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаро дар фазои

[1]Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.

[2]Calderon A., Zygmund A.On the existense of certain singular integrals // Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3]Calderon A., Zygmund A. On singular integrals //American j.math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4]Zygmund A. On singular integrals // Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5]Stein E.M. Note on singular integral // Proc. Amer. Math. Soc.-1957. -8, №2. p. 250-254

[6]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7]Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[8]Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международной математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9]Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: 1960.

[10]Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11]Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12]Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[13]Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

[6]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[10]Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

$L_p(D), 2 < p < \infty$ ба воситаи масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналитикии умумишуда омӯхтааст. И.И.Комяк [14,15,16] ва Н.Н.Василевский [17,18,19] барои омӯхтани муодилаҳои дученака дар фазои $L^p(D), 1 < p < \infty$ усули назарияи алгебраи банахиро истифода намудаанд.

L_p - назарияи муодилаҳои интегралии сингулярии бисёрченака дар соҳаҳои сарҳаддошта, ки онро Р.В. Дудучава [20,21] корбарӣ намудааст, имконият медиҳад, ки масъалаи тадқиқи нётеровӣ будани муодилаҳое, ки операторҳои S_m - ро дар бар мегиранд ба масъалаи факторизатсияи матриса – функсияҳои ратсионалӣ, аниқтараш ба ёфтани индекси хусусии онҳо овардa шаванд. Дар ин маврид ҷолиби диққат аст, ки аломати нётеровӣ будани муодилаҳои интегралии сингулярӣ ба намуди шартҳои ошкор ба воситаи коэффисиентҳо ифодашаванда ёфта шаванд.

Барои синфи васеъи муодилаҳои интегралӣ ин масъала дар мақолаҳои илмии Г.Ҷангибеков [22,23,24], К.Х. Бойматов ва Г. Ҷангибеков [25] ва шогир-

[14] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[15] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[16] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк//ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[17] Василевский Н.Л. Об алгебры, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.-1041-1044 с.

[18] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[19] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case. // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76.

[21] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

[22] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[23] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем., 1992, №9, с. 25-37.

[24] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[25] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

дони Г.Ҷангибеков [26,27,28,29] ба анҷом расонида шудааст. Дар ҳамаи мақолаҳои дар боло зикргардида фақат ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки оператори S_m характеристикаи ҷуфт дорад. Ҳолати тоқ будани характеристика фақат дар як мақолаи Г.Джангибеков [30] омӯхта шудааст.

Кори диссертатсионии мазкур ба тадқиқи хосиятҳои нётеровӣ будани операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ бахшида шудааст, ки дар онҳо коэффисиентҳояш бефосила ва инчунин канишнок мебошанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқи масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд мебошад, ки характеристикаи тоқ дошта коэффисиентҳояшон функсияҳои бефосила ва ё канишнок мебошанд.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

- барои як синфи операторҳои интегралии сингуляри дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои баъзе синфҳои шашкомпонентаи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд дар фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои як муодилаи модели интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок тавассути гузаштан ба системаи беохири муодилаҳои интегралӣ бо ядрои Коши ва ядрои якҷинсаи тартиби -1 шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

[26] Чоршанбиева М. Некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы с чётными характеристиками. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2017.

[27] Зарифбеков М. Некоторые классы двумерных интегральных оператров с подвижными и неподвижными особенностиями и их приложения к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2004.

[28] Худжаназарова Г. Некоторые двумерные сингулярные интегральные уравнения и их приложения к дифференциалным уравнениям. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2004.

[29] Одинабеков Дж.М. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями и их приложения к эллиптичиским системам дифференциалных уравнений. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2007.

[30] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9

- теоремаҳои ҳалшавандагии як синфи оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок исбот карда шудаанд ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда аҳамияти назариявӣ доранд. Онҳо дар тадқиқотҳои оянда назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳамчун асос истифода шуда метавонанд.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои дар диссертатсия истифодашуда ба воситаи элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ, ва усулҳои факторизатсияи матриса – функсияҳо асос ёфтаанд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосӣ дар семинарҳои илмии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон гузориш ва баррасӣ гардидаанд. Натиҷаҳои диссертатсия дар гузоришҳои конференсияҳои зерин барассӣ гардидаанд:

- конференсияи илмии байналхалқӣ бахшида ба 85-солагии академики АИ ҶТ Л.Г.Михайлов (Душанбе, 17-18 июни соли 2013.);
- конференсияи илмии байналхалқӣ бахшида ба 20-солагии Конститутсияи ҶТ (Хуҷанд, 28-29 июни соли 2014.);
- конференсияи илмии байналхалқӣ бахшида ба 80-солагии узви вобастаи АИ ҶТ, доктори илмҳои физикаю-математика, профессор В.Я.Стетсенко (Душанбе, 27-28 апрели соли 2015);
- конференсияи илмии байналхалқӣ "Проблемаҳои муосири математика ва татбиқи он" (Душанбе, Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов, 3-4 июни соли 2016.);
- конференсияи илмии байналхалқӣ бахшида ба 90-солагии академики АИ ҶТ, дорандаи ҷоизаи давлатӣ ба номи Абуали ибни Сино Михайлов Л.Г. (Душанбе, 27-28 феврали соли 2018).

Интишорот ва саҳми шахсии муаллиф. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 10 мақолаи илмӣ дарҷ гардидаанд. Аз онҳо 5 мақола дар маҷаллаҳои тақризшаванда, ки ба рӯйхати амалкунандаи КАО - и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тааллуқ доранд ва 5 мақолаи дигар дар маҷмӯаҳои маводи конференсияҳои байналхалқӣ чоп шудаанд.

Мақолаҳои [1] –[4] бо ҳаммуаллифӣ бо роҳбари илмӣ чоп шудааст, ки ба роҳбар гузориши масъала мансуб буда, ба диссертант исботи натиҷаҳои асосӣ тааллуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, шаш фасл, рӯйхати адабиёти истифодашуда, ки 60 номгӯйро дар бар мегирад ва аз 79 саҳифаи дар LaTeX саҳифабандӣ шуда иборат мебошад. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории дукаратаи теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ва формулаҳо мавриди истифода қарор дода шудааст, ки рақами якум бо рақами фасл, рақами дуюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ё формулаҳои ҳамин фасл мувофиқат мекунад.

Муҳтавои мухтасари кор

Диссертатсия аз шаш фасл иборат мебошад. Фасли 1-ум - фасли ёрирасон буда, дар он фазои функсияҳои дар диссертатсия истифодашуда тавсиф гардида, мафҳумҳои асосии назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахӣ амалкунанда гирд оварда шудаанд.

Дар фасли 2 дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ муодилаи интегралии зерин :

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S_m + d(z)\overline{S}_m K, \tag{2}$$

дида баромада мешавад, ки $m > 0$ - адади тоқ ва $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - функсияҳои бефосила дар $\overline{D}$ мебошанд.

Ба оператори A аз (2) матрица – функцияи

$$G_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\bar{t}^m & b(z) - d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{t}^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m \end{pmatrix}.$$

мувофиқ гузошта мешавад. Нишон дода мешавад, ки леммаи зерин ҷой дорад:

Лемма 1. *Матрисаи $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ ва $\forall z \in \overline{D}$ фақат ва фақат ҳамон вақт таназзулнаёбанда мешавад, ки яке аз нобаробариҳои*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$

иҷро гардад. Дар айни ҳол (3) ва (4) барои ягон қимати $z \in \overline{D}$ дар як маврид иҷро намешаванд, ки

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{c}b.$$

мебошанд.

Исбот карда мешавад, ки теоремаи зерин ҷой дорад:

Теорема 1. *Барои дар фазои $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ нётеровӣ будани оператори A зарур ва кифоя аст, ки яке аз нобаробариҳои (ноҳамҷоя)*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad и \quad \mu(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{6}$$

иҷро гардад. Дар ин маврид, агар шарти (5) иҷро шавад, индекси оператори A баробари нол ва агар шарти (6) иҷро шавад индекси $\varkappa$ ба

$$\varkappa = mInd_{\Gamma}\mu(t)$$

баробар мешавад.

Дар фасли 3 - и кори мазкур муодилаи интегралии характеристикаи тоқ доштаи шашкомпонентаи зерин

$$\mathcal{A} \equiv a(z)I + b(z)K + (c(z)I + d(z)K)S_m + (e(z)I + h(z)K)\overline{S}_m = g(z), \tag{7}$$

омӯхта мешавад, ки дар он коэффисиентҳои $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),$ $h(z)$ - функсияҳои комплексии дар $\overline{D} = D \cup \Gamma$ бефосила мебошанд.

Дар фазои вектории

$$L_p^2(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty,$$

оператори матрисавии

$$A = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m - e(z)S_{-m} & b(z)I - d(z)S_{-m} + h(z)S_m \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m - \overline{h(z)}S_{-m} & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} + \overline{e(z)}S_m \end{pmatrix}$$

- ро дида мебароем, ки $S_{-m} = -\overline{S}_m$ мебошад. Исбот карда мешавад, ки леммаи зерин ҷой дорад:

Леммаи 2. *Нётеровӣ будани оператори $\mathcal{A} : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ ба нётеровӣ будани оператори $A : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$ баробарқувва аст.*

Азбаски символи оператори S_m ба $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m}(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$ баробар аст, пас мувофиқи натиҷаҳои Р.В.Дудучава [20,21] барои нётеровӣ будани

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case. // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76.

[21] Duduchava On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

оператори матрисавии A зарур ва кифоя аст, ки муайянкунандаи рамзии он барои ҳамаи $z \in \overline{D}, |t| = 1$, $\det G_A(z,t) \neq 0$ бошад, ки $G_A(z,t)$:

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m - e(z)t^m & b(z) - d(z)t^m + h(z)\overline{t}^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m - \overline{h(z)}t^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m + \overline{e(z)}\overline{t}^m \end{pmatrix}$$

аст.

Леммаи 3. *Матрисаи $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ ва $\forall z \in \overline{D}$ фақат ва фақат ҳамон вақт таназзулнаёбанда мешавад, ки яке аз нобаробариҳои*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{8}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{9}$$

$$\Delta_3^2(z) + |\mu_3(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \tag{10}$$

иҷро гардад. Дар айни ҳол (8) - (10) барои ягон қимати $z \in \overline{D}$ дар як маврид иҷро намешаванд, ки

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda_1 = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu_1 = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$\lambda_2 = \overline{h}c - e\overline{d}, \quad \mu_2 = h\overline{d} - \overline{e}c, \quad \lambda_3 = \overline{a}e - b\overline{h}, \quad \mu_3 = a\overline{h} - \overline{b}e$$

мебошанд.

Теорема 2. *Барои дар фазои $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ нётеровӣ будани оператори A зарур ва кифоя аст, ки яке аз нобаробариҳои (ноҳамҷоя)*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{11}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \text{ и } \mu_1(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in \Gamma. \tag{12}$$

$$\Delta_1^3(z) + |\mu_3(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \text{ и } \mu_3(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in \Gamma \tag{13}$$

иҷро гарданд.

Дар айни ҳол агар шарти (11) иҷро шавад, индекси оператори A ба нол баробар мешавад, агар шарти (12) иҷро шавад индекси $\varkappa$ ба

$$\varkappa = mInd_\Gamma \mu_1(t)$$

ва агар шарти (13) иҷро шавад, пас

$$\varkappa = -mInd_\Gamma \mu_3(t)$$

мешавад.

Дар фасли 4 дар ҳамвории комплексии тағйирёбандаи $z = x + iy$ муодилаи интеграли моделии зерин омӯхта мешавад

$$f(z) - \lambda \frac{z}{|z|}(S_1\overline{f})(z) = g(z), \tag{14}$$

ки

$$(S_1\overline{f})(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad D = \{z : |z| < 1\}$$

мебошанд ва интеграл ба маънои қимати асосии Коши фаҳмида мешавад, λ - параметри комплексӣ, хат дар болои функсияи $f(z)$ маънои ба қимати ҳамроҳшудаи комплексӣ гузаштан аст.

Дар назар дошта мешавад, ки функсияи номаълуми $f(z)$ ва аъзои озоди $g(z)$ тааллуқи фазои банахии $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\}$$

мебошанд, ки $1 < p < \infty$, β - адад аз интервали $(0, 1)$ аст.

Хусусияти хоси муодилаи (14) аз он иборат аст, ядрои он махсусияти сингулярӣ бо характеристикаи тоқи $e^{-i\theta}$ дорад ва айни замон коэффисиенти назди интеграли сингулярӣ дар нуқтаи $z = 0$ махсусияти намуди $\frac{z}{|z|}$ дорад. Чуноне, ки аз тадқиқот мебарояд ҳарду ин омилҳо ба нётеровӣ будани муодилаи (14) ва индекси он таъсири амиқ мерасонанд.

Ба муодилаи (14) усули кори Л.Г.Михайловро [31] тадбиқ намуда нисбати коэффисиентҳои Фурйеи $f_k(r)$ функсияи $f(z)$ миқдори беохири муодилаҳои интегралии намуди

$$(A_kf_k)(r) \equiv f_k(r) + |\lambda|^2[S_\Gamma + \Theta_k]^2f_k(r) = q_k(r), k = 0, 1, \cdots \tag{15}$$

бо оператори интегралии сингулярии Коши ва оператори ядрои якҷинсаи тартиби -1 :

$$(S_\Gamma f_k)(r) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{f_k(\rho)}{\rho - r}d\rho, \quad (\Theta_kf_k)(r) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{1}{r}\Theta_k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)f_k(\rho)d\rho,$$

[31] Л.Г.Михайлов О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами ДАН СССР, -1970. т. 192,№2, -с. 272-275.

ҳосил мекунем, ки $\Theta_k(\tau)$ функсияи Лежандр бо идекси нимбутун мебошад. Мувофиқи натиҷаҳои Р.В.Дудучава [32] ва Л.Г.Михайлов [33], символи ин операторҳо намуди зерин доранд:

$$s_\beta(x) = \operatorname{cth}\pi(x+i\beta), \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \Theta_k(\rho)\rho^{-\beta+ix}d\rho,$$

ки

$$\operatorname{cth} z = \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}},$$

β - нишондиҳандаи вазни фазои $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ аз интервали $(0,1)$ $(1<p<\infty)$,

$$A_{k,\beta}(x) = 1+|\lambda|^2\left[s^2_\beta(x)+2s_\beta(x)H_k(x)+H^2_k(x)\right], x\in(-\infty,+\infty), k=0,1,\dots. \tag{16}$$

$$A_{k,\beta,p}(x,\xi) = \begin{cases} A_{k,\beta}(x), & \text{если} \quad x\in(-\infty,+\infty),\\ 1+|\lambda|^2 s^2_{1/p}(\xi), & \text{если} \quad x=\pm\infty, \quad \xi\in(-\infty,+\infty). \end{cases} \tag{17}$$

мебошанд. Исбот карда мешавад, ки чунин адади натуралии N_0 ёфт мешавад, ки барои $k>N_0$ ҳамаи муодилаҳои интегралии (15) бе ягон шарт ҳалли ягона доранд.

Теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 3. *Барои дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<1)$ нормалӣ ҳалшаванда будани муодилаи (14) зарур ва кифоя аст, ки*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi)\neq 0, \quad -\infty\le x\le+\infty, \quad -\infty\le\xi\le+\infty$$

бошад ва айни ҳол индекси муодилаи (14) ба

$$\varkappa = \sum_{k=0}^{N_0} Ind A_{k,\beta,p}(x,\xi)$$

[32] Дудучава Р.В Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979, 133 с.

[33] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. Душанбе: Дониш, 1966, 47 с.

баробар аст.

Дар фасли 5 класси муодилаҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишноки зерин

$$a(z)f(z) + \frac{b(z)}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_{D} \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + c(z)\iint\limits_{D} B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = g(z) \tag{18}$$

омӯхта мешавад, ки $z \in D$, $\theta = \arg(\zeta - z)$, ds_ζ – элементи ченаки Лебег, интеграли якум ба маънои қимати асосии Коши фаҳмида мешавад. Мувофиқи ин муодилаи ба (18) ҳамроҳшуда

$$\begin{gathered} a(z)\psi(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} \overline{b(\zeta)}\frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|}\frac{e^{i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{\psi(\zeta)}ds_\zeta + \\ + \iint\limits_{D} c(\zeta)B_1(\zeta,\overline{z})\psi(\zeta)ds_\zeta = q(z), z \in D, \end{gathered} \tag{19}$$

мебошад, ки $\psi(z), q(z) \in L^{p'}_{2-\beta-2/p'}(D)$, $B_1(z,\zeta)$ – поликерн-функцияи Бергмани соҳаи D аст, ки ба воситаи функсияи Грин барои оператори Лапласа $G(z)$ дар намуди (ниг. Г.Ҷангибеков [30])

$$B_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(l+1)!}C^k_{-\frac{1}{2}}C^l_{-\frac{1}{2}}(\zeta - z)^k(\overline{\zeta} - \overline{z})^l\frac{\partial^{k+l+2}G(z,\zeta)}{\partial z^k\partial\overline{\zeta}^l},$$

ифода меёбад ва

$$C^k_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

мебошад. Функсияи $B_1(z,\zeta)$ фақат дар сарҳади соҳа ҳангоми $z = \zeta \in \Gamma$ будан махсусият дорад.

Теоремаи 4. *Бигузор дар (18) коэффисиентҳои* $a(z), b(z), c(z)$ *функсияҳои бефосила дар* $\overline{D}$, *ва* $b(0) = 0$ *бошанд. Агар* $|a(z)|+|b(z)| \neq 0$ *ҳангоми* $z \in \overline{D}$, *ва* $a(t) + c(t) \neq 0$ *ҳангоми* $t \in \Gamma$, *бошанд, онгоҳ муодилаи (18) дар ҳар як фазои* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$ *нётеровӣ буда индекси он ба*

$$\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t) + c(t)\}$$

[30] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9

баробар мешавад. Муодилаи якҷинсаи (18) ва инчунин муодилаи якҷинсаи (19) дар ҳамаи фазоҳои номбаршуда ҳалҳои яккела доранд.

Теоремаи 5. *Бигузор дар (18) $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ бефосила дар $\overline{D}$ ва $a(0)=0$ бошанд. Агар $|a(z)|+|b(z)|\neq 0$, $z\in\overline{D}$ ва $a(t)+c(t)\neq 0$ ҳангоми $t\in\Gamma$ бошанд, онгоҳ:*

1) муодилаи (18) дар ҳар як фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $0<\beta<1$, $0<p<\infty$ нётеровӣ мебошанд ва индекси он ба

$$\varkappa=-\{Ind_\Gamma(a(t)+c(t))+1\}$$

баробар аст.
2) муодилаи якҷинсаи (18) ва инчунин (19) дар ҳамаи фазоҳои номбаршуда ҳалҳои яккела доранд.

Теоремаи 6. *Бигузор $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ дар $\overline{D}$ бефосила ва $a(0)\neq 0$ бошанд. Агар $|a(z)|+|b(z)|\neq 0$, $z\in\overline{D}$, $a(t)+c(t)\neq 0$ $t\in\Gamma$, ва*

$$\prod_{k=0}^{N_0}A_{k,\beta,p}(x,\xi)\neq 0,\quad -\infty\leq x\leq+\infty,\quad -\infty\leq\xi\leq+\infty$$

бошанд онгоҳ:

1) муодилаи (18) дар $L^p_{\beta-2/p}(D)$ нётеровӣ буда индекси он ба

$$\varkappa=-Ind_\Gamma\{a(t)+c(t)\}+\varkappa_{n\beta}(\lambda)$$

баробар мешавад, ки

$$\varkappa_{n\beta}=\sum_{k=0}^{N_0}IndA_{k,\beta,p}(x,\xi)$$

аст.
2) барои ҳар як қимати β, $0<\beta<1$ муодилаи якҷинсаи (18) дар ҳамаи фазоҳои $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ва муодилаи якҷинсаи (19) *– дар $L^p_{2-\beta-2/p(D)}$, $1<p<\infty$ ҳалҳои яккела доранд.*

Дар фасли 6 класси муодилаҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ в коэффисиентҳои канишноки зерин

$$A\equiv a(z)I+b(z)K+c(z)\frac{z}{|z|}S_1+d(z)\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K+e(z)\overline{B_1}+h(z)B_1K+T \tag{20}$$

дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$, $0<\beta<1$, омӯхта мешавад, ки I - оператори воҳидӣ; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $e(z)$, $h(z)$ - функсияҳои бефосилаи комплексӣ дар $\overline{D} = DU\Gamma$,

$$(S_1 f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in D,$$
$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad \theta = \arg(\zeta - z)$$

мебошанд.

Леммаи 4. *Матрисаи* $G_A(z,t)$ *фақат ва фақат ҳамон вақт барои* $z \in \overline{D}$ *ва* $|t| = 1$ *таназзулнаёбанда мебошад, ки яке аз нобаробариҳои*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{21}$$
$$\Delta_2^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \tag{22}$$

иҷро шавад. Дар айни ҳол ин нобаробариҳо барои ягон қимати $z \in \overline{D}$ *ҳамҷоя иҷро намешаванд, ки*

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$e_1 = \overline{a}e - b\overline{h},\ h_1 = \overline{a}h - b\overline{e},\ e_2 = \overline{d}e - c\overline{h},\ h_2 = \overline{d}h - c\overline{e}.$$

мебошанд.

Бигузор $\Lambda = |\frac{d(0)}{a(0)}|$, агар $a(0) \neq 0$, баробари $|\frac{c(0)}{b(0)}|$, агар $b(0) \neq 0$ бошанд.

Теоремаи зерин исбот шудааст

Теоремаи 7. *Бигузор дар (20)* $\lambda(0) = 0$ *бошад. Агар* $\Lambda \neq 1$ *яке аз нобаробариҳои ноҳамҷояи (21) ё (22) иҷро шаванд, онгоҳ оператори* A *аз (20) дар фазои* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1$ *нётеровӣ аст ва дар айни ҳол агар шарти (21) иҷро шавад, пас индекси оператор ба* A

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{\Delta_1(t) + e_1(t) - \lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{h_1(t)}\} - \varkappa_\beta(\Lambda)$$

баробар мешавад ва агар шарти (22) иҷро гардад, пас

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{e_2(t) + \beta_2(t)(\Delta_2(t) - \lambda_2(t)\overline{h_2(t)})\} - \varkappa_\beta(\Lambda),$$
$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} IndA_{k,\beta,p}(x,\xi)$$

мешавад.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Тоҷикистон нашр гардидаанд:

1. Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №10, с. 886-893.
2. Козиев Г.М. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №11, с. 963-969.
3. Козиев Г.М. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2017, т.60, №10, с. 482-489.
4. Козиев Г.М. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2017, №1-5, с. 212-216.
5. Козиев Г.М. О нётеровости и индексе шестикомпонентного двумерного сингулярного интегрального оператора с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.М.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2019, №1, с. 18-21.

Дар дигар нашрияҳо:

6. Козиев Г.М. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных оператров /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// "Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений". Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);

7. Козиев Г.М. Об одном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд. научной конф., посвящённой 20-летию Конституции РТ. -Худжанд 2 (29) 2014, с.152-154.
8. Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном оператре с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд.научной конф., посвящённой 80-летию члена-кореспондента АН РТ, д.ф.м.н, профессора В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015г.)
9. Козиев Г.М. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечетной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 2016 г.).
10. Козиев Г.М. Об условиях нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечетной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Шарҳи мухтасари диссертатсияи Қозиев Гулназар Мавлоназарович дар мавзӯи "Баъзе операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ," ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст.

Вожаҳои калидӣ: интеграли сингулярии дученака, символи оператор, индекси оператор, нётеровӣ будани оператор.

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқшаванда. Объекти асосии тадқиқшавии ин диссертатсия оператори дученакаи интегралии сингулярии дар фазои лебегии вазндори $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ Михлин-Кальдерон-Зигмунди

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

мебошад, ки дар он D -соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ, ки сарҳади Г аз миқдори охирноки хатҳои каҷи Ляпунов бо ҳам нуқта надошта иборат буда, m -адади ғайринулии бутун аст.

Муодилаҳои интегралӣ бо чунин операторҳо дар бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои аналитикии умумишуда (И.Н.Векуа), назарияи инъикосҳои квазиконформӣ (Л.Альфорс, М.Шиффер), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.В.Боярский, А.Д.Ҷураев, В.Н.Монахов) ва дигарон вомехуранд. Бори нахуст чунин муодилаҳоро И.Н.Векуа бо усули инъикосҳои фишурдашаванда дида баромадааст. А.Д.Ҷураев муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаро дар фазои $L_p(D), 2 < p < \infty$ ба воситаи масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналитикии умумишуда омӯхтааст. И.И.Комяк ва Н.Л.Василевский барои омӯхтани муодилаҳои дученака дар фазои $L^p(D), 1 < p < \infty$ усули назарияи алгебраи банахиро истифода намудаанд.

L_p - назарияи муодилаҳои интегралии сингулярии бисёрченака дар соҳаҳои сарҳаддошта, ки онро Р.В.Дудучава корбарӣ намудааст, имконият медиҳад, ки масъалаи тадқиқи нётеровӣ будани муодилаҳое, ки операторҳои S_m - ро дар бар мегиранд ба масъалаи факторизатсияи матриса – функсияҳои ратсионалӣ, аниқтараш ба ёфтани индекси хусусии онҳо оварда шаванд. Дар ин маврид ҷолиби диққат аст, ки аломати нётеровӣ будани муодилаҳои интегралии сингулярӣ ба намуди шартҳои ошкор ба воситаи коэффисентҳо ифода шаванда ёфта шаванд:

Барои синфи васеъи муодилаҳои интегралӣ ин масъала дар мақолаҳои илмии Г.Ҷангибеков, К.Х.Бойматов ва шогирдони Г.Ҷангибеков ба анҷом расонида шудааст.

Дар ҳамаи мақолаҳои дар боло зикргардида фақат ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки оператори S_m характеристикаи ҷуфт дорад. Ҳолати тоқ будани характеристика фақат дар як мақолаи Г.Ҷангибеков омӯхта шудааст.

Кори диссертатсионии мазкур ба тадқиқи хосиятҳои нётеровӣ будани операторхои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ бахшида шудааст, ки дар онҳо коэффисиентҳояш бефосила ва инчунин канишнок мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои дар диссертатсия истифодашуда ба воситаи элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ, ва усулҳои факторизатсияи матриса – функсияҳо асос ёфтаанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқӣ масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд мебошанд, ки характеристикаи тоқ дошта коэффисиентҳояшон функсияҳои бефосила ва ё канишнок мебошанд.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд, нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

- барои як синфи операторҳои интегралии сингуляри дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои баъзе синфҳои шашкомпонентаи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд дар фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои як муодилаи моделии интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок тавассути гузаштан ба системаи беохири муодилаҳои интегралӣ бо ядрои Коши ва ядрои якҷинсаи тартиби -1 шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- теоремаҳои ҳалшавандагии як синфи оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок исбот карда шудаанд ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда аҳамияти назариявӣ доранд. Онҳо дар тадқиқотҳои оянда назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳамчун асос истифода шуда метавонанд.

РЕЗЮМЕ

диссертации Козиева Гулназара Мавлоназаровича на тему "Некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы с нечётными характеристиками," представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, символ оператора, индекс оператора, нётеровость оператора.

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работой является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлин-Кальдерон-Зигмунда

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения с такими операторами встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (И.Н.Векуа), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс, М.Шиффер), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.В.Боярский, А.Д.Джураев, В.Н.Монахов) и другие. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. И.И.Комяк и Н.Л.Василевский применили при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова, К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова а также в работах учеников Г.Джангибекова. Во всех вышеуказанных работах рассматривались случаи, когда сингулярный интеграл S_m имел характеристику чётного порядка. Что касается случая нечётного m, то в этом направлении была выполнена лишь одна работа Г.Джангибекова.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с нечётной характеристикой с непрерывными, а также разрывными коэффициентами.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области с нечётными характеристиками с непрерывными, а также с разрывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчёта индекса;

- для некоторых шестикомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора;

- для одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения с нечётной характеристикой и с разрывным коэффициентом путем перехода к бесконечной системе интегральных уравнений с ядром Коши и с ядрами однородными степени -1 получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой и разрывным коэффициентом и получена формула для подсчёта индекса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

RESUME

of the dissertation of Koziev Gulnazar Mavlonazarovich on the theme "Some two-dimensional singular integral operators with odd characteristics,"submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01-real, complex and functional analysis.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, operator index, operator Noetherianness.

Relevance of the research theme. The main object of this dissertation is the two-dimensional singular integral Mikhlin-Zygmund operator acting in Lebesgue function space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$,

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{23}$$

Where D is a bounded region of the complex plane, the boundary of which consists of a finite number of simple closed Lyapunov curves Γ that do not intersecteach other, $m \neq 0$ - is a integer.

The Integral equations with such operators are encountered in many problems of the theory of generalized analytic functions (I.N. Vekua), the theory of quasiconformal mappings (L. Alfors, M. Schiffer), the theory of partial differential equations (B.V. Boyarsky, A.D. Djuraev, B.N. Monks) and others. For the first time such equations were considered by I.N. Vekua method of compressing mappings. A. D.Juraev investigated two dimensional singular integral equations in $L_p(D), 2 < p < \infty$ spaces using the reduction to boundary value problems for generalized analytic functions. I.I. Komiak and N.L. Vasilevsky applied the methods of the theory of Banach algebras when studying two-dimensional equations in $L^p(D), 1 < p < \infty$ spaces.

The developed R.V.Duduchavaya L_p, - theory, $1 < p < \infty$,, multidimensional singular integral equations on manifolds with boundary makes it possible to reduce the study of Noetherianproperties of equations containing the S_m operators and their various combinations to the factorization of the corresponding rational matrix functions, or rather, to find them private indices. In this case, it is of interest to establish the Noetherian criterion of the considered two-dimensional singular integral equation in the form of explicit conditions on its coefficients. For a wide class of integral equations, this was done in the works of G. Jangibekov, K.Kh. Boymatov and G. Jangibekov as well as in the works of students of Jangibekov G. In all the above works, cases were considered when the singular integral of the S_m had a characteristic of even order. As for the case of the odd X, in this direction only one work of G. Jangibekov was performed.

This dissertation work is devoted to the study of Noetherian properties of two-dimensional integral operators in a bounded domain with an odd characteristic with continuous as well as discontinuous coefficients.

Research methods. The method used in the dissertation is based on the elements of functional analysis and the theory of functions of complex variables, as well as the method of factorization of matrix functions.

Objective. The purpose of dissertation is to study the question of the solvability of certain classes of two Џ dimensional singular integral equations in a bounded domain with odd characteristics with continuous as well as with discontinuous coefficients.

Scientific novelty. The results for the defense are new and are as follows:

- for one class of two-dimensional singular integral operators with an odd characteristic over a bounded domain in weight Lebesgue spaces, effective necessary and sufficient conditions for Noetherianness were found and a formula for calculating the index was obtained;

- for some six-component classes of two-dimensional singular integral operators with odd characteristic over a bounded domain in weight spaces with necessary weights, sufficient and sufficient Noetherian conditions were obtained, and formulas were given for calculating the index;

- for one model two-dimensional singular integral equation with an odd characteristic and a discontinuous coefficient, by passing to an infinite system of integral equations with Cauchy kernel and with homogeneous kernels of degrees -1, necessary and sufficient conditions for Noetherness and a formula for calculating the index were obtained;

- a solvability theorem was proved for a class of two-dimensional singular integral operators with odd characteristic and a discontinuous coefficient and a formula for calculating the index was obtained.

The theoretical and practical significance of the work. The results obtained in the dissertation are theoretical. They can serve as the basis for further theoretical studies in the theory of boundary value problems for partial differential equations.

Ба матбаа 01.03.2019 супорида шуд.
Ба чопаш 04.03.2019 имзо шуд.
Қогази офсет. Андозаи 60х84 1/16. Ҷузъи чопӣ 1,5.
Супориши № 25. Адади нашр 100 нусха.
Матбааи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
кӯчаи Лоҳутӣ 2

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.968.2 На правах рукописи

Козиев Гулназар Мавлоназарович

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕЧЁТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Джангибеков Гулходжа**
доктор физико - математических наук,
профессор кафедры функционального
анализа и дифференциальных уравнений
Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Раджабова Лутфия Нусратовна**
доктор физико-математических наук,
председатель комитета Маджлиси
намояндагон и Маджлиси Оли Республики
Таджикистан по науке, образованию, культуре
и молодежной политике Таджикистана

Одинабеков Джасур Музофирович
кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой фундаментальных
и естественных наук филиала Московского
государственного университета
им. М.В.Ломоносова в г.Душанбе.

Оппонирующая организация: Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан.

Защита состоится *24 апреля 2019 г. в 10:00 часов* на заседании диссертационного совета 6D КОА-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, Республика Таджикистан г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук
профессор **Г. Джангибеков**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работой является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлин-Кальдерон-Зигмунда

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{1}$$

(С.Г.Михлин[1], A.Calderon A.Zygmund[2], A.Calderon A.Zygmund[3], A.Zygmund [4], E.M.Stein[5]) где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения с такими операторами встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (И.Н.Векуа[6]), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс[7], М.Шиффер[8]), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.Боярский[9], А.Д.Джураев[10,11,12], В.Н.Монахов[13]) и другие. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа[6] методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев[10] исследовал двумерные сингулярные инте-

[1]Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.

[2]Calderon A., Zygmund A.On the existense of certain singular integrals // Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3]Calderon A., Zygmund A. On singular integrals //American j.math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4]Zygmund A. On singular integrals // Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5]Steine E.M. Note on singular integral // Proc. Amer. Math. Soc.-1957. -8, №2. p. 250-254

[6]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7]Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[8]Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международной математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9]Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: 1960.

[10]Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11]Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12]Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[13]Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

[6]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[10]Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

гральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщённых аналитических функций. И.И.Комяк[14,15,16] и Н.Н.Василевский[17,18, 19] применили при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой[20,21] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова[22,23,24], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова[25] а также в ра-

[14] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[15] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[16] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк//ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[17] Василевский Н.Л. Об алгебры, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.-1041-1044 с.

[18] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[19] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case. // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76.

[21] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

[22] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[23] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем., 1992, №9, с. 25-37.

[24] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[25] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

ботах учеников Г.Джангибекова[26,27,28,29]. Во всех вышеуказанных работах рассматривались случаи, когда сингулярный интеграл S_m имел характеристику чётного порядка. Что касается случая нечётного m, то в этом направлении была выполнена лишь одна работа Г.Джангибекова[30].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с нечетной характеристикой с непрерывными, а также разрывными коэффициентами.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области с нечётными характеристиками с непрерывными, а также с разрывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и получена формула для подсчета индекса;

- для некоторых шестикомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;

- для одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения с нечетной характеристикой и с разрывным коэффициентом путем перехода к бесконечной системе интегральных уравнений с ядром Коши и с ядрами однородными степени -1 получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;

[26] Чоршанбиева М Некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы с чётными характеристиками. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2017.

[27] Зарифбеков М. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностиями и их приложжения к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2004.

[28] Худжаназарова Г Некоторые двумерные сингулярные интегральные уравнения и их приложения к дифференциалным уравнениям. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2004.

[29] Одинабеков Дж.М. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями и их приложения к эллиптиским системам дифференциалных уравнений. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2007.

[30] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9

- доказана теорема разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой и разрывным коэффициентом и получена формула для подсчета индекса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробации результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции, посвященной 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвященной 80-летию члена-корреспондента АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова,2016 г.);
- международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах. Из них 5 статей опубликовано в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а 5 статей в материалах международных конференции.

Работы [1] –[4] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов, списка цитированной литературы из 60 наименований и заключения, занимает 79 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером раздела, вторая указывает на номер теорем, лемм или формулы в данном подразделе.

Краткое содержание работы

Работа состоит из шести разделов. Раздел 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделе 2 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующее интегральное уравнение:

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S_m + d(z)\overline{S}_m K, \tag{2}$$

где $m > 0$ - нечётное число и $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ функции.

Оператору A из (2) ставится в сответсвие следующая матрица функция:

$$G_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\bar{t}^m & b(z) - d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{t}^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m \end{pmatrix}.$$

Показывается, что имеет место

Лемма 1. *Матрица $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$

причем (3) и (4) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{c}b.$$

Доказывается, что справедлива следующая

Теорема 1. *Для нётеровости оператора* A *в пространстве* $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad и \quad \mu(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{6}$$

При этом, если выполнено условие (5), то индекс оператора A *равен нулю, а при выполнении (6) его индекс* $\varkappa$ *равен* $\varkappa = mInd_\Gamma \mu(t)$.

В разделе 3 настоящей работы изучается шестикомпонентное интегральное уравнение с нечетной характеристикой вида

$$\mathcal{A} \equiv a(z)I + b(z)K + (c(z)I + d(z)K)S_m + (e(z)I + h(z)K)\overline{S}_m = g(z), \tag{7}$$

где коэффициенты $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),\ h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции.

В векторном пространстве

$$L_p^2(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим следующий матричный оператор

$$A = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m - e(z)S_{-m} & b(z)I - d(z)S_{-m} + h(z)S_m \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m - \overline{h(z)}S_{-m} & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} + \overline{e(z)}S_m \end{pmatrix},$$

где $S_{-m} = -\overline{S}_m$. Доказывается, что имеет место

Лемма 2. *Нётеровость оператора* $\mathcal{A} : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ *эквивалентна нётеровости оператора* $A : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$.

Поскольку символ оператора S_m равен $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m} (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно Р.В.Дудучаве[20,21], для нётеровости операторной матрицы A необходимо, чтобы его символический определитель $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$:

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m - e(z)t^m & b(z) - d(z)t^m + h(z)\overline{t}^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m - \overline{h(z)}t^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m + \overline{e(z)}\overline{t}^m \end{pmatrix}.$$

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case. // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76.

[21] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

Лемма 3. *Матрица $G_A(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t|=1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z)+|\mu_1(z)|^2+|\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2+|\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{8}$$

$$\Delta_2^2(z)+|\mu_1(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{9}$$

$$\Delta_3^2(z)+|\mu_3(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{10}$$

При этом никакие два из этих неравенств не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1=|a|^2-|b|^2,\ \Delta_2=|c|^2-|d|^2,\ \lambda_1=\overline{a}c-b\overline{d},\ \mu_1=a\overline{d}-\overline{b}c,$$

$$\lambda_2=\overline{h}c-e\overline{d},\quad \mu_2=h\overline{d}-\overline{e}c,\quad \lambda_3=\overline{a}e-b\overline{h},\quad \mu_3=a\overline{h}-\overline{b}e.$$

Теорема 2. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L_p(D)$ $1<p<\infty$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z)+|\mu_1(z)|^2+|\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2+|\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{11}$$

$$\Delta_2^2(z)+|\mu_1(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \text{ и } \mu_1(\tau)\neq 0\ \forall \tau \in \Gamma. \tag{12}$$

$$\Delta_1^3(z)+|\mu_3(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \text{ и } \mu_3(\tau)\neq 0\ \forall \tau \in \Gamma. \tag{13}$$

При этом, если выполнено условие (11), то индекс оператора A равен нулю, а при выполнении (12) его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = mInd_\Gamma \mu_1(t),$$

а если выполнено (13), то

$$\varkappa = -mInd_\Gamma \mu_3(t).$$

В разделе 4 в комплексной плоскости переменной $z=x+iy$ изучается следующее модельное интегральное уравнение

$$f(z)-\lambda\frac{z}{|z|}(S_1\overline{f})(z)=g(z), \tag{14}$$

где

$$(S_1\overline{f})(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta-z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \quad \theta=\arg(\zeta-z), \quad D=\{z:|z|<1\},$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, λ - комплексный параметр, черта над функцией $f(z)$ означает переход к комплексно-сопряжённым значениям.

Предполагается, что искомая функция $f(z)$ и свободный член $g(z)$ принадлежат банахову пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty$, β - число из интервала $(0,1)$.

Характерной особенностью уравнения (14) является то, что оно содержит в ядре сингулярную особенность с нечётной характеристикой $e^{-i\theta}$, причём коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке $z = 0$ существенный разрыв вида $\frac{z}{|z|}$. Как выясняется, оба эти обстоятельства существенно влияют на нётеровость и индекс уравнения (14).

Применяя к уравнению (14) метод работы Л.Г.Михайлова[31] относительно коэффициентов Фурье $f_k(r)$ искомой функции $f(z)$, получим бесконечное число интегральных уравнений вида

$$(A_k f_k)(r) \equiv f_k(r) + |\lambda|^2 [S_\Gamma + \Theta_k]^2 f_k(r) = q_k(r), k = 0, 1, \cdots \qquad (15)$$

с сингулярным интегральным оператором Коши и оператором с однородным ядром степени -1 :

$$(S_\Gamma f_k)(r) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{f_k(\rho)}{\rho - r} d\rho, \quad (\Theta_k f_k)(r) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \Theta_k\left(\frac{\rho}{r}\right) f_k(\rho) d\rho,$$

где $\Theta_k(\tau)$ - функция Лежандра с полуцелым индексом. Согласно результатам Р.В.Дудучавы[32] и Л.Г.Михайлова[33], символы этих операторов имеют вид:

$$s_\beta(x) = \operatorname{cth} \pi(x + i\beta), \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty \Theta_k(\rho) \rho^{-\beta + ix} d\rho,$$

где

$$\operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}},$$

[31] Михайлов Л.Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами ДАН СССР, -1970. т. 192,№2, -с. 272-275.

[32]Дудучава Р.В Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979, 133 с.

[33]Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. Душанбе: Дониш, 1966, 47 с.

β - показатель веса пространства $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ из интервала $(0,1)$ $(1<p<\infty)$.

$$A_{k,\beta}(x)=1+|\lambda|^2\left[s^2_\beta(x)+2s_\beta(x)H_k(x)+H^2_k(x)\right], x\in(-\infty,+\infty), k=0,1,\ldots. \tag{16}$$

$$A_{k,\beta,p}(x,\xi)=\begin{cases}A_{k,\beta}(x), & \text{если} \quad x\in(-\infty,+\infty),\\ 1+|\lambda|^2 s^2_{1/p}(\xi), & \text{если} \quad x=\pm\infty, \quad \xi\in(-\infty,+\infty).\end{cases} \tag{17}$$

Доказывается, что найдется такое натуральное число N_0, что при $k>N_0$ все интегральные уравнения (15) безусловно разрешимы единственным образом. Имеет место

Теорема 3. *Для нормальной разрешимости уравнения (14) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<1)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi)\neq 0, \quad -\infty\leq x\leq+\infty, \quad -\infty\leq\xi\leq+\infty,$$

при этом индекс уравнения (14) равен

$$\varkappa=\sum_{k=0}^{N_0} Ind A_{k,\beta,p}(x,\xi).$$

В разделе 5 изучается следующий класс двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечетной характеристикой и разрывными коэффициентами

$$a(z)f(z)+\frac{b(z)}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta-z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta+c(z)\iint\limits_D B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta=g(z), \tag{18}$$

где $z\in D$, $\theta=\arg(\zeta-z)$, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. В соответствии с этим сопряженным к (18) будет уравнение

$$\begin{gathered}a(z)\psi(z)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \overline{b(\zeta)}\frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|}\frac{e^{i\theta}}{|\zeta-z|^2}\overline{\psi(\zeta)}ds_\zeta+\\ +\iint\limits_D c(\zeta)B_1(\zeta,\overline{z})\psi(\zeta)ds_\zeta=q(z), z\in D,\end{gathered} \tag{19}$$

где $\psi(z),\ q(z) \in L^{p'}_{2-\beta-2/p'}(D)$.

$B_1(z,\zeta)$ – поликерн-функция Бергмана области D, представимая через функцию Грина для оператора Лапласа $G(z)$ в виде (см. Джангибеков Г.[30])

$$B_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(l+1)!}C^k_{-\frac{1}{2}}C^l_{-\frac{1}{2}}(\zeta-z)^k(\overline{\zeta}-\overline{z})^l\frac{\partial^{k+l+2}G(z,\zeta)}{\partial z^k\partial\overline{\zeta}^l},$$

где

$$C^k_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Функция $B_1(z,\zeta)$ имеет особенности лишь при $z=\zeta\in\Gamma$.

Теорема 4. *Пусть в (18) $a(z), b(z), c(z)$ непрерывны в $\overline{D}, b(0)=0$. Если $|a(z)|+|b(z)|\neq 0$ при $z\in\overline{D},\ a(t)+c(t)\neq 0$ при $t\in\Gamma$, то уравнение (18) нётерово в каждом из пространств $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,\ 0<\beta<1$; его индекс*

$$\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t)+c(t)\},$$

однородное уравнение (18), а также однородное уравнение (19) имеют одни и те же решения во всех указанных пространствах.

Теорема 5. *Пусть в (18) $a(z),\ b(z),\ c(z)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $a(0)=0$. Если $|a(z)|+|b(z)|\neq 0,\ z\in\overline{D},\ a(t)+c(t)\neq 0$ при $t\in\Gamma$, то:*

1) уравнение (18) нётерово в каждом из пространств $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $0<\beta<1,\ 0<p<\infty$, причём его индекс равен

$$\varkappa = -\{Ind_\Gamma(a(t)+c(t))+1\};$$

2) однородное уравнение (18), а также (19) имеют одни и те же решения во всех указанных пространствах.

Теорема 6. *Пусть $a(z),\ b(z),\ c(z)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $a(0)\neq 0$. Если $|a(z)|+|b(z)|\neq 0,\ z\in\overline{D},\ a(t)+c(t)\neq 0\ t\in\Gamma$, и*

$$\prod_{k=0}^{N_0}A_{k,\beta,p}(x,\xi)\neq 0,\quad -\infty\leq x\leq+\infty,\quad -\infty\leq\xi\leq+\infty,$$

то:

1) уравнение (18) нётерово в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, при этом индекс уравнения (18) равен

$$\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t)+c(t)\}+\varkappa_{n\beta}(\lambda),$$

[30] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9

где
$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} IndA_{k,\beta,p}(x,\xi);$$

2) для рассматриваемого фиксированного значения β, $0<\beta<2$, однородное уравнение (18) имеет одни и те же решения во всех пространствах. $L^p_{\beta-2/p}(D)$, а однородное уравнение (19) *– в* $L^p_{2-\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$.

В разделе 6 изучается следующий класс двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами

$$A\equiv a(z)I + b(z)K + c(z)\frac{z}{|z|}S_1 + d(z)\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K + e(z)\overline{B_1} + h(z)B_1K + T \tag{20}$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,\ 0<\beta<1$, где I - тождественный оператор; $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),\ h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = DU\Gamma$ комплекснозначные функции,

$$(S_1f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta, \quad z\in D,$$
$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

Лемма 4. *Матрица $G_A(z,t)$ невырождена для всех $z\in\overline{D}$ и $|t|=1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z\in\overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z\in\overline{D}, \tag{21}$$
$$\Delta_2^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z\in\overline{D}. \tag{22}$$

причём (21) и (22) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z\in\overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2-|b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2-|d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$e_1 = \overline{a}e - b\overline{h},\ h_1 = \overline{a}h - b\overline{e},\ e_2 = \overline{d}e - c\overline{h},\ h_2 = \overline{d}h - c\overline{e}.$$

Пусть $\Lambda = |\frac{d(0)}{a(0)}|$, если $a(0)\neq 0$, и равно $|\frac{c(0)}{b(0)}|$, если $b(0)\neq 0$. Доказана следующая

Теорема 7. *Пусть в (20) $\lambda(0)=0$. Если $\Lambda\neq 1$ и выполняется одно из двух исключающих друг друга условий (21) или (22), то оператор A из*

(20) нётеров в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,\ 0<\beta<1$, *причём если выполнено условие (21), то индекс оператора* A

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{\Delta_1(t)+e_1(t)-\lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{h_1(t)}\} - \varkappa_\beta(\Lambda),$$

а если выполнено условие (22), то

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{e_2(t)+\beta_2(t)(\Delta_2(t)-\lambda_2(t)\overline{h_2(t)})\} - \varkappa_\beta(\Lambda).$$

$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} IndA_{k,\beta,p}(x,\xi).$$

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ:

1. Козиев Г. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №10, с. 886-893.
2. Козиев Г. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №11, с. 963-969.
3. Козиев Г. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// ДАН РТ, 2017, т.60, №10, с. 482-489.
4. Козиев Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2017, №1-5, с. 212-216.
5. Козиев Г. О нётеровости и индексе шестикомпонентного двумерного сингулярного интегрального оператора с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.М.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2019, №1, с. 18-21.

Работы в других изданиях:

6. Козиев Г. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// "Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений". Материалы международной научной конференции, посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.) с.41,42.
7. Козиев Г.М. Об одном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Материалы

межд. научной конф., посвященной 20-летию Конституции РТ. - Худжанд 2 (29) 2014, с.152-154.

8. Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Материалы межд. научной конф., посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН РТ, д.ф.м.н, профессора В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015г.) с.92-94.
9. Козиев Г.М. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 2016 г.) с.43-45.
10. Козиев Г. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) с.58-60.

РЕЗЮМЕ

диссертации Козиева Гулназара Мавлоназаровича на тему "Некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы с нечётными характеристиками," представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, символ оператора, индекс оператора, нётеровость оператора.

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работой является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлин-Кальдерон-Зигмунда

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{23}$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения с такими операторами встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (И.Н.Векуа), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс, М.Шиффер), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.В.Боярский, А.Д.Джураев, В.Н.Монахов) и др. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. И.И.Комяк и Н.Л.Василевский применили при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного

интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова, К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова а также в работах учеников Г.Джангибекова . Во всех вышеуказанных работах рассматривались случаи, когда сингулярный интеграл S_m имел характеристику чётного порядка. Что касается случая нечётного m, то в этом направлении была выполнена лишь одна работа Г.Джангибекова.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с нечётной характеристикой с непрерывными, а также разрывными коэффициентами.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области с нечётными характеристиками с непрерывными, а также с разрывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчёта индекса;

- для некоторых шестикомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора;

- для одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения с нечётной характеристикой и с разрывным коэффициентом путём перехода к бесконечной системе интегральных уравнений с ядром Коши и с однородными ядрами степени -1 получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой и разрывным коэффициентом и получена формула для подсчёта индекса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Шарҳи мухтасари диссертатсияи Қозиев Гулназар Мавлоназарович дар мавзӯи "Баъзе операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ," ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст.

Вожаҳои калидӣ: интеграли сингулярии дученака, символи оператор, индекси оператор, нётеровӣ будани оператор.

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқшаванда. Объекти асосии тадқиқшавии ин диссертатсия оператори дученакаи интегралии сингулярии дар фазои лебегии вазндори $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ Михлин-Кальдерон-Зигмунди

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

мебошад, ки дар он D -соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ, ки сарҳади Γ аз миқдори охирноки хатҳои каҷи Ляпунов бо ҳам нуқта надошта иборат буда, m -адади ғайринулии бутун аст.

Муодилаҳои интегралӣ бо чунин операторҳо дар бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои аналитикии умумишуда (И.Н.Векуа), назарияи инъикосҳои квазиконформӣ (Л.Альфорс, М.Шиффер), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.В.Боярский, А.Д.Ҷураев, В.Н.Монахов) ва дигарон вомехуранд. Бори нахуст чунин муодилаҳоро И.Н.Векуа бо усули инъикосҳои фишурдашаванда дида баромадааст. А.Д.Ҷураев муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаро дар фазои $L_p(D), 2 < p < \infty$ ба воситаи масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналитикии умумишуда омӯхтааст. И.И.Комяк ва Н.Л.Василевский барои омӯхтани муодилаҳои дученака дар фазои $L^p(D), 1 < p < \infty$ усули назарияи алгебраи банахиро истифода намудаанд.

L_p - назарияи муодилаҳои интегралии сингулярии бисёрченака дар соҳаҳои сарҳаддошта, ки онро Р.В.Дудучава корбарӣ намудааст, имконият медиҳад, ки масъалаи тадқиқи нётеровӣ будани муодилаҳое, ки операторҳои S_m - ро дар бар мегиранд ба масъалаи факторизатсияи матриса – функсияҳои ратсионалӣ, аниқтараш ба ёфтани индекси хусусии онҳо овар-да шаванд. Дар ин маврид ҷолиби диққат аст, ки аломати нётеровӣ будани муодилаҳои интегралии сингулярӣ ба намуди шартҳои ошкор ба воситаи коэффисентҳо ифодашаванда ёфта шаванд:

Барои синфи васеъи муодилаҳои интегралӣ ин масъала дар мақолаҳои илмии Г.Ҷангибеков, К.Х.Бойматов ва шогирдони Г.Ҷангибеков ба анҷом расонида шудааст.

Дар ҳамаи мақолаҳои дар боло зикргардида фақат ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки оператори S_m характеристикаи ҷуфт дорад. Ҳолати тоқ будани характеристика фақат дар як мақолаи Г.Ҷангибеков омӯхта шудааст.

Кори диссертатсионии мазкур ба тадқиқи хосиятҳои нётеровӣ будани операторхои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ бахшида шудааст, ки дар онҳо коэффисиентҳояш бефосила ва инчунин канишнок мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои дар диссертатсия истифодашуда ба воситаи элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ, ва усулҳои факторизатсияи матриса – функсияҳо асос ёфтаанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионнӣ тадқиқӣ масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд мебошанд, ки характеристикаи тоқ дошта коэффисиентҳояшон функсияҳои бефосила ва ё канишнок мебошанд.

Нововарии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд, нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

- барои як синфи операторҳои интегралии сингуляри дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои баъзе синфҳои шашкомпонентаи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд дар фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои як муодилаи моделии интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок тавассути гузаштан ба системаи беохири муодилаҳои интегралӣ бо ядрои Коши ва ядрои якҷинсаи тартиби -1 шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- теоремаҳои ҳалшавандагии як синфи оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва коэффисиентҳои канишнок исбот карда шудаанд ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда аҳамияти назариявӣ доранд. Онҳо дар тадқиқотҳои ояндаи назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳамчун асос истифода шуда метавонанд.

RESUME

of the dissertation of Koziev Gulnazar Mavlonazarovich on the theme "Some two-dimensional singular integral operators with odd characteristics,"submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01-real, complex and functional analysis.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, operator index, operator Noetherianness.

Relevance of the research theme. The main object of this dissertation is the two-dimensional singular integral Mikhlin-Zygmund operator acting in Lebesgue function space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$,

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{24}$$

Where D is a bounded region of the complex plane, the boundary of which consists of a finite number of simple closed Lyapunov curves Γ that do not intersecteach other, $m \neq 0$ - is a integer.

The Integral equations with such operators are encountered in many problems of the theory of generalized analytic functions (I.N. Vekua), the theory of quasiconformal mappings (L. Alfors, M. Schiffer), the theory of partial differential equations (B.V. Boyarsky, A.D. Djuraev, B.N. Monks) and others. For the first time such equations were considered by I.N. Vekua method of compressing mappings. A. D.Juraev investigated two dimensional singular integral equations in $L_p(D), 2 < p < \infty$ spaces using the reduction to boundary value problems for generalized analytic functions. I.I. Komiak and N.L. Vasilevsky applied the methods of the theory of Banach algebras when studying two-dimensional equations in $L^p(D), 1 < p < \infty$ spaces.

The developed R.V.Duduchavaya L_p, - theory, $1 < p < \infty$,, multidimensional singular integral equations on manifolds with boundary makes it possible to reduce the study of Noetherianproperties of equations containing the S_m operators and their various combinations to the factorization of the corresponding rational matrix functions, or rather, to find them private indices. In this case, it is of interest to establish the Noetherian criterion of the considered two-dimensional singular integral equation in the form of explicit conditions on its coefficients. For a wide class of integral equations, this was done in the works of G. Jangibekov, K.Kh. Boymatov and G. Jangibekov as well as in the works of students of Jangibekov G. In all the above works, cases were considered when the singular integral of the S_m had a characteristic of even order. As for the case of the odd X, in this direction only one work of G. Jangibekov was performed.

This dissertation work is devoted to the study of Noetherian properties of two-dimensional integral operators in a bounded domain with an odd characteristic with continuous as well as discontinuous coefficients.

Research methods. The method used in the dissertation is based on the elements of functional analysis and the theory of functions of complex variables, as well as the method of factorization of matrix functions.

Objective. The purpose of dissertation is to study the question of the solvability of certain classes of two Џ dimensional singular integral equations in a bounded domain with odd characteristics with continuous as well as with discontinuous coefficients.

Scientific novelty. The results for the defense are new and are as follows:

- for one class of two-dimensional singular integral operators with an odd characteristic over a bounded domain in weight Lebesgue spaces, effective necessary and sufficient conditions for Noetherianness were found and a formula for calculating the index was obtained;
- for some six-component classes of two-dimensional singular integral operators with odd characteristic over a bounded domain in weight spaces with necessary weights, sufficient and sufficient Noetherian conditions were obtained, and formulas were given for calculating the index;
- for one model two-dimensional singular integral equation with an odd

characteristic and a discontinuous coefficient, by passing to an infinite system of integral equations with Cauchy kernel and with homogeneous kernels of degrees -1, necessary and sufficient conditions for Noetherness and a formula for calculating the index were obtained;

- a solvability theorem was proved for a class of two-dimensional singular integral operators with odd characteristic and a discontinuous coefficient and a formula for calculating the index was obtained.

The theoretical and practical significance of the work. The results obtained in the dissertation are theoretical. They can serve as the basis for further theoretical studies in the theory of boundary value problems for partial differential equations.

Сдано в набор 01.03.2019 г. Подписано в печать 04.03.2019 г.
Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная. Усл. п.л. 1,5.
Заказ № 25. Тираж 100 экз.
Отпечатано в типографии ТНУ
Душанбе, ул. Лахути, 2.