ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМӮЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН
БА НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Мухлис Абдул Вадуд

ОИДИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛИИ НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ДАР ФАЗОИ L_2

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика:
6D060101 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе — 2022

Диссертатсия дар кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ иҷро шудааст

РОҲБАРОНИ ИЛМӢ:

Азизов Музаффар – доктори илмҳои физикаю математика, профессор

Шабозов Мирганд Шабозович – академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:

Ҳасанов Юсуфали Ҳасанович, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи информатика ва технологияҳои информатисионии Донишгоҳи славянии Руссияву Тоҷикистон

Қозиев Гулназар Мавлоназарович, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи математика дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА: Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Ҳимоя «**15**» **02** соли 2023 соати 14:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.KOA-011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «______________» соли 2023 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои
диссертатсионии 6D.KOA-011,
доктори илмҳои физикаю
математика **И.Ҷ. Нуров**

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммияти мавзӯи таҳқиқот. Назарияи наздиккунии функсияҳо яке аз қисмҳои муҳимтарини таҳлили математикӣ ба ҳисоб меравад. Дар натиҷаи рушди дохилии илмҳои математикӣ ва эҳтиёҷоти амалӣ ин назария дар даҳсолаҳои охир бо суръати баланд инкишоф меёбад. Дар замони ҳозира воридшавии ғояҳо ва усулҳои назарияи наздиккунӣ дар тамоми шохаҳои мухталифи илмҳои математикӣ, хусусан дар самти амалӣ мушоҳида мешавад. Вобаста ба ин пойдевори назарияи наздиккунии бо асарҳои боқигузоштаи классикии Чебышев, Вейерштрасс, Ҷексон ва Бернштейн оиди наздиккунии функсияҳо бо бисёрузваҳо аз нав сохта шуда, дар заминаи васеътар ва мустаҳкамтар гузошта мешавад. Фаҳмост, ки масъалаҳои наздиккунии дар синфи функсияҳо додашаванда, бештар ҳолат масъалаҳои экстремалӣ ба шумор мераванд, ки дар онҳо ёфтани сарҳади аниқи болоии саҳви наздиккунӣ бо усули дар синфи функсияҳои додашуда, талаб карда мешавад ё барои ин синф дастгоҳи беҳтарини наздиккуниро нишон додан лозим аст.

Масъалаҳои экстремалиро дар синфи функсияҳои мушаххас муоина намуда, дар кори диссертатсионии мазкур бо функсияҳои даврӣ маҳдуд мешавем, яъне маҳз дар кор як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии синфҳои функсияҳои даврӣ бо полиномҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии L_2 таҳқиқ карда мешаванд.

Натиҷаҳои ниҳоӣ барои сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин бо полиномҳои тригонометрӣ дар синфҳои мухталифи функсияҳои даврӣ баён карда мешаванд.

Дар боби якум маводи омодагӣ гирд оварда, масъалаҳои экстремалии ҳалношуда дар ҳар як ҳолати мушаххас, асосан барои наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо муфассал таҳлил ва баён карда мешаванд. Сипас масъалаҳои баёншуда дар бобҳои минбаъдаи диссертатсия, дар синфҳои мухталифи функсияҳои даврӣ ҳал карда мешаванд. Натиҷаҳои ҳосилшуда ниҳоӣ ба ҳисоб мераванд, ки дар асл ба онҳо ҳеҷ чизро илова ё аз онҳо кам кардан мумкин нест. Маҳз бо ҳамин, муҳиммият ва ба мақсад мувофиқ будани мавзӯи интихоби кори диссертатсионӣ муайян карда мешавад.

Дараҷаи кор карда баромадани мавзӯи таҳқиқот. Масъалаҳои дар кори диссертатсионӣ таҳқиқшуда, аслан масъалаҳои экстремалии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ба шумор меравconfigured. Ба масъалаҳои номбаршуда корҳои А.Л.Гаркави, Ф.Тиман, Н.П.Корнейчук, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов ва шогирдони онҳо бахшида шудааст. Қайд бояд кард, ки дар корҳои А.Л.Гаркави ва А.Ф.Тиман ҳалли аниқи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини синфи функсияҳо мавҷуд нест. Масъалаи экстремалии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини синфи функсияҳо бо нормаи маҳдуди ҳосилаи олии ниҳоӣ ба воситаи сплайнҳои полиномиалиро Н.П.Корнейчук[1] ҳал кардааст. Масъалаҳои экстремалии номбаршударо барои наздиккунии ҳамҷояи функсияҳои даврӣ бо полиномҳои тригонометрӣ С.Б.Вакарчук[2] ва М.Ш.Шабозов[3] ҳал кардаанд. Масъалаи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ дар фазои Харди дар кори М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов ва Дж.Дж.Заргарова[4] ҳал карда шудааст.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии таҳқиқоти кори диссертатсионӣ аз ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ва ҷустуҷӯи қиматҳои сарҳади аниқи болоии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо ба воситаи полиномҳои тригонометрӣ иборат аст. Ҷустуҷӯи усули беҳтарини рамзгузорӣ ва барқароркунии вобастагии функсионалӣ дар ҳолате, ки қиматҳои функсионалҳо аз рӯи функсияи φ, ба воситаи баробарии $f = A\varphi$ дода шудаанд, ки дар ин ҷо A — ягон оператор, рамзгузорӣ карда мешаванд, иборат аст. Ҳолати мушаххаси рамзгузорӣ ва барқароркунии ҳалли масъалаҳои канонии Дирихле ва Нейман аз рӯи иттилоот оид ба функсияҳои сарҳадӣ, инчунин ҳолати мушаххаси додашудаи рамзгузорӣ ва иттилоотӣ дар нуқтаҳои интерполятсия дар порчаи охирнок, таҳқиқ карда шудаанд.

---

[1] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения // М.: Наука. – 1984. – 342 С.

[2] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – No4. – С. 497–514.

[3] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – В.3. – С. 450–458.

[4] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – No4. – С. 239–254.

Масъалаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зерин ҳал карда мешаванд:

- қимати аниқи тавсифи экстремалии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ вобаста аз хосиятҳои дифференсиалии функсияи вазнӣ дар L_2 ёфта шавад;
- наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳо дар L_2 муайян карда шавад;
- тавсифи экстремалии Шабозов – Вакарчук умумӣ карда, қимати аниқи онро муайян ва қиматҳои n-қутрҳои мухталифи баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шаванд;
- намуди ошкори усули кодиронии ҳалли масъалаи канории Нейман ва барқароркунии беҳтарини вай бо полиномҳои тригонгонометрӣ аз рӯи иттилооти додашуда оиди функсияи сарҳадӣ ёфта шавад;
- қимати аниқи N-қутри иттилоотии баъзе синфи функсияҳои аз гузориши масъалаҳои кодиронӣ ва барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории Нейман бармеоянд, ҳисоб карда шаванд;
- ҳалли тақрибии масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман бо сплайн-функсияҳои тартиби якум дар синфи Липшитси $H^1[0, 2\pi]$ барқарор карда шавад.

Навигарии илмии таҳқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин гирифта шудаанд:

- қимати аниқи тавсифи экстремалии наздикунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ дар L_2 вобаста ба хосиятҳои дифференсиалии функсияҳои вазнӣ ёфта шудааст;
- наздикунии ҳамҷояи беҳтарини синфҳои мухталифи функсияҳои дифференсиронидашаванда дар L_2 муайян карда шудаанд;
- тавсифи наздикунии экстремалии Шабозов – Вакарчук умумӣ карда шуда, қимати аниқи он муайян карда шуда, қиматҳои n-қутри синфҳои мухталифи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;
- намуди ошкори усули рамзгузории ҳалли масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман ва барқароркунии беҳтарини онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ аз рӯи иттилооти додашуда, ёфта шудаанд;

- қимати аниқи N-қутри итилоотии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст;
- ҳаллҳои тақрибии масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман бо сплайн-функсияҳои тартиби якум дар синфи Липшитси $H^1[0, 2\pi]$ барқарор карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва илмӣ-амалии кор. Кор хусусияти назариявӣ дорад. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва усулҳои исботи онҳоро дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағирёбанда бо полиномҳои тригонометрӣ истифода кардан мумкин аст.

Саҳми шахсии унвонҷӯи дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои таҳқиқот ва интихоби усули исботро роҳбарони илмии кор пешниҳод намуда, инчунин ёрии машваратӣ расонидаанд. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионии дар банди «Навигарии илмӣ» номбаршудаaро шахсан муаллиф таалуқ доранд.

Мувофиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ иҷро карда шуда, боби таҳлили математикии дар банди III-и фасли 3-уми шиносномаи ихтисоси илмӣ нишондодаро ташкил медиҳад.

Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд:

- теоремаҳо дар бораи қимати аниқи тавсифи экстремалии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ дар L_2 вобаста ба хосиятҳои дифференсиалии функсияҳои вазнӣ;
- теоремаҳо дар бораи наздикунии ҳамҷояи беҳтарини синфҳои мухталифи функсияҳои дифференсиронидашаванда дар L_2;
- теоремаҳо дар бораи умумикунии тавсифи наздиккунии экстремалии Шабозов – Вакарчук, муайянкунии қимати аниқи он ва ҳисобкунии қиматҳои n-қутри синфҳои мухталифи функсияҳо;
- теоремаҳо дар бораи ёфтани намуди ошкори усули рамзгузории ҳалли масъалаи канории Нейман ва барқароркунии беҳтарини он бо полиномҳои тригонометрӣ аз рӯи иттилооти додашуда дар бораи функсияҳои сарҳадӣ;
- теорема дар бораи ҳисоби аниқи қимати N-қутри итилоотии баъзе синфи функсияҳо;

- теоремаҳо дар бораи барқароркунии ҳаллҳои масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман бо сплайн-функсияҳои тартиби якум дар синфи Липшитси $H^1[0, 2\pi]$.

Тасвиби натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АМИТ М.Ш.Шабозов (Душанбе, солҳои 2019-2022) ва семинарҳои кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории ба номи С.Айнӣ таҳти роҳбарии профессор М.Азизов (Душанбе, солҳои 2017-2021);
- конференсияи байналхалқии илмии “Муаммоҳои муосир ва татбиқи алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ” бахшида ба 60-солагии академики АМИ Тоҷикистон З.Х.Раҳмонов ва аъзои вобастаи АМИ Тоҷикистон С.А.Исҳоков (Душанбе, 13-14 декабри соли 2019);
- конференсияи байналхалқии илмии “Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ” бахшида ба 70-солагии профессор Г.Ҷангибеков (Душанбе, 30-31 январи соли 2020);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалии “Муаммоҳои муосири математикаи амалӣ ва аҳамияти он дар ташаккулёбии ҷаҳонбинии техникии ҷомеа” (Хуҷанд, 29-30 октябри соли 2021);
- конференсияи байналхалқии илмии “Муаммоҳои муосири тањҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо” бахшида ба 70-солагии академики АМИ Тоҷикистон М.Ш.Шабозов (Душанбе, 24-25 июни соли 2022).

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои кори муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 8 кори илмӣ, аз онҳо 4 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КАО-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон мавҷуда ва 4 мақола дар осори конференсияҳои илмии байналминалӣ ва ҷумҳуриявӣ дарҷ гардидааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аз 134 номгӯй, ҳамагӣ 135 саҳифаи компютериро дарбар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо мавриди истифода қарор дода шудааст, ки дар онҳо рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами фасл ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин фасл мувофиқат мекунанд.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Мавод ва усулҳои таҳқиқот. Маводи таҳқиқот аз ҳалли масъалаҳои мухталифи экстремалии назарияи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпаии онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ, инчунин барқароркунӣ ва рамзгузории ҳалли масъалаҳои сарҳадии физикаи математикӣ иборат мебошад. Усулҳои навтарини ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои банахӣ истифода карда шудааст.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мазмуни мухтасари кори диссертатсиониро баён мекунем.

Дар боби якуми кори диссертатсионӣ сарчашмаи адабиёт ва гузориши масъалаҳои ҳалношудаи экстремалӣ аз рӯи мавзӯи таҳқиқоти пешбинишуда таҳлил карда мешаванд.

Дар боби дуюми диссертатсия масъалаҳои мухталифи экстремалии назарияи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо бо полиномҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ ҳал карда мешаванд. Минбаъд бо рамзҳои $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ мувофиқан маҷмӯҳои ададҳои натуралӣ, бутуни ғайриманфӣ, мусбат, ҳақиқӣ; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — фазои ченшаванда дар маънои Лебеги бо квадрат суммиронидашавандаи функсияҳои 2π-даврӣ бо нормаи охирноки

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2};$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — фазои полиномҳои ҳақиқии тригонометрии тартиби $\leq n-1$ дошта, ишора карда мешаванд. Хуб маълум аст, ки барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2$ ҷудокунии формалӣ ба қатори Фурье

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\big),$$

ки дар ин ҷо $a_k(f),\ b_k(f)$ – косинус ва синус-коэффитиентҳои Фурье, бузургии наздиккунии беҳтарини вай дар метрикаи L_2 бо зерфазои $\mathcal{T}_{2n-1}$ ба

$$E_{n-1}(f)_2:=\inf\big\{\|f-T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\big\}=\big\|f-S_{n-1}(f)\big\|_2=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}$$

баробар аст, ки дар ин ҷо

$$S_{n-1}(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\big(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\big)$$

— суммаи хусусии тартиби $(n-1)$-уми қатори Фурьеи функсияи f буда,

$$\rho_k^2(f):=a_k^2(f)+b_k^2(f),\ k\in\mathbb{N}.$$

Дар фасли якуми боби дуюм тавсифи экстремалии Шабозов – Юсупов[5] барои наздиккунии ҳамҷояи полиномалии функсияҳои даврӣ ва пайдарпаии ҳосилаҳои онҳо дар синфи $L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+)$ умумӣ карда мешавад:

$$\chi_{n,m,r,p}(\varphi,h):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1)$$

Яке аз теоремаҳои асосии фасли якуми боби дуюм теоремаи зерин ба ҳисоб меравад.

Теоремаи 2.1.1. *Бигзор функсияи вазнии* $\varphi\in C^{(1)}[0,h]$ *ва барои ҳамаи қиматҳои* $1/r<p\le 2$, $r\in\mathbb{N}$, $0<t\le h$ $(0<h\le\pi/n)$ *нобаробарии зеринро қаноат кунад:*

$$(rp-1)\,\varphi(t)-t\,\varphi'(t)\ge 0. \qquad (2)$$

---

[5] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – No5. – С. 764–775.

Он гоҳ барои ҳамаи қиматҳои $s = 0, 1, 2, \ldots, r;\ r \in \mathbb{N}$ *баробарии*

$$\chi_{n,m,r,p}(\varphi, h) = \left\{ \int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2}\, \varphi(t) dt \right\}^{-1/p} \tag{3}$$

дуруст аст.

Аз теоремаи 2.1.1 натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 2.1.1. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 2.1.1 дар ҳолати* $\varphi(t) \equiv 1$ *ва* $h = \pi/n$ *баробарии*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s-1/p}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2\, dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^\pi (1 - \cos t)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2^{mp}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \tag{4}$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо $\Gamma(u)$ *– гамма-функсияи Эйлер мебошад.*

Ҳамзамон қайд мекунем, ки аз натиҷаи 2.1.1 нобаробарии намуди Ҷексон – Стечкинро барои наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини худи функсия ва ҳамаи ҳосилаҳои мобайнии он ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right), \tag{5}$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 1/r < p \leq 2.$

Хуб маълум аст, ки барои ҳар гуна функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ҳамаи ҳосилаҳои мобайнии он – $f^{(s)} \in L_2^{(r)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \geq 2,\ r \in \mathbb{N})$ буда, ёфтани қиматҳои аниқи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$ ё дар ягон зерсинфи $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ таваҷҷӯҳро ҷалб мекунад. Ба таври дигар гӯем, ёфтани қимати аниқи бузургии экстремалии

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_2 := \sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\} \tag{6}$$

талаб карда мешавад.

Минбаъд дар ин фасл ба сифати $\mathfrak{M}^{(r)}$ синфи $W_{m,p}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)$ функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$-ро дида мебароем, ки барои ҳамаи $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ ва $h \in (0, \pi/n]$ шарти

$$\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \, \varphi(t) dt \leq 1$$

-ро қаноат мекунанд, вале функсияи вазнии $\varphi(t)$ нобаробарии диффересиалии (2)-ро қаноат мекунонад.

Теоремаи 2.1.2. *Бигзор $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi \in C^{(1)}[0, h]$ буда шарти (2)-ро қаноат кунонад, он гоҳ барои ҳамаи $s = 0, 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ баробарии*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p}^{(r)}(\varphi, h)\big)_2 = \frac{1}{2^{m/2}\, n^{r-s}} \cdot \left\{\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \, \varphi(t) dt\right\}^{-1/p} \tag{7}$$

дуруст аст.

Аз теоремаи 2.1.2 натиҷаи зерин мебароял.

Натиҷаи 2.1.2. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 2.1.2 ва $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \equiv 1$ ҳосил мекунем:*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,2/m}^{(r)}(1, h)\big)_2 = 2^{-m/2} \cdot n^{-(r-s)} \left\{\frac{n}{nh - \sin nh}\right\}^m. \tag{8}$$

Қайд мекунем, ки аз (8) ҳангоми $s = 0$, $m = 1$ натиҷаи Л.В.Тайков[6], вале ҳангоми $s = 0$ ва дилхоҳ $m \in \mathbb{N}$ натиҷаи С.Б.Вакарчук[7] ҳосил мекунем.

Бигзор $\Phi(u)$ ҳамин гуна функсияи бефосилаи ихтиёрии ҳангоми $u \geq 0$ афзуншавандаи $\Phi(0) = 0$ бошад. Бо ёрии $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ синфи функсияҳои $f \in$

---

[6] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – No3. – С. 433–438.

[7] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – No5. – С. 792–796.

$L_2^{(r)}$-и барои ҳар гуна $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$ ва $0<h\le\pi/n$ маҳдудияти

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p} \le \Phi(h)$$

қаноткунонандаро ишора мекунем. Қимати бузургии (6)-ро барои синфи $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ бо иҷроршавии ягон гуна маҳдудият нисбати функсияи мажорантии $\Phi(u)$ ҳисоб мекунем. Ишораи зеринро ҷорӣ мекунем:

$$\bigl(\sin t\bigr)_* := \bigl\{\sin t,\ \text{агар}\ \ 0\le t\le\pi/2;\quad 1,\ \text{агар}\ \ t>\pi/2\bigr\}.$$

Теоремаи 2.1.3. *Бигзор барои ҳамаи қиматҳои* $\mu>0$, $r,m\in\mathbb{N}$, $0<u\le\pi$, $1/r<p\le 2$ *функсияи* $\Phi(u)$ *шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\Phi^p(u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)_*^{mp}d\vartheta \le \Phi^p(\mu u)\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{mp}d\vartheta. \tag{9}$$

Он гоҳ барои ҳар гуна $n\in\mathbb{N}$ *ва* $s=0,1,\ldots,r$, $r\in\mathbb{N}$ *баробариҳои зерин дурустанд:*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\bigr)_2 = 2^{-m-1/p}\cdot n^{-(r-s)}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{10}$$

Натиҷаи 2.1.3. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 2.1.3 баробарии*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\bigr) = \frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s-1/p}}\cdot\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)}\right\}^{1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

дуруст аст.

Дар фасли дуюми боби дуюм умумикунии тавсифи экстремалии маълуми Вакарчук[8] дар намуди умумӣ, ҳангоми наздиккунии ҳамҷоя оварда мешавад:

---

[8] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – No1. – С. 11–18.

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}(h) :=$$

$$:= \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{h^{m/2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)_2 dt + n^2\int\limits_0^h \left(\int\limits_0^t (t-\tau)\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)},\tau)_2 d\tau\right) dt\right\}^{m/2}}. \quad (11)$$

Дар ин ҷо теоремаҳои зерин асосӣ ба ҳисоб меравaнд.

Теоремаи 2.2.2. *Бигзор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$ *ва* $0<h\le\pi/n$ *бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}(h) \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{nh}\right)^m \quad (12)$$

дуруст аст. Дар ҳолати хусусӣ, аз (12) *ҳангоми* $h=\pi/n$ *ҳосил мекунем:*

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^m. \quad (13)$$

Акнун ҳалли масъалаи экстремалии (6)-ро, ки дар мавриди $\mathfrak{M}^{(r)} := W_m^{(r)}(h)$ – синфи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$, ки барои ҳар гуна $h>0$ нобаробарии

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)_2 dt + \frac{\pi^2}{h^3}\int\limits_0^h \left(\int\limits_0^t (t-\tau)\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)},\tau)_2 d\tau\right) dt \le 1 \quad (14)$$

ҷой дорад, дида мебароем.

Теоремаи 2.2.3. *Бигзор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$ *ва* $0<h\le\pi/n$ *бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_m^{(r)}(h)\right) = \frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{nh}\right)^m. \quad (15)$$

Дар фасли сеюми боби дуюм тавсифи экстремалии Шабозов – Вакарчук[9]

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r}(h) := \sup\left\{\frac{n^r h^m E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}} : f \in L_2^r,\ f \neq const\right\} \tag{16}$$

-ро, ки модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-уми $\omega_m^{2/m}(f,t)$-ро бо функсияи вазнии $h-t$ $(0 \le t \le h)$ дар бар мегирад, дар ҳолати наздиккунии ҳамҷояи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$-и намуди

$$\widetilde{\widetilde{\chi}}_{m,n,r,s}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}} \tag{17}$$

умумӣ карда, теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 2.3.2. *Барои ҳамаи қиматҳои* $m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ r \ge s$ *ва* $0 < h \le \pi/n$ *баробарии зерин дуруст аст*

$$\widetilde{\widetilde{\chi}}_{m,n,r,s}(h) = \left\{1 - \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{18}$$

Синфи $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои ҳар гуна $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $h \in (0, 2\pi]$ шарти

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt \le 1$$

-ро қаноат мекунонанд, дида мебароем.

Теоремаи 2.3.3. *Барои ҳар гуна* $m,n \in \mathbb{N},\ r,s \in \mathbb{Z}_+,\ r \ge s$ *ва* $0 < h \le$

---

[9] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematics. – 2012. – Т.38. – No2. – PP. 154–163.

π/n баробарии

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{1-\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2} \tag{19}$$

дуруст аст ва дар ҳолати хусусӣ, ҳосил мекунем:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^{m/2}. \tag{20}$$

Пеш аз он ки натиҷаҳои асосии фасли чоруми боби дуюмро баён кунем, мафҳумҳо ва таърифҳои заруририро хотиррасон мекунем. Бигзор S — курраи воҳидӣ дар L_2; $\mathfrak{N}$ — зермаҷмӯи марказӣ-симметрии L_2; $\Lambda_n\subset L_2$ зерфазои n-ченака; $\Lambda^n\subset L_2$ — зерфазои коченакаи n; $\mathcal{L}:L_2\to\Lambda_n$ — оператори бефосилаи хаттии элементҳои фазои L_2-ро ба Λ_n гузаронанда; $\Lambda^\perp:L_2\to\Lambda_n$ — оператори бефосилаи проектиронии хаттӣ дар L_2 ба зерфазои Λ_n гузаронида бошад. Бузургиҳои

$$b_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset L_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|:\varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|:f\in\mathfrak{N}\right\}:\mathcal{L}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|:f\in\mathfrak{N}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^\perp f\|:f\in\mathfrak{N}\Big\}:\mathcal{L}^\perp L_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset L_2\Big\}$$

мувофиқан n-қутри *бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ ва проектсионӣ* меноманд. Азбаски L_2 фазои гилбертист, он гоҳ муносибатҳои зерини байни n-қутри дар боло номбаршуда[10,11] дуруст аст:

$$b_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)\le d^n\big(\mathfrak{N};L_2\big)\le d_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\delta_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\Pi\big(\mathfrak{N};L_2\big). \tag{21}$$

Бо рамзи $W_m^{(r)}(h)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ синфи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$-ро ишора мекунем, ки барои ҳар гуна $h>0$ нобаробарии (14) ҷой дорад.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

---

[10] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory // Springer. Berlin. – 1985.

[11] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: Издательство МГУ. – 1976. – 304 С.

Теоремаи 2.4.1. *Барои ҳар гуна қиматҳои* $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ *ва* $0 < h \leq \pi/n$ *баробариҳои*

$$\gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h)) = \gamma_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big) = E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big) = \frac{(\sqrt{3})^m}{(nh)^m} \cdot \frac{1}{n^r} \qquad (22)$$

ҷой дошта, дар ҳолати хусусӣ аз (23) *ҳангоми* $h = \pi/n$ *ҳосил мекунем:*

$$\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = E_{n-1}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \frac{1}{n^r}, \quad (23)$$

ки дар ин ҷо

$$E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(h)\big\},$$

$\gamma_n(\cdot)$ *— ҳар гуна аз* n*-қутри дар боло номбаршуда, мебошад.*

Дар муоина синфи функсияҳои зеринро ҷорӣ мекунем:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)\, dt \leq \Phi(h) \right\}.$$

Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Теоремаи 2.4.5. *Бигзор мажоранти* Φ *шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \cdot \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \begin{cases} (nh)^2 - 2(1 - \cos nh), & \text{агар } 0 \leq h \leq \pi/n, \\ \pi^2 - 4 + (nh - \pi)^2, & \text{агар } h \geq \pi/n. \end{cases} \qquad (24)$$

Он гоҳ барои ҳар гуна ададҳои $m, n \in \mathbb{N}$ *ва* $r \in \mathbb{Z}_+$ *баробариҳои*

$$\lambda_{2n-1}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2\big) = \lambda_{2n}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2\big) = E_{n-1}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \right\}^{m/2} \qquad (25)$$

дурустанд, ки дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ *— дилхоҳ аз* n*-қутри* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *ё* $\Pi_n(\cdot)$. *Маҷмӯи мажорантҳо, ки маҳдудияти (24)-ро қаноат мекунонад, холӣ нест.*

Тасдиқоти зерин натиҷаи теоремаи 2.4.5 мебошад.

Теоремаи 2.4.6. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 2.4.5 иҷро шаванд. Он гоҳ барои ҳар гуна ададҳои* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\Big\} = \sup\Big\{|b_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\Big\} = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}.$$

Дар боби сеюм масъалаҳои рамзгузорӣ ва барқароркунии вобастагии функсионалӣ ҳангоми қиматҳои функсионалҳо ба функсияи φ функсияи $f = A\varphi$ рамзгузорӣ карда мешавад, ки дар ин ҷо A ягон оператореро ифода мекунад, омӯхта мешаванд. Н.П.Корнейчук[12,13,14] ҳолатҳои мушаххасро барои операторҳои диффересиронӣ, лағжиш ва ҳам барои ҳалли масъалаи канории Дирихле таҳқиқ кардааст.

Масъалаҳои рамзгузорӣ ва барқароркунии минбаъдаи вобастагии функсионалии ҳам дар самти назариявӣ ва ҳам дар самти амалӣ муоинашаванда, дар солҳои охир бештар таваҷҷӯҳро ҷалб мекунанд. Ин аз он ҷумла, бо он маънидод карда мешавад, ки усулҳои самараноки ҳалли масъалаҳои экстремалии ёфташуда дар назарияи наздиккунӣ имконияти ёфтани ҳалли аниқ ва дар як қатор масъалаҳои рамзгузории беҳтарин барқароркунии функсияҳоро муҳайё мекунанд.

Дар интишори ба мо маълум доир ба муаммои мазкур, усули рамзгузорӣ аз рӯи саҳви барқароркунии худи функсияҳои рамзгузошта, баҳогузорӣ карда мешавад. Дар ин ҷо масъалаи бештар умумиро дида мебароем: вақте ки аз рӯи иттилооти дискретӣ оиди функсияи φ функсияи $f = A\varphi$ барқарор карда мешавад, ки онҳо функсияи φ бо ягон оператори A инъикос карда мешавад.

Бигзор X, Y — фазоҳои метрикӣ мувофиқан бо масофаҳои $\rho(x,y)_X$ ва $\rho(x,y)_Y$ бошанд. Бо ёрии маҷмӯи

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \tag{26}$$

---

[12] Корнейчук Н.П. Об оптимальной кодировании элементов метрического пространства // Укр. матем. журн. – 1987. – Т.39. – No2. – С. 158–173.

[13] Корнейчук Н.П. Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. матем. журн. – 1989. – Т.41. – No4. – С. 492–499.

[14] Корнейчук Н.П. О некоторых задачах кодирования и восстановления функций // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – No4. – С. 514–524.

функсионалҳои бефосилаи μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ дар X додашуда ба элементи $x \in X$ вектори ададии

$$T(x, M_N) = \big\{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\big\} \tag{27}$$

-ро мувофиқ мегузорем, ки онро вектори иттилоот меномем. Ҳисоб кардан мумкин аст, ки элементи x бо нуқтае дар R^N бо ёрии маҷмӯи функсионалҳои (26), ки усули рамзгузориро муайян мекунад, рамзгузорӣ карда шудааст. Агар $Y = X$ ва аз рӯи вектори (27) элементи x аз ягон маҷмӯи $\mathfrak{M} \subset X$ барқарор карда шавад, он гоҳ ченаки иттилоотии усули рамзгузорӣ бо дараҷаи муайян бо диаметри прообрази инъикоси $x \to T(x, M_N)$, яъне бо диаметри маҷмӯи $\{y : y \in \mathfrak{M},\ T(y, M_N) = T(x, M_N)\}$ тавсиф карда мешавад: чӣ қадаре ки диаметр хурд бошад, ҳамон қадар иттилоотии усул – M_N калонтар аст.

Ҳолатеро дида мебароем, ки дар он аз рӯи вектори иттилоотии $T(x, M_N)$, $x \in \mathfrak{M} \subset X$ элементи $Ax \in Y$-ро, ки дар ин ҷо A — ягон оператори бефосилаи $\mathfrak{M}$-ро ба Y инъикоскунанда мебошад, барқарор кардан зарур аст. Дар ин маврид иттилоотии усули рамзгузориро аз рӯи диаметри маҷмӯи элементҳои Ay, $y \in \mathfrak{M} \subset X$, ки барои он вектори иттилоотии $T(y, M_N)$ ҳамон як аст, баҳогузорӣ кардан лозим аст. Барои дурустии гузориши масъала охирнокии ин диаметрро бо роҳи ба элементҳои маҷмӯи $\mathfrak{M}$ гузоштани ин ё он шартҳои пешакӣ, таъмин кардан лозим аст. Бузургии

$$\mathscr{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} = \sup\Big\{\rho(Ax, Ay)_Y : x, y \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = T(y, M_N)\Big\} \tag{28}$$

иттилоотии усули рамзгузории қайдшудаи M_N-ро нисбат ба оператори A ва маҷмӯи $\mathfrak{M}$-ро тавсиф мекунад. Дар ин ҳол табиӣ, масъала оид ба усули рамзгузории беҳтарин барои маҷмӯи $\mathfrak{M}$ ва оператори A, яъне масъалаи ҷустуҷӯи сарҳади аниқи поёнии (барои N-и қайдшуда)

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, A, X, Y) = \inf_{M_N} \mathscr{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} \tag{29}$$

ва муайянкунии усули $\mathscr{K}$, ки ин сарҳади поёниро амалӣ мекунад, пайдо мешавад.

Дар фасли дуюми боби сеюм масъалаи беҳтаркунии барқароркунии қиматҳои операторҳо дар гузориши Н.П.Корнейчук[15] дар намунаи барқароркунии беҳтарини ҳалли масъалаи канории Нейман барои муодилаи Лаплас, дар доираи воҳидӣ дар шакли баёни зерин таҳқиқ карда мешавад: талаб карда мешавад, ки функсияи гармоникии $U(\rho, t)$ $(0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi)$ муодилаи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(\rho, t) = 0 \tag{30}$$

ва ду шарти канории

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = g(t), \ \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt = 0 \tag{31}$$

қаноаткунанда, ёфта шавад.

Ҳалли масъалаҳои (30)-(31) мавҷуд буда, бо саҳеҳӣ то доимӣ ва формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$U(\rho, t) := U(g; \rho, t) = C_1 + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_\rho(t - \tau) g(\tau) d\tau, \ C_1 = const, \tag{32}$$

ки дар ин ҷо

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kt, \ 0 \leq \rho < 1. \tag{33}$$

Функсияи $\Phi_\rho(t)$-ро ядрои Нейман меноманд.

Теоремаи 3.2.1. *Барои саҳви барқароркунии ҳалли $U(\rho, t)$-и масъалаҳои (30)-(31) бо полиноми тригонометрии*

$$T_{n-1}\big(U(g; \rho, \cdot), \lambda, t\big) = \frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \big(a_k(g) \cos kt + b_k(g) \sin kt\big)$$

дар метрикаи L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ баҳои зерин ҷой дорад:

$$\sup_{\|g\|_p \leq 1} \inf_\lambda \Big\| U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda) \Big\|_p =$$

---

[15] Корнейчук Н.П. Об оптимальном восстановлении значений операторов // Укр. матем. журн. – 1994. – Т.46. – №10. – С. 1375–1381.

$$= \sup_{\|g\|_p \le 1} \left\| U(g;\rho,\cdot) - T_{n-1}\big(U(g;\rho,\cdot),\mu\big) \right\|_p \le$$

$$\le E_n(\Phi_\rho)_{L_1} = 4 \cdot \int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} r^n}{r} d\rho,\ 0 \le \rho < 1, \qquad (34)$$

ки дар ин ҷо маҷмӯи коэффисиентҳои $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1})$ *бо баробарии*

$$\Phi_\rho \left(\frac{2j-1}{2n} \cdot \pi \right) = T^*_{n-1} \left(\frac{2j-1}{2n} \cdot \pi, \mu \right) \ (j = \overline{1,n})$$

муайян карда шудаанд. Нобаробарии (34) ҳангоми $p = 1$ *ва* $p = \infty$ *беҳтарнашаванда аст.*

Теоремаи 3.2.2. *Барои наздиккунии беҳтарини ҳалли* $U(g;\rho,t)$*-и масъалаҳои канорӣ (30)-(31) бо полиномҳои тригонометрӣ дар метрикаи* L_p $(1 \le p \le \infty)$ *баҳои зерин дуруст аст:*

$$E_n\big(U(g;\rho,\cdot)\big)_p \le \left(\frac{4}{\pi} \int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} r^n}{r} dr \right) \cdot E_n(g)_p,\ (0 \le \rho < 1). \qquad (35)$$

Ҳамин гуна функсияи $g_0(t) \in L_p$ *бо нормаи* $\|g_0\|_p \le 1$ *мавҷуд аст, ки барои вай дар (35) ҳангоми* $p = 1$ *ва* $p = \infty$ *аломати баробарӣ ҷой дорад.*

Бигзор X ва Y – фазои хаттии нормиронӣ, A – оператори хаттии бефосила аз X ба Y бошад. M_N – маҷмӯи функсионалҳои хаттии бефосилаи $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$ додашуда дар X^*, ки дар ин ҷо X^* фазои ба X ҳамроҳшуда мебошад. Ба ҳар як $x \in X$ вектори иттилоотии

$$T\big(x, M_N\big) := \big\{\mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_N(x)\big\} \qquad (36)$$

-ро мувофиқ мегузорем, ки онро ҳамчун рамзгузории элементи x – нуқта аз фазои N-ченакаи $\mathbb{R}^N$ дида баромадан мумкин аст. Агар $\mathfrak{M}$ – ягон маҷмӯи маҳдуд дар X бошад, он гоҳ мегузорем:

$$G(\mathfrak{M}; A, M_N)_Y = \sup\Big\{ \big\|Ax - Ay\big\|_Y : x, y \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = T(y, M_N) \Big\}.$$

Бузургии

$$\gamma_N\big(\mathfrak{M}, A, Y\big) = \inf\big\{ G\big(\mathfrak{M}, A, M_N\big)_Y : M_N \subset X^* \big\}$$

барои ҳамаи $x \in \mathfrak{M}$ саҳви барқароркунии элементи Ax аз рӯи иттилооти (36)-и аз рӯи имкон хурдтарини кафолатнокро медиҳад. Вай N-қутри иттилоотии маҷмӯи $\mathfrak{M}$ дар фазои Y номида мешавад. Агар $\mathfrak{M}$ – маҷмӯи барҷастаи марказӣ-симметрӣ дар фазои нормиронии X бошад, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$G\big(\mathfrak{M}; A, M_N\big)_Y = 2\sup\big\{\big\|Ax\big\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\big\} \tag{37}$$

ва дар ин ҳолат

$$\gamma_N\big(\mathfrak{M}, A, Y\big) = 2\inf\big\{\sup\big\{\big\|Ax\big\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\big\} : M_N \subset X^*\big\}. \tag{38}$$

Бигзор $A := A_{\Phi_\rho}$ – оператори лағжиш бо ядрои 2π-даврии $\Phi_\rho(t)$, ки дар ин ҷо $\Phi_\rho(t)$ ядрои Неймани (33) бошад. Барои $\Phi_\rho \in L_1$ функсияи $g(t)$-ро бо вектори иттилоотии

$$T\big(g, M_N'\big) := \big\{\mu_1(g), \mu_2(g), \cdots, \mu_N(g)\big\},$$

ки дар ин ҷо $g(t) \in \mathbb{C}_{[0,2\pi]}$ ва $M_N' = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ – маҷмӯи функсионалҳои хаттии маҳдуди дар $\mathbb{C}_{[0,2\pi]}$ муайяншуда, рамзгузорӣ мекунем. Чун қоида, иттилооти пешакӣ оиди функсияи сарҳадии $g(t)$ бо синфи

$$\mathscr{M}_p(\mathscr{K}) := \big\{\varphi : \varphi = \mathscr{K} * g, \|g\|_p \le 1\big\},$$

ки дар ин ҷо $\mathscr{K}$ – ягон ядрои дигар, дода мешавад. Аён аст, ки $\mathscr{M}_p(\mathscr{K})$ – маҷмӯи барҷастаи марказӣ-симметрист.

Бигзор $M_N' = M_{2n-1}^F$ – маҷмӯи функсионалҳои μ_k-и дар намуди аввалин $2n-1$ коэффисиентҳои Фурьеи фунсияҳои $g(t) : a_0(g), a_k(g), b_k(g)$ $(k = \overline{1, n-1})$ додашуда бошад, яъне вектори иттилоотии (36) намуди зеринро дорад:

$$T\big(g, M_{2n-1}^F\big) := \big\{a_0(g), a_1(g), \ldots, a_{n-1}(g), b_1(g), \cdots, b_{n-1}(g)\big\}.$$

Бигзор ба мисли пештар $\mathfrak{M}_{2n-1}^T$ — маҷмӯи полиномҳои тригонометрии тартиби аз $n-1$ баланднабударо ифода кунад. Он гоҳ мувофики муносибати (37) ҳосил мекунем:

$$G\big(\mathscr{M}_p(\mathscr{K}), A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F\big) :=$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup\left\{\left\|\int_0^{2\pi} \Phi_\rho(\cdot - \tau)g(\tau)d\tau\right\|_p : g \in \mathscr{M}_p(\mathscr{K}), g \perp \mathfrak{M}_{2n-1}^T\right\}. \tag{39}$$

Теоремаи 3.2.3. *Барои ҳамаи $r \in \mathbb{N}$, $\rho \in [0,1)$ ҳангоми $p = 1$, $p = \infty$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, L_p\right) = G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F\right)_p =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 \cdot n^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+2}}. \tag{40}$$

Аз теоремаи 3.2.3 хулосаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 3.2.1. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 3.2.3 дар ҳолати $\rho \to 1$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, L_p\right)_p = G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, M_{2n-1}^F\right)_p = \frac{8\mathscr{K}_{r+1}}{\pi^2 \cdot n^{r+1}},$$

ки дар ин ҷо

$$\mathscr{K}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+2}}$$

– константаи Фавар-Ахиезер-Крейн аст.

Дар фасли сеюм усулҳои барқароркунии ҳалли баъзе масъалаҳои канории физикаи математикиро бо сплайн-функсияҳои тартиби якуми нуқсони 1-ум ва сплайнҳои интерполятсионии хаттӣ дида мебароем. Натиҷаҳои ҳосилшуда дар синфи Липшитси тартиби 1-ум беҳтарнашаванда мебошад. Истифодаи мушаххаси сплайн-функсияҳои тартиби якуми нуқсони (дефекти) 1-умро дар ҳалли масъалаҳои канории зерин нишон медиҳем:

а) масъалаи канории Дирихле барои муодилаи бигармонӣ: талаб карда мешавад, ки дар соҳаи $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2 < 1\right\}$ функсияи бигармонии $u(\rho,t)$, $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le 2\pi$ муодилаи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u(\rho,t) = 0 \tag{41}$$

-ро қаноаткунонандае, ки барои вай

$$u(\rho,t)\Big|_{\rho=1} = g(t), \qquad \frac{\partial u(\rho,t)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=1} = 0 \tag{42}$$

аст, ёфта шавад.

Маълум аст, ки ҳалли масъалаҳои (41) – (42) мавҷуд буда, бо формулаи

$$u(\rho,t) := u(g;\rho,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t-u)g(u)du$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо ядрои $\mathcal{K}_\rho(t)$ намуди зеринро дорад:

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}, \quad 0 \le \rho < 1.$$

Бо ҳисобкунии бевоситаи коэффисиентҳои Фурье барои ядрои $\mathcal{K}_\rho(t)$ ҷудокунии зерини қатори Фурьеро ҳосил мекунем:

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}(1-\rho^2)k\right)\rho^k\cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt.$$

б) масъалаи канории Нейман барои муодилаи Лаплас дар доираи воҳидӣ: функсияи гармонии $u_1(\rho,t)$ $(0 \le \rho \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi)$ муодилаи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_1(\rho,t) = 0 \tag{43}$$

ва ду шарти канории

$$\left.\frac{\partial u_1(\rho,t)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = \varphi(t), \quad \int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)dt = 0 \tag{44}$$

-ро қаноаткунонанда ёфта шавад.

Инчунин ҳалли масъалаҳои (43) – (44) мавҷуд буда, бо саҳеҳии то доимӣ бо формулаи

$$u_1(\rho,t) := u_1(\varphi;\rho,t) = C + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\rho(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad C = const, \tag{45}$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos kt, \quad 0 \le \rho < 1 \tag{46}$$

– ядрои Нейман аст.

Усули барқароркунии зерини ҳалли масъалаҳои канории Дирихлеи (41) – (42)-ро барои муодилаи бигармонӣ ва Неймани (43) – (44)-ро барои муодилаи Лаплас дар доираи воҳидӣ дида мебароем. Бо $H^1 := H^1[0,2\pi]$ синфи функсияҳои $f(t)$-и шарти

$$|f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|$$

қаноаткунондаро ишора мекунем.

Барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории (41) – (42). Бигзор $t_i = i\pi/n$, $\tau_i = t_i - \pi/(2n)$ $(i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ва $S(t) = S(f,t)$ – сплайни даврии тартиби 1-уми нуқсони 1-ум аз рӯи тақсимоти $\{t_i\}$-и яккимата бо функсияи $f(t) \in C[0,2\pi]$ муайяншаванда, бо шарти зерин бошад:

$$S(f,\tau_i) = \frac{n}{\pi}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)d\tau,\ i = 1,2,\ldots,2n. \tag{47}$$

Бӯғчаи (свёрткаи)

$$u(g;\rho,t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

-ро, ки ҳалли масъалаҳои канории (41) – (42) ба ҳисоб меравад, бо назардошти (47) ба функсияи

$$S_1(u(g;\rho,\cdot);t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t-\tau)S(g,\tau)d\tau \tag{48}$$

мувофиқ мегузорем.

Масъалаи ҳисобкунии сарҳади аниқи болоии бузургии зеринро дида мебароем:

$$\sup\left\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big| :\ g \in H^1\right\}. \tag{49}$$

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.3.1. *Барои барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории (41) – (42) бо усули (48) барои ҳамаи қиматҳои t баҳои аниқ ҷой дорад:*

$$\sup\left\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1\big(u(g;\rho,\cdot);t\big)\Big| :\ g \in H^1\right\} =$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right)+$$

$$+\frac{4}{\pi}\big(1-\rho^2\big)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right). \qquad (50)$$

Барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории Неймани (43) – (44). Муфассал наистода, қайд мекунем, ки усули барқароркуниро ба ҳалли масъалаҳои канории (43) – (44) ҳам кор фармудан мумкин аст, агар

$$S_2(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t)=C+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\rho(t-\tau)s(\varphi,\tau)d\tau$$

фарз намуда, сплайни тартиби 1-ум ва нуқсони 1-уми $s(\varphi,\tau)$-ро яккимата бо шарти

$$s(\varphi,t_i)=\frac{n}{\pi}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi(\tau)d\tau, \quad i=1,2,\dots,2n \qquad (51)$$

муайян кунем, он гоҳ ҳисобкуниҳои сода ба тасдиқоти зерин меорад.

Теоремаи 3.3.2. *Барои барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории (43) – (44) бо усули (48) барои ҳамаи қиматҳои t баҳои аниқ ҷой дорад:*

$$\sup\Big\{\Big|u_1(\varphi;\rho,t)-S_2\big(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t\big)\Big|:\ \varphi\in H^1\Big\}=$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu-1}}{(2\nu-1)^3}\sin^2\frac{(2\nu-1)\pi}{4n}. \qquad (52)$$

Агар хати шикастаи $s(\varphi,t)$-ро ба ҷои (51) бо шартҳои интерполятсии $s(\varphi,t_i)=\varphi(t_i)$, $i=1,2,\dots,2n$ муайян кунем, он гоҳ саҳви аниқ дар синфи H^1 бо бузургии зерин баробар мешавад:

$$\sup\Big\{\Big|u_1(\varphi;\rho,t)-S_2(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t)\Big|:\ \varphi\in H^1\Big\}=\frac{1}{\pi n^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{(2\nu+1)2n}}{(2\nu+1)^3}. \qquad (53)$$

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- қимати аниқи тавсифи экстремалии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ дар L_2 вобаста аз хосиятҳои дифференсиалии функсияи вазнӣ ёфта шудааст [3-М, 5-М, 8-М];
- наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини баъзе синфи функсияҳои дифференсиронидашаванда дар L_2 муайян карда шудааст [3-М, 4-М, 8-М];
- тавсифи экстремалии наздиккунии Шабозов – Вакарчук умумӣ карда шуда, қимати аниқи он муайян карда шуда, қиматҳои n-қутри мухталифи баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд [3-М, 4-М];
- намуди ошкори усули рамзгузории ҳалли масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман ва барқароркунии беҳтарини онҳо бо полиномҳои тригонгонометрӣ аз рӯи иттилооти додашуда, ёфта шудааст [1-М, 2-М, 5-М, 6-М];
- қимати аниқи N-қутри иттилоотии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст [6-М, 7-М];
- ҳаллҳои тақрибии масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман бо сплайн-функсияҳои тартиби якум дар синфи Липшитси $H^1[0, 2\pi]$ барқарор карда шудаанд [1-М, 2-М].

Тавсияҳо оиди истифодаи амалии натиҷаҳо.

Натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ ҳосилшуда дорои аҳамияти назариявӣ буда, барои ёфтани сарҳадҳои аниқи болоии наздикунии беҳтарини полиномалии синфҳои функсияҳои бисёртағйирёбанда, рамзгузории онҳо ва барқароркунии тақрибӣ кор фармудан мумкин аст.

Бобҳои диссертатсияро дар алоҳидагӣ дар вақти хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоии мактабҳои олӣ, ки аз рӯи ихтисосҳои “математика” ва “математикаи амалӣ” таҳсил мекунанд, истифода кардан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-M] Мухлис А. Неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники некоторых классов функций в L_2 [Матн] / М.Ш.Шабозов, А.Мухлис // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – No7-8. – С.356–367.

[2-M] Мухлис А. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций и точных значениях поперечников некоторых классов функций в L_2 [Матн] / А.Мухлис // Известия Национальной академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – No1–2. – С.24–36.

[3-M] Мухлис А. Восстановление и кодирование решения краевой задачи Неймана с помощью тригонометрических полиномов и по заданной информации о граничных функциях [Матн] / М.Азизов, А.Мухлис // Известия Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – No 4(173). – С.26–36.

[4-M] Мухлис А. Восстановление решения краевой задачи Неймана по информации о граничных функциях [Матн] / М.Азизов, А.Мухлис // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – No5-6. – С.280–285.

Дар дигар нашрияҳо:

[5-M] Мухлис А. Об одной аппроксимационной характеристики и её применении [Матн] / А.Мухлис // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*". (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С.13–15.

[6-M] Мухлис А. О задаче совместного приближения функций и их производных посредством одной аппроксимационной характеристики в L_2 [Матн] / А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.10–13.

[7-М] Мухлис А. Восстановление решения краевой задачи Неймана по информации о граничных функциях [Матн] / М.Азизов, А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*", посвященной 60-летию профессора З.Х.Рахмонова и члена корреспондента НАН Таджикистана С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С.44–46.

[8-М] Мухлис А. Восстановление и кодирование решения краевой задачи Неймана по заданной информации о граничных функциях [Матн] / М.Азизов, А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.300–304.

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С.АЙНИ

УДК 517.5

На правах рукописи

Мухлис Абдул Вадуд

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора
философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 –
Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Душанбе — 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни

НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕИ:	**Азизов Музаффар** – доктор физико-математических наук, профессор **Шабозов Мирганд Шабозович** – академик Национальный Академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор;
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Хасанов Юсуфали Хасанович,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных технологий Российско-таджикского (славянского) университета; **Козиев Гулназар Мавлоназарович,** кандидат физико-математических наук, зав. кафедры математика в экономике международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Таджикский государственный финансово-экономический университет

Защита состоится «**15**» **02** 2023 г. в 14:00 часов на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте *http* : //*www.tnu.tj*.

Автореферат разослан «______» «______________» 2023 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета 6D.KOA-011, доктор физико-математических наук **Нуров И.Дж.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Одна из основных частей курса математического анализа является теория приближения функций. Эта теория возникшая в результате внутренного развития математической науки в целом для потребностей практики быстрыми темпами развивается в последние десятилетия. При этом наблюдается проникновение идей и методов теории аппроксимации в самых различных разделах математической науки, в частности, в прикладных направлений. При этом перестраивается на более широкую и твердую основу фундамент теории приближения, начато которой заложено в классических трудах Чебышева, Вейерштрасса, Джексона и Бернштейна о приближении функций многочленами. Ясно, что аппроксимационные задачи исследуемые на классах функций, в основных случаях являются задачи на экстремум, в которых требуется найти верхнюю грань ошибки приближения заданным методом на исследуемых классах функции или требуется для указанного класса найти наилучший аппарат приближения.

Задачи экстремума на конкретных классах функций, в данной диссертационной работе рассматриваются только для периодических функций, для которых изучается различные экстремальные задачи теория приближения заданных классов функций тригонометрическими полиномами в пространстве Гильберта L_2. Для верхних граней отклонения функций тригонометрическими полиномами на различных классах периодических функций получены окончательные результаты. Первая глава диссертации посвящена подготовительному материалу, подробно анализируются и формулируются нерешённые экстремальные задачи в основном конкретно для, совместного приближения функций и их промежуточных производных. Затем сформулированные задачи решаются в последующих главах диссертации на различных классах периодических функций. Полученные результаты являются окончательными, где в сущности уже ничего прибавить или убавить нельзя. Именно этим определяется актуальность выбранной темы диссертационной работы.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Вопросы, рассмотренные в диссертационной работе, по существу являются экстремальными задачами наилучшего совместного приближения функций и их промежуточных производных тригонометрическими полиномами. Указанным вопросам посвящены работы А.Л.Гаркави, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и их учеников. Следует отметить, что в работах А.Л.Гаркави и А.Ф.Тимана отсутствует точное решение задач наилучшего совместного приближения классов функций. Экстремальная задача наилучшего совместного приближения классов функций с ограниченной нормой старшей производной полиномиальными сплайнами решена Н.П.Корнейчуком[1]. Для совместного приближения периодических функций тригонометрическими полиномами указанные экстремальные задачи для различных классов функций решены С.Б.Вакарчуком[2], М.Ш.Шабозовым[3]. Задача наилучшего совместного приближения аналитических в круге функций в пространстве Харди решена в работе М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова и Дж.Дж.Заргарова[4].

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является решении задач, связанных с отысканием точного значения верхней грани наилучшего совместного приближения функции и её последовательных производных тригонометрическими многочленами, а также в отыскании наилучшего метода кодирования и восстановлении функциональной зависимости, когда значения функционалов на функции φ кодируется функцией $f = A\varphi$, где A — некоторый оператор. Рассмотрен конкретный случай приближенного восстановления и кодирования решения граничных задач Дирихле и Неймана по значений вектор информации о функциях и заданной информации в точках интерполяции заданной отрезке.

Задачи исследования. Согласно поставленной целью выделяются следующие экстремальные задачи:

- требуется найти значение экстремальной характеристики совместного приближения периодических функций в L_2, в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции;
- определить наилучшее совместное приближение некоторых классов функции в L_2;
- обобщить экстремальную характеристику Шабозова – Вакарчука, определить её точное значение и вычислить значение известных n-поперечников заданных классов функций;
- найти явный вид метода кодирования решения краевой задачи Неймана и её оптимального восстановления тригонометрическими многочленами по известной вектор информации о функциях на границе;

---

[1] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения // М.: Наука. – 1984. – 342 С.

[2] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – No4. – С. 497–514.

[3] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – В.3. – С. 450–458.

[4] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – No4. – С. 239–254.

- вычислить точное значение информационного N-поперечника некоторых классов функций, вытекающих из постановки задач кодирования и приближённого восстановления решения граничной задачи Неймана;
- восстановить приближённое решение граничных задач Неймана и Дирихле сплайн-функциями первого порядка на классе Липщица $H^1[0, 2\pi]$.

Научная новизна исследования. Перечислим основные результаты полученные в диссертационной работе:

- указано точное значение экстремальной характеристики наилучшего среднеквадратического совместного приближения периодических функций в L_2, в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции;
- определены наилучшие совместные приближения различных классов дифференцируемых функции в L_2;
- обобщена экстремальная аппроксимационная характеристика Шабозова – Вакарчука, определено её точное значение и вычислено значение n-поперечников различных классов функций;
- найден явный вид метода кодирования решения краевых задач Дирихле и Неймана и их оптимального восстановления тригонометрическими полиномами по заданной информации;
- вычислено точное значение информационного N-поперечника некоторых классов функций;
- восстановлены приближённые решения краевых задач Дирихле и Неймана сплайн-функциями первого порядка на классе Липщица $H^1[0, 2\pi]$.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функции многих переменных тригонометрическими полиномами.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задачи исследования и выбор метода доказательств сформулированны научными руководителями работы, оказывалось также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе “Научная новизна”, получены лично автором.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанном в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о нахождении точного значения экстремальной характеристики наилучшего совместного приближения периодических функций в L_2, в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции;
- теоремы о точной верхней грани наилучшего совместного приближения различных классов дифференцируемых функций в L_2;
- теоремы об обобщении экстремальной аппроксимационной характеристики Шабозова – Вакарчука, определении её точного значения и вычисление значения n-поперечников различных классов функций;
- теоремы о нахождении явного вида метода кодирования решения краевой задачи Неймана и её оптимального восстановления тригонометрическими полиномами по заданной информации о граничных функциях;
- теорема о точном вычислении значения информационного N-поперечника некоторых классов функций;
- теоремы о восстановлении решения краевых задач Дирихле и Неймана сплайн-функциями первого порядка на классе Липщица $H^1[0, 2\pi]$.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под рукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2022 гг.) и на семинарах кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни под руководством профессора М.Азизова (Душанбе, 2017-2021 гг.);
- международной научной конференции "Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа", посвященной 60-летию академика НАН Таджикистна З.Х.Рахмонова и члена корреспондента НАН Таджикистана С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества". (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);

- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций”, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, ещё 4 в трудах международных и республиканских научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 134 наименований, занимает 135 страницу машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Предлагаемый материал исследования состоит из результата решения различных экстремальных задач теории наилучшего совместного среднеквадратического приближения периодических функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами, а также восстановления и кодирования решения граничных задач математической физики. Применяются новейшие методы решения экстремальных задач в различных банаховых пространствах.

Результаты исследования. Приводим краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе диссертационной работы анализируются литературные источники по теме исследования и излагается постановка нерешённых экстремальных задач по намеченному тему исследования.

Во второй главе диссертации решаются различные экстремальные задачи теории наилучшего совместного приближения функций тригонометрическими многочленами в метрике пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Всюду далее через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ обозначим множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, вещественных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2};$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — множество действительных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Из курса математического анализа известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей следующее разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\bigr),$$

где $a_k(f)$ – косинус, а $b_k(f)$ – синус-коэффициент Фурье, значение её наилучшего среднего приближения приближения в метрике L_2 множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf\bigl\{\|f-T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\bigr\} = \bigl\|f-S_{n-1}(f)\bigr\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\bigl(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\bigr)$$

– $(n-1)$-я частная сумма ряда Фурье функции f, а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N}.$$

В первом параграфе второй главы экстремальная характеристика Шабозова – Юсупова[5] обобщается на случай совместного полиномиального приближения периодической функции и их последовательных производных на классе $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$:

$$\chi_{n,m,r,p}(\varphi,h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1)$$

Одной из основных теорем первого параграфа является следующая

Теорема 2.1.1. *Пусть весовая функция* $\varphi \in C^{(1)}[0,h]$ *и при всех значениях* $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq h$ $(0 < h \leq \pi/n)$ *удовлетворяет неравенству*

$$(rp-1)\,\varphi(t) - t\,\varphi'(t) \geq 0. \qquad (2)$$

---

[5] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – No5. – С. 764–775.

Тогда при всех $s = 0, 1, 2, \ldots, r;\ r \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\chi_{n,m,r,p}(\varphi, h) = \left\{ \int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2}\, \varphi(t)\, dt \right\}^{-1/p}. \tag{3}$$

Из утверждения теоремы 2.1.1 сразу вытекает

Следствие 2.1.1. *Пусть* $\varphi(t) \equiv 1$ *и* $h = \pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s-1/p}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^p\,(f^{(r)}, t)_2\, dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^\pi (1 - \cos t)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2^{mp}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p}, \tag{4}$$

где $\Gamma(u)$ *– гамма функция Эйлера.*

Из следствия 2.1.1 также получаем неравенство типа Джексона – Стечкина для наилучшего совместного приближения самой функции и всех её последовательных производных:

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right), \tag{5}$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 1/r < p \le 2$.

Хорошо известно, что для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ все ее промежуточные производные $f^{(s)} \in L_2^{(r)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \ge 2,\ r \in \mathbb{N})$ и несомненный интерес представляет нахождение точных значений совместных приближений $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором множестве функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Иными словами, требуется найти точное значение экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_2 := \sup\left\{ E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}. \tag{6}$$

Далее в качестве множество $\mathfrak{M}^{(r)}$ в этом параграфе рассмотрим класс $W_{m,p}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, которые при всех $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ и $h \in (0, \pi/n]$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t) dt \le 1,$$

а весовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (2).

Теорема 2.1.2. *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $\varphi \in C^{(1)}[0,h]$ *и выполняет условию* (2). *В этом случае при всех* $s = 0, 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p}^{(r)}(\varphi,h)\big)_2 = \frac{1}{2^{m/2}\, n^{r-s}} \cdot \left\{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\, \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{7}$$

Из теоремы 2.1.2 вытекает

Следствие 2.1.2. *Если в условиях теоремы 2.1.2 полагать* $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \equiv 1$, *то получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,2/m}^{(r)}(1,h)\big)_2 = 2^{-m/2} \cdot n^{-(r-s)} \left\{\frac{n}{nh - \sin nh}\right\}^m. \tag{8}$$

Отметим, что из (8) при $s = 0$ и $m = 1$ получаем результат Л.В.Тайкова[6], а при остальных s и $m \in \mathbb{N}$ результат С.Б.Вакарчука[7].

Пусть $\Phi(u)$ — непрерывная возрастающая при $u \in [0,\infty)$ функция, в нуле равная нулю. Через $W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := \{f : f \in L_2^{(r)}\}$ обозначим класс функций, при любых натуральных m, n, r и $p \in (1/r, 2]$ и $h \in (0, \pi/n]$ удовлетворяющих условию

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/p} \le \Phi(h).$$

Вычислим значение величины (6) при некоторых ограничениях на мажорантную функцию $\Phi(u)$ для класса $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$. Введём обозначение

$$\big(\sin t\big)_* := \big\{\sin t, \ \text{ при } \ t \in [0, \pi/2]; \ \text{ и } 1, \ \text{ при } \ t \in [\pi/2, +\infty)\big\}.$$

Теорема 2.1.3. *Пусть при всех* $\mu > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $u \in (0, \pi]$ *и* $p \in (1/r, 2]$ *функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(u) \int\limits_0^{\mu\pi} \big(\sin(\vartheta/2)\big)_*^{mp} d\vartheta \ \le \ \Phi^p(\mu u) \int\limits_0^{\pi} \big(\sin(\vartheta/2)\big)^{mp} d\vartheta. \tag{9}$$

---

[6] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – No3. – С. 433–438.

[7] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – No5. – С. 792–796.

Тогда для любой натуральной n *и* $s \in [0, r]$, *где* $r \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big)_2 = 2^{-m-1/p} \cdot n^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \big(\sin(nt/2)\big)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (10)$$

Следствие 2.1.3. *Если выполнены условия теоремы 2.1.3 то имеют место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big) = \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s-1/p}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Во втором параграфе второй главы приводится обобщение известной экстремальной характеристики Вакарчука[8] в следующем более общем виде для случая совместного приближения:

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}(h) :=$$

$$:= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{h^{m/2}\, n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left\{ \int\limits_0^h \omega_m^{2/m}\,(f^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^t (t-\tau)\, \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \right\}^{m/2}}. \quad (11)$$

Здесь основными являются следующие теоремы.

Теорема 2.2.2. *Для любых натуральных* m, n; $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}(h) \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{nh} \right)^m. \quad (12)$$

В частности, из (12) *при* $h = \pi/n$ *имеем*

$$\mathcal{M}''_{m,n,r,s}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right)^m. \quad (13)$$

Приводим теперь решение экстремальной задачи (6), когда $\mathfrak{M}^{(r)} := W_m^{(r)}(h)$ – множество функций $f \in L_2^{(r)}$ для которой при любом $h > 0$

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2\, dt + \frac{\pi^2}{h^3} \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^t (t-\tau)\, \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \leq 1. \quad (14)$$

---

[8] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – No1. – С. 11–18.

Теорема 2.2.3. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_m^{(r)}(h)\right) = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{nh}\right)^m. \tag{15}$$

В третьем параграфе экстремальная характеристика Шабозова – Вакарчука[9]

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r}(h) := \sup\left\{\frac{n^r h^m E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^{m/2}} : f \in L_2^r,\ f \neq const\right\}, \tag{16}$$

знаменатель которой содержит осредненный модуль непрерывности m-го порядка $\omega_m^{2/m}(f, t)$ с весовой функцией $h - t$, где $t \in [0, h]$ обобщается на случай совместного приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ следующего вида:

$$\widetilde{\widetilde{\chi}}_{m,n,r,s}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\, \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^{m/2}}, \tag{17}$$

и доказывается следующая общая

Теорема 2.3.2. *При всех* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $0 < h \leq \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{\widetilde{\chi}}_{m,n,r,s}(h) = \left\{1 - \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{18}$$

Рассмотрим класс $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, которые при любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h (h-t)\, \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt \leq 1.$$

Справедливо следующее утверждение.

---

[9] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematics. – 2012. – Т.38. – No2. – PP. 154–163.

Теорема 2.3.3. *При всех* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ *и* $0<h\leq\pi/n$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{1-\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2} \tag{19}$$

и, в частности,

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^{m/2}. \tag{20}$$

Прежде чем привести основные результаты четвёртого параграфа второй главы, напомним необходимые понятия и определения[10,11]. Пусть S — единичный шар в L_2; $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n\subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}:L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\Lambda^{\perp}:L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования в L_2 на подпространство Λ_n. Рассмотрим величин

$$b_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset L_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|:\varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|:f\in\mathfrak{N}\right\}:\mathcal{L}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|:f\in\mathfrak{N}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|:f\in\mathfrak{N}\Big\}:\mathcal{L}^{\perp}L_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset L_2\Big\}$$

которые называют n-поперечники *Бернштейна, Колмогорова, линейный, Гельфанда и проекционный* соответственно. Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве L_2 выполняются соотношения:

$$b_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)\leq d^n\big(\mathfrak{N};L_2\big)\leq d_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\delta_n\big(\mathfrak{N};L_2\big)=\Pi\big(\mathfrak{N};L_2\big). \tag{21}$$

Через $W_m^{(r)}(h)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ будем обозначать класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при произвольной $h>0$ выполняется неравенство (14).

Имеет место следующая

Теорема 2.4.1. *Для произвольных* $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $h\in(0,\pi/n]$ *имеют место равенства*

$$\gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h))=\gamma_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big)=E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big)=\frac{(\sqrt{3})^m}{(nh)^m}\cdot\frac{1}{n^r}, \tag{22}$$

---

[10] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory // Springer. Berlin. – 1985.

[11] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: Издательство МГУ. – 1976. – 304 С.

и, в частности, из (23) *при* $h = \pi/n$ *получаем*

$$\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = E_{n-1}\left(W_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \frac{1}{n^r}, \quad (23)$$

где

$$E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(h)\big\},$$

а $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Рассмотрим также класс функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2}\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)\,dt \le \Phi(h) \right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.5. *Если мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \ge \frac{1}{\pi^2-4}\cdot\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \begin{cases} (nh)^2 - 2(1-\cos nh), & \text{если } 0 \le h \le \pi/n, \\ \pi^2 - 4 + (nh-\pi)^2, & \text{если } h \ge \pi/n, \end{cases} \quad (24)$$

то для произвольных чисел $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *выполняются равенства*

$$\lambda_{2n-1}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2\big) = \lambda_{2n}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2\big) = E_{n-1}\big(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= \frac{1}{n^r}\cdot\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\right\}^{m/2}, \quad (25)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *или* $\Pi_n(\cdot)$. *Существует мажорант, для которой условию (24) выполняется.*

Следствием теоремы 2.4.5 является следующее утверждение.

Теорема 2.4.6. *Если выполнены условия теоремы 2.4.5, то для произвольных чисел* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *выполняется равенства*

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\Big\} = \sup\Big\{|b_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)\Big\} = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}.$$

В третьей главе рассматриваются задачи кодирования и восстановления функциональной зависимости, когда значениями функционалов на функции φ кодируется функция $f = A\varphi$, где A — некоторый оператор. Н.П.Корнейчуком[12,13,14] рассмотрены конкретные случаи для операторов

---

[12] Корнейчук Н.П. Об оптимальной кодировании элементов метрического пространства // Укр. матем. журн. – 1987. – Т.39. – No2. – С. 158–173.

[13] Корнейчук Н.П. Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. матем. журн. – 1989. – Т.41. – No4. – С. 492–499.

[14] Корнейчук Н.П. О некоторых задачах кодирования и восстановления функций // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – No4. – С. 514–524.

дифференцирования, свертки а также для решения краевой задачи Дирихле.

Вопросы кодирования и последующего восстановления функциональной зависимости, рассматриваемые как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, в последнее время привлекают все большее внимание. Это объясняется, в частности, тем, что разработанные в теории приближения эффективные методы решения экстремальных задач позволили найти точное решение и в ряде задач оптимального кодирования и восстановления функций.

В известных нам публикациях по этой проблематике метод кодирования оценивается по погрешности восстановления самой закодированной функции. Здесь мы рассмотрим более общую задачу, когда по дискретной информации о функции φ восстанавливается функция $f = A\varphi$, в которую функция φ отображается некоторым оператором A.

Пусть X, Y — метрические пространства с расстояниями $\rho(x, y)_X$ и $\rho(x, y)_Y$ соответственно. С помощью набора

$$M_N = \big\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\big\} \tag{26}$$

заданных на X непрерывных функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, элементу $x \in X$ сопоставим числовой вектор

$$T(x, M_N) = \big\{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\big\}, \tag{27}$$

который будем называть вектором информации. Можно считать, что элемент x закодирован точкой в R^N с помощью набора функционалов (26), определяющего метод кодирования. Если $Y = X$ и по вектору (27) восстанавливается элемент x из некоторого множества $\mathfrak{M} \subset X$, то мера информативности метода кодирования в определенной степени характеризуется диаметром прообраза отображения $x \to T(x, M_N)$, т.е. диаметром множества $\{y : y \in \mathfrak{M},\ T(y, M_N) = T(x, M_N)\}$: чем меньше этот диаметр, тем больше информативность метода M_N.

Рассмотрим случай, когда по вектору информации $T(x, M_N)$, $x \in \mathfrak{M} \subset X$ необходимо восстановить элемент $Ax \in Y$, где A — некоторый непрерывный оператор, отображающий $\mathfrak{M}$ в Y. В этом случае информативность метода кодирования надо оценивать по диаметру множества элементов Ay, $y \in \mathfrak{M} \subset X$, для которого вектор информации $T(y, M_N)$ один и тот же. Для корректности постановки задачи надо обеспечить конечность этого диаметра, налагая на элементы множества $\mathfrak{M}$ те или иные априорные условия. Величина

$$\mathscr{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} = \sup\Big\{\rho(Ax, Ay)_Y : x, y \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = T(y, M_N)\Big\} \tag{28}$$

характеризует информативность фиксированного метода кодирования M_N относительно оператора A и множества $\mathfrak{M}$. При этом естественно возникает задача о наилучшем методе кодирования для множества $\mathfrak{M}$ и оператора A, т.е. задача отыскания (при фиксированном N) точной нижней грани

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, A, X, Y) = \inf_{M_N} \mathscr{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} \tag{29}$$

Во втором параграфе третьей главы рассматривается оптимизационная задача восстановления значений операторов в постановке Н.П.Корнейчука[15] на примере оптимального восстановления решения граничной задачи Неймана для хорошо известной уравнения Лапласа в круге: требуется найти гармоническую функцию $U(\rho, t)$, $\rho \in [0,1]$, $t \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(\rho, t) = 0 \tag{30}$$

и двум граничным условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = g(t), \ \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt = 0. \tag{31}$$

Существует решение задачи (30)-(31), которая определяется с точностью до постоянной и имеет вид:

$$U(\rho, t) := U(g; \rho, t) = C_1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_\rho(t-\tau)g(\tau)d\tau, \ C_1 = const. \tag{32}$$

Здесь

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k}\cos kt, \ 0 \le \rho < 1. \tag{33}$$

Функцию $\Phi_\rho(t)$ называют ядром Неймана.

Теорема 3.2.1. *Для оценки погрешности восстановления решения $U(\rho, t)$ задачи (30)-(31) тригонометрическим полиномом*

$$T_{n-1}\big(U(g;\rho,\cdot), \lambda, t\big) = \frac{a_0\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\big(a_k(g)\cos kt + b_k(g)\sin kt\big)$$

в метрике L_p $(1 \le p \le \infty)$ имеет место оценка

$$\sup_{\|g\|_p \le 1} \inf_{\lambda} \big\|U(g;\rho,\cdot) - T_{n-1}(U(g;\rho,\cdot),\lambda)\big\|_p =$$

---

[15] Корнейчук Н.П. Об оптимальном восстановлении значений операторов // Укр. матем. журн. – 1994. – Т.46. – №10. – С. 1375–1381.

$$= \sup_{\|g\|_p \le 1} \left\| U(g;\rho,\cdot) - T_{n-1}\big(U(g;\rho,\cdot),\mu\big) \right\|_p \le$$

$$\le E_n(\Phi_\rho)_{L_1} = 4 \cdot \int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} r^n}{r} d\rho, \ 0 \le \rho < 1, \tag{34}$$

где набор коэффициентов $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1})$ *определён равенством*

$$\Phi_\rho\left(\frac{2j-1}{2n}\cdot\pi\right) = T^*_{n-1}\left(\frac{2j-1}{2n}\cdot\pi, \mu\right) \ (j = \overline{1,n}).$$

Неравенство (34) неулучшаемо при $p = 1$ *и* $p = \infty$.

Теорема 3.2.2. *Для наилучшего приближения решения* $U(g;\rho,t)$ *краевой задачи (30)-(31) тригонометрическими полиномами в метрике* L_p $(1 \le p \le \infty)$ *справедлива оценка*

$$E_n\big(U(g;\rho,\cdot)\big)_p \le \left(\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} r^n}{r} dr\right) \cdot E_n(g)_p, \ (0 \le \rho < 1). \tag{35}$$

Существует функция $g_0(t) \in L_p$ *с нормой* $\|g_0\|_p \le 1$, *для которой в (35) при* $p = 1$ *и* $p = \infty$ *имеет место знак равенства.*

Если X и Y – линейные нормированные пространства, A – линейный непрерывный оператор из X в Y. M_N – набор линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$ заданных на X^*, где X^* – сопряженное пространство к X, то каждому $x \in X$ поставим в соответствие вектор информации

$$T\big(x, M_N\big) := \big\{\mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_N(x)\big\}, \tag{36}$$

которую возможно принимать как кодирование элемента x точкой из $\mathbb{R}^N$ как N – мерного пространства. Рассмотрим в пространстве X некоторое ограниченное множество $\mathfrak{M}$ и положим

$$G(\mathfrak{M}; A, M_N)_Y = \sup\Big\{\big\|Ax - Ay\big\|_Y : x, y \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = T(y, M_N)\Big\}.$$

Очевидно, что

$$\gamma_N\big(\mathfrak{M}, A, Y\big) = \inf\big\{G\big(\mathfrak{M}, A, M_N\big)_Y : M_N \subset X^*\big\}$$

дает гарантированную для всех $x \in \mathfrak{M}$ минимально возможную ошибку восстановления элемента Ax по информации (36) и называют информационным N – поперечником множества $\mathfrak{M}$ в заданном пространстве Y. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X. Тогда

$$G\big(\mathfrak{M}; A, M_N\big)_Y = 2\sup\big\{\big\|Ax\big\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\big\}, \tag{37}$$

и в этом случае

$$\gamma_N\big(\mathfrak{M}, A, Y\big) = 2\inf\big\{\sup\big\{\big\|Ax\big\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\big\} : M_N \subset X^*\big\}. \quad (38)$$

Пусть $A := A_{\Phi_\rho}$ – оператор свертки с 2π-периодическим ядром $\Phi_\rho(t)$, где $\Phi_\rho(t)$ ядро Неймана (33). Для $\Phi_\rho \in L_1$ функцию $g(t)$ кодируем информационным вектором

$$T\big(g, M'_N\big) := \big\{\mu_1(g), \mu_2(g), \cdots, \mu_N(g)\big\},$$

где $g(t) \in \mathbb{C}_{[0,2\pi]}$ и $M'_N = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ – совокупность линейных функционалов, ограниченные и определенные в пространстве $\mathbb{C}_{[0,2\pi]}$. Априорная информация о граничной функции $g(t)$ Как правило, задается классом

$$\mathfrak{M}_p(K_1) := \big\{f_1 : f_1 = K_1 * g_1, \|g_1\|_p \le 1\big\},$$

где K_1 – означает другое ядро. Ясно, что $\mathfrak{M}_p(K_1)$ – выпуклое центрально-симметричное множество. Пусть $M'_N = M^F_{2n-1}$ – множество функционалов μ_k, заданных в виде первых $2n-1$ коэффициентов Фурье функции $g_1(t)$: $a_0(g_1), a_k(g_1), b_k(g_1)$ $(k = \overline{1, n-1})$, то есть вектор информации (36) имеет вид

$$T\big(g_1, M^F_{2n-1}\big) :=\big\{a_0(g_1), a_1(g_1), \dots, a_{n-1}(g_1), b_1(g_1), \cdots, b_{n-1}(g_1)\big\}.$$

Как и раньше, пусть M^F_{2n-1} означает множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Тогда в силу соотношению (37) имеем

$$G\big(\mathfrak{M}_p(K_1), A_{\Phi_\rho}, M^F_{2n-1}\big) :=$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup\left\{\left\|\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\rho(\cdot - \tau)g_1(\tau)d\tau\right\|_p : g_1 \in \mathfrak{M}_p(K_1), g_1 \perp M^F_{2n-1}\right\}. \quad (39)$$

Теорема 3.2.3. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\rho \in [0, 1)$. *Тогда при* $p = 1$, $p = \infty$ *выполнены равенство*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, L_p\right) = G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, M^F_{2n-1}\right)_p =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 \cdot n^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+2}}. \quad (40)$$

Следующее утверждение вытекает из теоремы 3.2.3.

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.3 при* $\rho \to 1$ *имеет место равенство*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, L_p\right)_p = G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, M^F_{2n-1}\right)_p = \frac{8\mathscr{K}_{r+1}}{\pi^2 \cdot n^{r+1}},$$

где

$$\mathscr{K}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+2}}$$

– константа Фавара-Ахиезера-Крейна.

В завершающем третьем параграфе исследуются методы и схемы восстановлении ранее рассмотренные нами граничные задачи математической физики интерполяционными сплайнами (линейными) и сплайн-функциями первого порядка дефекта один. Доказано, что на классе Липшица H^1 полученные результаты далее неулучшаются.

Для конкретного применения рассмотрим сплайн-функции первого порядка дефекта 1 к нижеследующим граничным задачам:

а) граничная задача Дирихле: Для бигармонического уравнения: требуется найти бигармоническую в области $D = \{(x,y) : x^2+y^2 = \rho^2 < 1\}$ функцию $u(\rho,t),\ 0 \le \rho < 1,\ 0 \le t \le 2\pi$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta^2 u := \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u(\rho,t) = 0, \tag{41}$$

причём

$$u(\rho,t)\Big|_{\rho=1} = g(t), \qquad \frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = 0; \tag{42}$$

Хорошо известно, что решение задачи (41) – (42) задаётся формулой

$$u(\rho,t) := u(g;\rho,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t-u)g(u)du.$$

Здесь ядро $\mathcal{K}_\rho(t)$ имеет вид

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}, \quad 0 \le \rho < 1.$$

Вычисляя непосредственно коэффициентов Фурье для ядра $\mathcal{K}_\rho(t)$ получаем следующее разложение в ряд Фурье:

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}(1-\rho^2)k\right)\rho^k\cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt.$$

б) для уравнения Лапласа в единичном круге граничная задача Неймана формулируется следующим образом: Требуется найти гармоническую функцию $u_1(\rho, t)$ $(0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta^2 u_1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_1(\rho, t) = 0, \tag{43}$$

и следующим краевым условиям

$$\partial u_1(\rho, t) \Big/ \partial \rho \Bigg|_{\rho=1} = \varphi(t), \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0. \tag{44}$$

Из курса математической физики известно, что решение задачи (43) – (44) существует, определяется с точностью до постоянной и задаётся формулой

$$u_1(\rho, t) := u_1(\varphi; \rho, t) = C + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_\rho(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad C = const, \tag{45}$$

где

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k / k) \cos kt, \quad 0 \leq \rho < 1 \tag{46}$$

– ядро Неймана.

Исследуя восстановления решения граничной задач Дирихле (41) – (42) для бигармонического уравнения и Неймана (43) – (44) для уравнения Лапласа в единичном круге рассмотрим следующий метод. Пусть $H^1 := H^1[0, 2\pi]$ — класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \leq |t' - t''|.$$

Метод восстановление граничной краевой задачи (41) – (42). Пусть $\{t_i\} = \{i\pi/n,\ \tau_i = t_i - \pi/(2n)\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $S(t) = S(f, t)$ $(S(t + 2\pi) = S(t))$ сплайн-функция степени 1 дефекта 1 по разбиению узлов $\{t_i\}$, однозначно определяемый по периодической функции $f(t)$ условием

$$S(f, \tau_i) = \frac{n}{\pi} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau) d\tau,\ i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{47}$$

Формуле (свёртке)

$$u(g; \rho, t) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

которая является решением граничной задачи (41) – (42) с учётом равенство (47), однозначно сопоставим функцию

$$S_1(u(g;\rho,\cdot);\ t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho\,(t-\tau)\,S(g,\tau)d\tau. \tag{48}$$

Вычислим точной верхней грани следующей величины

$$\sup\left\{\left|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\right| :\ g \in H^1\right\}. \tag{49}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. *Для восстановления решения граничной задачи (41) – (42) формулой (48) при любых значениях t справедливо точная оценка*

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1\big(u(g;\rho,\cdot);t\big)\Big| :\ g \in H^1\Big\} =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\cdot\pi\right) +$$

$$+\frac{4}{\pi}\left(1-\rho^2\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\cdot\pi\right). \tag{50}$$

Метод восстановление граничной задачи Неймана (43) – (44). Не вдаваясь на излишной подробности, отметим, что метод восстановления применим также к граничной задаче (43) – (44), предполагая, что

$$S_2(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t) = C + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\rho(t-\tau)s(\varphi,\tau)d\tau,$$

где сплайн-функция степени 1 дефекта 1 $s(\varphi,\tau)$ определён однозначно ограничением

$$s(\varphi,t_i) = \frac{n}{\pi}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi(\tau)d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,2n. \tag{51}$$

Простые вычисление приводят к следующей теореме.

Теорема 3.3.2. *Восстановления решения граничной задачи (43) – (44) равенством (48) при всех значениях t справедливо точная оценка*

$$\sup\Big\{\Big|u_1(\varphi;\rho,t) - S_2\big(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t\big)\Big| : \ \varphi \in H^1\Big\} =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu-1}}{(2\nu-1)^3}\cdot\sin^2\frac{(2\nu-1)\pi}{4n}. \tag{52}$$

При этом если вместо (51) ломаную $s(\varphi,t)$ *определить условиями интерполяции* $s(\varphi,t_i)=\varphi(t_i)$, $i=1,2,\ldots,2n$, *погрешность на всем классе* H^1 *равна определяется равенством*

$$\sup\left\{\Big|u_1(\varphi;\rho,t) - S_2(u_1(\varphi;\rho,\cdot);t)\Big| : \ \varphi \in H^1\right\} = \frac{1}{\pi n^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{(2\nu+1)2n}}{(2\nu+1)^3}. \tag{53}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы следующее:

- вычислен точное значение экстремальной характеристики наилучшего совместного приближения периодических функций в L_2, в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции [3-A, 5-A, 8-A];
- определены наилучшие совместные приближения различных классов дифференцируемых функции в L_2 [3-A, 4-A, 8-A];
- обобщена экстремальная аппроксимационная характеристика Шабозова – Вакарчука, определено её точное значение и вычислено значение n-поперечников различных классов функций [3-A, 4-A];
- найден явный вид метода кодирования решения граничных задач Дирихле и Неймана и их оптимального восстановления тригонометрическими многочленами по заданной информации [1-A, 2-A, 5-A, 6-A];
- вычислено точное значение информационного N-поперечника некоторых классов функций [6-A, 7-A];
- восстановлены приближённые решения граничных задач Дирихле и Неймана сплайн-функциями первого порядка на классе Липщица $H^1[0, 2\pi]$ [1-A, 2-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов. Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций нескольких переменных, их кодировании и приближённом восстановлении.

Результаты глав диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов вузов по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Мухлис А. Неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники некоторых классов функций в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, А.Мухлис // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – No7-8. – С.356–367.

[2-А] Мухлис А. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций и точных значениях поперечников некоторых классов функций в L_2 [Текст] / А.Мухлис // Известия Национальной академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – No1–2. – С.24–36.

[3-А] Мухлис А. Восстановление и кодирование решения краевой задачи Неймана с помощью тригонометрических полиномов и по заданной информации о граничных функциях [Текст] / М.Азизов, А.Мухлис // Известия Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – No 4(173). – С.26–36.

[4-А] Мухлис А. Восстановление решения краевой задачи Неймана по информации о граничных функциях [Текст] / М.Азизов, А.Мухлис // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – No5-6. – С.280–285.

В других изданиях:

[5-А] Мухлис А. Об одной аппроксимационной характеристики и её применении [Текст] / А.Мухлис // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*". (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С.13–15.

[6-А] Мухлис А. О задаче совместного приближения функций и их производных посредством одной аппроксимационной характеристики в L_2 [Текст] / А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.10–13.

[7-А] Мухлис А. Восстановление решения краевой задачи Неймана по информации о граничных функциях [Текст] / М.Азизов, А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*", посвященной 60-летию профессора З.Х.Рахмонова и члена корреспондента НАН Таджикистана С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С.44–46.

[8-А] Мухлис А. Восстановление и кодирование решения краевой задачи Неймана по заданной информации о граничных функциях [Текст] / М.Азизов, А.Мухлис // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.300–304.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Мухлис Абдул Вадуд дар мавзӯи «Оиди баъзе масъалањои экстремалии наздиккунии функсияҳои даврӣ дар L_2» барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика)

Вожаҳои калидӣ: *нобаробарии Ҷексон – Стечкин, модули бефосилагӣ, наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин, полиномҳои тригонометрӣ, масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман, n-қутр, иттилоот, рамзгузорӣ.*

Мақсади кор. Мақсади асосии таҳқиқоти кори диссертатсионӣ аз ҳалли масъалаҳои экстремалии ба ҷустуҷӯи қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ, аз ҷустуҷӯи усули беҳтарини рамзгузорӣ ва барқароркунии вобастагии функсионалӣ ҳангоме, ки қиматҳои функсионалҳо ба функсияи φ бо функсияи $f = A\varphi$, ки дар ин ҷо A — ягон оператор, рамзгузорӣ карда мешавад, иборат аст. Ҳолати мушаххаси рамзгузорӣ ва барқароркунии ҳалли масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман аз рӯи иттилоот оид ба функсияҳои сарҳадӣ, инчунин ҳолати мушаххаси додашудаи рамзгузорӣ ва иттилоотӣ дар нуқтаҳои интерполятсия дар порчаи охирнок, таҳқиқ карда шудаанд.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор усулҳои навтарини ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои мухталифи банахӣ кор фармуда мешаванд.

Навоварии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ овардашуда, нав мебошанд. Натиҷахои асосии гирифташуда чунинанд:

- қимати аниқи тавсифи экстремалии наздикунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ дар L_2 вобаста ба хосиятҳои дифференсиалии функсияҳои вазнӣ ёфта шудааст;
- наздикунии ҳамҷояи беҳтарини синфҳои мухталифи функсияҳои дифференсиронидашаванда дар L_2 муайян карда шудаанд;
- тавсифи наздикунии экстремалии Шабозов – Вакарчук умумӣ карда шуда, қимати аниқи он муайян карда шуда, қиматҳои n-қутри синфҳои мухталифи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;
- намуди ошкори усули рамзгузории ҳалли масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман ва барқароркунии беҳтарини онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ аз рӯи иттилооти додашуда, ёфта шудаанд;
- қимати аниқи N-қутри итилоотии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст;
- ҳаллҳои тақрибии масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман бо сплайн-функсияҳои тартиби якум дар синфи Липшитси $H^1[0, 2\pi]$ барқарор карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кор хусусияти назариявӣ дорад. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва усулҳои исботи онҳоро дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағирёбанда бо полиномҳои тригонометрӣ истифода кардан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Мухлис Абдул Вадуд на тему «О некоторых экстремальных задачах приближения периодических функций в L_2», представленной на соискание учёной степени доктор философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *неравенства Джексона-Стечкина, модуль непрерывности, наилучшее совместное приближение, тригонометрический полином, краевой задачи Дирихле и Неймана, n-поперечники.*

Цель работы. Основной целью диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач связанные с отысканием точной значении верхней грани наилучшей совместной приближении функции и её промежуточных производных тригонометрическими полиномами, а также в отыскании наилучшего метода кодирования и восстановлении функциональной зависимости, когда значениями функционалов на функции φ кодируется функцией $f = A\varphi$, где A — некоторый оператор. Рассмотрен конкретный случай кодирования и восстановления решения краевой задачи Дирихле и Неймана по информации о граничных функциях и заданной информации в точках интерполяции на конечном отрезке.

Методы исследования. В работе применяются новейшие методы решения экстремальных задач в различных банаховых пространствах.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение экстремальной характеристики наилучшего совместного приближения периодических функций в L_2, в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции;
- определены наилучшие совместные приближения различных классов дифференцируемых функции в L_2;
- обобщена экстремальная аппроксимационная характеристика Шабозова – Вакарчука, определено её точное значение и вычислено значение n-поперечников различных классов функций;
- найден явный вид метода кодирования решения краевых задач Дирихле и Неймана и их оптимального восстановления тригонометрическими полиномами по заданной информации;
- вычислено точное значение информационного N-поперечника некоторых классов функций;
- восстановлены приближённые решения краевых задач Дирихле и Неймана сплайн-функциями первого порядка на классе Липщица $H^1[0, 2\pi]$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функции многих переменных тригонометрическими полиномами.

SUMMARY
of the thesis Mukhlis Abdul Wadoud on the topic “On some extremal problems of approximation of periodic functions in L_2” submitted for the Philosophiæ Doctor (PhD – 6D060100 Mathematics) degree

Key words: *Jackson-Stechkin inequalities, modulus of continuity, best joint approximation, trigonometric polynomial, Dirichlet and Neumann boundary value problems, n-widths.*

The purpose of research. The main goal of the dissertation work is to solve extremal problems related to finding the exact value of the upper bound of the best joint approximation of a function and by trigonometric polynomials, as well as to find the best coding method and restore functional dependence, when the values of functionals on a function are φ encoded by the function $f = A\varphi$, where A is some operator. A specific case of encoding and restoring the solution of the Dirichlet and Neumann boundary value problem from information about boundary functions and given information at interpolation points on a finite interval is considered.

Research methods. The paper uses the latest methods for solving extremal problems in various Banach spaces.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following results were obtained:

- the exact value of the extremal characteristic of the best joint approximation of periodic functions in L_2, depending on the differential properties of the weight function;
- the best joint approximations of various classes of differentiable functions in L_2;
- the Shabozov-Vakarchuk extremal approximation characteristic is generalized, its exact value is determined and the value of n-widths of various function classes is calculated;
- an explicit form of the method for coding the solution of Dirichlet and Neumann boundary value problems and their optimal recovery by trigonometric polynomials from given information is found;;
- the exact value of the informational N-width of some function classes has been calculated;
- approximate solutions of Dirichlet and Neumann boundary value problems are restored by first-order spline functions on the Lipschitz class $H^1[0, 2\pi]$.

Theoretical and practical value. The work is theoretical. The results of the dissertation work and the methods of their proof can be applied in extremal problems of the theory of approximation of a function of many variables by trigonometric polynomials.