**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УДК 517.5

На правах рукописи

Кадамшоев Ноибшо Улфатшоевич

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе — 2023

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Шабозов Мирганд Шабозович**, академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Ровба Евгений Алексеевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедры фундаментальная и прикладная математика Гродненского государственного университета имени Я.Купалы, профессор

Тухлиев Камаридин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики Худжанского государственного университета им. академика Б.Гафурова

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Защита состоится *28 июня 2023 г. в 14:00* часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «______» «________________» 2023 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 73.2.012.03,
доктор физико-математических наук,
профессор **Р.Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория аппроксимации функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа и имеет важные приложения в прикладных вопросах математики. Особое место в этой теории занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций.

Следует отметить, что экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций изучались, например, в известных работах К.И.Бабенко, В.М.Тихомирова, J.T.Scheick, В.И.Белого, М.З.Двейрина, S.D.Fisher и C.A.Micchelli и нашли дальнейшие развитие в работах Л.В.Тайкова[1,2], А.Пинкуса[3], Ю.А.Фаркова[4], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова[5], С.Б.Вакарчука[6], М.Ш.Шабозова с учениками[7,8,9] и многих других.

В этой работе, продолжая исследования указанных авторов, решаются различные экстремальные задачи в пространстве Бергмана B_2. В экстремальных задачах теории приближения функций как в действительной так и в комплексной областях одной из важных является задача отыскании точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина в любом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или её некоторой производной. Следует отметить, что по решению сформулированной задачи наиболее существенные результаты получены для классов периодических функций.

---

[1] *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 155–162.

[2] *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 285–295.

[3] *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 P.

[4] *Фарков Ю.А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук. – 1990. – Т. 45, – № 5. – С. 197–198.

[5] *Айнуллоев Н., Тайков Л.В.* Наилучшее приближение в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. – 1986. – Т.40. №3. – С. 341–351.

[6] *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, № 1. – С. 30–39.

[7] *Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. – 2007. – Т. 412, № 4. – С. 466–469.

[8] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. – 2002. – Т. 382, № 6. – С. 447–449.

[9] *Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р.* О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. матем. журн. – 2019. – Т.60. № 6. – С. 1414–1423.

Обстоятельный обзор полученных в этом направлении результатов приведены, например, в работах В.И.Иванова[10], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[11], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[12] и монографии Н.П.Корнейчука[13] и других.

Что же касается изучении аналогичной задачи в комплексной области то укажем на недавно опубликованные работы В.А.Абилова с соавторами[14] и М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова[15,16]. Здесь продолжено исследование указанных авторов с использованием характеристики гладкости функции, введенной К.В.Руновском. Исследованы неравенства типа Джексона-Стечкина для совместного приближения функций и её последовательных производных комплексными полиномами и их соответствующими производными для класса функций $B_2^{(r)}$, а также точные неравенства типа Джексона-Стечкина для совместных приближений посредством усреднённого значения характеристик гладкости $\Lambda_m(f^{(r)},t)$. В обоих случаях указан явный вид точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения. Аналогичные результаты получены для наилучшего совместного приближения функций через усредненное значение модулей непрерывности первого порядка r-ых производных функций. Указанные результаты изложены в первой главе диссертационной работы. Исходя из полученных результатов в первой главе, во второй главе работы найдены точные значения различных n-поперечников и вычислены верхние грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2022 гг. по теме «Прибли-

[10]Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т.16, №4. – С.5–15.

[11]Вакарчука С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99, №2. – С. 215–238.

[12]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, №5. – С.764–775.

[13]Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // М.: Наука. – 1987. – 424 С.

[14]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. – 2010. – Т.50, №6. – С.999–1004.

[15]М.Ш.Шабозов., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Матем. заметки. – 2018. – Т. 103, № 4. – С. 617–631

[16]М.Ш.Шабозов., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25, №2. – С.258–272.

жения аналитических функций комплексными полиномами».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точное значения константы в неравенства типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;
- найти точное значение n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найти точные верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения некоторых классов функций в B_2.

Основные методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы теории аппроксимации и методы решения экстремальных задач вариационного содержания, теория аналитических функций, а именно, метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;
- найдены точное значение n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найдено точные верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения некоторых классов функций в B_2.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о неравенствах типа Джексона-Стечкина для наилучшего полиномиального приближения комплексной функций в пространстве Бергмана B_2;
- теоремы о неравенствах типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения комплексных функций и их последовательных производных в пространстве B_2;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов функции в пространстве B_2;
- теоремы о верхних гранях наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика» и «Прикладная математика».

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2018-2023 гг.);
- на международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- на международной научной конференции "Теория приближения и её применение" (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- на республиканской научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества" (Худжанд, 29-30 октября 2021);
- на международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 4 – в трудах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, библиографического списка, содержащего 60 наименований, занимает 77 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание диссертации

Первая глава диссертации, состоящая из 5 параграфов, посвящена точным неравенствам наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций, связанных с некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2. В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего определения и обозначения, предварительные факты, вспомогательные утверждения и история вопроса неравенства Джексона-Стечкина, а в остальных параграфах излагаются результаты автора.

Приведем содержание этой главы. Точные константы в неравенствах Джексона и Джексона-Стечкина в различных пространствах периодических функций изучались многими математиками. Краткое описание некоторых из этих результатов и дополнительные библиографические сведения содержатся в работах[10,11,12,17].

Представляет большой интерес получить точные неравенства типа Джексона-Стечкина в комплексной области. В данной работе рассматривается задача среднеквадратичного полиномиального приближения функций комплексного переменного, аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ принадлежащих пространству Бергмана $B_2 := B_2(U)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади. [17] Отметим, что различные аспекты теории аппроксимации функций $f \in B_2$ приведены в монографии[18]. В работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[14], М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова[15,16] изучается задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего среднеквадратичного приближения функций $f \in B_2$ и обобщённого модуля непрерывности высшего порядка. Здесь продолжим исследования в этом направлении, пользуясь характеристикой гладкости функций, введенной в работе К.В. Руновского[19] и более подробно изученной С.Б. Вакарчуком

[17] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функуций в $L2$ // Тр. ИММ УрО РАН – 2019. – Т.25, №4. – С.255–264.

[18] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного // М.-Л.: Наука. – 1964.

[19] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т.185, №8. – С.81–102.

и В.И.,Забутной[11], а также М.Ш. Шабозовым[20].

Переходим к изложению некоторых фактов, нужных нам в дальнейшем. Запишем норму (1) в более удобном нам виде

$$\|f\|:=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt\right)^{1/2}.$$

Обычный модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in B_2$ определим равенством

$$\omega_m(f,t):=\sup\left\{\|\triangle_h^m(f)\|:|h|\le t\right\}, \qquad (2)$$

где

$$\|\triangle_h^m(f)\|:=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f\left(\rho e^{i(\tau+kh)}\right)\right|^2\rho d\rho du\right)^{1/2}.$$

Под усреднённой характеристикой гладкости функции $f\in B_2$ будем понимать величину[17,19]

$$\Lambda_m(f,t):=\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\|\triangle_h^m(f)\|^2dh\right)^{1/2}. \qquad (3)$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество комплексных алгебраических полиномов степени n. Величину

$$E_n(f):=E(f,\mathcal{P}_n)_{B_2}=\inf\left\{\|f-p_n\|_2:p_n\in\mathcal{P}_n\right\}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратичным приближением функции $f\in B_2$ элементами множества $\mathcal{P}_n$. Для любых $r\in\mathbb{N}$ через

$$f^{(r)}(z)=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r}, \qquad (4)$$

где $\alpha_{k,r}=(k!)/(k-r)!,\ k\ge r,\ k\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \alpha_{k,0}=1$, обозначим производную r-го порядка функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\in B_2$, $c_k(f)$ – коэффициенты Маклорена. Всюду далее полагаем

$$B_2^{(r)}:=\{f\in B_2:\|f^{(r)}\|<\infty\}, r\in\mathbb{Z}_+, B_2^{(0)}\equiv B_2.$$

[20]Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. вып.3. – С. 450–458.

Простые вычисления с применением тождества Парсеваля дают

$$\|\triangle_h^m(f^{(r)})\|^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \left(1-\cos(k-r)h\right)^m . \tag{5}$$

Хорошо известно[18], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2},$$

где $T_{n-1}(f)$ – частная сумма n-го порядка ряда Маклорена функции $f(z)$. Имеет место следующая

Лемма 1.1.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}.$$

В экстремальных задачах теории приближения функций одной из наиболее важных является задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Под неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или её производной заданного порядка. В нашем случае в качестве характеристики гладкости функции $f \in B_2^{(r)}$ выступает $\Lambda_m(f^{(r)}, t)$. Введём обозначение

$$J_{\nu,m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1-\cos\nu\tau)^m d\tau \right\}^{1/2}, \quad J_{\nu,m}(t) = J_{1,m}(\nu t),\ t > 0. \tag{6}$$

Учитывая равенства (5) и (6), для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$, величину (3) запишем в виде

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} J_{1,m}\big((k-r)t\big).$$

Непосредственными вычислениями легко убедимся, что для величины совместного приближения $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ функции f и ее последовательных производных $f^{(s)} \in B_2$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ имеют место равенства

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - T_{n-s-1}(f^{(s)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} \right\}^{1/2}.$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.2.1. *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$ *и* $t\in(0,2\pi/(n-r)]$. *Тогда для произвольной функции* $f\in B_2^{(r)}$ *справедливо неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{2^{m/2}}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\cdot\frac{\Lambda_m(f^{(r)},t)}{J_{1,m}((n-r)t)}. \tag{7}$$

Неравенство (7) точное в том смысле, что для функция $f_0=z^n\in B_2^{(r)}$, *оно обращается в равенство.*

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)},t)}=\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}\big((n-r)t\big)}. \tag{8}$$

В частности, из (8) *при* $t=\pi/(n-r)$, $n>r$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *получаем значение точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина* (7) *для функций* $f\in B_2^{(r)}$:

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}\,E_{n-1}(f)}{\Lambda_m\big(f^{(r)},\pi/(n-r)\big)}=\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(\pi)}=\frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}.$$

Замечание 1.2.1. *При* $m=1$ *из равенства* (8) *получаем*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_1\big(f^{(r)},t/(n-r)\big)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}t)}}, \tag{9}$$

где

$$\operatorname{sinc}u:=\left\{\frac{\sin u}{u},\ \textit{если}\ u\ne0;\quad 1,\textit{если}\ u=0\right\}.$$

В частности, из (9) *при* $t=\pi$ *имеем*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)}\cdot\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_1\big(f^{(r)},\pi/(n-r)\big)}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Отметим, что равенство (10) является аналогом результата Н.И.Черных[21], доказанного для модуля непрерывности первого порядка в теории средне-квадратического наилучшего приближения периодических функций тригонометрическими полиномами, на случай наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в пространстве B_2.

[21] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0,2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С.232–241.

В третьем параграфе изучается неравенство типа Джексона-Стечкина для совместного полиномиального приближения функций $f \in B_2^{(r)}$. Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ r \geq 2)$, её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(1 \leq s \leq r-1)$ также принадлежат пространству B_2, то определённый интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ на некотором классе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \in B_2^{(r)}$ при $n > r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Точнее требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\{E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}.$$

Условимся, что всюду далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ предполагаем, что $f \neq \mathcal{P}_r$, где $\mathcal{P}_r$ — множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше r. Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, при условии $n > r \geq s$ справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\, E_{n-r-1}(f^{(r)}), \tag{11}$$

причём существует функция из $B_2^{(r)}$, для которой (11) обращается в равенство.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})}{E_{n-r-1}(f^{(r)})} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 2\pi/(n-r)]$. Тогда для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Lambda_m(f^{(r)}, t)}{J_{1,m}((n-r)t)}. \tag{12}$$

Неравенство (12) точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/(n-r))} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{13}$$

В частности, при $t = \pi$ из (13) следует, что для точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина совместного приближения функций $f \in$

$B_2^{(r)}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)},\pi/(n-r))} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}.$$

Четвёртый параграф первой главы посвящен нахождению точных неравенств типа Джексона-Стечкина посредством усреднённого значение характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)},t)$. Условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. Здесь доказана следующая общая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+, n>r\ge s,\ 0<p\le\infty,\ h\in(0,2\pi/(n-r)]$, $\varphi(t)$ *— весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m/2}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p\big((n-r)t\big)\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 1.4.1 вытекают ряд утверждений

Следствие 1.4.1. *Пусть* $n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\ge s,\ m=1,\ 0<p\le\infty,\ 0<h\le 3\pi/4(n-r)$, φ *— весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc}\big((n-r)t\big)\big)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \qquad (14)$$

В частности, из (14) при $p=2,\varphi\equiv 1$ *имеем*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \left\{ \frac{n-r}{(n-r)h - \mathrm{Si}\big((n-r)h\big)} \right\}^{1/2},$$

где $\mathrm{Si}(u) = \int\limits_0^u \mathrm{sinc}\tau d\tau$ *— интегральный синус.*

Следствие 1.4.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $m = 1, p = 2$, $0 < h \leq 3\pi/4(n-r)$, $\varphi(t) \equiv t$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h t\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2\left\{ \big((n-r)h/2\big)^2 - \sin^2\big((n-r)h/2\big) \right\}^{1/2}}. \tag{15}$$

В частности, из (15) при $h = \pi/2(n-r)$ *следует равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/2(n-r)} t\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 8}}.$$

Завершающий пятый параграф посвящена наилучшему совместному полиномиальному приближению функций и их производных в пространстве Бергмана B_2, гладкости которых характеризуются модулем непрерывности r-й производной функций. В этом параграфе решены некоторые экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций и их последовательных производных, структурные свойства которых определяются обычными модулями непрерывности первого порядка в пространстве Бергмана B_2. Нам далее понадобятся следующие соотношения[6]:

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}), \tag{16}$$

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}, \tag{17}$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \tag{18}$$

Соотношения (16)-(18) справедливы для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, и $n > r \geq s$. Неравенства (16)-(18) обращаются в равенства для функции $f_0(z){=}z^n \in B_2^{(r)}$. Положим

$$\Delta_h^1(f;\rho,u) := f\left(\rho e^{i(u+h)}\right) - f(\rho e^{iu})$$

и равенством

$$\omega(f,t) := \omega(f,t) = \sup\left\{\|\Delta_h^1(f;\rho,u)\| : |h| \leq t\right\}$$

определим модуль непрерывности функции $f \in B_2$.

Простые вычисление с применением равенство Парсеваля показывают, что

$$\omega(f,t) := 2\sup_{|h|\leq t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1-\cos kh) \tag{19}$$

Пользуясь равенством (19) и учитывая, что для коэффициентов Маклорена при разложении в ряд Маклорена производной $f^{(r)}(z)$ и $f(z)$ имеет место равенство $|c_k(f^{(r)})|^2 = \alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2$, запишем

$$\omega^2(f^{(r)},t) := 2\sup_{|h|\leq t}\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\,\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t).$$

В этом параграфе основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1.5.1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left\{\int\limits_0^{\tau}\omega^2(f^{(r)},t)_2dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{n-r}{2\big((n-r)\tau-\sin(n-r)\tau\big)}\right\}^{1/2}.$$

Теорема 1.5.2. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $0 < t \leq \pi/(n-r)$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left\{\omega(f^{(r)},t)+(n-r)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\frac{1}{(n-r)t}, \quad 0 < (n-r)t \leq \pi.$$

Вторая глава диссертации посвящена решению некоторых экстремальных задач для различных классов функций в пространстве B_2. Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и определения из теории n-поперечников[3,22]. Пусть $S := \{f : \|f\| \leq 1\}$ — единичный шар в B_2; $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2; $\mathscr{L}_n \subset B_2$ — n-мерное подпространство; $\mathscr{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : B_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^{\perp} : B_2 \to \mathscr{L}^n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathcal{M}; B_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \mathscr{L}_{n+1} \subset \mathcal{M}\right\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset B_2\right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathscr{L}_n\right\} : f \in \mathcal{M}\right\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathcal{M}\right\} : \Lambda B_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L} \subset B_2\right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}; B_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \Lambda^{\perp} f\| : f \in \mathcal{M}\Big\} : \Lambda^{\perp} B_2 \subset \mathscr{L}_n\Big\} : \mathscr{L}_n \subset B_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathcal{M} \in B_2$.

Указанные n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве B_2 связаны соотношениями[3,22]:

$$b_n(\mathcal{M}; B_2) \leq d^n(\mathcal{M}; B_2) \leq d_n(\mathcal{M}; B_2) = \delta_n(\mathcal{M}; B_2) = \Pi(\mathcal{M}; B_2).$$

Исходя из результата леммы 1.1.1, через $W^{(r)}B_2\,(n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n > r)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, производная r-го порядка $f^{(r)}$ которых удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\| \leq 1$.

Теорема 2.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда*

$$\lambda_n\big(W^{(r)}B_2; B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}B_2\big) = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}},$$

где $\mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}B_2\big) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}B_2\big\}$, а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Пусть $\Phi(t)$, где, $0 \leq \ t \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее ее будем называть мажорантой. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$ и Φ – произвольная мажорантная функция. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка удовлетворяют условию

$$\Lambda_m\big(f^{(r)}, t\big) \leq \Phi(t), \ t \in (0, 2\pi].$$

[22] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – 1976. – 325 С.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r$, *функция* $J_{1,m}$ *определяется формулами* (6), $\lambda_n(\cdot)$ – *любой из вышеперечисленных из* n-*поперечников. Если для произвольных* $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $t \in (0, 2\pi]$ *функция* Φ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} J_{1,m}\big((n-r)t\big), \tag{20}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_n\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right).$$

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (20), *не пусто.*

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$), Φ – некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f \in B^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big) dt \leq \Phi^p(h).$$

Теорема 2.1.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, \lambda_n(\cdot)$ — *любой из* n-*поперечников перечисленных выше. Если для любых значений* $h \in (0, 2\pi]$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p\big(\pi/(n-r)\big)} \geq \frac{\displaystyle\int_0^{(n-r)h} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt}, \tag{21}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_n\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi), B_2\big) = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) =$$

$$= \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$ — некоторая константа, φ — весовая на $[0,h]$ функция, $0 < p \le \infty$. Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \le \int\limits_0^h \varphi(t)dt.$$

Теорема 2.1.4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$, $n > r$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h); B_2\right) = E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)\right) =$$

$$= \frac{2^{-m/2}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — любой из перечисленных выше k-поперечников.

Во втором параграфе второй главы для классов функций, для которых найдены значения n-поперечников, решена следующая экстремальная задача нахождение верхних гранов наилучшего совместного приближения:

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) = \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\},$$

где $\mathfrak{M}^{(r)}$ есть один из рассмотренных в параграфе 2.1 классов функций.

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$. Тогда*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}B_2) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$. Если для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, 2\pi]$ функция Φ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)} \ge \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}\big((n-r)t\big).$$

то справедливо равенство

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\big) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right).$$

Теорема 2.2.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$. Если для любых значений $h \in (0, 2\pi]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию (21), то имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) = \\ = \frac{(n-r)^{1/p}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)}{\left(\int\limits_0^\pi \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{1/p}}.$$

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.3 при $p = 2$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\big(W_2^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{\frac{n-r}{2\left[(n-r)h - \operatorname{Si}\big((n-r)h\big)\right]}\right\}^{1/2}.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$ и $h \in (0, 3\pi/4(n-r)]$. Тогда имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m; \varphi, h)\right) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p((n-r)t)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- вычислены точные значения константы в неравенства типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций в пространстве Бергмана B_2;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2;
- найдены точные верхние грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций в B_2.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации для аналитических функций многих переменных.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК Российской Федерации:

[1] *Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Матем. заметки. –2021. вып. 2. – С. 266-281.

[2] *Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2 // ДАН РТ. – 2021. – Т. 64, № 7-8. – С. 385–392.

[3] *Кадамшоев Н.У.* О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ. – 2022. – Т. 64, № 11-12. – С. 637–645.

[4] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* О приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН РТ. – 2021. Т. 64, № 5-6. – С. 262–268.

В других изданиях:

[5] *Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У.* Неравенства между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2 // Міжнародна наукова конференція "*Теорія наближень і її застосування*", присвячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020 г.). – С. 66–67.

[6] *Кадамшоев Н.У.* Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Материалы республиканской научно-практической конференции *"Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества"* (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С. 38–40.

[7] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* Неравенства между наилучшими совместными приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию

академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 16–20.

[8] *Айдармамадов А.Г., Кадамшоев Н.У.* О наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Материалы международной научной конференции "*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 50–53.