На правах рукописи

Муродов Каримджон Насимович

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ДУШАНБЕ–2019

Работа выполнена в Худжандском государственном университете
им. Б. Гафурова

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛИ: **Шабозов Мирганд Шабозович,** академик Академии наук Республики Таджикистан, доктор физико-математических наук профессор;

Тухлиев Камаридин, доктор физико-математических наук, профессор

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций Таджикского национального университета;

Олифтаев Нодир Фезилобекович, кандидат физико-математических наук, проректор учебной части Таджикского педагогического института в Раштском районе.

Оппонирующая организация: Таджикский государственный педагогический университет имени Садриддина Айни

Защита состоится *25 сентября 2019г. в 10:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан "____" ____________ 2019 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Джангибеков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Из курса уравнений математической физики хорошо известно, что классические многочлены Лагерра, Эрмита-Чебышева, Якоби и специальные функции – цилиндрические, сферические и гипергеометрические, обычно возникают при решении различных дифференциальных уравнений методом разделения переменных, основанном на теоремах разложения по различным ортогональным системам функций.

В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение специальных функций в задачах численного анализа и математической статистики. Это приводит к отысканию оптимальных оценков аппроксимации функций посредством частных сумм рядов Фурье по ортогональным разложениям указанных специальных функций. Иногда удаётся найти точное неравенство типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности m-го порядка, а иногда удаётся вычислить значение n-поперечников классов функций, определяемых дифференциальными операторами второго порядка различных видов. Всё это сделает актуальным исследовании в этом направлении.

Цели и задачи исследования. В работе решается ряд конкретных экстремальных задач, связанных с:

- вычислением верхних граней отклонений заданных классов функций от их сумм ряда Фурье-Бесселя в пространстве L_2 (глава I);
- отысканием точных неравенств Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка (глава I);
- вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя (глава II).

Методы исследования. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функций Бесселя. При этом в качестве инструмента исследования используются современные методы теории приближения функций и функционального анализа, а также методы решения экстремальных задач оптимизационного содержания.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 ;

- найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$;
- найдено точное неравенство Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя второго порядка;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика и прикладная математика.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры информатики и вычислительной математики Худжанского государственного университета им. академика Б.Гафурова (г.Худжанд, 2014-2018 г.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2018 г.);
- международной научно-практической конференции „Тенденции и переспективы развития науки XXI века" (Екатренбург, 18 октябр 2015 г.);
- международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15 - 25 августа 2016 г.);
- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук" (Душанбе, Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, 24 ноября 2017 г.);
- международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений", посвящённой 70-летию академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, 21-22 июня 2018 г.);

- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества" посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан (Худжанд, ХГУ им. Б.Гафурова, 26-27 октября 2018 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 5 статьи опубликованы в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 5 статьи в трудах международных и республиканских конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым и К.Тухлиевым [1,2,4] работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 33 наименования, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Пусть

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

— функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — занумерованные в порядке возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots$$

последовательности положительных корней уравнения $J_\nu(x) = 0$. Хорошо известно, что функция $J_\nu(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка[1]

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0.$$

Также известно[1], что функции $J_\nu(x)$ являются системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, \ u(1) = 0, \qquad (1)$$

---

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд. – М.: Наука. 1988. 512 с.

отвечающих собственным значениям $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты. Всюду далее через $L_2 := L_2([0,1]; xdx)$ — обозначим пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = 0,\ k \neq m,\ \int_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_k x)dx = \frac{1}{2}J_\nu'^2(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2}J_\nu(\lambda_k x)\cdot|J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2, для которой

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad k = m. \end{cases}$$

В этом случае, для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье-Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x), \quad \text{где} \ \ c_k(f) = \int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_k x)dx \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье-Бесселя. Из (2), учитывая свойство ортогональности и применяя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\|f\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Пусть

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x)$$

— частные суммы $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя (2).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \Big\{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \qquad (3)$$

Нам для дальнейшего понадобится специальный вид обобщенного модуля непрерывности, который вводим следующим образом. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка Бесселя

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \qquad (4)$$

при помощи которого дифференциальное уравнение (1) запишем в операторном виде

$$\mathcal{D}u = -u.$$

Введём функцию $T(x, y; t)$ как сумму ряда

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \ 0 < t < 1.$$

В L_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \int\limits_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt, \qquad (5)$$

который называют оператором обобщенного сдвига. Для произвольной $f \in L_2$ рассматриваются конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, ..., m,$$

а символ E – единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f;t) = sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \leq t\} \tag{6}$$

назовём обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Всюду далее обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (4), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f', и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$.

Полагаем $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, ...$, обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$.

Имеет место следующая

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{2r}} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \tag{7}$$

Неравенство (7) *точное в том смысле, что существует функция* $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, *для которой неравенство* (7) *обращается в равенство.*

Из леммы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}.$$

Используя некоторые свойства оператора (5) с учётом равенства Парсеваля находим

$$\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|^2 := \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-h)^k)^{2m} c_k^2(f), \tag{8}$$

где $h \in (0, 1)$. Из равенств (6) и (8) имеем:

$$\Omega_m(f, t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-t)^k)^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/2}, \ 0 < t < 1. \tag{9}$$

Для модуля непрерывности (9) в работе[2] в предположении, что $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq (1 - (1-t)^n)^{-m} \lambda_n^{-2r} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \ 0 < t < 1. \tag{10}$$

---

[2] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015, т.55, №6, с. 917-927.

Покажем, что для функции $f_0(x)=J_\nu(\lambda_n x)$ неравенство (10) обращается в равенство. Из (3) вытекает, что $E_{n-1}(f_0)=1$, и так как легко проверить, что

$$\mathcal{D}^r f_0(x)=\lambda_k^{2r}J_\nu(\lambda_k x),\ \ \Omega_m(\mathcal{D}^r f,t)=[1-(1-t)^n]^m\lambda_n^{2r},$$

то имеем:

$$1=E_{n-1}(f_0)=[1-(1-t)^n]^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t).$$

Отсюда сразу вытекает

Лемма 1.3.2. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t)}=\frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},\ \ 0<t\le 1.$$

В условиях леммы 1.3.2 имеет место

Лемма 1.3.3. *Справедливо равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,\frac{1}{n})}=\left(1-e^{-1}\right)^{-m}.$$

Основным результатом третьего параграфа первой главы является следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых* $r\in\mathbb{Z}_+,\ \ m,n\in\mathbb{N},\ \ h\in(0,1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)h^m}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=\left(1+\frac{1}{h}\cdot\frac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}. \qquad (11)$$

В частности, при $h=1/(n+1)$ *из* (11) *вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}. \qquad (12)$$

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.1 *из равенства* (12) *имеем:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=e^m.$$

Результаты, изложенные в четвёртом параграфе, являются основными результатами первой главы и, базируясь именно на этих результатах, мы во второй главе диссертации вычислим точные значения различных n-поперечников классов функций, естественно возникающих из нижеизложенных теорем.

Имеет место следующее общее утверждение

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < 1$, φ *– неотрицательная измеримая суммируемая на интервале* $(0, h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 1.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1), \varphi \geq 0$ *- суммируемая на (0,h] функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^m} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^m}.$$

Следствие 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.4.1 *и пусть* $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при любом* $h \in (0,1]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{13}$$

В частности, из (13) *при* $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ *получаем*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{14}$$

В свою очередь из (14) *при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ *следует равенство*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

В пятом параграфе первой главы найдены точные оценки величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре.

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики — замене сложных математических выражений более простыми и удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулирует развитие математики в целом и теории приближения функций в частности. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$-функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$-функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности, например в работах[3,4,5].

Рассмотрим $\mathcal{K}$-функционал следующего вида

$$\mathcal{K}(f,t^m) := \mathcal{K}(f,t^m;L_2;L_2^{(m)}(\mathcal{D})) = \inf\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\| : g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\}, \quad (15)$$

где $m\in\mathbb{N}, 0<t<1$. Отметим, что $\mathcal{K}$-функционал $\mathcal{K}(f,t^m)$ не убывает,

$$\mathcal{K}(f,(nt)^m)\le n^m\mathcal{K}(f,t^m)$$

и эквивалентен модулю непрерывности $\Omega_m(f,t)$.

Эквивалентность модуля непрерывности (9) и $\mathcal{K}$-функционала (15) устанавливает следующее утверждение.

Теорема 1.5.1. *Существуют положительные константы* $c_1=c_1(m)$ *и* $c_2=c_2(m)$*, для которых справедливы неравенства*

$$c_1\Omega_m(f,t)\le\mathcal{K}(f,t^m)\le c_2\Omega_m(f,t)$$

для произвольной функции $f\in L_2, 0<t<1$.

Основным результатом пятого параграфа является

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\ne const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)_{L_2}}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f,\lambda_n^{-2m})_{L_2}}=1.$$

---

[3] Фёдоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984, №6, С.55-63.

[4] Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышёва–Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика, 1997, №6, С.68-71.

[5] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1};[-1,1]\right)$ // Известия Тульского госуниверситета. – Естест. науки. – 2014. – вып. 1. – ч.1. – С. 83-97.

В шестом параграфе перовой главы приводятся некоторые обобщения предыдущих результатов и находятся точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1],\ \ x^{2\nu+1}dx\right),\ \ \nu > -\frac{1}{2}$.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и обозначения.

Пусть $L_{2,\nu} := L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$ – пространство суммируемых с квадратом функций f, интегрируемых с весом $x^{2\nu+1},\ \ \nu > -1/2$ на отрезке $[0,1]$ и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\nu} := \|f\|_{L_{2,\nu}} = \left(\int\limits_0^1 x^{2\nu+1} f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

В монографии [1] доказано, что система функций

$$j_\nu(\lambda_n x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\mathcal{J}_\nu(\lambda_n x)\cdot(\lambda_n x)^{-\nu},\ n = 1, 2, ..., \tag{16}$$

где $\mathcal{J}_\nu(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – занумерованные в порядке возрастания положительные нули уравнения $\mathcal{J}_\nu(u) = 0$, является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\nu}$. При этом произвольная функция $f \in L_{2,\nu}$ разлагается в ряд Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \tag{17}$$

где коэффициенты $b_k(f)$ определены формулой

$$b_k^2(f) = \frac{1}{\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2}\int\limits_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_k x)dx, \tag{18}$$

а равенство (17) понимается в смысле сходимости в норме $L_{2,\nu}$.

Символом

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\nu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\nu}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ – обобщённых полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k j_\nu(\lambda_k x).$$

В силу свойств ортогональности системы функций (16), получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\nu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f),$$

где

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя (17), а

$$a_k^2(f) = \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

В пространстве $L_{2,\nu}$ введём следующий оператор усреднения

$$T_{h,\nu}(f,x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos t}\right)\sin^{2\nu} t dt,$$

обладающий свойствами:

а) для произвольных функций $f, g \in L_{2,\nu}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $T_{h,\nu}(\alpha f + \beta g, x) = \alpha T_{h,\nu}(f,x) + \beta T_{h,\nu}(g,x)$;

б) $T_{h,\nu}(j_\nu(\lambda x)) = j_\nu(\lambda h) j_\nu(\lambda x)$;

в) $T_{0,\nu}(f,x) \equiv f(x)$;

г) $\|T_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} \le \|f\|_{2,\nu}$ и $\|T_{h,\nu}(f,\cdot) - f(\cdot)\|_{2,\nu} \to 0$, при $h \to 0$;

д) функция $u(x,h) := T_{h,\nu}(f;x),\ x,h \in [0,1]$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2\nu+1}{h}\cdot\frac{\partial u}{\partial h}, u(x,o) = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=0} = 0,$$

где $f(x)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения часто используют различные разновидности классического модуля непрерывности, связанного со спецификой рассматриваемых задач и позволяющего получить окончательные результаты[2,6,7,8]. Здесь мы воспользуемся подходом,

---

[6] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, С.1414-1427.

[7] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вісник, 2014, т.11, №3, С.417-441.

[8] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журнал, 2013, т. 65, №12, с.1604–1621.

предложенным в работе[9], и докажем ряд новых результатов. Известно[10], что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ с рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

имеет место формула

$$T_{h,\nu}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_\nu(\lambda_k h) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \tag{20}$$

причём сходимость ряда, стоящего в правой части равенства (20), понимается в смысле пространства $L_{2,\nu}$.

Пусть E_ν – единичный оператор в пространстве $L_{2,\nu}$. Полагаем

$$T^1_{h,\nu}(f;x) = T_{h,\nu}(f;x),\ T^m_{h,\nu}(f;x) := T_{h,\nu}(T^{m-1}_{h,\nu}(f;\cdot), x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Используя эти соотношения, для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ запишем конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta^1_{h,\nu}(f,x) := F_{h,\nu}(f,x) - f(x) = (F_{h,\nu} - E_\nu) f(x),$$

$$\Delta^m_{h,\nu}(f,x) := \Delta_{h,\nu}(\Delta^{m-1}_{h,\nu}(f,\cdot),x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F^k_{h,\nu}(f,x),\ k = 2, 3, ... \tag{21}$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $t \in (0,1)$, исходя из введённых разностей (21), определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в пространстве $L_{2,\nu}$:

$$\Omega_m(f,t)_{2,\nu} := \sup\left\{ \|\Delta^m_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} : 0 < h \le t \right\}.$$

Введём обозначения:

$$\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{d}{dx},\ \nu > -1/2$$

– дифференциальный оператор второго порядка Бесселя порядка ν.

В монографии[11] доказано, что функции $j_\nu(\lambda_n x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathcal{D}y = \lambda_n^2 y,\ \text{и}\ j_\nu(0) = 1,\ j'_\nu(0) = 0.$$

---

[9] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье-Бесселя. – Известия вузов. Математика. 2001, т. 18, №8, с.3–9.

[10] Левитан Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука, 1973, 312 с.

[11] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введению в спектральную теорию. Самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1970, 671 с.

Умножая обе части указанного уравнения на весовую функцию $x^{2\nu+1}(\nu > -1/2)$, получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1}\frac{d}{dx}j_\nu(\lambda_n x)\right) + \lambda_n^2 x^{2\nu+1} j_\nu(\lambda_n x) = 0.$$

Пользуясь полученным уравнением, для коэффициентов (18) легко доказать следующую формулу (см. например [9])

$$b_k(f) = (-1)^r \lambda_n^{-2r} b_k(\mathcal{D}^r f), \tag{22}$$

где $\mathcal{D}^0 f = f,\ \mathcal{D}^r(f) := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f), r \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})(r \in \mathbb{Z}_+;\ \ L_{2,\nu}^{(0)}(\mathcal{D}) \equiv L_{2,\nu},\ \ \nu > -1/2)$ – класс функций $f \in L_{2,\nu}$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и производную r-го порядка $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\nu}$.

Пользуясь формулами (17), (20) и соотношениями (21), запишем разность первого порядка функции f в следующем виде

$$\Delta_{h,\nu}^1(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{23}$$

Последовательно применяя формулу (23) из (21), для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем рекуррентную формулу

$$\Delta_{h,\nu}^m(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1)^m b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{24}$$

Используя равенство Парсеваля, в силу ортогональности системы функций $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, из (24) получаем формулу

$$\|\Delta_{h,\nu}^m(f,\cdot)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f). \tag{25}$$

Учитывая равенства (21) и (25), запишем:

$$\Omega_m^2(f,t)_{2,\nu} := \sup_{h \le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f)\right\}. \tag{26}$$

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$ из (22) и (19), следует равенство

$$a_k^2(\mathcal{D}^r f) = b_k^2(\mathcal{D}^r f) \cdot \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} b_k^2(f) \cdot \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} a_k^2 f,$$

в силу которого из равенства (26) получаем[6]:

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\nu} = \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-j_\nu(\lambda_k t))^{2m}a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\} =$$

$$= \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-j_\nu(\lambda_k t))^{2m}\lambda_k^{4r}a_k^2(f)\right\}. \tag{27}$$

Используя обобщённый модуль непрерывности (27) В.А.Абиловым и Ф.В.Абиловой получены прямые и обратные теоремы теории приближения в виде неточных неравенств. Следует отметить, что при получении точных прямых теорем посредством модуля непрерывности (27) нельзя рассчитывать на их точность на классах функций, а поэтому точные теоремы в дальнейшем получаем при помощи $\mathcal{K}$-функционала Петре.

В настоящее время теория приближения функций имеет дело главным образом с приближением классов функций при помощи заданных подпространств фиксированной размерности, связанных с получением точных результатов, реализующих n-поперечники на указанных классах функций. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на $\mathscr{K}$-функционале Петре[12]. Отметим, что особенно большую роль играют $\mathscr{K}$-функционалы в экстремальных задачах теории приближения функций. При этом изучение связи между модулями гладкости и $\mathscr{K}$-функционалами является одной из основных задач теории приближения функций. Для различных обобщённых модулях гладкости такие задачи изучались, например, в работах[13,14,15].

Пусть $L_{2,\nu}^{(m)}$– пространство Соболева, построенное по оператору $\mathcal{D}$, то есть

$$L_{2,\nu}^{(m)} := \{f\in L_{2,\nu} : \mathcal{D}^j f\in L_{2,\nu},\ \ j=1,2,...,m\}.$$

Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам $L_{2,\nu}$ и $L_{2,\nu}^{(m)}$,

$$\mathscr{K}_m\left(f,t;L_{2,\nu};L_{2,\nu}^{(m)}\right) := \inf\left\{\|f-g\|_{2,\nu}+t^m\|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu} : g\in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})\right\}, \tag{28}$$

где $m\in\mathbb{N},\ f\in L_{2,\nu},\ 0<t<1$. Далее, ради краткости, будем использовать обозначение

$$\mathscr{K}_m(f,t)_{2,\nu} := \mathscr{K}_m\left(f,t;L_{2,\nu};L_{2,\nu}^{(m)}\right).$$

---

[12] Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx.Theory. 1986. V.46, №1. PP.38–41.

[13] Löfstróm J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations// Math.Ann.– 1969. –V.181. –P. 255-268

[14] Ditzian Z., Totik V.Moduli of smoothness. –New York etc.: Springer-Verlag, 1987. –228p.

[15] Feng Dai. Some equivalence theorems with K-functionals // J. Appr. Theory. –2003. –V.121. –P. 143-157.

Эквивалентность модуля непрерывности (26) и $\mathscr{K}$-функционала (28) установлена в работе[16].

Имеет место следующая основная

Теорема 1.6.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu}} = 1.$$

Во второй главе диссертации рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников классов функций, естественно вытекающих из теорем, доказанных в первой главе.

Нам для изложения результатов второй главы потребуется ряд определений и обозначений. Пусть S – единичный шар в пространстве L_2; $\Lambda_n \subset L_2 - n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$– линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathcal{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_2\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* поперечниками подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в любом гильбертовом пространстве X_2 (в нашем случае $X_2 := L_2 = L_2((0,1), xdx)$ и $X_2 := L_{2,\nu} = L_2((0,1), x^{2\nu+1}dx)$) выполняются соотношения (см., например, монографии[17,18]):

$$b_n\left(\mathfrak{M}; L_2\right) \leqslant d^n\left(\mathfrak{M}; L_2\right) \leqslant d_n\left(\mathfrak{M}; L_2\right) = \delta_n\left(\mathfrak{M}; L_2\right) = \Pi_n\left(\mathfrak{M}; L_2\right).$$

Введём классы функций, естественно вытекающих из результатов теорем 1.3.1 и 1.4.1, доказанных в предыдущих пунктах.

---

[16] Белкина Е.С., Платонов С.С. Эквивалентность $\mathcal{K}$-функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля. // Известия вузов. Математика., 2008, є8, с.3-15 МГУ, 1976. 318с.

[17] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag. –1985. – 292 p.

[18] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений, М. МГУ, 1976. 318 с.

Сначала приведём определение класса, вытекающего из теоремы 1.3.1, а именно через $\mathrm{W}_{1/m}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h)$ класс функций $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ при всех $r\in\mathbb{Z}_+,\ \ m\in\mathbb{N},\ \ 0<t<1$, удовлетворяет условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\le 1.$$

Пусть $h\in(0,1),\ 0<p\le 2,\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \varphi\ge 0$ – суммируемая на интервале $(0,h)$ неэквивалентная нулю функция. Через $\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\le 1.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *При всех* $r\in\mathbb{Z}_+,\ m,n\in\mathbb{N},\ 0<h<1$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2)=\lambda_n^r\left(1-\frac{1}{(n+1)h}+\frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Заметим, что из утверждения теоремы 2.1.1, при $h=1/(n+1)$, имеем:

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2)=\lambda_n^{-2r}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}\sim\frac{e^m}{\lambda_n^{2r}}.$$

Приведём основной результат первого параграфа второй главы.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, 0<p\le 2, 0<h<1, \varphi\ge 0$ *- суммируемая на интервале* $(0,h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной* $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2)=E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))_{L_2}=$$

$$=\lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot),d_n(\cdot),\delta_n(\cdot),d^n(\cdot),\Pi_n(\cdot),$ *а*

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))_{L_2}:=\sup\{E_n(f)_2: f\in\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)_{L_2}\}.$$

Из теоремы 2.1.2 вытекает ряд утверждений

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы* 2.1.2 *при* $\varphi_\star(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star)) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star) =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}.$$

В качестве второго следствия теоремы 2.1.2 будем рассматривать экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье-Бесселя $c_n(f)$. Такая задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе[19], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с заданным весом полиномам в работе[5]. Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $0 < p \le 2$. *Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)\} = \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Во втором параграфе второй главы введён класс функций, вытекающих из результата теоремы 1.6.1, и для этого класса вычислены точные значения перечисленных в параграфе 2.1 n-поперечников.

Неубывающую на положительной полуоси $[0,\infty)$ функцию Φ называют k-можарантой, если функция $\Phi(t)/t^k, k \in \mathbb{N}$ не возрастает на $(0,\infty), \Phi(0) = 0$ и при $t \to 0, \Phi(t) \to 0$ (см., например[20]). Множество всех k-мажорант обозначим символом $\mathscr{F}^k$. Через $W_{2,k}^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi), r \in \mathbb{Z}_+, m,k \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \le \Phi(t^m)$, где $0 < t \le 1$ – любое число, а мажоранта Φ – произвольная функция, принадлежащая $\mathscr{F}^k$. В случае $k = 1$ вместо символа $W_{2,1}^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi)$ будем писать $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi)$.

Имеет место следующая

---

[19] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Т. 38. №2. С.154–165.

[20] Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 225 с.

Теорема 2.2.1. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место следующие равенства*

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right)_{2,\nu} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

где $\rho_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot),$ *а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu} := inf\left\{E_{n-1}(f)_{2,\nu} : \ f \in L_{2,\nu}\right\}$$

для $\mathfrak{M} \subset L_{2,\nu}$.

Из теоремы 2.2.1 вытекает.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *справедливы равенства*

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

В заключении, приведённом в конце диссертации, излагаются итоги проведённого исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Выражаю благодарность своему научному руководителям академику АН Республики Таджикистан, профессору Мирганду Шабозовичу Шабозову и профессору Тухлиеву Камаридина за полезные советы, обсуждения и поддержку.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечней ВАК при Президенте Республики Таджикистан и Российской Федерации:

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, №2, С. 39-47.
2. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя и значения $\mathcal{K}$–функционалов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015, №4(161), С. 16-26.
3. Муродов К. Н. Верхние грани среднеквадратических приближений некоторых классов функций частичными суммами Фурье-Бесселя заданного порядка // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 - 25 августа 2016 г., С. 176-181.
4. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $l_{2,\nu}$ и значения поперечников некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд.физ.-мат.,хим., геол. и техн. н. 2017, №2(167), С. 17-29.
5. Муродов К.Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя и значение поперечников функциональных классов // ДАН РТ. 2017, т.60, №1-2, С. 20-25.

В других изданиях:

6. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя в пространстве L_2 // В материалах международной научно-практической конференции „Тенденции и переспективы развития науки XXI век"(Екатренбург, 18 октябр 2015 г.), С. 1 4-16.
7. Муродов К. Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя в гильбертовом пространстве // Материалы республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук", 24 ноября 2017 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С .29-31.
8. Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu}$ // В материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений", посвящённой 70-летию академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.), С. 38-40.

9. Муродов К. Н. Точные значение n-поперечников некоторых классов функций // Материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений", 21-22 июня 2018 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С. 67-68.
10. Муродов К. Н. Наилучшие приближения функций суммами Фурье-Бесселя и точные значение поперечников некоторых классов функций // В материалах республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества" посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. 26-27 октября 2018 г., ХГУ им. Б.Гафурова, Худжанд, С. 42-46.

ШАРҲИ МУХТАСАР

ба диссертатсияи Муродов Каримҷон Насимович дар мавзӯи «Наздикшавии миёнаквадратии функсияҳо бо суммаҳои Фурйе-Бессел», барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, функсияи Бессел, қатори Фурйе-Бессел, нобаробарии Ҷексон-Стечкин, $\mathscr{K}$-функсионал, n-қутр.

Муҳимияти мавзӯъ. Аз курси муодилаҳои физикаи математикӣ хуб маълум аст, ки бисёраъзогиҳои классикии Лагер, Эрмит-Чебишов, Якобӣ ва функсияҳои махсус - силиндрикӣ, сферикӣ ва гипергеометрӣ одатан дар мавриди ҳалли муодилаҳои мухталифи дифференсиалӣ бо методи ҷудокунии тағирёбандаҳо, ки ба теоремаҳои ҷудокунӣ аз рӯи системаҳои функсияҳои ортогоналии мухталиф асос ёфтаанд, пайдо мешаванд.

Дар солҳои охир истифодаи босуръати функсияҳои махсус дар масъалаҳои таҳлили ададӣ ва статистикаи математикӣ мушоҳида мешавад. Ин ба ҷустуҷӯи баҳоҳои оптималии наздиккунии функсияҳо бо ёрии суммаҳои хусусии қатори Фурйе аз рӯи ҷудокунии ортогоналии функсияҳои махсуси номбаршуда, оварда мерасонад. Дар баъзе ҳолат имконияти ёфтани нобаробарии аниқи намуди Ҷексон-Стечкин барои модулҳои махсуси бефосилаи тартиби m ва ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо операторҳои дифференсиалии тартиби дуюми намудҳои мухталиф муайяншаванда, мавҷуд аст. Бо ин муҳимияти мавзуи таҳқиқот арзёбӣ мешавад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар вақти ҳалли масъалаҳои номбаршуда ба сифати асбоби наздиккунӣ - полиномҳои умумишуда аз рӯи системаи функсияҳои ортогоналии Бессел интихоб карда мешавад. Дар ин маврид ба сифати олоти таҳқиқот методҳои муосири назарияи наздиккунии функсияҳо ва таҳлили функсионалӣ, инчунин методҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии дорои мӯҳтавои оптимизатсионӣ, мавриди истифода қарор меёбанд.

Мақсад ва масоили таҳқиқот. Ҳисобкунии сарҳади болоии майлкунии синфҳои функсияҳои додашуда аз суммаҳои қатори Фурйе-Бессел дар фазои L_2; ҷустуҷӯи нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ва модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, ки бо оператори дифференсиалии тартиби дуюм, муайян карда мешаванд; ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m додашуда, ки бо оператори дифференсиалии Бессел муайян карда мешаванд.

Натиҷаҳои гирифташуда ва навоварии он. Дар диссертатсия натиҷаҳои нави зерин гирифта шудааст: баҳоҳои аниқи суръати наздикшавии қатори Фурйе-Бессел дар баъзе синфи функсияҳои бо оператори дифференсиалии тартиби дуюм додашаванда ва бо қимати миёнашудаи модули умумишудаи бефосилаи тартиби m дар фазои L_2 тавсифшаванда, ёфта шудааст; сарҳади болоии майлкунии беҳтарин бо суммаҳои Фурйе-Бессел дар фазои $L_2\left([0,1],x^{2\nu+1}dx\right),\nu>-\frac{1}{2}$ ёфта шудааст; нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ҳамчун модули умумишудаи бефосилаи тартиби m ва ҳамчун $\mathscr{K}$-функсионал, ёфта шудааст; қиматҳои аниқи n-қутри синфҳои функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m ва бо $\mathscr{K}$-функсионал додашаванда, ҳисоб карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Диссертатсия характери назариявӣ дорад. Усулҳои дар он такмилёфта ва натиҷаҳои ҳосилшударо дар ҳалли масъалаҳои дигари экстремалии назарияи наздиккунӣ, истифода кардан мумкин аст. Бобҳои алоҳидаи диссертатсия дар алоҳидагӣ мазмуни курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои олии таълимие, ки аз рӯи ихтисосҳои математика ва математикаи амалӣ таҳсил мекунанд, ташкил доданаш мумкин аст.

РЕЗЮМЕ

диссертации Муродова Каримджона Насимовича на тему «Среднеквадратическое приближение функций суммами Фурье–Бесселя», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: наилучшие приближения, обобщенный модуль непрерывности m-го порядка, функция Бесселя, ряд Фурье–Бесселя, неравенство Джексона–Стечкина, $\mathscr{K}$-функционал, n-поперечники.

Актуальность темы. Известно, что классические многочлены Лагерра, Эрмита-Чебышева, Якоби и специальные функции –цилиндрические, сферические и гипергеометрические, обычно возникают при решении различных дифференциальных уравнений методом разделения переменных, основанном на теоремах разложения по различным ортогональным системам функций.

В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение специальных функций в задачах численного анализа и математической статистики. Это приводит к отысканию оптимальных оценок аппроксимации функций посредством частных сумм рядов Фурье по ортогональным разложениям указанных специальных функций. Диссертационная работа посвящена получению точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по системе функций Бесселя, отысканию неравенств Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и $\mathscr{K}$-функционалов, а также получению точных значений различных n-поперечников классов функций. Этим определяется актуальность выбранной тематике исследования.

Методы исследования. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функций Бесселя. При этом в качестве инструмента исследования используются современные методы теории приближения функций и функционального анализа, а также методы решения экстремальных задач оптимизационного содержания.

Цели и задачи исследования. Вычислением верхних граней отклонений заданных классов функций от их сумм ряда Фурье-Бесселя в пространстве L_2 ; отысканием точных неравенств Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка ; вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые результаты: найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 ; найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$, $\nu > -\frac{1}{2}$; найдено точное неравенство Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя как специальными модулями непрерывности m-го порядка, так и $\mathscr{K}$-функционалами; вычислены точные значения n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, а также $\mathscr{K}$-функционалами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика и прикладная математика.

SUMMARY
of the thesis of Muradov Karimjon Nasimovich about „Mean square approximation of functions by Fourier-Bessel sums" presented for Candidate physico-mathematical sciences degree on the specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Keywords: The best approximations, generalized continuity modulus of m-th order, Bessel function, Fourier-Bessel series, Jackson-Stechkin inequality, K-functional, n-widths.

Actuality of the work. It is known that classical Laguerre, Hermite-Chebyshev, Jacobi polynomials and special functions -cylindrical, spherical and hypergeometric, usually arise when solving various differential equations by the method of separating variables based on decomposition theorems for different orthogonal systems of functions.

Recently, there has been a very intensive use of special functions in the problems of numerical analysis and mathematical statistics. This leads to finding optimal estimates for the approximation of functions by means of partial sums of Fourier series from orthogonal expansions of these special functions. The thesis is devoted to obtaining accurate estimates of the rate of convergence of Fourier series on the system of Bessel functions, finding Jackson-Stechkin inequalities for special continuity modules and K-functionals, as well as obtaining the exact values of different n-widths classes of functions. This determines the relevance of the chosen research topic.

Methods of research. In solving these problems, generalized polynomials in the system of orthogonal Bessel functions are used as an approximation apparatus. At the same time, modern methods of the theory of approximation of functions and functional analysis, as well as methods for solving extreme problems of optimization content are used as a research tool.

Purpose and objectives of the research. The calculation of the top faces of the deviation from the specified classes of functions of their sums of the Fourier-Bessel space L_2 ; a finding of exact inequalities of Jackson-Stechkin between the value of best approximation of functions by private sums of Fourier-Bessel and generalized module of continuity of the m-th order defined by a differential operator of the second order ; the calculation of the exact values of n-widths of classes of functions defined a special module of continuity of the m-th order differential operator defined by Bessel.

The obtained results and their novelty. The following new results are obtained in the dissertation: the exact estimates of the rate of convergence of the Fourier-Bessel series on some classes of functions given by the differential operator of the second order and characterized by the averaged value of the generalized module of continuity m-th order in space L_2 are found ; the exact upper bounds of the best approximations by the Fourier-Bessel sums in space $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$ are found ; the exact Jackson-Stechkin inequality between the value of the best approximation of the function by Fourier-Bessel partial sums as special module of continuity of the m-th order, and K-functionals is found; the exact values of the n-widths of the classes of functions given by special module of continuity of the m-th order, as well as K-functionals are calculated.

Theoretical and practical value. The work is theoretical. The methods developed in it and the results obtained can be used in other extreme problems of approximation theory. The heads of the dissertation separately can make the content of special courses for students and postgraduates of higher educational institutions studying in mathematics and applied mathematics.

Бо ҳуқуқи дастхат

Муродов Каримҷон Насимович

НАЗДИККУНИИ МИЁНАКВАДРАТИИ ФУНКСИЯҲО БО СУММАҲОИ ФУРЙЕ–БЕССЕЛ

01.01.01 — Таҳлили ҳақиқӣ,комплексӣ ва функсионалӣ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика

ДУШАНБЕ – 2019

Диссертатсия дар кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарори МТД Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б. Ғафуров иҷро карда шудааст

РОҲБАРОНИ ИЛМӢ:

Шабозов Мирганд Шабозович,
академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;

Тухлиев Қамаридин,
доктори илмҳои физикаю математика, профессор

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,
доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи анализи математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон;

Олифтаев Нодир Фезилобекович,
номзади илмҳои физикаю математика, проректор, оид ба таълим Инситути омӯзгории Тоҷикистон дар ноҳияи Рашт.

МУАССИСАИ ПЕШБАР:

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ

Ҳимоя 25 сентябри соли 2019 *дар соати 10:00* дар Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-012 дар факултети механикаю матиматикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонии: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни–Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат ”___” ___________ соли 2019 фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика
профессор **Г. Ҷангибеков**

Мӯҳтавои мухтасари диссертатсия

Муҳимияти мавзӯъ. Аз курси муодилаҳои физикаи математикӣ хуб маълум аст, ки бисёраъзогиҳои классикии Лагер, Эрмит-Чебишов, Якобӣ ва функсияҳои махсус – силиндрикӣ, сферикӣ ва гипергеометрӣ одатан дар мавриди ҳалли муодилаҳои мухталифи дифференсиалӣ бо методи ҷудокунии тағирёбандаҳо, ки ба теоремаҳои ҷудокунӣ аз рӯи системаҳои функсияҳои ортогоналии мухталиф асос ёфтаанд, пайдо мешаванд.

Дар солҳои охир истифодаи босуръати функсияҳо махсусан дар масъалаҳои таҳлили ададӣ ва статистикаи математикӣ мушоҳида мешавад. Ин ба ҷустуҷӯи баҳоҳои оптималии наздиккунии функсияҳо бо ёрии суммаҳои хусусии қатори Фурйе аз рӯи ҷудокунии ортогоналии функсияҳои махсуси номбаршуда, оварда мерасонад. Дар баъзе ҳолат имконияти ёфтани нобаробарии аниқи намуди Ҷексон-Стечкин барои модулҳои махсуси бефосилаи тартиби m ва ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо операторҳои дифференсиалии тартиби дуюми намудҳои мухталиф муайяншаванда, мавҷуд аст. Бо ин муҳимияти мавзуи таҳқиқот арзёбӣ мешавад.

Мақсад ва масоили таҳқиқот. Дар кор яққатор масъалаҳои экстремалии мушаххас ба масъалаҳои зерин алоқаманд, ҳаллу фасл карда мешаванд:

- ҳисобкунии сарҳади болоии майлкунии синфҳои функсияҳои додашуда аз суммаҳои қатори Фурйе-Бессел дар фазои L_2 (боби I);
- ҷустуҷӯи нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкин байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ва модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, ки бо оператори дифференсиалии тартиби дуюм, муайян карда мешаванд (боби I);
- ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m додашуда, ки бо оператори дифференсиалии Бессел муайян карда мешаванд (боби II).

Усулҳои таҳқиқот. Дар вақти ҳалли масъалаҳои нишон додашуда ба сифати асбоби наздиккунӣ - полиномҳои умумишудаи аз рӯи системаи функсияҳои ортогоналии Бессел кор фармуда мешавад. Дар ин маврид ба сифати олоти таҳқиқот методҳои муосири назарияи наздиккунии функсияҳо ва таҳлили функсионалӣ, инчунин методҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии дорои мӯҳтавои оптимизатсионӣ, мавриди истифода қарор меёбад.

Навоварии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертасия нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ҳосил кардааст:

- баҳоҳои аниқи суръати наздикшавии қатори Фурйе-Бессел дар баъзе синфи функсияҳои бо оператори дефференсиалии тартиби дуюм додашаванда ва бо қимати миёнашудаи модули умумишудаи бефосилаи тартиби m дар фазои L_2 тавсифшаванда, ёфта шудааст;

- сарҳади болоии майлкунии беҳтарин бо суммаҳои Фурйе-Бессел дар фазои $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$ ёфта шудааст;
- нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкин байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ва модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, ки бо оператори дифференсиалии Бессели тартиби дуюм муайян карда мешаванд, ёфта шудааст;
- қиматҳои аниқи n-қутри баъзе синфҳои функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m додашуда, ҳисоб карда шудаанд.

Эътиборнокии натиҷаҳо. Ҳамаи натиҷаҳо кори диссертатсионӣ бо ёрии исботҳои қатъии математикӣ, ҳосил карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Диссертатсия харектери назариявӣ дорад. Усулҳои дар он такмилёфта ва натиҷаҳои ҳосилшударо дар ҳалли масъалаҳо дигари экстремалии назарияи наздиккунӣ, истифода кардан мумкин аст. Бобҳои алоҳидаи диссертатсия дар алоҳидагӣ мазмуни курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои олии таълимие, ки аз рӯи ихтисосҳои математика ва математикаи амалӣ таҳсил мекунанд, ташкил доданаш мумкин аст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия чандин маротиба дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- семинари кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарори Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Ғафуров (Хуҷанд, солҳои 2014-2018);
- семинари кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АИ ҶТ М.Ш.Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2018);
- конференсияи илмӣ-назариявии байналминалии „Тамоюл ва ояндаи рушди илми асри XXI ” (Екатеринбург, 18 октябри соли 2015);
- хонишҳои Мактаб-конфренсияи математикии тобистонаи байналмилалии С.Б.Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Тоҷикистон, Душанбе, 15 - 25 августи соли 2016);
- конференсияи ҷумҳуриявии „Муаммоҳои муосири илмҳои табиӣ ” (Душанбе, Филиали ДДМ ба номи М.В.Ломоносов, 24 ноябри соли 2017);
- конференсияи байналминалии „Муаммоҳои муосири математика ва татбиқи он ”, бахшида ба 70-солагии академики АИ ҶТ Илолов М. (Душанбе, 14-15 марти соли 2018);
- конференсияи байналминалии „Муаммоҳои муосири математика ва татбиқи он ” (Душанбе, Филиали ДДМ ба номи М.В.Ломоносов, 21-22 июни соли 2018);

- конференсияи илмӣ-назариявии ҷумҳуриявии „Муаммоҳои муосири илмҳои дақиқ ва нақши он дар ташаккули ҷаҳонбинии илмии ҷомеа” бахшида ба 30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон (Хуҷанд, ДДХ ба номи академик Б.Ғафуров, 26-27 октябри соли 2018).

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 10 интишороти муаллиф дарҷ гардидаанд. Аз ҷумла 5 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КАО–и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КАО–и Федератсияи Россия мавҷудбуда ва 5 мақола дар осори конференсияи байналминалӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудааст. Аз таълифоти бо ҳаммуаллифӣ бо М.Ш.Шабозов ва Қ.Тухлиев $[1, 2, 4]$ нашршуда, ба ҳимоя танҳо он натиҷаҳое бароварда шудаанд, ки онҳоро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертасия аз муқаддима, ду боб, хулоса, феҳристи адабиёти истифода шуда иборат аз 33 номгӯй, ҳамагӣ 75 саҳифаи компютериро дарбар гирифта, дар барономаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои қулаӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо,натиҷаҳо ва формулаҳо мавриди истифода шудааст, дар кадоме рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Мӯҳтавои мухтасари кор

Бигзор

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

— функсияи Бессели ҷинси якум индекси ν, $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — пайдарпаии дар намуди афзуншаванда рақамгузорӣ кардаи

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots$$

пайдарпаии решаҳои мусбати муодилаи $J_\nu(x) = 0$ бошад. Хуб маълум аст, ки функсияи $J_\nu(x)$ ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуи[1]

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0$$

-ро ифода мекунад. Инчунин маълум аст[1], ки функсияи $J_\nu(x)$ системаи функсияҳои хоси масъалаи канории

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, \; u(1) = 0, \qquad (1)$$

---

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд. – М.: Наука. 1988. 512 с.

ки ба қимати хоси $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$ мувофиқояндаро, ифода мекунад. Дар ин ҳолат системаи функсияҳои $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ пурра ва ортогоналӣ дар фазои функсияҳои бо квадрат суммиронидашавандаи f бо вазни x, мебошад.

Таърифҳо ва далелҳои маълуми минбаъд ба мо заруриро меорем. Минбаъд дар ҳама ҷой бо $L_2 := L_2([0,1];xdx)$ — фазои функсияҳои бо квадрат суммиронидашавандаи f бо вазни x ва нормаи охириноки

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}$$

-ро ишора мекунем. Тадқиқоти минбаъдаи мо ба хосияти ортогоналии системаи $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = 0,\ k \neq m,\ \int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_k x)dx = \frac{1}{2}J_\nu'^2(\lambda_k),$$

асос меёбад ва аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки системаи функсияҳои $\left\{\sqrt{2}J_\nu(\lambda_k x)|J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$-системаи ортонормиронидашудаи пурраро дар фазои L_2 ташкил медиҳад. Барои содагӣ, умумиятро кам накарда, ишораи навро ҷорӣ накарда, бо $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ - системаи функсияҳои ортонормиронидашудаи пурраро дар фазои L_2, ишора мекунем, дар кадоме

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad k \neq m, \\ \\ 1, & \text{агар} \quad k = m. \end{cases}$$

Дар ин ҳолат барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2$ ҷудокунӣ ба қатори Фурйе-Бесселли намуди зайлро дида мебароем:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x), \quad \text{дар ин ҷо} \quad c_k(f) = \int\limits_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_k x)dx \qquad (2)$$

— коэффисиентҳоси Фурйе-Бессел. Аз (2), бо назардошти ортогоналнокӣ ва бо истифода аз баробарии Парсевал, ҳосил мекунем:

$$\|f\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Бигзор

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x)$$

— суммаҳои хусусии тартиби $(n-1)$-и қатори Фурйе-Бессели (2) бошад.

Бо $\mathcal{P}_{n-1}$ — зерфазои полиномҳои умумишудаи намуди

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x)$$

-ро ишора мекунем. Он гоҳ барои бузургии наздиккунии беҳтарини $f \in L_2$ бо зерфазои $\mathcal{P}_{n-1}$ баробарии зерин дуруст аст:

$$E_{n-1}(f) = \Big\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Барои мо минбаъд намуди махсуси модули бефосилаи умумишуда зарур мешавад, ки онро ба таври зайл ҷорӣ мекунем. Оператори дифференсиалии тартиби дуюми Бесселро муоина мекунем:

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \tag{4}$$

ки бо ёрии вай муодилаи дифференсиалии (1)-ро дар намуди операторӣ менависем:

$$\mathcal{D}u = -u.$$

Функсияи $T(x, y; t)$-ро ҳамчун суммаи

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \ 0 < t < 1$$

дида мебароем. Дар L_2 оператори

$$F_h f(x) = \int_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt \tag{5}$$

-ро дида мебароем, ки онро оператори умумишудаи лағжиш меноманд. Барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2$ фарқҳои охирноки тартибҳои якум ва олиро дида мебароем:

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

дар ин ҷо

$$F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, ..., m,$$

вале рамзи E – оператори воҳидиро дар фазои L_2 ифода мекунад. Бузургии

$$\Omega_m(f; t) = sup \{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \le t\} \tag{6}$$

модули умумишудаи тартиби m-и функсияи $f \in L_2$ номида мешавад.

Минбаъд дар ҳама ҷой бо $L_2(\mathcal{D})$, ки дар ин ҷо оператори $\mathcal{D}$ бо баробарии (4) муайян карда мешавад, маҷмӯи функсияҳои $f \in L_2$-ро ишора мекунем, ки онҳо ҳамин гуна ҳосилаи мутлақ бефосилаи тартиби якуми f'-ро соҳибанд, ки $\mathcal{D}f \in L_2$ аст.

Чунин $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$ меҳисобем. Бо рамзи $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, ...$, маҷмӯи функсияҳои $f \in L_2$, ки дорои ҳосилаи мутлақ бефосилаи тартиби $(2r - 1)$ ва барои онҳо $\mathcal{D}^r f \in L_2$ аст, ишора мекунем.

Леммаи зерин ҷой дорад:

Леммаи 1.3.1. *Барои функсияи ихтиёрии* $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ *нобаробарии зерин дуруст аст:*

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\lambda_n^{2r}} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \tag{7}$$

Нобаробарии (7) *ба он мазмун аниқ мебошад, ки функсияи* $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ *мавҷуд аст, ки барои вай нобаробарии* (7) *ба баробарӣ мубаддал мешавад.*

Аз леммаи 1.3.1 натиҷаи зерин ҳосил мешавад:

Натиҷа 1.3.1. *Баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}.$$

Баъзе аз хосиятҳои оператори (5)-ро истифода намуда, бо назардошти баробарии Парсевал ҳосил мекунем:

$$\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|^2 := \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k)^{2m} c_k^2(f), \tag{8}$$

ки дар ин ҷо $h \in (0, 1)$. Аз баробариҳои (6) ва (8) ҳосил мекунем:

$$\Omega_m(f, t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - t)^k)^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/2}, \ 0 < t < 1. \tag{9}$$

Барои модули бефосилаи (9) дар кори[2] ҳангоми $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ фарз кардан, нобаробарии аниқи намуди Ҷексон–Стечкин исбот карда шудааст:

$$E_{n-1}(f) \leq (1-(1-t)^n)^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \ 0 < t < 1. \tag{10}$$

Нишон медиҳем, ки барои функсияи $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$ нобаробарии (10) ба баробарӣ мубаддал мешавад. Аз ифодаи (3) хулоса мебарояд, ки $E_{n-1}(f_0) = 1$ аст. Бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки

$$\mathcal{D}^r f_0(x) = \lambda_k^{2r} J_\nu(\lambda_k x), \ \ \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t) = [1-(1-t)^n]^m \lambda_n^{2r}$$

мебошад. Он гоҳ ҳосил мекунем:

$$1 = E_{n-1}(f_0) = [1-(1-t)^n]^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t).$$

Аз ин ҷо фавран леммаи зерин ҳосил мешавад:

Леммаи 1.3.2. *Баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m}, \ \ 0 < t \leq 1.$$

Дар вақти иҷрошавии шартҳои леммаи 1.3.2 леммаи зерин ҷой дорад:

Леммаи 1.3.3. *Баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \frac{1}{n})} = \left(1 - e^{-1}\right)^{-m}.$$

Натиҷаи асосии параграфи сеюми боби якум теоремаи зерин ба ҳисоб меравад:

Теоремаи 1.3.1. *Барои ҳар гуна* $r \in \mathbb{Z}_+, \ m, n \in \mathbb{N}, \ h \in (0,1)$ *баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f) h^m}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) dt\right)^m} = \left(1 + \frac{1}{h} \cdot \frac{(1-h)^{n+1} - 1}{n+1}\right)^{-m}. \tag{11}$$

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $h = 1/(n+1)$ *аз ифодаи* (11) *баробарии*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) dt\right)^m} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)} \tag{12}$$

---

[2] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015, т.55, №6, с. 917-927.

ҳосил мешавад.

Натиҷаи 1.3.2. *Дар мавриди иҷрошавии шартҳои теоремаи* 1.3.1 *аз баробарии* (12) *ҳосил мекунем:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,t)dt\right)^m}=e^m.$$

Натиҷаҳои дар параграфи чорум баёншуда, натиҷаи асосии боби якум ба ҳисоб мераванд ва аз ин лиҳоз маҳз ба ин натиҷаҳо асос карда, дар боби дуюми диссертатсия қиматҳои n-қутри мухталифи синфи функсияҳоеро ҳисоб мекунем, ки онҳо аз теоремаҳои дар боло баёншуда, табиӣ ҳосил мешаванд.

Тасдиқоти умумии зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1.4.1. *Бигзор* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le2,\ 0<h<1,$ φ *– функсияи ғайриманфии дар интервали* $(0,h)$ *ченшавандаи суммиронидашавандаи ба сифр баробарқувва, набошад. Он гоҳ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Аз теоремаи 1.4.1 натиҷаҳои зерин мебарояд:

Натиҷаи 1.4.1. *Бигзор* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ h\in(0,1),\varphi\ge0$ - *функсияи дар (0,h]суммиронидашаванда бошад. Он гоҳ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,t)\varphi(t)dt\right)^m}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^m}.$$

Натиҷаи 1.4.2. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи* 1.4.1 *иҷро шуда,* $\varphi(t)=n(1-t)^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}$ *бошад. Он гоҳ барои ҳар гуна* $h\in(0,1]$ *баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \qquad (13)$$

Дпр ҳолати хусусӣ, аз ифодаи (13) *ҳангоми* $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ *ҳосил мекунем:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{14}$$

Дар навбати худ, аз ифодаи (14) *ҳангоми* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ *баробарии зерин ҳосил мешавад:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Дар параграфи панҷуми боби якум баҳоҳои аниқи бузургиҳои наздиккунии беҳтарин бо ёрии $\mathcal{K}$-функционали Петре ёфта шудаанд.

Назарияи наздиккунии функсияҳо ба яке аз ғояҳои фундаменталии математика-ивази ифодаҳои мураккаб ба ифодаҳои нисбатан сода ва қулай, асос меёбад. Ин ғоя дар масъалаи алоқаи математика ба амалия муҳим арзёбӣ ёфта, ба рушди математика, аз он ҷумла барои назарияи наздиккунии функсияҳо мусоидат мекунад. Дар солҳои охир барои татбиқи ғояи мазкур дар назарияи наздиккунӣ бештар назарияи $\mathcal{K}$-функсионали Петреро мавриди истифода қарор медиҳанд. Дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ бо мазмуни суст баробарқувваги̅, алоқаи байни $\mathcal{K}$-функционал ва модулҳои бефосилаи умумишудаи мухталиф, масалан, дар корҳои[3,4,5] муайян карда шудааст.

$\mathcal{K}$-функционали намуди зайлро дида мебароем:

$$\mathcal{K}(f,t^m) := \mathcal{K}(f,t^m;L_2;L_2^{(m)}(\mathcal{D})) = \inf\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\| : g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\}, \tag{15}$$

дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}, 0 < t < 1$. Қайд мекунем, ки $\mathcal{K}$-функсионали $\mathcal{K}(f,t^m)$ кам нашуда

$$\mathcal{K}(f,(nt)^m) \leq n^m\mathcal{K}(f,t^m)$$

ба модули бефосилаи $\Omega_m(f,t)$ баробарқувва аст.

---

[3] Фёдоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984, №6, С.55-63.

[4] Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышёва–Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика, 1997, №6, С.68-71.

[5] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1};[-1,1]\right)$ // Известия Тульского госуниверситета. – Естест. науки. – 2014. – вып. 1. – ч.1. – С. 83-97.

Баробарқуввагии модули бефосилаи (9) ва $\mathcal{K}$-функсионали (15)-ро тасдиқоти зерин муайян мекунад:

Теоремаи 1.5.1. *Константаҳои мусбати* $c_1 = c_1(m)$ *ва* $c_2 = c_2(m)$ *мавҷуданд, ки барои кадоме нобаробариҳои зерин барои ҳар гуна функсияи ихтиёрии* $f \in L_2, 0 < t < 1$ *дуруст аст:*

$$c_1\Omega_m(f,t) \leq \mathcal{K}(f,t^m) \leq c_2\Omega_m(f,t).$$

Натиҷаи асосии параграфи панҷум теоремаи зерин ба ҳисоб меравад:
Теоремаи 1.5.2. *Бигзор* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Он гоҳ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)_{L_2}}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{L_2}} = 1.$$

Дар параграфи шашуми боби якум баъзе натиҷаҳои пешинаи умумишуда, оварда шуда, сарҳади болоии аниқи наздиккунии беҳтарин бо суммаҳои Фурйе-Бессел дар фазои $L_2\left([0,1],\ \ x^{2\nu+1}dx\right),\ \ \nu > -\frac{1}{2}$ ёфта шудаанд.

Таърифҳо ва ишораҳои минбаъд ба мо зарурииро меорем.

Бигзор $L_{2,\nu} := L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$ –фазои бо квадрат суммиронидашавандаи функсияҳои f, бо вазни ,$x^{2\nu+1}$, $\nu > -1/2$ дар порчаи $[0,1]$ интегрironидашаванда ва бо нормаи охирноки

$$\|f\|_{2,\nu} := \|f\|_{L_{2,\nu}} = \left(\int\limits_0^1 x^{2\nu+1}f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

бошад. Дар монографияи[1] исбот карда шудааст, ки системаи функсияҳои

$$j_\nu(\lambda_n x) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\mathcal{J}_\nu(\lambda_n x)\cdot(\lambda_n x)^{-\nu},\ n = 1,2,..., \tag{16}$$

дар ин ҷо $\mathcal{J}_\nu(u)$ – функсияи Бессели ҷинси якуми ν, $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – сифрҳои мусбати бо тартиби афзуншавӣ рақамгузорӣ шудаи муодилаи $\mathcal{J}_\nu(u) = 0$, системаи ортогоналии пурраро дар фазои $L_{2,\nu}$ ташкил медиҳад. Дар ин маврид функсияи ихтиёрии $f \in L_{2,\nu}$ ба қатори Фурйе-Бессел ҷудо карда мешавад:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)j_\nu(\lambda_k x), \tag{17}$$

дар ин ҷо коэффисиентҳои $b_k(f)$ бо формулаи

$$b_k^2(f) = \frac{1}{\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2}\int\limits_0^1 x^{2\nu+1}f(x)j_\nu(\lambda_k x)dx, \tag{18}$$

муайян карда шуда, баробарии (17) бо маънои наздикшавӣ дар нормаи $L_{2,\nu}$ фаҳмида мешавад.

Бо рамзи

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\nu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

наздиккунии беҳтарини функсияи $f \in L_{2,\nu}$ бо маҷмӯи $\mathcal{P}_{n-1}$ – бисёраъзогии умумишудаи намуди

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k j_\nu(\lambda_k x)$$

- ро ишора мекунем. Мувофиқи хосиятҳои ортогоналнокии системаи функсияҳои (16), ҳосил мекунем:

$$E^2_{n-1}(f)_{2,\nu} = \|f - S_{n-1}(f)\|^2_{2,\nu} = \sum_{k=n}^{\infty} a^2_k(f),$$

дар ин ҷо

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

– суммаи хусусии тартиби $(n-1)$-и қатори Фурйе-Бессели (17) ва

$$a^2_k(f) = \|j_\nu(\lambda_k x)\|^2_{2,\nu} b^2_k(f),\ k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Дар фазои $L_{2,\nu}$ оператори миёнашудаи

$$T_{h,\nu}(f,x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos t}\right)\sin^{2\nu} t dt,$$

- ро ҷорӣ мекунем, ки вай дорои хосиятҳои зерин бошад:

а) барои функсияҳои ихтиёрии $f, g \in L_{2,\nu}$ ва ҳар гуна ададҳои $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $T_{h,\nu}(\alpha f + \beta g, x) = \alpha T_{h,\nu}(f,x) + \beta T_{h,\nu}(g,x)$;

б) $T_{h,\nu}(j_\nu(\lambda x)) = j_\nu(\lambda h) j_\nu(\lambda x)$;

в) $T_{0,\nu}(f,x) \equiv f(x)$;

г) $\|T_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} \le \|f\|_{2,\nu}$ ва $\|T_{h,\nu}(f,\cdot) - f(\cdot)\|_{2,\nu} \to 0$, дар мавриди $h \to 0$;

д) функсияи $u(x,h) := T_{h,\nu}(f;x),\ x,h \in [0,1]$ ҳалли масъалаи Кошӣ бошад:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2\nu+1}{h}\cdot\frac{\partial u}{\partial h}, u(x,o) = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=0} = 0,$$

дар ин ҷо $f(x)$ – функсияи ихтиёрии дар порчаи $[0,1]$ ду маротиба бефосила - дифференсиронидашаванда бошад.

Солҳои охир дар мавриди ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ бештар намудҳои мухталифи модули бефосилаи классикӣ, ки бо хусусиятҳои масъалаҳои муоинашаванда алоқаманд буда, имкони ҳосил кардани натиҷаҳои ниҳоиро соҳибанд, мавриди истифода қарор меёбанд[2,6,7,8]. Мо дар ин ҷо тарзи дар кори[9], тавсияшударо истифода намуда, натиҷаҳои навро исбот мекунем. Маълум аст[10], ки барои функсияи ихтиёрии $f \in L_{2,\nu}$ бо қатори Фурйе

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

формулаи зерин ҷой дорад:

$$T_{h,\nu}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_\nu(\lambda_k h) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{20}$$

Зимнан наздикшавии қатори дар тарафи рости баробарии (20) истода, бо мазмуни фазои $L_{2,\nu}$ фаҳмида мешавад.

Бигзор E_ν –оператори воҳидӣ дар фазои $L_{2,\nu}$ бошад. Чунин ҳисоб мекунем:

$$T^1_{h,\nu}(f;x) = T_{h,\nu}(f;x),\ T^m_{h,\nu}(f;x) := T_{h,\nu}(T^{m-1}_{h,\nu}(f;\cdot),x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Ин муносибатҳоро истифода намуда, барои функсияи ихтиёрии $f \in L_{2,\nu}$ фарқҳои охирноки тартиби якум ва олиро менависем:

$$\Delta^1_{h,\nu}(f,x) := F_{h,\nu}(f,x) - f(x) = (F_{h,\nu} - E_\nu) f(x),$$

$$\Delta^m_{h,\nu}(f,x) := \Delta_{h,\nu}(\Delta^{m-1}_{h,\nu}(f,\cdot),x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F^k_{h,\nu}(f,x),\ k = 2,3,... \tag{21}$$

---

[6] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, С.1414-1427.

[7] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вiсник, 2014, т.11, №3, С.417-441.

[8] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журнал, 2013, т. 65, №12, с.1604–1621.

[9] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье-Бесселя. – Известия вузов. Математика. 2001, т. 18, №8, с.3–9.

[10] Левитан Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука, 1973, 312 с.

Барои функсияи ихтиёрии $f \in L_{2,\nu}$ ва $t \in (0,1)$, бо назардошти фарқҳои ҷорӣ кардашудаи (21), модули умумишудаи бефосилаи тартиби m- ро дар фазои $L_{2,\nu}$ муайян мекунем:

$$\Omega_m(f,t)_{2,\nu} := \sup\left\{\|\Delta_{h,\nu}^{m}(f,\cdot)\|_{2,\nu} : 0 < h \leq t\right\}.$$

Бо

$$\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\cdot\frac{d}{dx},\ \nu > -1/2$$

оператори дифференсиалии тартиби дуюми Бессели тартиби ν- ро ишора мекунем.

Дар монографияи[11] исбот карда шудааст, ки функсияи $j_{\nu}(\lambda_n x)$ муодилаи дифференсиалии тартиби дуро қаноат мекунонад:

$$\mathcal{D}y = \lambda_n^2 y,\ \text{и}\ j_{\nu}(0) = 1,\ j_{\nu}^{'}(0) = 0.$$

Ҳар ду тарафи ин муодиларо ба функсияи вазнии $x^{2\nu+1}(\nu > -1/2)$ зарб зада, муодилаи дифференсиалии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1}\frac{d}{dx}j_{\nu}(\lambda_n x)\right) + \lambda_n^2 x^{2\nu+1} j_{\nu}(\lambda_n x) = 0.$$

Муодилаи мазкурро истифода намуда, барои коэффисиентҳои (18) формулаи(масалан, ниг. ба[9])

$$b_k(f) = (-1)^r \lambda_n^{-2r} b_k(\mathcal{D}^r f), \tag{22}$$

ки дар ин ҷо $\mathcal{D}^0 f = f,\ \mathcal{D}^r(f) := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f), r \in \mathbb{N}$, ба осонӣ исбот кардан мумкин аст.

Бо $L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})(r \in \mathbb{Z}_+;\quad L_{2,\nu}^{(0)}(\mathcal{D}) \equiv L_{2,\nu},\quad \nu > -1/2)$ –синфи функсияҳои $f \in L_{2,\nu}$, дар порчаи $[0,1]$ ҳосилаҳои мутлақ бефосилаи тартиби $(2r-1)$ ва ҳосилаи тартиби r-и $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\nu}$-доштаро, ишора мекунем.

Бо истифода аз формулаҳои (17), (20) ва муносибатҳои (21), фарқи тартиби яки функсияи f -ро дар намуди зерин менависем:

$$\Delta_{h,\nu}^{1}(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_{\nu}(\lambda_k h) - 1)b_k(f)j_{\nu}(\lambda_k x). \tag{23}$$

Формулаҳои (23)- ро пай дар пай истифода намуда аз (21) барои ҳар гуна $m \in \mathbb{N}$ формулаи рекуррентии зеринро ҳосил мекунем:

$$\Delta_{h,\nu}^{m}(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_{\nu}(\lambda_k h) - 1)^m b_k(f)j_{\nu}(\lambda_k x). \tag{24}$$

---

[11] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введению в спектральную теорию. Самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1970, 671 с.

Баробарии Парсевалро истифода намуда, аз сабаби ортогоналнокии системаи функсияҳои $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, аз (24) формулаи

$$\|\Delta_{h,\nu}^m(f,\cdot)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f) \tag{25}$$

- ро ҳосил мекунем. Бо назардошти (21) ва (25):

$$\Omega_m^2(f,t)_{2,\nu} := \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f)\right\}. \tag{26}$$

Қайд мекунем, ки барои функсияи ихтиёрии $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$ аз (22) ва (19), баробарии

$$a_k^2(\mathcal{D}^r f) = b_k^2(\mathcal{D}^r f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} b_k^2(f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} a_k^2 f,$$

ҳосил мешавад, мувофиқи кадоме аз баробарии (26) ҳосил мекунем[6]:

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\nu} = \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k t))^{2m} a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\} =$$

$$= \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k t))^{2m} \lambda_k^{4r} a_k^2(f)\right\}. \tag{27}$$

Модули умумишудаи бефосилаи (27) - ро истифода намуда, В.А.Абилов ва Ф.В.Абилова теоремаҳои роста ва чаппаи назарияи наздиккуниро дар намуди нобаробарии носаҳеҳ, ҳосил кардаанд. Қайд кардан ба маврид аст, ки дар вақти ҳосилкунии теоремаҳои ростаи аниқ бо ёрии модули бефосилаи (27) ба аниқии онҳо дар синфи функсияҳо эътимод кардан мумкин нест ва аз ин лиҳоз теоремаҳои аниқро минбаъд бо ёрии $\mathcal{K}$-функсионали Петре ҳосил мекунем.

Дар ин замон назарияи наздиккунии функсияҳо асосан бо наздиккунии синфи функсияҳо бо ёрии зерфазоҳои додашудаи андозааш қайдшудаи ба ҳосилкунии натиҷаҳои аниқ алоқаманд, ки n- қутрро дар синфи функсияҳои нишон додашуда, мавриди истифода қарор медиҳанд, сару кор дорад. Татбиқи бештар самараноки ғояи мазкур ба $\mathcal{K}$-функсионали Петре[12] асос меёбад. Қайд мекунем, ки $\mathcal{K}$- функсионалҳо дар масъалаҳои назарияи наздиккунии функсияҳо мавқеи муҳимро мебозад. Дар ин маврид омузиши алоқаи байни модули суфтагӣ ва $\mathcal{K}$-функсионалҳо яке аз масъалаҳои асосии назарияи

---

[12] Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx.Theory. 1986. V.46, №1. PP.38–41.

наздиккунии функсияҳо ба ҳисоб меравад. Барои модулҳои суфтагии умумишудаи мухталиф, ин гуна масъалаҳо, аз он ҷумла дар корҳои[13,14,15] омӯхта шудаанд.

Бигзор $L_{2,\nu}^{(m)}-$ фазои Соболеви аз руи оператори $\mathcal{D}$ сохташуда бошад, яъне

$$L_{2,\nu}^{(m)} := \{f \in L_{2,\nu} : \mathcal{D}^j f \in L_{2,\nu}, \ \ j = 1, 2, ..., m\}.$$

$\mathscr{K}$-функсионали аз руи фазоҳои $L_{2,\nu}$ ва $L_{2,\nu}^{(m)}$ сохташударо муайян мекунем:

$$\mathscr{K}_m\left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right) := \inf\left\{\|f - g\|_{2,\nu} + t^m \|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu} : g \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})\right\}, \qquad (28)$$

дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}, \ f \in L_{2,\nu}, \ 0 < t < 1$. Минбаъд бо мақсади кӯтоҳӣ ишораи зеринро истифода мекунем:

$$\mathscr{K}_m(f, t)_{2,\nu} := \mathscr{K}_m\left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right).$$

Баробарқуввагии модули бефосилаи (26) ва $\mathscr{K}$-функсионали (28) дар кори[16] нишон дода шудааст.

Тасдиқоти асосии зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1.6.1. *Бигзор $m, n, r \in \mathbb{N}$. Он гоҳ баробарии*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu}} = 1$$

дуруст аст.

Дар боби дуюми диссертатсия масъалаи экстремалии ҷустуҷӯи қиматҳои аниқи n-қутри синфи функсияҳое, ки аз теоремаҳои боби якум исботшуда, табиӣ ҳосил мешаванд, дида баромада мешавад.

Ба мо барои баёни натиҷаҳои боби дуюм яккатор таърифҳо ва ишораҳо зарур мешавад. Бигзор S – кураи воҳидӣ дар фазои L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ – зерфазои n - ченака; $\Lambda^n \subset L_2$ – зерфазои коченакаи n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$– оператори бефосилаи хаттӣ ; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – оператори бефосилаи проектиронӣ; $\mathfrak{M}$ – зермаҷмӯи барҷастаи марказӣ - симметрӣ аз L_2 бошад. Бузургиҳои

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathcal{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

---

[13] Löfstróm J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations// Math.Ann.– 1969. –V.181. –P. 255-268

[14] Ditzian Z., Totik V.Moduli of smoothness. –New York etc.: Springer-Verlag, 1987. –228p.

[15] Feng Dai. Some equivalence theorems with K-functionals // J. Appr. Theory. –2003. –V.121. –P. 143-157.

[16] Белкина Е.С., Платонов С.С. Эквивалентность $\mathcal{K}$-функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля. // Известия вузов. Математика., 2008, є8, с.3-15 МГУ, 1976. 318с.

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_2\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

мувофиқан *қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ, проектсионии* зермаҷмӯи $\mathfrak{M}$ дар фазои L_2 номида мешаванд. n-қутри номбаршуда аз рӯи n монотонӣ буда, дар байни онҳо дар ҳар гуна фазои гилбертии X_2 (дар ҳолати мо $X_2 := L_2 = L_2((0,1), xdx)$ и $X_2 := L_{2,\nu} = L_2((0,1), x^{2\nu+1}dx)$) муносибатҳои зерин иҷро мешаванд(масалан, ниг. ба монографияҳои[17,18]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2).$$

Синфи функсияҳоеро ҷорӣ мекунем, ки онҳо аз натиҷаҳои теоремаҳои 1.3.1 ва 1.4.1 - и дар бандҳои пешина исбот карда шудаанд, табиӣ ҳосил мешаванд.

Дар аввал таърифи синфи функсияҳоеро меорем, ки онҳо аз теоремаи 1.3.1 ҳосил мешавад, яъне бо $\mathrm{W}_{1/m}^{(r)}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, ки $\mathcal{D}^r f$ барои ҳамаи $r \in \mathbb{Z}_+,\ \ m \in \mathbb{N},\ \ 0 < t < 1$, шарти зеринро қаноат мекунонанд:

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt \leq 1.$$

Бигзор $h \in (0,1),\ 0 < p \leq 2,\ m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \ \varphi \geq 0$ – функсияи дар интервали $(0,h)$ суммиронидашавандаи ба сифр барбарқувва набуда, бошад. Бо $\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ синферо ишора мекунем, ки аз функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ иборат будае, ки $\mathcal{D}^r f$ шарти зеринро қаноат мекунонад, ишора мекунем:

$$\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \leq 1.$$

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теорема 2.1.1. *Барои ҳамаи* $r \in \mathbb{Z}_+,\ \ m, n \in \mathbb{N},\ \ 0 < h < 1$ *баробарии зерин дуруст аст:*

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h), L_2) = \lambda_n^r\left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m},$$

ки дар ин ҷо $\gamma_n(\cdot)$ *—ҳар гуна n-қутри дар боло номбаршуда.*

---

[17] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag. –1985. – 292 p.

[18] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений, М. МГУ, 1976. 318 с.

Қайд мекунем, ки аз тасдиқоти теоремаи 2.1.1, дар ҳолати $h = 1/(n+1)$, ҳосил мекунем:

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2) = \lambda_n^{-2r}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)} \sim \frac{e^m}{\lambda_n^{2r}}.$$

Теоремаи 2.1.2. *Бигзор $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \ge 0$-функсияи дар интервали $(0,h)$ суммиронидашавандаи ба сифр баробарқувва набуда, бошад. Он гоҳ барои адади ихтиёрии $n \in \mathbb{N}$ баробариҳои зерин дурустанд:*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))_{L_2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

дар ин ҷо $\gamma_n(\cdot)$ – ҳар гуна аз n-қутри $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$ ва

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)_{L_2}\}.$$

Аз теоремаи 2.1.2 якқатор тасдиқотҳо ҳамчун хулоса мебароянд.

Натиҷаи 2.1.1. *Дар мавриди иҷрошавии шартҳои теоремаи* 2.1.2 *дар ҳолати $\varphi_\star(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ баробариҳои зерин дурустанд:*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star)) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star) =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}.$$

Ба сифати натиҷаи дуюми теоремаи 2.1.2 масъалаи экстремалии ҳисоби сарҳади аники болоии модули коэффисиентҳои Фурйе-Бессели $c_n(f)$- ро дида мебароем. Чунин масъала барои синфи даврии функсияҳо, масалан, дар кори[19] ва барои коэффисиентҳои Фурйеи ҷудокунии функсияҳо аз рӯи полиномҳои ортогоналӣ бо вазни додашуда, дар кори[5] омӯхта шудаанд. Барои синфи функсияҳои дар ин ҷо муоинашаванда, масъалаи мазкур таваҷҷӯҳи хосаро ифода мекунад.

Натиҷаи 2.1.2. *Бигзор $0 < p \le 2$. Он гоҳ барои адади ихтиёрии $n \in \mathbb{N}$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)\} = \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

---

[19] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. T. 38. №2. C.154–165.

Дар параграфи дуюми боби дуюм синфи функсияҳое, ки аз натиҷаи теоремаи 1.6.1 ҳосил мешавад, ҷорӣ карда шуда, барои ин синф қиматҳои аниқи n- қутри дар параграфи 2.1 номбаршуда, ҳисоб карда шудаанд.

Функсияи Φ- и дар нимтири мусбати $[0, \infty)$ камнашаванда k-можарант номида мешавад, агар функсияи $\Phi(t)/t^k, k \in \mathbb{N}$ дар $(0, \infty)$ афзун нашуда, $\Phi(0) = 0$ ва ҳангоми $t \to 0, \Phi(t) \to 0$ бошад (масалан, ниг.[20]). Маҷмӯи ҳамаи k-мажорантро бо рамзи $\mathscr{F}^k$ ишора мекунем. Бо $W_{2,k}^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi), r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in \mathbb{N}$ синфи функсияҳои $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, ки барои он функсияи $\mathcal{D}^r f$ шарти $\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m)$ – ро қаноат мекунонад, ки дар ин ҷо $0 < t \leq 1$ – ҳар гуна адад ва мажоранти Φ – функсияи ихтиёрии ба $\mathscr{F}^k$ мансуббударо, ишора мекунем. Дар ҳолати $k = 1$ ба ҷои рамзи $W_{2,1}^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi)$ чунин менависем: $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi)$.

Теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.2.1. *Барои ҳар гуна $m, n \in \mathbb{N}$ ва $r \in \mathbb{Z}_+$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right)_{2,\nu} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

дар ин ҷо $\rho_n(\cdot)$ – ҳар гуна аз n-қутри $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$ ва

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu} := inf\left\{E_{n-1}(f)_{2,\nu} : \ f \in L_{2,\nu}\right\}$$

барои ҳамаи $\mathfrak{M} \subset L_{2,\nu}$.

Аз теоремаи 2.2.1 натиҷаи зерин ҳосил мешавад:

Натиҷа 2.2.1. *Дар мавриди иҷрошавии шартҳои теоремаи* 2.2.1 *баробарии*

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

ҷой дорад:

Дар хулосае, ки дар охири диссертатсия оварда мешавад, ҷамъбасти тадқиқоти гузаронидашуда баён карда шуда, тавсияҳо оид ба истифодаи онҳо дода шудааст.

Миннатдории хешро барои маслиҳатҳои муфид, муҳокима ва дастгирҳо ба роҳбарони илмиам, академики АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, профессор Шабозов Мирганд Шабозович ва профессор Тухлиев Қамаридин баён мекунам.

---

[20] Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 225 с.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ:

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА- и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва Федератсияи Россия нашр шудаанд:

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, №2, С. 39-47.
2. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя и значения $\mathcal{K}$–функционалов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015, №4(161), С. 16-26.
3. Муродов К. Н. Верхние грани среднеквадратических приближений некоторых классов функций частичными суммами Фурье-Бесселя заданного порядка // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 - 25 августа 2016 г., С. 176-181.
4. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $l_{2,\nu}$ и значения поперечников некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд.физ.-мат.,хим., геол. и техн. н. 2017, №2(167), С. 17-29.
5. Муродов К.Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя и значение поперечников функциональных классов // ДАН РТ. 2017, т.60, №1-2, С .20-25.

Дар дигар нашрияҳо:

6. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя в пространстве L_2 // В материалах международной научно-практической конференции „Тенденции и переспективы развития науки XXI век"(Екатеринбург, 18 октябр 2015 г.), С. 1 4-16.
7. Муродов К. Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя в гильбертовом пространстве // Материалы республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук”, 24 ноября 2017 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С .29-31.
8. Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu}$ // В материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений”,

посвящённой 70-летию академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.), С. 38-40.

9. Муродов К. Н. Точные значение n-поперечников некоторых классов функций // Материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений”, 21-22 июня 2018 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С. 67-68.
10. Муродов К. Н. Наилучшие приближения функций суммами Фурье-Бесселя и точные значение поперечников некоторых классов функций // В материалах республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества” посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. 26-27 октября 2018 г.,ХГУ им. Б.Гафурова, Худжанд, С. 42-46.

ШАРҲИ МУХТАСАР
ба диссертатсияи Муродов Каримҷон Насимович дар мавзӯи «Наздикшавии миёнаквадратии функсияҳо бо суммаҳои Фурйе-Бессел», барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, функсияи Бессел, қатори Фурйе-Бессел, нобаробарии Ҷексон-Стечкин, $\mathscr{K}$-функсионал, n-қутр.

Муҳимияти мавзӯъ. Аз курси муодилаҳои физикаи математикӣ хуб маълум аст, ки бисёраъзогиҳои классикии Лагер, Эрмит-Чебишов, Якобӣ ва функсияҳои махсус - силиндрикӣ, сферикӣ ва гипергеометрӣ одатан дар мавриди ҳалли муодилаҳои мухталифи дифференсиалӣ бо методи ҷудокунии тағирёбандаҳо, ки ба теоремаҳои ҷудокунӣ аз рӯи системаҳои функсияҳои ортогоналии мухталиф асос ёфтаанд, пайдо мешаванд.

Дар солҳои охир истифодаи босуръати функсияҳои махсус дар масъалаҳои таҳлили ададӣ ва статистикаи математикӣ мушоҳида мешавад. Ин ба ҷустуҷӯи баҳоҳои оптималии наздиккунии функсияҳо бо ёрии суммаҳои хусусии қатори Фурйе аз рӯи ҷудокунии ортогоналии функсияҳои махсуси номбаршуда, оварда мерасонад. Дар баъзе ҳолат имконияти ёфтани нобаробарии аниқи намуди Ҷексон-Стечкин барои модулҳои махсуси бефосилаи тартиби m ва ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо операторҳои дифференсиалии тартиби дуюми намудҳои мухталиф муайяншаванда, мавҷуд аст. Бо ин муҳимияти мавзуи таҳқиқот арзёбӣ мешавад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар вақти ҳалли масъалаҳои номбаршуда ба сифати асбоби наздиккунӣ - полиномҳои умумишуда аз рӯи системаи функсияҳои ортогоналии Бессел интихоб карда мешавад. Дар ин маврид ба сифати олоти таҳқиқот методҳои муосири назарияи наздиккунии функсияҳо ва таҳлили функсионалӣ, инчунин методҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии дорои мӯҳтавои оптимизатсионӣ, мавриди истифода қарор меёбанд.

Мақсад ва масоили таҳқиқот. Ҳисобкунии сарҳади болоии майлкунии синфҳои функсияҳои додашуда аз суммаҳои қатори Фурйе-Бессел дар фазои L_2; ҷустуҷӯи нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ва модули умумишудаи бефосилаи тартиби m, ки бо оператори дифференсиалии тартиби дуюм, муайян карда мешаванд; ҳисоби қиматҳои n-қутри синфи функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m додашуда, ки бо оператори дифференсиалии Бессел муайян карда мешаванд.

Натиҷаҳои гирифташуда ва навоварии он. Дар диссертатсия натиҷаҳои нави зерин гирифта шудааст: баҳоҳои аниқи суръати наздикшавии қатори Фурйе-Бессел дар баъзе синфи функсияҳои бо оператори дифференсиалии тартиби дуюм додашаванда ва бо қимати миёнашудаи модули умумишудаи бефосилаи тартиби m дар фазои L_2 тавсифшаванда, ёфта шудааст; сарҳади болоии майлкунии беҳтарин бо суммаҳои Фурйе-Бессел дар фазои $L_2\left([0,1],x^{2\nu+1}dx\right),\nu>-\frac{1}{2}$ ёфта шудааст; нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо суммаҳои хусусии Фурйе-Бессел ҳамчун модули умумишудаи бефосилаи тартиби m ва ҳамчун $\mathscr{K}$-функсионал, ёфта шудааст; қиматҳои аниқи n-қутри синфҳои функсияҳои бо модулҳои бефосилаи махсуси тартиби m ва бо $\mathscr{K}$-функсионал додашаванда, ҳисоб карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Диссертатсия характери назариявӣ дорад. Усулҳои дар он такмилёфта ва натиҷаҳои ҳосилшударо дар ҳалли масъалаҳои дигари экстремалии назарияи наздиккунӣ, истифода кардан мумкин аст. Бобҳои алоҳидаи диссертатсия дар алоҳидагӣ мазмуни курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои олии таълимие, ки аз рӯи ихтисосҳои математика ва математикаи амалӣ таҳсил мекунанд, ташкил доданаш мумкин аст.

РЕЗЮМЕ

диссертации Муродова Каримджона Насимовича на тему «Среднеквадратическое приближение функций суммами Фурье–Бесселя», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: наилучшие приближения, обобщенный модуль непрерывности m-го порядка, функция Бесселя, ряд Фурье–Бесселя, неравенство Джексона–Стечкина, $\mathscr{K}$-функционал, n-поперечники.

Актуальность темы. Известно, что классические многочлены Лагерра, Эрмита-Чебышева, Якоби и специальные функции –цилиндрические, сферические и гипергеометрические, обычно возникают при решении различных дифференциальных уравнений методом разделения переменных, основанном на теоремах разложения по различным ортогональным системам функций.

В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение специальных функций в задачах численного анализа и математической статистики. Это приводит к отысканию оптимальных оценок аппроксимации функций посредством частных сумм рядов Фурье по ортогональным разложениям указанных специальных функций. Диссертационная работа посвящена получению точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по системе функций Бесселя, отысканию неравенств Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и $\mathscr{K}$-функционалов, а также получению точных значений различных n-поперечников классов функций. Этим определяется актуальность выбранной тематике исследования.

Методы исследования. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функций Бесселя. При этом в качестве инструмента исследования используются современные методы теории приближения функций и функционального анализа, а также методы решения экстремальных задач оптимизационного содержания.

Цели и задачи исследования. Вычислением верхних граней отклонений заданных классов функций от их сумм ряда Фурье-Бесселя в пространстве L_2 ; отысканием точных неравенств Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка ; вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые результаты: найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 ; найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$; найдено точное неравенство Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя как специальными модулями непрерывности m-го порядка, так и $\mathscr{K}$-функционалами; вычислены точные значения n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, а также $\mathscr{K}$-функционалами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика и прикладная математика.

SUMMARY
of the thesis of Muradov Karimjon Nasimovich about „Mean square approximation of functions by Fourier-Bessel sums" presented for Candidate physico-mathematical sciences degree on the specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Keywords: The best approximations, generalized continuity modulus of m-th order, Bessel function, Fourier-Bessel series, Jackson-Stechkin inequality, K-functional, n-widths.

Actuality of the work. It is known that classical Laguerre, Hermite-Chebyshev, Jacobi polynomials and special functions -cylindrical, spherical and hypergeometric, usually arise when solving various differential equations by the method of separating variables based on decomposition theorems for different orthogonal systems of functions.

Recently, there has been a very intensive use of special functions in the problems of numerical analysis and mathematical statistics. This leads to finding optimal estimates for the approximation of functions by means of partial sums of Fourier series from orthogonal expansions of these special functions. The thesis is devoted to obtaining accurate estimates of the rate of convergence of Fourier series on the system of Bessel functions, finding Jackson-Stechkin inequalities for special continuity modules and K-functionals, as well as obtaining the exact values of different n-widths classes of functions. This determines the relevance of the chosen research topic.

Methods of research. In solving these problems, generalized polynomials in the system of orthogonal Bessel functions are used as an approximation apparatus. At the same time, modern methods of the theory of approximation of functions and functional analysis, as well as methods for solving extreme problems of optimization content are used as a research tool.

Purpose and objectives of the research. The calculation of the top faces of the deviation from the specified classes of functions of their sums of the Fourier-Bessel space L_2 ; a finding of exact inequalities of Jackson-Stechkin between the value of best approximation of functions by private sums of Fourier-Bessel and generalized module of continuity of the m-th order defined by a differential operator of the second order ; the calculation of the exact values of n-widths of classes of functions defined a special module of continuity of the m-th order differential operator defined by Bessel.

The obtained results and their novelty. The following new results are obtained in the dissertation: the exact estimates of the rate of convergence of the Fourier-Bessel series on some classes of functions given by the differential operator of the second order and characterized by the averaged value of the generalized module of continuity m-th order in space L_2 are found ; the exact upper bounds of the best approximations by the Fourier-Bessel sums in space $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$ are found ; the exact Jackson-Stechkin inequality between the value of the best approximation of the function by Fourier-Bessel partial sums as special module of continuity of the m-th order, and K-functionals is found; the exact values of the n-widths of the classes of functions given by special module of continuity of the m-th order, as well as K-functionals are calculated.

Theoretical and practical value. The work is theoretical. The methods developed in it and the results obtained can be used in other extreme problems of approximation theory. The heads of the dissertation separately can make the content of special courses for students and postgraduates of higher educational institutions studying in mathematics and applied mathematics.