ХОРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.НАЗАРШОЕВА

УДК 517.5

На правах рукописи

Мавлоназаров Марамбек Абдулназарович

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2024

Работа выполнена на кафедре математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева

Научный руководитель: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни

Официальные оппоненты: **Алимов Алексей Ростиславович,** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Миркалонова Мохирамо Мирафгановна, кандидат физико-математических наук, и.о.доцент кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

Ведущая организация: Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

Защита состоится *5 июля 2024 г. в 10:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенном по адресу: 734027, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2024 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 6D.KOA-011,
доктор физико-математических наук,
доцент **Нуров И.Дж.**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория аппроксимации функций изучает практические задачи, связанные с приближением сложных функций более простыми. Чаще всего рассматривается приближение сложных функций функциями из некоторого n-параметрического множества. В настоящее время теория аппроксимации имеет дело с приближением отдельных функций и классов функций при помощи заданных подпространств, каждое из которых состоит из функций, являющихся в каком-то смысле более простыми, чем аппроксимируемые функции. Обычно роль таких подпространств играет множество алгебраических полиномов или же в периодическом случае множество тригонометрических полиномов заданного порядка n.

В становлении теории аппроксимации функций важную роль сыграла работа К.Вейерштрасса, вышедшая в 1885 году, согласно которой для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ последовательность её наилучших приближений многочленами порядка $\leq n$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Затем, после этого результата, вышли работы Ш.Ж.Валле Пуссена, С.Н.Бернштейна и Д.Джексона, где была изучена скорость сходимости к нулю последовательности наилучших приближений.

Параллельно исследованиям по приближению функций, заданных и определённых на отрезке алгебраическими многочленами, интенсивно велись исследования по приближению периодических функций тригонометрическими многочленами. По приближению классов периодических функций отметим известные работы А.Н.Колмогорова[1], Ж.Фавара[2] и С.М.Никольского[3], опубликованные в 30-х и 40-х годах прошлого века. В настоящее время задачи теории приближений находят широкое применение в разных областях науки и техники, в частности, в вычислительной математике, дискретной математике, теории чисел и др.

Среди актуальных задач теории аппроксимации функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком

[1]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

[2]Favar J. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. 1937. V.61. 209-224. PP.243-256.

[3]Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т.10. С.295-332.

смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функций конечномерным подпространством оценивается через некоторые её характеристики гладкости самой функции или некоторой её производной. В качестве такой характеристики обычно рассматривают модуль непрерывности функции.

Наиболее важные результаты в этом направлении исследования получены в работах Н.П.Корнейчука[4], Н.И.Черных[5], В.И.Бердышева[6], В.В.Арестова и Н.И.Черных[7], В.В.Жука[8], Л.В.Тайкова[9], А.А.Лигуна[10], А.Г.Бабенко[11], С.Б.Вакарчука[12], М.Ш.Шабозова[13] и других математиков. Обстоятельный обзор полученных в периодическом случае результатов приведён, например, в работах В.И.Иванова[14,15], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[16], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[17].

Диссертационная работа посвящена экстремальным задачам теории наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Полученные в диссертационной работе результаты развивают и дополняют исследования указанных авторов в этом направлении. Здесь установлены окончательные оценки наилучших приближений периодических функций тригонометрическими по-

[4]Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982, Т.32, №3. С.669-674.

[5]Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[6]Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

[7]Arestov V.V., Chernykh N.I On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P.25-43.

[8]Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

[9]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[10]Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[11]Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[12]Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-18.

[13]Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[14]Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. 1975. Т.18, №5. С.641-658.

[15]Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т.16, №4. С.5-17.

[16]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

[17]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. 2016. Т.99, №2. С.215-238.

линомами посредством модулей непрерывности произвольного порядка или их модификаций и даны их приложения в задаче отыскания точных значений n-поперечников функциональных классов.

В работе также изучены и решены некоторые экстремальные задачи теории наилучших полиномиальных совместных приближений функций и их производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$, не решенные до недавнего времени. Найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения функций и усреднёнными с весом обобщёнными модулями непрерывности высшего порядка r-ых производных функций в пространстве L_2. Вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций. Этим объясняется целесообразность и актуальность выбора темы исследования диссертационной работы.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Исследование в диссертационной работе выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева на 2018-2023 гг. по теме «Теория приближения функций».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении ряда экстремальных задач, связанных с:

- нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности;
- вычислением значений n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных;
- вычислением верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Основные методы исследования. В диссертационной работе широко используются современные методы теории аппроксимации вариационного содержания в нормированных пространствах и методы решения экстремальных задач теории функций, базирующиеся на идеях функционального анализа, а именно метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов заданной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных банаховых пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных;
- вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точном неравенстве типа Джексона – Стечкина для наилучшего среднеквадратического приближения посредством усреднённой характеристики гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов 2π-периодических функций в метрике пространства L_2;
- теоремы о верхних гранях наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты и методы их доказательств можно применять при решении экстремальных задач теории приближения функций многих переменных и функций комплексных переменных, принадлежащих банаховым пространствам Харди и Бергмана.

Личный вклад автора. Задачи исследования и выбор метода доказательств сформулированны научным руководителем. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались в ходе выступлений на следующих семинарах и конференций:

- семинарах кафедры математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (Хорог, 2017-2023 гг.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика Национальной академии наук Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2023 гг.);

- международной научной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика Национальной академии наук Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.);
- международной научно-теоретической конференции «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30-летию XVI-й сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 30-летию Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (Хорог, 11-12 ноября 2022 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.).
- на международной научной-практической конференции «Математика в современном мире» (Худжанд, 19-20 апреля 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из них 5 статьей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 6 – в трудах международных конференций. Из совместных с научным руководителем Г.А.Юсуповым [1-А, 2-А, 5-А, 8-А, 11-А] работ на защиту выносятся лишь только те результаты, полученные лично автором.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, библиографического списка, содержащего 84 наименования, занимает 81 страницы машинописного текста и набрана на $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья — на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Краткое содержание диссертации

На протяжении многих десятилетий решения экстремальных задач и их приложения интересовали многих математиков, поскольку эти задачи имеют разнообразные приложения при решении различных задач прикладной математики оптимизационного содержания. В экстремальных задачах, как обычно, требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на определенном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения. В последнее время в решении экстремальных задач достигнуты значительные успехи.

Одной из центральных экстремальных задач теории аппроксимации функций является задача о нахождении точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Неравенствами типа Джексона – Стечкина в любом нормированном пространстве X принято называть неравенства вида

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости ω_m самой приближаемой функции или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. Известно, что наилучшая константа χ, вообще говоря, может зависеть как от пространства X, так и от m, n, r и τ. Здесь сразу возникает экстремальная задача нахождения точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина, то есть задача получения неравенств между величиной наилучшего приближения и значением модулей непрерывности в точках $\tau_n = t/n$ $(0 < t \leq \pi)$, являющимися неулучшаемыми в метрике различных банаховых пространств на заданных классах функций.

По поводу важности получении точной константы в неравенствах Джексона – Стечкина, в монографии В.И.Иванова и О.И.Смирнова[18], отмечается, что «Интерес к точным константам, который сложился вокруг неравенств Джексона – Стечкина, возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач».

Приведём краткое содержание диссертационной работы. Всюду далее в работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

[18]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

Пусть $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathscr{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $\le n-1$ $(n \in \mathbb{N})$. Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(f)\cos\big(kx + \gamma_k\big), \tag{1}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве L_2, величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| :\ T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$, $S_{n-1}(f,x)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (1) функции f.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s = 1,2,3,\ldots,r-1;\ r \ge 2, r \in \mathbb{N}, f^{(0)} = f)$ также принадлежат пространству L_2, а потому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(s)})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором его подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Таким образом задача наилучшего совместного приближения класса $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ формулируется следующим образом: требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) :\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{3}$$

Заметим, что если $f \in L_2^{(r)}$, то при всех $s = \overline{0,r}$ справедливо равенство[19]

[19]Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. 2021. Т.110, №3. С.450-458.

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Для характеризации структурных свойств функции $f\in L_2$, мы пользуемся понятием модуля непрерывности m-го порядка, который определяется равенством

$$\omega_m(f,t):=\sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|:\ |h|\le t\Big\}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(x+(m-k)h)$$

— конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h.

В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций вместо классического модуля непрерывности m-го порядка (5) часто используют различные модификации классического модуля непрерывности. Использование различных модификаций модуля непрерывности продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получить содержательные результаты, раскрывающие сущность исследуемых проблем. Одна модификация модуля непрерывности (5) основана на применении оператор – функции Стеклова

$$S_h(f,x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+\tau)d\tau,\quad h>0.$$

Полагаем $S_{h,k}(f):=S_h\big(S_{h,k-1}(f)\big)$, где $k\in\mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f)\equiv f$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве L_2. Определим согласно работе[20] обобщённые разности первых и высших порядков следующим образом:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x):=S_h(f,x)-f(x)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x):=\widetilde{\Delta}_h^1\Big(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f,x)\Big)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)^k(f,x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_{h,k}(f,x),$$

где $n=2,3,\ldots$. В принятых обозначениях, рассматривается характеристика гладкости вида

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t):=\sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^k(f,\cdot)\big\|:\ 0<h\le t\Big\}, \tag{6}$$

[20] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. 2004. Т.76, №6. С.803-811.

которая называется *специальным модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_2$.

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения вместо классического модуля непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ иногда удобнее использовать следующую эквивалентную величине (5) характеристику гладкости

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \tag{7}$$

где $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x),\ j = \overline{1,m},$$

а потому определённый интерес представляет также вычисление точной константы

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \le 2\pi \tag{8}$$

в неравенстве типа Джексона – Стечкина вида

$$E_{n-1}(f) \le \mathbb{K}_{m,n,r}(t) \frac{1}{n^r} \Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big).$$

Отметим, что С.Б.Вакарчук[21] доказал, что при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, \pi/2]$ справедливы равенства

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) = \left\{ 2 \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right) \right\}^{-m/2} \tag{9}$$

и, в частности,

$$\mathbb{K}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{-m/2}. \tag{10}$$

Следует отметить, что в ходе исследования важных вопросов приближения в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ усредненная характеристика гладкости функций вида (7) рассматривалась К.В.Руновским[22] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом[23]. Отметим, что подробные

[21] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[22] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1994. Т.185., №8. С.81-102.

[23] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1975. Т.98(140), №3(11). С.395-415.

свойства характеристики гладкости (7) изучены в работе С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной[24].

Условимся, что в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, предполагается, что $f \neq \mathrm{const}$. Далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Обозначим $\operatorname{sinc} \mathrm{t} := \dfrac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, то есть полагая $\operatorname{sinc} 0 = 1$.

Введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)\, \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{11}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < nh \leq 3\pi/4$, $\varphi(t) \geq 0$ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция, $\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)$ определена в (7).

В работе[25] доказано, что если $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < \pi/n$, φ — весовая на $[0, h]$ функция, то имеет место двойное неравенство

$$\left\{ \mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \tag{12}$$

где

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \left(k^{rp} \int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} \mathrm{kt}\big)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}. \tag{13}$$

При этом требовалось выяснить условия, при выполнении которых имеет место равенство

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi). \tag{14}$$

Там же доказано[25], что если весовая функция $\varphi \in C^{(1)}[0, h]$ и при всех $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ и $0 < t \leq h$ выполняется дифференциальное неравенство

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \tag{15}$$

[24]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. вестник. 2014. Т.11, №3. С.417-441.

[25]Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutna V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.206, №1. PP.97-114.

то имеет место равенство (14). Ясно, что класс весовых функций, удовлетворяющих неравенство (15), является весьма узким, а потому это неравенство используется в редких случаях.

В работе доказано равенство (14) без предположения дифференцируемости весовой функции $\varphi(t)$ при всех $0 < p \le \infty$. Имеет место следующая общая

Теорема 1.1.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, φ — весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) = \left\{ \int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \qquad (16)$$

Следствие 1.1.1. *В условиях теоремы 1.1.1 при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $h = \pi/(2n)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi(t) = t$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-m} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} t\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) dt \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{4}{\pi^2 - 8} \right\}^{m/2}.$$

Следствие 1.1.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, p = 2/m$, $h = \pi/(2n)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge m/2$, $\varphi(t) \equiv 1$. Тогда из (16) следует равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-m/2} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) dt \right)^{m/2}} = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right) - Si\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}^{-m/2},$$

где $Si(u) := \int\limits_0^u sinc\, t\, dt$ — интегральный синус.

В работе[26] с целью обобщения некоторых результатов Л.В.Тайкова[9] была введена в рассмотрении экстремальная характеристика

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + n^2 \int\limits_0^t (t - \tau) \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big) d\tau \right)^{m/2}},$$

[26]Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

содержащая модуль непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},\tau\big)$ не только под знаком определённого интеграла, но и вне интеграла. Там же доказано, что при любых $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и любых $t\in(0,\pi/n]$ справедливы равенства

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t)=(nt)^{-m}. \tag{17}$$

Представляет определённый интерес ввести аналогичную $\mathscr{L}_{n,m,r}(t)$ экстремальную характеристику, где вместо модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)},t)$ фигурирует обобщённый модуль непрерывности $\Omega_m(f^{(r)},t)$. С этой целью, введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)+\dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int\limits_0^t\tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \tag{18}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. Тогда при всех числах t, удовлетворяющих условию $0<t\le 3\pi/(4n)$, справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m. \tag{19}$$

Результат теоремы 1.2.1 является распространением и обобщением известного результата С.Б.Вакарчука и А.Н.Щитова[26], доказанного для классического модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},t\big)$ на случай обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m\big(f^{(r)},t\big)$ функций $f\in L_2^{(r)}$.

Из доказанной теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 при всех $t\in(0,3\pi/(4n)]$ имеет место неравенство*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\le\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},t)}\le\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\left(1+\frac{(nt)^2}{6}\right)^{m/2}. \tag{20}$$

В частности, из (20) при $t=\pi/(2n)$ следует двусторонняя оценка для константы Джексона – Стечкина

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m\le\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},\pi/(2n))}\le\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m\left(1+\frac{\pi^2}{24}\right)^{m/2}. \tag{21}$$

Справедлива также следующая

Теорема 1.2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < nh \le \pi/2$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^{m/2}} = \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \qquad (22)$$

Пусть X — произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M} \subset X$ — некоторый класс функций и пусть $L_n \subset X$ — некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\{E(f, L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\big\|f - g\big\|_X : \ g \in L_n\Big\} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} \qquad (23)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n заданной размерности n. Величина (23) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства X.

Если обозначить через $\mathcal{L}(X, L_n)$ — множество всех непрерывных операторов $A: \ X \to L_n$, действующих из X в произвольно заданное подпространство $L_n \subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\big\|f - Af\big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ A \in \mathcal{L}(X, L_n)\Big\} \qquad (24)$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань в равенстве (24):

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\big\|f - A_* f\big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Задачу (24) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(X, L_n)$ непрерывных операторов $A: \ X \to L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс линейных непрерывных операторов $A: \ X \to L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \big\|f - Af\big\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \Big\} :\ A \subset \mathcal{L}(X, L_n) \Big\}. \tag{25}$$

Если существует оператор $A^* :\ X \to L_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (25), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (25), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{ \big\|f - A^* f\big\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \Big\}.$$

Если же в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \big\|f - Af\big\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \Big\} :\ A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n) \Big\}. \tag{26}$$

С величинами (23) – (26) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в следующей параграфе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова[27] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве X называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{ E(\mathfrak{M}, L_n) :\ L_n \subset X \right\}, \tag{27}$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства X.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X \right\} \tag{28}$$

называют *линейным n-поперечником* класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (26), вводят в рассмотрение *проекционный n-поперечник*

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{ \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X \right\}. \tag{29}$$

Существует ещё две величины, известные в теории приближений под названиями *«n-поперечник по Гельфанду» и «n-поперечник по Бернштейну».*

[27] Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

Пусть S — единичный шар в пространстве X, то есть

$$S = \{x \in X, \|x\|_X \le 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\inf\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0\} : \ L^n \subset X\right\}, \tag{30}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n, называют *n-поперечником по Гельфанду,* а величину

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \ \varepsilon > 0\} : \ L_{n+1} \subset X\right\} \tag{31}$$

называют *n-поперечником по Бернштейну.*

Очевидно, что между величинами (27) – (31) выполняются соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{array} \le \delta_n(\mathfrak{M}, X) \le \Pi_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если X — гильбертово пространство, то между вышеперечисленными n-поперечниками выполняются неравенства[28,29]:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le d^n(\mathfrak{M}, X) \le d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \Pi_n(\mathfrak{M}, X). \tag{32}$$

Используя характеристику гладкости $\Omega_m(f, t)$, рассмотрим следующие классы функций.

Пусть $\Phi(t)$ $(t \ge 0)$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее её будем называть мажорантой. Символом $W^{(r)}_{p,m}(\Phi) := W^{(r)}_p(\Omega_m, \Phi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le +\infty$, обозначим множество функций $f \in L^{(r)}_2$, для которых при любом $t \in (0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \Omega^p_m\big(f^{(r)}, h\big)dh \le \Phi^p(t).$$

Через $W^{(r)}_m(h) := W^{(r)}(\Omega_m, h)$ $\ (m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество функций $f \in L^{(r)}_2$, для которых при любом $h \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^h t\,\Omega^p_m\big(f^{(r)}, t\big)dt \le 1.$$

[28] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ. 1976. 325 с.

[29] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo. 1985. 252 p.

Аналогичным образом будем рассматривать класс $\mathscr{F}_m^{(r)}(h) := \mathscr{F}^{(r)}(\Omega_m, h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при всех $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, удовлетворяющих условию

$$\left\{\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right\}^{m/2} \le 1.$$

Положим ещё

$$E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f \in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\Big\}.$$

Следуя работам[21,25], обозначим через t_* величину аргумента t из интервала $(0, \infty)$ функции $\operatorname{sinc} nt$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t - \operatorname{tg} t = 0$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом также полагаем

$$\big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)_* := \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc} nt, & \text{если} \quad 0 < t \le t_*, \\ 1 - \operatorname{sinc} nt_*, & \text{если} \quad t \ge t_*. \end{cases} \tag{33}$$

Теорема 1.3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$ и мажоранта Φ при любом $h \in [0, 2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \left(\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2} dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2} dt\right)^{-1/p}. \tag{34}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) =$$
$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{35}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (34), не пусто.

Легко доказать, что функция $\Phi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \frac{(\pi - 2)^{mp/2}}{2\pi^{mp/2-1}\int\limits_0^{\pi/2} \big(1 - \operatorname{sinc} h\big)^{mp/2} dh}, \tag{36}$$

при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$ и $t\in(0,2\pi]$ удовлетворяет условию (34).

Из теоремы 1.3.1 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 при* $p=2/m$, $m\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi)\big)=\frac{1}{2^{m/2}n^{r-m/2}}\left\{\frac{\pi}{2}-Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда при всех* $h\in(0,3\pi/(4n)]$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h),L_2\big)=E_{n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h)\big)=\left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m\frac{1}{n^r},\quad(37)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $r>m$. *Тогда при всех* $h\in(0,\pi/n]$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W^{(r)}_m(h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W^{(r)}_m(h),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W^{(r)}_m(h)\big)=\frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2},\qquad(38)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

В частности, из равенства (38), *следует, что*

$$\lambda_{2n}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\right)=\left(\frac{4}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\frac{1}{n^{r-m}}.$$

Во второй главе диссертационной работы рассматривается экстремальная задача нахождения точных верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, характеризующихся специальным обобщённым модулем непрерывности (7) в пространстве L_2. Поскольку для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, $(r\in\mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)}=L_2)$, кроме самой функции и её r-й производной, также все промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots,r-1,\ r\in\mathbb{N},\ r\ge 2)$

принадлежат пространству L_2, то имеет смысл изучать поведение величины наилучшего совместного приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ на классе функций $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Точнее, требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\} \tag{39}$$

на некотором классе r-раз дифференцируемых функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$.

Из теоремы 1.1.1 вытекает следующее важное следствие, которое одновременно является и её обобщением.

Теорема 2.1.1. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, φ — весовая на $[0,h]$ функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{40}$$

Приведём решение экстремальной задачи (3) для класса функций $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$. Имеет место следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p\big(\pi/(2n)\big)} \geq \frac{\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2}dt}{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt}. \tag{41}$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{42}$$

Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ и $h\in(0,\pi/n]$. По аналогии с величиной (18), введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},h)+\dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int\limits_0^h\tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \quad (43)$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ и $h\in(0,3\pi/(4n)]$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h)=\left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m. \quad (44)$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ и $0<h\leq 3\pi/(4n)$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big)=\left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m\frac{1}{n^{r-s}}. \quad (45)$$

В частности, из (45) при $h=\pi/(2n)$ вытекает равенство

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathscr{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m\cdot\frac{1}{n^{r-s}}.$$

Исходя из результата теоремы 1.3.3 приводим решение экстремальной задачи (3) для класса функций $W_m^{(r)}(h)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $r\geq m+s$. Тогда при всех $h\in(0,\pi/n]$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(h)\big)=\frac{1}{2^{m/2}\,n^{r-s}}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \quad (46)$$

В частности, из (46) имеем

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)=\left(\frac{4}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\frac{1}{n^{r-(m+s)}}.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности [1-A, 2-A, 3-A, 4-A, 5-A];
- вычислены значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных [2-A, 5-A, 6-A, 7-A, 8-A];
- вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2 [8-A, 9-A, 10-A, 11-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов высших учебных заведений по специальности «Математика».

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Мавлоназаров М.А. Точные значения поперечников некоторых функциональных классов в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №11-12. – С.628-636.

[2-А] Мавлоназаров М.А. О совместном приближении периодических функций и её производных в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2022. – №3(188). – С.7-17.

[3-А] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.294-303.

[4-А] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2022. – №4. – С.194-204.

[5-А] Мавлоназаров М.А. О среднеквадратических совместных приближениях 2π-периодических функций в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №11-12. – С.642-649.

2. В других изданиях:

[6-А] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение периодических функций в гильбертовом пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С.130-134.

[7-А] Мавлоназаров М.А. О точных значениях неравенств наилучших приближений и интегралах, содержащих обобщенные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.85-91.

[8-А] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение 2π-периодических функций и их производных в метрике L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (г.Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.76-79.

[9-А] Мавлоназаров М.А. Совместное полиномиальное приближение периодических функций и их производных [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Сборник научных статей Международной научно-теоретической конференции на тему: «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30-летию XVI-й сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 30-летию Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (г.Хорог, 11-12 ноября 2022 г.). – С.96-99.

[10-А] Мавлоназаров М.А. Значения поперечников классов периодических функций в метрике пространства L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальная академия наук Таджикистана (г.Душанбе, 26-37 мая 2023 г.). – С.128-131.

[11-А] Мавлоназаров М.А. Среднеквадратические приближения 2π-периодических функций в пространстве L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной-практической конференции «Математика в современном мире» (г.Худжанд, 19-20 апреля 2024 г.). – С.195-199.

ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ХОРУҒ
БА НОМИ М.НАЗАРШОЕВ

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Мавлоназаров Марамбек Абдулназарович

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ДАР L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз руи ихтисоси
01.01.01 — Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Д У Ш А Н Б Е — 2024

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,**
доктори илмҳои физикаю математика,
мудири кафедраи анализи математикии
Донишгоҳи давлатии омӯзгории
Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Муққаризони расмӣ: **Алимов Алексей Ростиславович,**
доктори илмҳои физикаю математика,
сарходими пешбари илмии лабораторияи
усулҳои ҳисобкунии факултети механика
ва математикаи Донишгоҳи давлатии
Москва ба номи М.В.Ломоносов;

Миркалонова Моҳирамо Мирафгановна,
номзади илмҳои физикаю математика,
и.в. дотсенти кафедраи таҳлили математикӣ
ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии
Тоҷикистон

Муассисаи тақриздиҳанда: Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Ҳимоя *5-уми июли соли 2024 соати 10:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6Д.КОА–011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз руйи нишонии 734027, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш.Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «_______________» соли 2024 аз руи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии
Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011,
доктори илмҳои физикаю математика,
дотсент **Нуров И.Ч.**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммият ва дараҷаи рушди мавзуи тадқиқот. Назарияи наздиккунии функсия масъалаҳои амалиеро меомӯзад, ки бо наздиккунии функсияҳои мураккаб аз руи функсияҳои соддатар алоқаманд мебошанд. Аксар вақт, наздиккунии функсияҳои мураккаб ба воситаи функсияҳои аз ягон маҷмуи n-параметрдор дида баромада мешавад. Айни замон назарияи наздиккунии функсия ба наздиккунии функсияҳои алоҳида ва синфи функсияҳо бо истифода аз зерфазоҳои додашуда машғул аст, ки ҳар кадоми онҳо аз функсияҳое иборатанд, ки бо ягон маъно нисбат ба функсияҳои наздиккунанда соддатар мебошанд. Одатан нақши чунин зерфазоҳоро маҷмуи полиномҳои алгебравӣ ё ки барои ҳолати функсияҳои даврӣ маҷмуи полиномҳои тригонометрии тартиби додашудаи n мебозанд.

Дар таҳияи назарияи наздиккунии функсияҳо асари К.Вейерштрасс, ки соли 1885 нашр шудааст ва мувофиқи он барои ҳар гуна функсияи дар порчаи $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ пайдарпайии наздиккунии беҳтарини он аз руи бисёрузваҳои тартиби $\leq n$ ҳангоми $n \to \infty$ ба нол майл мекунад, роли асосӣ бозидааст. Сониян, вобаста ба ин натиҷа, корҳои илмии Ш.Ж.Валле Пуссен, С.Н.Бернштейн ва Ҷ.Ҷексон баромаданд, ки дар онҳо суръати ба нол наздиккшавии пайдарпайии наздиккунии беҳтарин омӯхта шудааст.

Дар баробари тадқиқот оид ба наздиккунии функсияҳо, ки дар фосилаи бисёрузваҳои алгебравӣ муайян ва додашуданд, тадқиқоти ҷиддӣ оид ба наздиккунии функсияҳои даврӣ аз руи бисёрузваҳои тригонометрӣ гузаронида шудаанд. Барои наздиккунии синфи функсияҳои даврӣ корҳои машҳури А.Н.Колмогоров[1], Ж.Фавар[2] ва С.М.Николский[3] – ро қайд кардан мумкин аст, ки дар солҳои 30-юм ва 40-уми асри гузашта нашр шудаанд. Айни замон масъалаҳои назарияи наздиккунӣ дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника, аз ҷумла, дар математикаи ҳисоббарорӣ, математикаи дискретӣ, назарияи ададҳо ва ғайраҳо васеъ истифода бурда мешаванд.

Дар байни масъалаҳои актуалии ҳозираи назарияи наздиккунии функсияҳо муҳимтаринаш масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин мебошад. Нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин ба маънои васеъ ҳамчун нобаробариҳое фаҳмида мешаванд, ки дар онҳо

[1]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

[2]Favar J. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. 1937. V.61. 209-224. PP.243-256.

[3]Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т.10. С.295-332.

бузургии наздиккунии беҳтарини функсия аз руи зерфазои ниҳоӣ тавассути баъзе характеристикаи суфтагии функсия ва ё ҳосилаи он баҳо дода мешавад. Ба сифати чунин характеристика одатан модули бефосилагӣ интихоб карда мешавад.

Натиҷаҳои муҳим дар ин самти тадқиқот дар корҳои Н.П.Корнейчук[4], Н.И.Черных[5], В.И.Бердышев[6], В.В.Арестов ва Н.И.Черных[7], В.В.Жук[8], Л.В.Тайков[9], А.А.Лигун[10], А.Г.Бабенко[11], С.Б.Вакарчук[12], М.Ш.Шабозов[13] ва дигар математикон ба даст оварда шудаанд.

Баррасии муфассали натиҷаҳое, ки дар ҳолати функсияҳои даврӣ ба даст оварда шудаанд, дар корҳои илмии В.И.Иванов[14,15], М.Ш.Шабозов ва Г.А.Юсупов[16], С.Б.Вакарчук ва В.И.Забутная[17] бараъло дида мешаванд.

Кори диссертатсионӣ ба масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ бо бисёрузваҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ бахшида шудааст. Натиҷаҳои дар ин самт дар рисола ба даст овардашуда тадқиқотҳои муаллифони номбурдаро инкишоф дода, боз пурратар мекунанд. Дар ин ҷо ҳисобкуниҳои ниҳоӣ барои наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ аз руи бисёрузваҳои тригонометрӣ бо истифода аз модулҳои бефосилагии тартиби ихтиёрӣ муқаррар карда мешаванд ва

[4]Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982, Т.32, №3. С.669-674.

[5]Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[6]Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

[7]Arestov V.V., Chernykh N.I On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P.25-43.

[8]Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

[9]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[10]Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[11]Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[12]Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-18.

[13]Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[14]Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. 1975. Т.18, №5. С.641-658.

[15]Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т.16, №4. С.5-17.

[16]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

[17]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. 2016. Т.99, №2. С.215-238.

татбиқи онҳо дар масъалаи ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои синфҳои функсионалӣ нишон дода мешавад.

Дар кори диссертатсионӣ инчунин баъзе масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии якҷояи полиномиалии функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо аз руи бисёрузваҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ омӯхта ва ҳал карда шудаанд, ки то ҳанӯз ҳал карда нашудаанд. Доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳо ва модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаҳои тартиби r-уми функсия дар фазои L_2 ёфта шудаанд.

Қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст. Бо ҳамин салоҳият ва муҳиммияти мавзуи тадқиқоти кори диссертатсионӣ фаҳмида мешавад.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев барои солҳои 2018-2023 аз руи мавзуи «Назарияи наздиккунии функсияҳо» иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз ҳалли масъалаҳои экстремалие мебошад, ки бо:

- ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагӣ;
- ҳисобкунии қимати n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-уми функсия;
- ҳисобкунии сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2

вобаста мебошанд.

Методҳои асосии тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои нави муосири назарияи аппроксиматсияи дорои мундариҷаи вариатсионӣ дар фазоҳои нормиронидашуда ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳо, ки ба ғояҳои таҳлили функсионалӣ асос ёфтааст, аз ҷумла усули Н.П.Корнейчук, яъне баҳодиҳии болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо аз руи зерфазои бисёрузваҳои ченакаш додашуда ва усули аз поён баҳодиҳии маҷмуи қутрҳо дар фазоҳои банахӣ, ки аз ҷониби В.М.Тихомиров таҳияшудааст, ба таври васеъ истифода бурда мешаванд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардашуда ёфта шудаанд;
- қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дода мешавад, ҳисоб карда шудааст;
- қимати сарҳади болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2 ҳисоб карда шудааст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оид ба нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкина барои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарин аз руи характеристикаи суфтагии миёнакардашудаи $\Omega_m(f^{(r)}, t)$;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n-қутрҳои баъзе синфи функсияҳои 2π-даврӣ дар метрикаи фазои L_2;
- теоремаҳо оид ба сарҳади аниқи болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини полиномиалии синфи функсияҳо.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошанд. Натичаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда ва усулҳои исботи онҳоро дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағйирёбанда ва функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ, ки ба фазоҳои банахии Бергман ва Ҳардӣ таaллуқ доранд, истифода бурдан мумкин аст.

Саҳми шахсии муаллиф дар тадқиқот. Масъалаҳои тадқиқот ва интихоби усули ҳалли онҳо аз тарафи роҳбари илмӣ пешниҳод карда шудаанд. Ҳамаи натиҷаҳое, ки дар рисолаи диссертатсионӣ гирд оварда шуданд, шахсан аз ҷониби худи муаллиф ба даст гирифта шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ ҳангоми маърӯзаҳо борҳо дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардиданд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев (Хоруғ, солҳои 2017-2023);
- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМИТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2017-2023);

- конференсияи байналмилалии «Проблемаҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физ.-мат., профессор Додоҷон Исмоилов (Душанбе, 29-30 апрели соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Проблемаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики АМИТ М.Ш.Шабозов (Душанбе, 24-25 июни соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявии «Проблемаҳои актуалӣ ва дурнамои инкишофи илмҳои табиатшиносӣ ва дақиқ» (Душанбе, 28-29 октябри соли 2022);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-назариявӣ дар мавзуи «Рушди илм ва маориф дар шароити ҷаҳонишавӣ дар мисоли шароити кӯҳистон: мушкилот, равишҳои нав ва тадқиқоти дахлдор», бахшида ба 30-солагии Иҷлосияи XVI Шурои Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 30 солагии Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев (Хоруғ, 11-12 ноябри соли 2022);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Проблемаҳои муосири математика», бахшида ба 50-солагии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраевӣ Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон (Душанбе, 26-27 майи соли 2023).
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Математика дар замони муосир» (Хуҷанд, 19-20 апрели соли 2024).

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи кори диссертатсионӣ дар 11 мақолаҳои илмӣ дарҷ гардидаанд, ки аз онҳо 5 мақола дар маҷаллаҳои тақризшавандаи дар рӯихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр гардидаанд ва 6-тояш дар нашрияҳои дигар чоп шудаанд. Аз натиҷаҳои бо ҳамроҳии роҳбари илмиам Г.А. Юсупов чопшуда [1-М, 2-М, 5-М, 8-М, 11-М] дар диссертатсия фақат натиҷаҳое оварда шудаанд, ки ба муаллифи кори диссертатсионӣ тааллуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 84 номгӯй ва ҳамагӣ 81 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Дар тӯли даҳсолаҳо, ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ва татбиқи онҳо барои бисёре аз математикон ҷолиби диққат буданд, зеро ин масъалаҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногуни математикаи амалӣ бо мундариҷаи оптимизатсия татбиқҳои гуногун доранд. Дар масъалаҳои экстремалӣ, чун маъмул, ёфтани сарҳади аниқи болоии саҳви наздиккунӣ барои синфи функсияҳои муайян бо усули додашуда ё ки барои ин синф нишон додани дастгоҳи беҳтарини наздиккунӣ талаб карда мешавад. Вақтҳои охир дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ пешравиҳои назаррас ба даст оварда шуданд.

Яке аз масъалаҳои экстремалии марказӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳо ин масъалаи ёфтани доимии аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин мебошад. Нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин дар ихтиёри фазои нормиронидашудаи X гуфта, нобаробариҳои намуди зеринро меноманд:

$$E_{n-1}(f)_X \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n)_X, \quad r\in\mathbb{Z}_+,\ \tau>0,$$

ки дар онҳо саҳви наздиккунии функсияи инфиродии f тавассути характеристикаи суфтагии додашудаи ω_m-и худи функсия ё ки ҳосилаи он $f^{(r)}\in X$ баҳо дода мешавад. Ошкор аст, ки доимии беҳтарини χ, умуман, метавонад ҳам ба фазои X тааллуқ дошта бошад ва ҳам аз ададҳои m,n,r ва τ вобаста бошад. Дар ин ҷо масъалаи экстремалии ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин ба миён меояд, яъне масъалаи ба даст овардани нобаробари байни бузургии наздиккунии беҳтарин ва қимати модулҳои бефосилагӣ дар нуқтаҳои $\tau_n=t/n$ $(0<t\le\pi)$, ки дар метрикаи фазоҳои гуногуни банахӣ дар синфҳои додашудаи функсияҳо такмилнашавандаанд, ба миён меояд.

Оид ба муҳиммияти ба даст овардани доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои Ҷексон – Стечкин, дар монографияи В.И.Иванов ва О.И.Смирнов[18] қайд карда шудааст, ки ««Таваҷҷӯҳ ба доимиҳои аниқ, ки дар атрофи нобаробариҳои Ҷексон – Стечкин ба вуҷуд омадаанд, шояд он қадар асоснок намешуд, агар ҳар як ҳодисаи нав ҷалби ғояҳо ва усулҳои навро талаб намекард, ки баъдан дар ҳалли масъалаҳои дигари экстремалӣ муфид мебуд».

Муҳтавои мухтасари кори диссертатсиониро баён менамоем.

Дар давоми тамоми кори диссертатсионӣ аломатҳои зерин истифода мешавад: $\mathbb{N}$ – маҷмуи ададҳои натуралӣ; $\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – маҷмуи ададҳои мусбати тири ҳақиқӣ $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$; $\mathbb{Z}$ – маҷмуи ададҳои бутун.

[18]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

Бигузор $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — фазои функсияҳои бо квадрат суммиронидашаванда бошад, ки дорои нормаи зерин мебошанд:

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Ба воситаи $\mathscr{T}_{2n-1}$ зерфазои бисёраъзогиҳои тригонометрии тартибашон $\leq n-1$ $(n \in \mathbb{N})$ – ро ишора мекунем. Барои ихтиёри функсияи $f \in L_2$, ки дорои ҷудокунии формалӣ ба қатори Фурйе

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(f)\cos\big(kx+\gamma_k\big) \tag{1}$$

мебошад, дар ин ҷо аломати баробарӣ ба маънои наздикшавӣ дар фазои L_2 фаҳмида мешавад, бузургии наздиккунии беҳтарини он аз руи элементҳои $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ ба

$$E_{n-1}(f) := \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

баробар мебошад, ки дар ин ҷо $\rho_k^2(f) = a_k^2(f)+b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус ва синус-коэффисиентҳои Фурйеи функсияи $f \in L_2$, буда, $S_{n-1}(f,x)$ — суммаи хусусии тартиби $(n-1)$-уми қатори Фурйеи (1) функсияи f мебошад.

Бо $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ маҷмуи функсияҳои $f \in L_2$, ки ҳосилаи тартиби $(r-1)$-умашон мутлақ бефосила буда, ҳосилаи тартиби r-ум $f^{(r)}$ ба фазои L_2 тааллуқ дорад, ишора мекунем.

Маълум аст, ки барои ихтиёри функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ҳосилаҳои фосилавии он $f^{(s)}$ $(s = 1,2,3,\ldots,r-1; \ r \geq 2, r \in \mathbb{N}, f^{(0)} = f)$ ҳам ба фазои L_2 тааллуқ доранд. Бинобар ҳамин, бешубҳа омӯзиши рафтори бузургии $E_{n-1}(f^{(s)})$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$ ё ин ки дар ягон зерсинфи он $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ ба миён меояд. Ҳамин тариқ, масъалаи наздиккунии якҷояи беҳтарини синфи $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ ба тариқи зерин гузошта мешавад: талаб карда мешавад, ки қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\} \tag{3}$$

ёфта шавад.

Қайд мекунем, ки агар $f \in L_2^{(r)}$ бошад, он гоҳ барои ҳамаи қиматҳои $s=\overline{0,r}$ баробарии зерин ҷой дорад[19]

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \qquad (4)$$

Барои тавсифи хосиятҳои структивии функсияи $f\in L_2$, мо аз мафҳуми модули бефосилагии тартиби m-ум истифода мебарем, ки бо баробарии

$$\omega_m(f,t):=\sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|:\ |h|\le t\Big\} \qquad (5)$$

муайян карда мешавад. Дар ин ҷо

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(x+(m-k)h)$$

— фарқи охирноки тартиби m-уми функсияи f дар нуқтаи x бо қадами h мебошад.

Вақтҳои охир ҳангоми ҳалли як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳо ба ҷои модули классикии бефосилаи тартиби m-ум (5), аксар вақт, модификатсияҳои гуногуни модули классикии бефосилагии гуногун истифода мешаванд. Модификатсияҳои гуногуни модули бефосилагӣ бо шароити мушаххаси масъалаҳои баррасишаванда вобаста буда, имкон медиҳанд, ки натиҷаҳои беҳтаре ба даст оварда шаванд, ки моҳияти масъалаҳои тадқиқшавандаро ошкор созанд. Яке аз модификатсияи модули бефосилагии (5) ба татбиқи оператор — функсияи Стеклов

$$S_h(f,x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+\tau)d\tau,\quad h>0$$

асос карда шудааст. Гузоришҳои зеринро дохил мекунем: $S_{h,k}(f):=S_h\big(S_{h,k-1}(f)\big)$, ки дар ин ҷо $k\in\mathbb{N}$ ва $S_{h,0}(f)\equiv f$, $\mathbb{I}$ — оператори воҳидӣ дар фазои L_2 мебошад. Мувофиқи кори[20] фарқҳои тартиби якум ва тартиби олиро бо чунин тарз муайян мекунем:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x):=S_h(f,x)-f(x)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x):=\widetilde{\Delta}_h^1\Big(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f,x)\Big)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)^k(f,x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_{h,k}(f,x),$$

[19]Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. 2021. Т.110, №3. С.450-458.

[20]Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. 2004. Т.76, №6. С.803-811.

ки $n = 2, 3, \dots$ мебошад. Аз руи ишораҳои дохилкардашуда характеристикаи суфтагии зеринро дида мебароем:

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t) := \sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^k(f,\cdot)\big\| : \ 0 < h \le t\Big\}, \tag{6}$$

ки *модули бефосилагии махсуси тартиби m-уми* функсияи $f \in L_2$ номида мешавад.

Ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ ба ҷои модули бефосилагии классикии тартиби m-уми функсияи $f \in L_2$ баъзан истифода бурдани характеристикаи суфтагии ба бузургии (5) эквиваленти зеринро истифода бурдан қулайтар мебошад:

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{7}$$

ки дар ин ҷо $t > 0,\ \overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x),\ j = \overline{1,m}$$

ва аз ин лиҳоз ҳисоб кардани доимии аниқи намуди

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \le 2\pi \tag{8}$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин

$$E_{n-1}(f) \le \mathbb{K}_{m,n,r}(t)\frac{1}{n^r}\,\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)$$

ба мақсад мувофиқ мебошад.

Қайд мекунем, ки С.Б.Вакарчук[21] барои ҳаргуна $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $t \in (0, \pi/2]$ нишон дод, ки баробариҳои зерин дурустанд:

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2} \tag{9}$$

ва дар ҳолати хусусӣ

$$\mathbb{K}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{-m/2}. \tag{10}$$

[21] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

Гуфтан ба маврид аст, ки дар рафти тадқиқи масъалаҳои муҳими наздиккунӣ дар фазои метрикии L_p $(0 < p < 1)$ характеристикаи суфтагии миёнакардашудаи функсияи намуди (7) дар корҳои илмии К.В.Руновский[22] ва Э.А.Стороженко, В.Г.Кротов, П.Освальд[23] дида баромада шудааст. Аммо хосиятҳои асосии характеристикаи суфтагии (7) дар кори С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов ва В.И.Забутная[24] ба пуррагӣ омӯхта шудааст.

Дар муносибатҳои характери умумидошта ҳангоми ҳисоб кардани сарҳади болои аз руи функсияи $f \in L_2^{(r)}$ қайд карда мешавад, ки $f \neq \mathrm{const}$ мебошад. Дар оянда ба сифати функсияи дар порчаи $[0, h]$ вазнӣ функсияи ғайриманфии суммиронидашавандаи φ – и дар порчаи додашуда ғайринулиро қабул мекунем.

Гузориши $\mathrm{sinc}\, t := \dfrac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$ – ро дохил мекунем, ки функсияи додашударо бо қимати 1 дар нуқтаи $t = 0$ муайян мекунем, яъне $\mathrm{sinc}\, 0 = 1$ мегузорем.

Барои тадқиқот характеристикаи аппроксиматсионии экстремалии зеринро дохил мекунем:

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)\, \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{11}$$

ки дар инҷо $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < nh \leq 3\pi/4$, $\varphi(t) \geq 0$ — функсияи вазнии дар порчаи $[0, h]$ додашуда, $\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)$ аз руи баробарии (7) муайян карда мешавад.

Дар кори[25] исбот карда шудааст, ки агар $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < \pi/n$, φ — функсияи вазнии дар порчаи $[0, h]$ додашуда бошад, он гоҳ нобаробарии дучандаи

$$\left\{ \mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \tag{12}$$

[22] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1994. Т.185., №8. С.81-102.

[23] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1975. Т.98(140), №3(11). С.395-415.

[24] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. вестник. 2014. Т.11, №3. С.417-441.

[25] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutna V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.206, №1. PP.97-114.

ҷой дорад, ки дар ин ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \left(k^{rp} \int_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} \mathrm{kt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Барои ҳамин муайян намудани шартҳое лозим мешавад, ки ҳангоми иҷрошавии онҳо баробарии зерин ҷой дорад:

$$\inf_{n \le k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi). \tag{14}$$

Дар он ҷо[25] исбот карда шудааст, ки агар функсияи вазнии $\varphi \in C^{(1)}[0,h]$ ва барои ҳаргуна $1/r < p \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ ва $0 < t \le h$ нобаробарии дифференсиалии

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0 \tag{15}$$

иҷро шавад, он гоҳ баробарии (14) ҷой дорад. Ошкор аст, ки синфи функсияҳои вазнӣ, ки нобаробарии (15) – ро қаноат мекунанд, бисёр танг аст ва бинобар ҳамин ин нобаробарӣ дар ҳолатҳои хеле кам истифода бурда мешавад.

Дар кори диссертатсионӣ баробарии (14) бе шарти дифференсиронидашавандагии функсияи вазнии $\varphi(t)$ барои ҳамаи қиматҳои $0 < p \le \infty$ исбот карда шудааст. Теоремаи умумии зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.1.1. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, φ — функсияи вазнӣ дар порчаи $[0,h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) = \left\{\int_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2} \varphi(t) dt\right\}^{-1/p}. \tag{16}$$

Натиҷаи 1.1.1. *Ҳангоми иҷрошавии шартҳои теоремаи 1.1.1 барои ҳаргуна $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $h = \pi/(2n)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi(t) = t$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-m} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} t\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{4}{\pi^2 - 8}\right\}^{m/2}.$$

Натиҷаи 1.1.2. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}, p=2/m, h=\pi/(2n), r\in\mathbb{Z}_+, r\ge m/2,$ $\varphi(t)\equiv 1$. *Он гоҳ аз* (16) *баробарии зерин мебарояд:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^{r-m/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}}=\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)-Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2},$$

ки дар ин ҷо $Si(u):=\int\limits_0^u sinc\,t\,dt$ *— синуси интегралӣ мебошад.*

Дар кори[26] бо мақсади умумӣ кардани баъзе натиҷаҳои Л.В.Тайков[9] характеристикаи экстремалии

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)+n^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}$$

дохил карда шудаст, ки модули бефосилагии тартиби m-ум $\omega_m\big(f^{(r)},\tau\big)$ – ро на фақат дар дохили интеграли муайян, балки берун аз он низ дар бар мегирад. Дар он кор исбот карда шудааст, ки барои ҳаргуна $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ва ихтиёри $t\in(0,\pi/n]$ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t)=(nt)^{-m}. \tag{17}$$

Бинобар ин дохил намудани характеристикаи экстремалии мувофиқи $\mathscr{L}_{n,m,r}(t)$ ба мақсад мувофиқ мебошад, ки дар он ба ҷои модули бефосилагии тартиби m-ум $\omega_m(f^{(r)},t)$ модули бефосилагии умумикардашудаи $\Omega_m(f^{(r)},t)$ истифода бурда мешавад. Бо ин мақсад характеристикаи экстремалии зеринро дохил мекунем:

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)+\dfrac{n^2}{t}\int\limits_0^t\tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \tag{18}$$

Теоремаи зерин ҷой дорад.

[26]Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

Теоремаи 1.2.1. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ бошанд. Он гоҳ барои ҳамаи ададҳои t, ки шарти $0 < t \leq 3\pi/(4n)$ – ро қаноат мекунанд, баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m. \tag{19}$$

Натиҷаи теоремаи 1.2.1 ҳамчун натиҷаи паҳншуда ва умумикардашудаи яке аз натиҷаҳои маълуми С.Б.Вакарчук ва А.Н.Щитов[26], ки барои модули бефосилагии классикии тартиби m-ум, яъне барои $\omega_m\big(f^{(r)}, t\big)$ исбот карда шудааст, барои ҳолати модули бефосилагии умумикардашудаи $\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)$ аз функсияи $f \in L_2^{(r)}$ мебошад.

Аз теоремаи 1.2.1 натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 1.2.1. *Ҳангоми иҷрошавии шартҳои теоремаи 1.2.1 барои ҳамаи қиматҳои $t \in (0, 3\pi/(4n)]$ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m \leq \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t)} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m \left(1 + \frac{(nt)^2}{6}\right)^{m/2}. \tag{20}$$

Дар ҳолати хусусӣ, аз (20) ҳангоми $t = \pi/(2n)$ барои доимии Ҷексон – Стечкин баҳои дутарафаи зерин мебарояд:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \leq \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\right)^{m/2}. \tag{21}$$

Инчунин теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 1.2.2. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < nh \leq \pi/2$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^{m/2}} = \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \tag{22}$$

Бигузор X — ихтиёри фазои банахӣ бошад, $\mathfrak{M} \subset X$ — ягон синфи функсияҳо ва бигузор $L_n \subset X$ — ихтиёри зерфазои ченакаш додашудаи n бошад. Бузургии

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\{E(f, L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\big\|f-g\big\|_X:\ g\in L_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \tag{23}$$

наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ аз руи зерфазои L_n-и ченакаш додашудаи n бошад. Бузургии (23) тамоили синфи $\mathfrak{M}$ аз зерфазои L_n-ро дар метрикаи фазои X тавсиф медиҳад.

Агар ба воситаи $\mathcal{L}(X, L_n)$ — маҷмуи ҳамаи операторҳои бефосилаи $A: X\to L_n$, ки аз фазои X ба ихтиёри зерфазои додашудаи $L_n\subset X$-и ченакаш n амал мекунад, он гоҳ масъалаи зерин пайдо мешавад: бузургии намуди

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\big\|f-Af\big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ A\in\mathcal{L}(X, L_n)\Big\} \tag{24}$$

ёфта шавад ва оператори $A_*\subset\mathcal{L}(X, L_n)$ – ро нишон додан лозим аст, ки дар баробарии (24) сарҳади саҳеҳи поёниро доро мешавад, яъне

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\big\|f-A_*f\big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Масъалаи (24)-ро инчунин ба маънои дигар дар шакли кутоҳтар дидан мумкин аст: сарҳади поёниро на аз руи маҷмуи $\mathcal{L}(X, L_n)$ операторҳои бефосилаи $A:\ X\to L_n$ ёфтан лозим аст, балки аз руи синфи чунин операторҳое ёфтан лозим, ки аз руи ин ё он тарзи додашавӣ муайян карда мешавад. Дар ҳолати хусусӣ, дар $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои бефосилаи хаттӣ $A:\ X\to L_n$ – ро ҷудо кардан мумкин аст ва бузургии зерин дида баромада шавад:

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\big\|f-Af\big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ A\subset\mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \tag{25}$$

Агар оператори $A^*:\ X\to L_n$ мавҷуд бошад, ки барояш сарҳади саҳеҳи болоӣ дар (25) ҷой дошта бошад, он гоҳ чунин оператор наздиккунии беҳтарини хаттиро дар масъалаи (25) муайян мекунад, яъне

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\big\|f-A^*f\big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Агар дар $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ операторҳои A-и проексияи хаттӣ ба зерфазои L_n ҷудо кунем, яне чунин, ки $Af = f$ бо шарти $f\in L_n$ бошад, он гоҳ омӯхтани бузургии зерин қобили қабул аст:

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| f - Af \right\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \right\} : \ A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n) \right\}. \tag{26}$$

Бо бузургиҳои (23) – (26) масъалаи ёфтани қимати n-қутрҳо барои синфи функсияҳои гуногуни $\mathfrak{M}$ вобаста мебошад.

Таърифи n-қутрҳоро меорем, ки қимати онҳоро барои синфҳои $\mathfrak{M}$ дар параграфҳои оянда ҳисоб мекунем.

n-қутр ба маънои А.Н.Колмогорови[27] синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ дар фазои X бузургии

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{E(\mathfrak{M}, L_n) : \ L_n \subset X\} \tag{27}$$

– ро меноманд, ки дар ин ҷо сарҳади саҳеҳи поёнӣ аз руи зерфазои ченакаш додашудаи n аз фазои X гирифта мешавад.

Дар асоси таърифи наздиккунии беҳтарини хаттӣ $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X$ бузургии

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\} \tag{28}$$

– ро *n-қутри хаттии* синфи $\mathfrak{M}$ дар фазои X меноманд.

Айнан ҳамин тавр, таърифи бузургии (26)–ро ба инобат гирифта, *n-қутри хаттӣ*

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\right\} \tag{29}$$

дида баромада мешавад.

Инчунини дигар ду бузургиҳои дигар дар назарияи наздиккунӣ бо номҳои *«n-қутри гелфандӣ» ва «n-қутри бернштейнӣ» маълуманд.*

Бигузор S — кураи воҳидӣ дар фазои X бошад, яъне

$$S = \{x \in X, \|x\|_X \le 1\}.$$

Бузургии

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{\inf \{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0\} : \ L^n \subset X\}, \tag{30}$$

ки инфимуми берунӣ аз руи ҳамаи зерфазоҳои L^n ченакаш n гирифта мешавад, *n-қутри гелфандӣ* номида шуда, бузургии

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{\sup \{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \ \varepsilon > 0\} : \ L_{n+1} \subset X\} \tag{31}$$

n-қутри бернштейнӣ номида мешавад.

[27]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

Ошкор аст, ки байни бузургиҳои (27) – (31) ифодаи зерин ҷой дорад:

$$b_n(\mathfrak{M},X)\le \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M},X)\\ d^n(\mathfrak{M},X)\end{array} \le \delta_n(\mathfrak{M},X)\le \Pi_n(\mathfrak{M},X).$$

Агар X — фазои гилбертӣ бошад, он гоҳ байни n-қутрҳои дар боло овардашуда нобаробарии зерин ҷой дорад[28,29]:

$$b_n(\mathfrak{M},X)\le d^n(\mathfrak{M},X)\le d_n(\mathfrak{M},X)=\delta_n(\mathfrak{M},X)=\Pi_n(\mathfrak{M},X). \tag{32}$$

Таърифи характеристикаи суфтагии $\Omega_m(f,t)$ – ро истифода бурда, синфи функсияҳои зеринро дида мебароем.

Бигузор $\Phi(t)$ $(t\ge 0)$ — функсияи бефосилаи афзуншаванда бошад, ки барояш $\Phi(0)=0$ аст. Онро дар оянда мажоранта меномем. Бо символи $W_{p,m}^{(r)}(\Phi):=W_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$, ки $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le+\infty$ аст, маҷмуи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки барояшон барои ҳаргуна $t\in(0,2\pi]$ нобаробарии

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)},h\big)dh\le\Phi^p(t)$$

иҷро мегардад.

Бо $W_m^{(r)}(h):=W^{(r)}(\Omega_m,h)$ $(m\in\mathbb{N},\, r\in\mathbb{Z}_+)$ маҷмуи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки барояш барои ҳаргуна $h\in[0,2\pi]$ нобаробарии зерин иҷро мегардад:

$$\int\limits_0^h t\,\Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)dt\le 1.$$

Айнан ҳамин тавр синфи $\mathscr{F}_m^{(r)}(h):=\mathscr{F}^{(r)}(\Omega_m,h)$ функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ – ро дида мебароем, ки барои ҳамаи қиматҳои $h\in(0,3\pi/(4n)]$ шарти зеринро қаноат мекунанд:

$$\left\{\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},h)+\frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right\}^{m/2}\le 1.$$

Инчунин гузориши зеринро дохил мекунем:

$$E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big):=\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\Big\}.$$

[28]Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ. 1976. 325 с.

[29]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo. 1985. 252 p.

Мувофиқи корҳои[21,25], бо t_* бузургии аргументи t аз интервали $(0,\infty)$ функсияи $\operatorname{sinc} nt$ – ро ишора мекунем, ки барояш қимати хурдтаринро соҳиб мешавад. Ошкор аст, ки t_* хурдтарин аз решаҳои мусбати муодилаи намуди $t-\operatorname{tg} t=0$ $(4,49<t_*<4,51)$ мебошад. Бинобар ҳамин чунин гузоришро дохил мекунем:

$$\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_* := \begin{cases} 1-\operatorname{sinc} nt, & \text{если} \quad 0<t\le t_*, \\ 1-\operatorname{sinc} nt_*, & \text{если} \quad t\ge t_*. \end{cases} \tag{33}$$

Теоремаи 1.3.1. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$ *ва мажорантаи* Φ *барои ҳаргуна* $h\in[0,2\pi]$ *шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2} dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \tag{34}$$

– ро қаноат кунонад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\lambda_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big)=$$
$$=2^{-m/2}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{35}$$

ки дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ *— ихтиёри аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад. Ғайр аз ин маҷмуи мажорантҳо, ки шарти* (34) *– ро қаноат мекунанд, холӣ намебошад.*

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $\Phi_*(t):=t^{\alpha/p}$, ки

$$\alpha := \frac{(\pi-2)^{mp/2}}{2\pi^{mp/2-1}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\big(1-\operatorname{sinc} h\big)^{mp/2} dh}, \tag{36}$$

аст, барои ҳаргуна $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$ ва $t\in(0,2\pi]$ шарти (34) – ро қаноат мекунонад.

Аз теоремаи 1.3.1 натиҷаи зерин мебарояд:

Натиҷаи 1.3.1. *Ҳангоми иҷрошавии шартҳои теоремаи 1.3.1 барои ҳаргуна* $p=2/m$, $m\in\mathbb{N}$ *баробариҳои*

$$\lambda_{2n}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi)\big)=\frac{1}{2^{m/2}n^{r-m/2}}\left\{\frac{\pi}{2}-Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

ҷой доранд, ки $\lambda_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Теоремаи 1.3.2. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. Он гоҳ барои ҳаргуна қимати $h\in(0,3\pi/(4n)]$ баробариҳои*

$$\lambda_{2n}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h),L_2\big)=E_{n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h)\big)=\left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m\frac{1}{n^r}\qquad(37)$$

ҷой доранд, ки $\lambda_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Теоремаи 1.3.3. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $r>m$ бошад. Он гоҳ барои ҳамаи $h\in(0,\pi/n]$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\lambda_{2n}\big(W^{(r)}_m(h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W^{(r)}_m(h),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W^{(r)}_m(h)\big)=\frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2},\qquad(38)$$

ки $\lambda_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Дар ҳолати хусусӣ, аз баробарии (38), мебарояд, ки

$$\lambda_{2n}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}_m\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\right)=\left(\frac{4}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\frac{1}{n^{r-m}}.$$

Дар боби дуюми кори диссертатсионӣ масъалаи экстремалии ёфтани сарҳади аниқи наздиккунии якҷояи беҳтарини полиномиалии баъзе синфи функсияҳои даврии дифференсиронидашаванда дида баромада мешавад, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашудаи махсус (7) дар фазои L_2 тавсиф дода мешаванд. Азбаски барои ихтиёри функсияи $f\in L_2^{(r)}$, ($r\in\mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)}=L_2$), фақат ба истиснои худи функсия ва ҳосилаҳои тартиби r-уми он, ҳамаи ҳосилаҳои мобайнӣ $f^{(s)}$ ($s=1,2,\ldots,r-1$, $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$) ба фазои L_2 тааллуқ доранд, он гоҳ омӯхтани татбиқи рафтори бузургии наздиккунии якҷояи беҳтарин $E_{n-1}(f^{(s)})$ дар синфи функсияҳои $L_2^{(r)}$ ё ки дар ягон зерсинфи функсияҳо ба мақсад мувофиқ мебошад. Аниқтараш талаб карда мешавад, ки қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\right\} \tag{39}$$

дар ягон синфи функсияҳои r-маротиба дифференсиронидашавандаи $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$ ёфта шавад.

Аз теоремаи 1.1.1 натиҷаи муҳимтарини зерин мебарояд, ки дар як вақт нисбат ба вай ҳамчун умумикардашуда мебошад.

Теоремаи 2.1.1. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, φ — функсияи вазнӣ дар $[0,h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{40}$$

Ҳалли масъалаи экстремалии (3) – ро барои синфи функсияҳои $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$ меорем. Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.1.2. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$ ва мажорантаи Φ шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p\big(\pi/(2n)\big)}\geq\frac{\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2}dt}{\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt}. \tag{41}$$

Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{42}$$

Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва $h \in (0, \pi/n]$ бошанд. Дар асоси ифодаи (18) характеристикаи экстремалии зеринро дохил мекунем:

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \quad (43)$$

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m. \quad (44)$$

Теоремаи 2.2.2. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (45)$$

Дар ҳолати хусусӣ, аз (45) ҳангоми $h = \pi/(2n)$ будан, баробарии зерин мебарояд:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathscr{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Дар асоси натиҷаи теоремаи 1.3.3 мо роҳи ҳалли масъалаи экстремалии (3)-ро барои синфи функсияҳои $W_m^{(r)}(h)$ пешниҳод мекунем.

Теоремаи 2.2.3. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $r \geq m+s$. Он гоҳ барои ҳамаи қиматҳои $h \in (0, \pi/n]$ баробарии*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(h)\big) = \frac{1}{2^{m/2}\, n^{r-s}} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2} \quad (46)$$

ҷой дорад. Дар ҳолати хусусӣ, аз (46) меёбем:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \left(\frac{4}{\pi^2-8}\right)^{m/2} \frac{1}{n^{r-(m+s)}}.$$

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборатанд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардашуда ёфта шудаанд [1-М, 2-М, 3-М, 4-М, 9-М];
- қимати n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дода шудаанд, ҳисоб карда шудааст [2-М, 5-М, 6-М, 7-М, 8-М];
- сарҳадҳои болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2 ҳисоб карда шудааст [5-М, 8-М, 10-М, 11-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, усулҳо ва натиҷаҳои дар он овардашуда метавонанд барои ёфтани сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини полиномиалии синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда татбиқ карда шаванд. Бобҳои диссертатсияро дар алоҳидагӣ ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоии муассисаҳои таҳсилоти олии кишвар аз руи ихтисоси «Математика» истифода бурдан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Мавлоназаров М.А. Точные значения поперечников некоторых функциональных классов в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №11-12. – С.628-636.

[2-М] Мавлоназаров М.А. О совместном приближении периодических функций и её производных в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2022. – №3(188). – С.7-17.

[3-М] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.294-303.

[4-М] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2022. – №4. – С.194-204.

[5-М] Мавлоназаров М.А. О среднеквадратических совместных приближениях 2π-периодических функций в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №11-12. – С.642-649.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[6-М] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение периодических функций в гильбертовом пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С.130-134.

[7-М] Мавлоназаров М.А. О точных значениях неравенств наилучших приближений и интегралах, содержащих обобщенные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.85-91.

[8-М] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение 2π-периодических функций и их производных в метрике L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (г.Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.76-79.

[9-М] Мавлоназаров М.А. Совместное полиномиальное приближение периодических функций и их производных [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Сборник научных статей Международной научно-теоретической конференции на тему: «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30-летию XVI-й сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 30-летию Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (г.Хорог, 11-12 ноября 2022 г.). – С.96-99.

[10-М] Мавлоназаров М.А. Значения поперечников классов периодических функций в метрике пространства L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальная академия наук Таджикистана (г.Душанбе, 26-37 мая 2023 г.). – С.128-131.

[11-М] Мавлоназаров М.А. Среднеквадратические приближения 2π-периодических функций в пространстве L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной-практической конференции «Математика в современном мире» (г.Худжанд, 19-20 апреля 2024 г.). – С.195-199.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Мавлоназаров Марамбек Абдулназарович дар мавзуи «Ҳалли масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ дар L_2» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *функсияи даврӣ, фазои гилбертӣ, модули бефосилагӣ, наздиккунии якҷояи беҳтарин, нобаробарии Ҷексон – Стечкин, n-қутрҳо.*

Мақсади кор. Ҳадафи тадқиқот аз ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардашуда, ҳисобкунии қимати n-қутрҳо ва инчунин ҳисоб намудани сарҳади болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2 мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои нави муосири назарияи аппроксиматсияи дорои мундариҷаи вариатсионӣ дар фазоҳои нормиронидашуда ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳо, ки ба ғояҳои таҳлили функсионалӣ асос ёфтааст, аз ҷумла усули Н.П.Корнейчук, яъне баҳодиҳии болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо аз руи зерфазои бисёрузваҳои ченакаш додашуда ва усули аз поён баҳодиҳии маҷмуи қутрҳо дар фазоҳои банахӣ, ки аз ҷониби В.М.Тихомиров таҳияшудааст, ба таври васеъ истифода бурда мешаванд.

Навигариҳои илмӣ. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин гирифта шудаанд:

- доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон – Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардашуда ёфта шудаанд;
- қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум дода мешавад, ҳисоб карда шудааст;
- қимати сарҳади болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2 ҳисоб карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошанд. Натичаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда ва усулҳои исботи онҳоро дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағйирёбанда ва функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ, ки ба фазоҳои банахии Бергман ва Ҳардӣ тааллуқ доранд, истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Мавлоназарова Марамбека Абдулназаровича на тему «Решение экстремальных задач теории приближений периодических функций в L_2», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *периодическая функция, гильбертово пространство, модуль непрерывности, наилучшее совместное приближение, неравенство Джексона – Стечкина, n-поперечники.*

Цель работы. Целью исследования является нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности, вычислением значений n-поперечников, а также вычислением верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Методы исследования. В диссертационной работе широко используются современные методы теории аппроксимации вариационного содержания в нормированных пространствах и методы решения экстремальных задач теории функций, базирующиеся на идеях функционального анализа, а именно метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов заданной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных банаховых пространствах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных;
- вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты и методы их доказательств можно применять при решении экстремальных задач теории приближения функций многих переменных и функций комплексных переменных, принадлежащих банаховым пространствам Харди и Бергмана.

SUMMARY
of the dissertation of Mavlonazarov Marambek Abdulnazarovich on the topic «Solving extremal problems in the theory of approximation of periodic functions in L_2» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — Real, complex and functional analysis

Key words: *periodic function, Hilbert space, modulus of continuity, best joint approximation, Jackson – Stechkin inequality, n-widths.*

Work objectivs. The purpose of the study is to find exact constants in Jackson – Stechkin type inequalities between the best approximations and generalized moduli of continuity, to calculate the values of n-widths, and also to calculate the upper bounds of the best joint approximations of certain classes of functions in the space L_2.

Research methods. The dissertation work widely uses modern methods of the theory of approximation of variational content in normed spaces and methods for solving extremal problems of function theory, based on the ideas of functional analysis, namely N.P.Korneychuk's method of estimating from above the best approximations of classes of functions by a subspace of polynomials of a given dimension and developed by V. M. Tikhomirov estimate from below the diameters of sets in various Banach spaces.

Scientific novelty. The following results were obtained in the dissertation:

- exact constants were found in Jackson – Stechkin type inequalities between the best approximations and generalized moduli of continuity;
- the values of the n-widths of the classes of functions specified by the values of the moduli of continuity of higher orders of the r-th derivatives averaged with weight were calculated;
- the upper bounds of the best simultaneous approximations of some classes of functions in the L_2 space were calculated.

Theoretical and practical value. The work is theoretical in nature. The results obtained in the dissertation work and the methods of their proof can be used in solving extremal problems in the theory of approximation of functions of many variables and functions of complex variables belonging to Banach Hardy and Bergman spaces.