РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Кодиров Далер Абдушукурович

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
— доктор по специальности 6D060100 — Математика: 6D060101
— Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2025

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Шабозов Мирганд Шабозович**, академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Исхоков Сулаймон Абунасрович,** член-корр. НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Козиев Гулназар Мавлоназарович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики в экономике Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана

Ведущая организация: Бохтарский государственный университет имени Н. Хусрава

Защита состоится *17 сентября 2025 г. в 14:00* часов на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «______» «________________» 2025 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 6D.KOA-011,
кандидат физико-математических наук **Гафоров А.Б.**

Введение

Актуальность темы исследования. В экстремальных задачах теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в различных банаховых пространствах основной характеристикой гладкости функции является модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной заданного порядка. Хорошо известно, что при отыскании точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов (в частности, по специальным функциям математической физики) в гильбертовом пространстве важную роль играет обобщённый модуль непрерывности. Он связан с так называемыми “теоремами сложения” и “теоремами умножения” для ортогональных систем векторов в гильбертовом пространстве. В общем случае таких теорем нет. Пользуясь некоторыми известными фактами, в этой работе удалось построить обобщённый модуль непрерывности функции, который позволил точно оценить скорость сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, а также по специальным функциям математической физики (функциям Бесселя, ортонормированным многочленам Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Якоби и другим).

С целью решения экстремальных задач в произвольном гильбертовом пространстве построен оператор усреднения (сдвига), затем обобщённый модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволяет найти верхний грани скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по произвольным ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве. Установлена связь между скоростью сходимости и гладкостью вектора, что подтверждает целесообразность введения обобщённого модуля непрерывности в гильбертовом пространстве.

Следует отметить, что в случае 2π-периодических функций в качестве оператора сдвига в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [2], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [3], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [4], М.Ш.Шабозова и А.А.Шабозовой [5] использовался оператор Стеклова. В работах Э.В.Селимханова [6, 7], Э.В.Селимханова и Ф.В.Абиловой [8, 9] исследуются задачи получения оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве и доказаны некоторые прямые и обратные теоремы теории приближения.

В данной диссертационной работе, в отличие от вышеперечисленных работ, рассматривается более общая задача отыскания точных оценок наилучших приближений некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве и даётся их приложение в задачах отыскания скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля и по классическим ортогональным полиномам.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Общая теория наилучшего приближения в любом линейном нормированном пространстве хорошо разработана, причем в таких пространствах элемент наилучшего приближения всегда существует. При этом если пространство строго нормировано, то элемент наилучшего приближения единствен [10]. В диссертационной работе изучается наилучшие приближения и оценки скорости сходимости ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве и даётся приложение полученных результатов к оценке скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Эта задача с точки зрения экстремальных задач теории наилучших приближений и отыскания верхних граней наилучших приближений находится на стадии разработки. Некоторые асимптотические оценки в этом направлении получены в работах В.А.Абилова с учениками [11–13]. В случае, когда функция разлагается по ортонормированным полиномам Чебышева первого рода в пространстве $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1])$, сформулированная задача рассмотрена в работе М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [14]. Некоторые точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по полиномам Чебышева–Эрмита найдены в работе К.Тухлиева и А.М.Туйчиева [15].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2021-2025 гг. по теме “Теория приближения функций”.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач, связанных с отысканием точного значения верхней грани наилучшего приближения суммами Фурье по произвольной ортогональной системе векторов в гильбертовом пространстве и их приложение к рядам Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;

- найти точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- найти точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- найти точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- найти точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оценивается сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Объект исследования. Объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим приближением классов векторов в гильбертовых пространствах и их приложение в задаче Штурма–Лиувилля.

Предмет исследования. Предметом исследования является отыскании верхних граней наилучших приближений классов векторов в гильбертовом пространстве и их применение в отыскании точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- найдены точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории ортогональных рядов.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точных значениях верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- теоремы о точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- теоремы о точных значениях верхних граней наилучших приближений функций суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- теоремы о точных неравенствах типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, а также подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа указанной в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывавшего также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе “Научная новизна”, получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2024 гг.);
- международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”, (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- материалы республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества”, (Хуждaнд, 29-30 октября 2021 г.);
- материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложения”, (Душанбе, 27 мая 2022 г.);
- материалы республиканской научно-практической конференции “Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук”, (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.);
- материалы международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций”. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной конференции “Современные проблемы математики”, (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.);
- международной научно-практической конференции “Математика в современном мире”, (Худжанд, 20 апреля 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 8 — в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 133 наименования, занимает 142 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы, следствия или формулы в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Результаты исследования. Приведём краткое содержание диссертации с формулировкой основных результатов.

Во введении приводится краткая характеристика исследуемой экстремальной задачи, исторический обзор комплекснозначных периодических функций, формулировка предварительных результатов.

В первой главе диссертационной работы анализируются литературные источники по теме исследования и излагается постановка нерешённых экстремальных задач по намеченному тему исследования.

Во второй главе даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным векторам некоторого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Пользуясь хорошо известными фактами, построен обобщённый модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, что позволило найти точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной ортогональной системе векторов. С помощью симметричного оператора в гильбертовом пространстве вводятся аналоги классов дифференцируемых функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности и на введённых классах функций установлен точные оценки скорости сходимости (величины наилучших приближений) рядов Фурье по собственным векторам этого оператора. Полученные результаты конкретизируются на разложении функций в рядах Фурье по ортонормированным системом полиномов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Якоби, функций Бесселя и др. Кроме того, в завершающем параграфе данной главы найдены точные значения различных n-поперечников рассматриваемых классов векторов в гильбертовом пространстве.

В первой параграфе второй главы приведены основные определения и вспомогательные факты. Пусть H — произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g) векторов $f, g \in H$ и $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ — норма вектора $f \in H$. Если $\{f_k\}$ — полная ортонормированная система векторов в пространстве H, то, как известно, ряд Фурье вектора $f \in H$ имеет вид:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) f_k, \quad c_k(f) = (f, f_k), \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Через

$$S_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) f_k, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

обозначим частичную сумму n-го порядка ряда (1).

Пусть $\mathcal{P}_n$ – совокупность обобщённых “полиномов” вида

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Равенством

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} \tag{4}$$

определим наилучшее приближение вектора $f \in H$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Известно [16], что среди всех полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величине (4) доставляет n-я частичная сумма (2). При этом

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{5}$$

В пространстве H определим оператор сдвига $F_h : H \to H$ следующего вида

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) f_k, \quad h \in (0,1). \tag{6}$$

Очевидно, что для любых двух векторов $f, g \in H$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ для оператора сдвига (6) имеет место равенство

1) $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g)$; 2) $\|F_h f\| \leq \|f\|$;

3) $F_h f_n = (1-h)^n f_n$; 4) $\|F_h f - f\| \to 0, \ h \to 0+$.

Определим теперь конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, равенствами

$$\triangle_h f = F_h f - f = (F_h - E) f,$$

$$\triangle_h^m f = \triangle_h(\triangle_h^{m-1} f) = (F_h - E)^m f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f,$$

где $F_h^0 f = f, \ F_h^k f = F_h(F_h^{k-1} f), \ k = 1, 2, \ldots, m; \ m \in \mathbb{N}; \ E$ — единичный оператор в пространстве H. Величину

$$\Omega_m(f, t) = \sup\{\|\triangle_h^m f\| : 0 < h \leq t\}, m \in \mathbb{N} \tag{7}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности вектора $f \in H$.

Найдем явный вид модуля непрерывности (7). Пользуясь равенствами (1) и (6), запишем

$$\triangle_h f = F_h f - f = -\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)c_k(f)f_k,$$

и по индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\triangle_h^m f = (F_h - E)^m f = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^m c_k(f)f_k,$$

откуда, в силу ортонормированности системы векторов $\{f_k\}$, находим [6]

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f),$$

а потому из (7) следует, что

$$\Omega_m^2(f,t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f) : 0 < h \leq t\right\}, \tag{8}$$

и так как

$$\sup\{(1-(1-h)^k) : 0 < h \leq t\} = (1-(1-t)^k),$$

то из (8) получаем

$$\Omega_m^2(f,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^m c_k^2(f). \tag{9}$$

Пусть $A : H \to H$ — симметричный оператор в пространстве H, то есть оператор, заданный в некотором линейном многообразии $\mathscr{L}(A) \subset H$, удовлетворяющий условию $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in \mathscr{L}(A)$.

Всюду далее под полнотою ортонормированной системы собственных векторов оператора A будем понимать следующее:

1) Собственные векторы оператора A – это такие векторы u_i, для которых выполняется равенство $Au_i = \lambda_i u_i$, где λ_i – собственное значение, соответствующее собственному вектору u_i.

2) Ортонормированность означает, что собственные векторы $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ образуют ортонормированную систему: $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_+)$, где δ_{ij} – символ Кронекера $\delta_{ij} := \big\{1,$ если $i = j, \;\; 0,$ если $i \neq j\big\}$ $i, j = 0, 1, \ldots$.

3) Полнота означает, что ортонормированная система собственных векторов $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ образует базис в пространстве, в котором действует оператор A.

Это значит, что любой вектор u в таком пространстве можно разложить по этим собственным векторам

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i v_i.$$

Мы предполагаем, что оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{f_n\}$, отвечающих собственным значениям λ_n:

$$Af_n = \lambda_n f_n, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

причём

$$0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

В этом случае из равенства (1) вытекает, что

$$Af = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k(f) f_k. \tag{10}$$

Если для $r \in \mathbb{Z}_+$ положить $A^0 f = If = f, \ A^r f = A(A^{r-1} f), r \in \mathbb{N}$, то, пользуясь равенством (10), в силу линейности оператора A последовательно находим:

$$A^r f := A(A^{r-1} f) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) f_k, \ r \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, непосредственным вычислением легко доказать, что имеют место следующие равенства

$$E_{n-1}^2(A^r f) = \left\| A^r f - S_{n-1}(A^r f) \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) f_k \right\| = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} c_k^2(f),$$

$$\Omega_m^2(A^r f; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} c_k^2(A^r f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{11}$$

Во втором параграфе второй главы приведены некоторые предварительные результаты. Всюду далее через $H^r(A), \ r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс векторов $f \in H$, у которых $A^r f \in H$. Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{12}$$

Пусть $W^{(r)}(A) := WH^{(r)}(A)$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ — класс векторов $f \in H^{(r)}$, для которых $\|A^r f\| \leq 1$. Тогда имеет место следующая

Теорема 2.2.2. *При любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(A)) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(A)\right\} = \frac{1}{\lambda_n^r}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{13}$$

В случае $r = 0$ равенство (13) получено в работе Э.В.Селимханова и Ф.В.Абиловой [8].

Из теоремы 2.2.3 сразу вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.3 *справедливо равенство*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; 1/n)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = (1-e^{-1})^{-m}.$$

Из полученного экстремального равенства получаем следующее неравенство типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ и модулем непрерывности $\Omega_m(A^r f, t)$ порядка m в точке $t = 1/n$:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r}(1-e^{-1})^{-m}\omega_m\left(A^r f; \frac{1}{n}\right).$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $(0, h]$ будем понимать неотрицательную функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in (0,1]$, q — *весовая на отрезке* $(0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Два приведенных ниже следствия, вытекающие из теоремы 2.2.4, касаются двух частных случаев когда: а) $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ и б) $q \equiv 1$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ соответственно.

Следствие 2.2.2. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f,t)q(t)dt\right\}^m}=\frac{1}{\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]\varphi(t)dt\right\}^m},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $h\in(0,1)$, *а функция* q *и величина* h *удовлетворяют требованиям теоремы* 2.2.4.

Следствие 2.2.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $h\in(0,1)$, $q(t)\equiv 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f,t)dt\right\}^m}=\Big\{(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\Big\}^{-m}.$$

В полученном равенстве, полагая $h=1/(n+1)$ и $r=0$, получаем один из основных результатов работы М.В.Абилова и Г.А.Айгунова [17] в одномерном случае, а именно следующее равенство

$$\sup_{f\in H^r}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)dt\right\}^m}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)m}.$$

Из этого равенства следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in H}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)dt\right\}^m}=e^m.$$

Отсюда, в свою очередь, сразу следует неравенство типа Джексона–Стечкина с явной константой

$$E_{n-1}(f)\le e^m\,\Omega_m\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

В качестве приложения теоремы 2.2.4 рассмотрим следующую экстремальную задачу: если $\mathfrak{M}^{(r)}\subset H^r(A)$ есть некоторый подкласс векторов, то требуется найти величину

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}^{(r)}):=\sup\Big\{E_{n-1}(f):f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \qquad (14)$$

Величина (14) определяет точную верхнюю грань наилучших приближений класса векторов $\mathfrak{M}^{(r)}$ в пространстве H.

В качестве класса векторов $\mathfrak{M}^{(r)}$ будем рассматривать класс векторов $W_p^{(r)}(\Omega_m; q) \in H^{(r)}(A)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1)$, $q(t)$ — весовая функция, удовлетворяющая ограничению

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p} \le 1.$$

Теорема 2.2.5. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Omega_q; q)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 2.2.5 вытекает

Следствие 2.2.4. *В условиях теоремы* 2.2.5 *в случае*

$$g_*(t) = n(1-t)^{n-1} = \frac{d}{dt}\left[1-(1-t)^n\right]$$

имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) = \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot\left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h)^n\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p} \tag{15}$$

и, в частности, при $p = 1/m$, $h = 1/n$ *из* (15) *следует, что*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^r\, \mathcal{E}_{n-1}\big(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{2}{[1-(1-(1/n))^n]^2}\right\}^m = \frac{2^m}{\big(1-e^{-1}\big)^{2m}}.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) \sim \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot\frac{2^m}{\big(1-e^{-1}\big)^{2m}}.$$

В третьем параграфе обобщаются результатов второго параграфа второй главы и некоторые результаты приближения. В пространстве H определим оператор сдвига $F_h : H \to H$ равенством

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(h) c_k(f) f_k, \tag{16}$$

где $\varphi_k(h)$ $(k \in \mathbb{Z}_+, 0 < h \leq 1)$ — непрерывные неотрицательные монотонно убывающие функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_k(h) \not\equiv const, \;\; 0 \leq \varphi_k(h) \leq 1, \; \varphi_k(h) \geq \varphi_{k+1}(h).$$

Пользуясь разложением вектора $f \in H$ в ряд Фурье (1) и общим видом оператора сдвига (16), найдём явный вид конечных разностей и обобщённого модуля непрерывности (7). Имеем

$$\triangle_h f = F_h(f - \mathbb{I}) = -\sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big) c_k(f) f_k$$

и по индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ запишем

$$\triangle_h^m f = (F_h - \mathbb{I})^m f = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^m c_k(f) f_k. \tag{17}$$

Применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы векторов $\{f_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$, из (17) получаем

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{18}$$

Таким образом, с учетом равенства (18), модуль непрерывности (7) имеет вид

$$\Omega_m(f, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{19}$$

Пусть $A : H \to H$ — симметричный оператор в пространстве H. Тогда, как и в предыдующем параграфе, при любом $s = 0, 1, 2, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ непосредственными вычислениями легко доказать, что

$$E_{n-1}^2(A^s f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f),$$

$$\Omega_m^2(A^r f; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} \cdot \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{20}$$

Пусть $H^{(r)}(A)$, $r \in \mathbb{N}$, по прежнему, класс векторов $f \in H$, для которых $A^r f \in H$. Имеет место следующее утверждение, которое является обобщением теоремы 2.2.1.

Теорема 2.3.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Из теоремы 2.3.1 для класса $W^{(r)}(A)$ по схеме доказательства теоремы 2.2.2 получаем следующее утверждение

Теорема 2.3.2. *При любых* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq s$ *справедливо равенство*

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(A)) = \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f \in W^{(r)}(A)\right\} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Теорема 2.3.3. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, A *— симметричный оператор, обладающий полной ортонормированной системой векторов* $\{f_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, *отвечающих собственным значениям* $\{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для произвольного вектора* $f \in H^{(r)}(A)$ *справедливо неравенство типа Колмогорова*

$$\|A^s f\| \leq \|f\|^{1-s/r} \cdot \|A^r f\|^{s/r}. \tag{21}$$

Неравенство (21) *неулучшаемо в том смысле, что существует вектор* $f_0 \in H^{(r)}(A)$, *для которого оно обращается в равенство.*

Из теоремы 2.3.3 вытекает

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.3 *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(A^s f)_2 \leq \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}\big(E_{n-1}(A^r f)\big)^{s/r}.$$

В параграфе 2.2 через $W^r(A)$ обозначили класс векторов $f \in H^{(r)}(A)$, для которых $\|A^r f\| \leq 1$. Для этого класса векторов имеет место

Теорема 2.3.4. *При всех* $0 \leq s \leq r$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W^r(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{\big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}} = 1.$$

В четвёртом параграфе мы изучаем экстремальную задачу отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^{(r)}(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m. Имеет место следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t < 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{\big(1 - \varphi_n(t)\big)^m}. \tag{22}$$

Заметим, что теорема 2.4.1 характеризует наилучшее одновременное (совместное) приближение вектора f и всех последовательностей Af, $A^2 f, \ldots, A^s f$ в гильбертовом пространстве векторов H, у которых $\|A^r f\| <$

∞. Эта теорема позволяет записать неравенство типа Джексона–Стечкина между величиною $E_{n-1}(A^s f)$ и модулем непрерывности $\Omega_m(A^r f;t)$:

$$E_{n-1}(A^s f) \le C(n,m,r,s;\varphi_n)\,\frac{1}{\lambda_n^{r-s}}\cdot\Omega_m(A^r f;1/n).$$

В самом деле, из равенства (22) при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<t<1$ для произвольного вектора $f\in H^r(A)$ следует неравенство

$$E_{n-1}(A^s f) \le \big(1-\varphi_n(t)\big)^{-m}\lambda_n^{-(r-s)}\Omega_m(A^r f;t). \tag{23}$$

Полагая в правой части (23) $t=1/n$, получаем следующее неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(A^s f) \le \big(1-\varphi(1/n)\big)^{-m}\lambda_n^{-(r-s)}\Omega_m(A^r f;1/n) \tag{24}$$

с явной константой $C(n,m,r,s;\varphi_n)=(1-\varphi(1/n))^{-m}$.

Если функция $\varphi_n(t)$ изначально задана, то константу $C(n,m,r,s;\varphi_n)$ можно уточнить. Так, например, если $\varphi_n(t)=(1-t)^n$, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} C(n,m,r,s;\varphi_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-(1-(1/n))^n\right]^{-m}=\big(1-e^{-1}\big)^{-m},$$

которую, мы ранее вычислили в параграфе 2.2.

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 2.4.2. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<p\le\infty$, $h\in(0,1]$ и $q(t)$ — весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)}\frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h \big(1-\varphi_n(h)\big)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Используя определение характеристики гладкости (20) в параграфе 2.2, мы ввели класс векторов $W_p^{(r)}(\Omega_m;q)$, где $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$, q — весовая на $[0,h]$ функция, принадлежащая $H^{(r)}(A)$ и удовлетворяющая ограничению

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f,t)q(t)dt\le 1.$$

Здесь требуется для любых $m,n\in\mathbb{N}$ и любого s $(0\le s\le r)$ найти значения величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q))=\sup\big\{E_{n-1}(A^s f): f\in W_p^{(r)}(\Omega_m;q)\big\}. \tag{25}$$

Теорема 2.4.3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q))=\lambda_n^{-(r-s)}\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(t))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.3 *при* $q(t):=q_*(t)=-\varphi_n'(t)>0$, $0\le t\le h$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q_*))=\frac{1}{\lambda_n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{(1-\varphi_n(h))^{m+1/p}}{(mp+1)^{1/p}}\right\}^{-1/p}.$$

Пятый параграф второй главы посвящен вычисление значения поперечники некоторых классов векторов. Прежде чем сформулировать основные результаты этого параграфа, напомним необходимые понятия и определения. Пусть H — гильбертово пространство векторов, $\mathbb{S}$ — единичный шар в H; Q — выпуклое центрально-симметричное множество из H; $\Lambda_n\subset H$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset H$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}:H\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp:H\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины [18, 19]

$$b_n(Q,H):=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon\,\mathbb{S}\cap\Lambda_{n+1}\subset Q\right\}:\Lambda_{n+1}\subset H\right\},$$
$$d_n(Q,H):=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|:g\in\Lambda_n\right\}:f\in Q\right\}:\Lambda_n\subset H\right\},$$
$$\delta_n(Q,H):=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|:f\in Q\right\}:\mathcal{L}H\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset H\right\},$$
$$d^n(Q,H):=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|:f\in Q\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset H\right\},$$
$$\Pi_n(Q,H):=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^\perp f\|:f\in Q\Big\}:\mathcal{L}^\perp H\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset H\Big\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* множества Q в пространстве H. Так как H является гильбертовым пространством, то имеют место следующие соотношения между перечисленными величинами:

$$b_n(Q,H)\le d^n(Q,H)\le d_n(Q,H)=\delta_n(Q,H)=\Pi_n(Q,H).$$

Приводим классы векторов, для которых вычислим точные значения вышеперечисленных n-поперечников в гильбертовом пространстве H:

$W^r(A):=\Big\{f\in H^r(A):\|A^rf\|\le 1\Big\}$;

$W_m^r(A,\Phi)$ — класс векторов $f\in H^r(A)$, для которых

$$\Omega_m(A^rf;t)\le\Phi(t),\ \ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,$$

где $\Phi(t)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция на $\mathbb{R}_+:=[0,\infty)$ такая, что $\Phi(0)=0$;

$W^r(\Omega_m; q)$ — класс векторов $f \in H^r(A)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt \leq 1.$$

Результат теоремы 2.2.1 позволяет доказать следующую теорему для класса векторов $W^r(A)$, введённого в параграфе 2.2.

Теорема 2.5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\rho\big(W^r(A), H\big) = \lambda_n^{-r}, \tag{26}$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников: Бернштейна $b_n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$, проекционного $\Pi_n(\cdot)$.

Теорема 2.5.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 1)$. Тогда имеет место равенство*

$$\rho_n\big(W_m^r(A, \Phi), H\big) = \lambda_n^{-r} \big[1 - (1 - h)^n\big]^{-k} \Phi(h), \tag{27}$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2.5.3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, q — весовая на $(0, h)$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\rho_n(W^r(\Omega_m, q), H) = E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) = \lambda_n^{-r} \left\{ \int\limits_0^h \big[1 - (1 - t)^n\big]^{mp} q(t) dt \right\}^{-1/p},$$

где

$$E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in W^r(\Omega_m, q)\big\},$$

а $\rho_n(\cdot)$ — любой из поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$.

В завершающем шестом параграфе второй главы, для сравнения общей теоремы 2.4.2 и её применения, иллюстрируются некоторые результаты о наилучшей аппроксимации функций на всей оси суммами ряда, разложенного по ортогональным многочленам Чебышева–Эрмита.

В третьей главе найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. В этой главе также получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Основной нашей целью в этой главе является применение к оператору Штурма–Лиувилля теорем, доказанных во второй главе и, в частности, дать их применение к наилучшему приближению функций, разложенных в соответствующих областях по классическим ортогональным полиномам (Чебышева–Лагерра, Чебышева–Эрмита, Якоби и др.). Также найдём точные значения различных n-поперечников на классах функций, возникающих при решении экстремальных задач в теоремах 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.2 данной главы. Указанные классы определяются тем, что их $\mathscr{K}$-функционал r-й производной функции ограничены сверху заданной мажорантой Φ.

В первом параграфе третьей главы найдены наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2. Пусть

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)}\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)\right) - \tag{28}$$

дифференциальный оператор второго порядка Штурма–Лиувилля, где функции $p, q \in C[a,b]$, $k \in C^1[a,b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для $x \in [a,b]$.

Напомним [20], что задача Штурма–Лиувилля состоит в отыскании решений на отрезке $[a,b]$ уравнения

$$\mathcal{D}[u] = \lambda u, \tag{29}$$

удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

$$\gamma u(b) + \mu u'(b) = 0, \quad \gamma^2 + \mu^2 \neq 0. \tag{30}$$

Следует учесть, что область определения оператора $\mathcal{D}$ состоит из функций $u(x)$ класса

$$C^{(2)}(a,b) \cap C^{(1)}(a,b), \quad u''(x) \in L_2(a,b),$$

удовлетворяющих условиям (31).

Прежде чем применить теоремы, доказанные в параграфах 2.3 и 2.4 второй главы к оператору Штурма–Лиувилля и его различным частным случаям, таким как, разложение по собственным функциям краевой задачи Штурм–Лиувиллевского типа по классическим ортогональным многочленам (Чебышева–Лагерра, Чебышева–Эрмита, Якоби,...), нужно доказать, что оператор Штурма–Лиувилля, определённый равенством (29), является симметричным оператором. Симметричность оператора (29) доказано в первом параграфе этой главы.

Очевидно, что сформулированная задача Штурма–Лиувилля (30) – (31) всегда имеет нулевое решение, не представляющее интереса, а потому задачу (30) – (31) надо рассматривать как задачу на собственные значения оператора $\mathcal{D}$. Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ, при которых такие решения существуют, её собственными значениями. Хорошо известны следующие свойства собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{D}$:

1) существует счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots ;$$

2) каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция $u_n(x)$;

3) собственные функции $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют на отрезке $[a, b]$ ортогональную с весом $p(x)$ систему

$$\int\limits_a^b p(x)u_k(x)u_n(x)dx = 0, \ n \neq k,$$

которую в силу свойства 2 можно считать ортонормированной.

Пусть $L_2(p(x), [a, b])$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : [a, b] \to R$ с весом $p(x)$ и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b p(x)f^2(x)dx \right)^{1/2} ;$$

4) система собственных функций оператора $\mathcal{D}$ полна в пространстве $L_2(p(x), [a, b])$;

5) при граничных условиях $u(a) = u(b) = 0$ и $q(x) \geq 0$ собственные значения $\lambda_n, \ n \in \mathbb{N}$ — положительны. Пусть функция $f \in L_2(p(x), [a, b])$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)u_k(x), \quad c_k(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)u_k(x)dx \tag{31}$$

— её ряд Фурье. Через

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)u_k(x)$$

обозначим частные суммы $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (32). Положим

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(x) : p_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x) \right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f)_{L_{2,p(x)}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_2(p(x), [a, b])$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраическими многочленами степени не более $n-1$.

Хорошо известно, что

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f)_{L_{2,p(x)}} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \qquad (32)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x, y; h) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(y) h^k, \qquad (33)$$

где $h \in (0, 1)$, $x, y \in [a, b]$, равенство в (34) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(p(x), [a, b])$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_h : L_2(p(x), [a, b]) \to L_2(p(x), [a, b])$ вида

$$\mathcal{F}_h f(x) = \int\limits_a^b p(t) f(t) T(x, t; 1-h) dt. \qquad (34)$$

Отметим, что оператор (35) имеет простых свойств, пользуясь которыми введём обобщённый модуль непрерывности m-порядка:

$$\Omega_m(f; \delta) := \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\| : 0 < h \leq \delta\}$$

функции $f \in L_2(p(x), [a, b])$. Пусть $\mathcal{D}^0 f := f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D} f$ и при любом $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{r-1} f)$, где $\mathcal{D}$ — оператор Штурма–Лиувилля. Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2(p(x), [a, b])$, у которых $\mathcal{D}^r f \in L_2(p(x), [a, b])$, а функция f удовлетворяет граничным условиям

$$f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b), \quad l = 1, 2, \ldots, 2r.$$

Так как оператор Штурма–Лиувилля $\mathcal{D}$ симметричен, то для этого оператора справедливы все утверждения, доказанные нами в параграфе 2.2 второй главы, а потому здесь мы для оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{D}$, определённого в равенстве (29), приводим только их формулировку, чтобы затем конкретизировать их в частных случаях для задач Штурма–Лиувиллевского типа и для разложения функций по специальным функциям математической физики.

Теорема 3.1.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие 3.1.1. *В условиях теоремы* 3.1.1 *для операторов, рассмотренных в задачах I–III, справедливы равенства:*

I. для многочленов Чебышева–Эрмита

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{H}^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

II. для многочленов Чебышева–Лагерра

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{L})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{n^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

III. для многочленов Чебышева–Якоби

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta} f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta} f)} = \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+).$$

Аналогичным образом, применяя теорему 2.4.2 для оператора $\mathcal{D}$ Штурма–Лиувилля, получаем следующее утверждение

Теорема 3.1.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$ и $q(t)$ — весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 3.1.1. *В условиях теоремы* 3.1.2 *для операторов, определённых в задачах I–III параграфа* 2.2*, справедливы равенства:*

I. для многочленов Чебышева–Эрмита

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p};$$

II. для многочленов Чебышева–Лагерра

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

III. для многочленов Якоби

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Второй параграф третьей главы посвящен применением $\mathscr{K}$-функционалов Петре. В теории приближения функций часто используется идея замены аналитически сложной функции f достаточно гладкой функцией g так, чтобы возникающей при этом погрешности было достаточно мало. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на методе $\mathscr{K}$-функционала Петре в теории интерполяционных пространств [21]. $\mathscr{K}$-функционалы нашли применение также при решении экстремальных задач теории приближения функций [21–23]. Пользуясь ранее введёнными обозначениями, определим в рассматриваемом нами случае $\mathscr{K}$-функционал

$$\mathscr{K}_m(f,t^m):=\mathscr{K}_m(f,t^m;L_2,L_2^{(m)})=\inf\left\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\|:g\in L_2^{(m)}\right\},\quad(35)$$

где $m\in\mathbb{N},\ t\in(0,1)$, $L_2:=L_2(p(x);[a,b])$. Опеределённый интерес представляет вычисление точных значений экстремальных величин, подобных приведённой в равенстве (13), где вместо модуля непрерывности (11) будет использован $\mathscr{K}$-функционал (36).

Теорема 3.2.1. *При любых* $n,m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f,1/\lambda_n^m)}=1.$$

Используя результат доказанной теоремы 3.2.1, вычислим значение n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых $\mathscr{K}$-функционалом от $\mathcal{D}^r f$. Функцию $\Phi(t)$, являющуюся неубывающей на $[0,\infty)$, называют k-мажорантой, если функция $\Phi(t)/t^k$ не возрастает на $[0,\infty)$, $\Phi(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to0}\Phi(t)=0$. В случае $k=1$ функцию Φ, удовлетворяющую указанным условиям, называют просто мажорантой.

Пусть Φ — произвольная мажоранта. Символом $W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют ограничению

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \le \Phi(t^m), \quad t > 0.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\rho_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\, \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right),$$

где

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\big\},$$

$\rho_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы* 3.2.2 *имеют место равенства*

$$\text{I.} \quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2(e^{x^2}, \mathbb{R})\big) = \frac{1}{(2n)^r}\Phi\left(\frac{1}{(2n)^m}\right)$$

— для полиномов Чебышева–Эрмита;

$$\text{II.} \quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2(x^\alpha e^{-x}, \mathbb{R}_+)\big) = \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

— для полиномов Чебышева–Лагерра;

$$\text{III.} \quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2((1-x)^\alpha (1+x)^\beta; (-1,1))\big) =$$

$$= \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r}\Phi\left(\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^m}\right)$$

— для полиномов Якоби, где $\rho_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *или* $\Pi_n(\cdot)$.

В третьем параграфе третьей главы найдены точные верхние грани наилучших приближений частичными суммами ряда Фурье по собственными функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. Приводится решение ряда экстремальных задач наилучшего приближения функций конкретными специальными функциями математической физики. Точнее приводим применение теорем параграфов 2.3 и 2.4 к вопросу наилучшего совместного приближения некоторых специальных функций.

Приводим применение доказанных теорем параграфов 2.3 и 2.4 к вопросу наилучшего совместного приближения некоторых специальных функций математической физики. Уравнения (37) для простейших специальных функций могут быть записаны в виде [24]

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+\big(\lambda p(x)-q(x)\big)u(x)=0. \tag{36}$$

I. Уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{n^2}{x^2}\right)u(x)=0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)u(x)=0$$

соответствует случаю $k(x)=x$, $p(x)=x$, $q(x)=n^2/x$, $a=0$, $b=1$.

Хорошо известно [24], что функция Бесселя

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

является системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\frac{\nu^2}{x}u=\lambda xu,\ 0<x<1,\ |u(0)|<+\infty,\ u(1)=0, \tag{37}$$

отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$. При этом система $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ является полной и ортогональной в пространстве $L_2:=L_2([0,1];xdx)$ функций, суммируемых с квадратом, с весом x и конечной нормой

$$\|f\|=\left(\int\limits_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Полагая $\mathscr{B}:=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x^2}$, дифференциальное уравнение Бесселя (38) запишем в виде

$$\mathscr{B}u=-\lambda u.$$

Введя функцию $T(x,y;t)$ как сумму ряда

$$T(x,y;t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_k y)t^k,\ 0<t<1$$

в L_2, введём оператор обобщенного сдвига

$$F_hf(x)=\int\limits_0^1 tf(t)T(x,t;1-h)dt. \tag{38}$$

Используя оператор (39), в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [12], К.Тухлиева [25] введён специальный модуль непрерывности

$$\Omega_m\big(\mathscr{B}^r f;t\big)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\big[1-(1-t)^k\big]^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\right\}^{1/2},\ 0<t<1. \tag{39}$$

Заметим, что формула (40) вытекает из (11) в случае когда $\mathcal{A}:=\mathscr{B}$, $\varphi_k(t)=(1-t)^k$ и λ_k заменяется на λ_k^2.

Очевидно, что все теоремы параграфов 2.3 и 2.4 для оператора Бесселя $\mathscr{B}$ в соответствующих формулировках имеют место:

Теорема 3.3.1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{B}^r f)}=\frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}}.$$

Теорема 3.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $t\in(0,1]$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{\lambda_n^{2(r-s)}E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{B}^r f,t)}=\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.$$

Теорема 3.3.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq 1$, φ *— весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{\lambda_n^{2(r-s)}\cdot E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathscr{B}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\big(1-(1-t)^n\big)^{2m}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Отметим, что теоремы 3.3.1–3.3.3 в случае $s=0$ и $0<p\leq 2$ ранее непосредственным вычислением с привлечением теории бесселевских функций были доказаны в работе К.Тухлиева [24];

II. При $k(x)=1-x^2$, $p(x)=1$, $q(x)\equiv 0$, $a=-1$, $b=1$ из (25) получаем уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0,\ |u(\pm 1)|<\infty. \tag{40}$$

Известно [26], что полиномы Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big[(x^2-1)^n\big]$$

являются решением уравнения (41) с $\lambda=n(n+1)$, то есть $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными функциями, а числа $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}:=\{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными значениями оператора Лежандра $\mathscr{L}:=\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)$

в задаче (41). Для оператора Лежандра $\mathscr{L}$ приводим формулировку теорем 2.2.1–2.2.5 в следующем виде

Теорема 3.3.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{L}^r f)} = \frac{1}{\bigl[n(n+1)\bigr]^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.5. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда, при всех* $t \in (0,1)$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\bigl[n(n+1)\bigr]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{L}^r f; t)} = \frac{1}{\bigl[1-(1-t)^n\bigr]^m}.$$

Теорема 3.3.6. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$ *и* $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\bigl[n(n+1)\bigr]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{L}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \bigl[1-(1-t)^n\bigr]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

III. Дифференциальное уравнение Чебышева–Эрмита

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2} u = 0 \text{ или } \frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \lambda u = 0 \qquad (41)$$

из дифференциального уравнения (37) получается при $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $p(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

Решением дифференциального уравнения (42) является многочлен Чебышева–Эрмита [26] вида

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

с $\lambda = 2n$. Если ввести дифференциальный оператор Чебышева–Эрмита второго порядка

$$\Lambda := \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}, \qquad (42)$$

то, как показано в работах [13, 27], для произвольной функции $f \in L_2^r(\Lambda)$ справедливо равенство

$$\Omega_m\bigl(\Lambda^r f, t\bigr) := \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[1-(1-t^2)^{n/2}\bigr]^{2m} (2n)^{2r}.$$

Теоремы 2.2.1–2.2.5 для оператора Λ приобретают следующие формулировки:

Теорема 3.3.7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, *оператор* Λ *определён равенством* (43). *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{E_{n-1}(\Lambda^s f)}{E_{n-1}(\Lambda^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.8. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, t)} = \frac{1}{\left[1 - (1 - t^2)^{n/2}\right]^m}.$$

Теорема 3.3.9. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} \cdot E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\Lambda^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left[1 - (1 - t^2)^{n/2}\right]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Очевидно, что из теорем 3.3.8 и 3.3.9, соответственно при различных значениях $t \in (0, 1)$ и $h \in (0, 1]$, $q(t) = t$, можно вывести конкретные следствия. Так, из теоремы 3.3.8 при $t = \sqrt{2/n}$ получаем следующее асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, \sqrt{2/n})} = \frac{1}{\left[1 - \left(1 - (2/n)\right)^{n/2}\right]^m} \sim \frac{1}{\left(1 - e^{-1}\right)^m} = \left(\frac{e}{e - 1}\right)^m.$$

Из этого равенства сразу вытекает следующее неравенство типа Джексона–Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функции и ее последовательность производных $\Lambda^s f \in L_2$:

$$E_{n-1}(\Lambda^s f) \leq \left(\frac{e}{e - 1}\right)^m \cdot \frac{1}{(2n)^{r-s}} \cdot \Omega_m\left(\Lambda^r f, \sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

IV. Уравнение Чебышева–Лагерра

$$\frac{d}{dx}\left(x e^{-x} \frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x} u = 0 \text{ или } u'' + (1 - x)u' + \lambda u = 0 \tag{43}$$

соответствует $k(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$. Общее решение дифференциального уравнения (44) даётся полиномами Чебышева–Лагерра[26]:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right). \tag{44}$$

Легко проверить, что если полагать

$$\mathcal{L} := e^x \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}\right),$$

то собственными функциями операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = -\lambda u$$

являются многочлены (45), а собственными числами $\lambda_n = n$. Теоремы 2.2.3–2.2.5 в этом случае имеют место в следующих формулировках.

Теорема 3.3.10. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.11. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{L}^r f, t)} = \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m},\ t \in (0,1).$$

Теорема 3.3.12. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$, $q(t)$ *— весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

V. В завершение работы отметим, что аналогичные результаты можно формулировать и для многочленов Якоби, имеющих вид [26]

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right],$$

$\alpha, \beta > -1$ и удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0. \qquad (45)$$

Введя операторное обозначение

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]\frac{d}{dx},$$

уравнение (46) запишем

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}u + \lambda y = 0,\ \lambda = n(n+\alpha+\beta+1).$$

Теоремы 2.2.3–2.2.5 в этом случае формулируются следующим образом:

Теорема 3.3.13. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $\alpha, \beta > -1$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f)} = \frac{1}{\big[n(n+\alpha+\beta+1)\big]^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.14. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{\big[n(n+\alpha+\beta+1)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f, t)} = \frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m}.$$

Теорема 3.3.15. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $q(t)$ – *весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{\big[n(n+\alpha+\beta)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f, t) q(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}.$$

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов [3-А, 4-А, 5-А, 7-А, 8-А];
- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r$ и характеристикой гладкости Ω_m [1-А, 2-А, 8-А, 11-А];
- найдены точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H [1-А, 2-А, 6-А];
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности [1-А, 4-А, 5-А, 10-А, 11-А];
- найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных [2-А, 6-А, 9-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов учебных заведений по специальности “Математика” и “Прикладная математика” высших учебных заведений.

Список литературы

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[2] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[3] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.56. – №2. – С.1414–1427.

[4] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. – 2013. – Т.94. – №6. – С.908–917.

[5] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С.255–264.

[6] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. – № 3 (39). – С.5–13.

[7] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования. – 2018. – №4. – С.17–28.

[8] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве // Вестник науки и образования. – 2019. – №9 (63). – С.5–13.

[9] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. – №9 (39). – С.5–8.

[10] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теория приближения // Москва. Наука. – 1976.

[11] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[12] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье–Бесселя // Изв. вузов. Матем. – 2001. – №8. С.3–9.

[13] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье – Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Матем. – 2006. – №1. – С.3–12.

[14] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[15] Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева–Эрмита алгебраическими полиномами // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №2. – С.270–277.

[16] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Наука. – 1978.

[17] Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$ // УМН. – 2004. – Т.59. – Вып. 6. – С.201–202.

[18] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – 1976. – 325 С.

[19] Pinkus A. n-Widths by Approximation Theory // Berlin: Springer. – 1985.

[20] Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М.: Наука. – 1976. – 527 с.

[21] Butzer P.L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, functional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – V.29. – №4. – P.781–793.

[22] Вакарчук С.Б. О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2002. – Т.71. – № 5. – С.522–531.

[23] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2((1-x^2)^{-1/2};[-1,1])$ // Изв. ТулГу. – 2014. – №1. – Ч.1. – С.83–97.

[24] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Наука. – 1966. – 725 С.

[25] Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функции рядами Фурье-Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов // Чебышевский сборник. – 2016. – Т.17. – №4. – С.141–156.

[26] Суетин П.К. Классические ортогональные полиномы // М.: Наука. – 1979.

[27] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. – №5. – С.666–684.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №9-10. – С.508–515.

[2-А] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Известия НАН Таджикистана. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2022. – №4 (189). – С.35–46.

[3-А] Кодиров Д.А. О наилучшем приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 и некоторые применения к специальным функциям [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №7-8. – С.379–392.

В других изданиях:

[4-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучшего приближения некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Актуальные проблемы современной математики*", посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Т.Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С.121–123.

[5-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*", посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан и «Двадцатлетию изучения и развития естественных, точных и математических наук» (Худжанд, 2021 г.). – С.43–45.

[6-А] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в пространстве L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.78–81.

[7-А] Кодиров Д.А. О наилучшем совместном приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и её приложенрия*", посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (Душанбе, 27 мая 2022 г.). – С.4–8.

[8-А] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканский научно-практической конференции „*Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук*", (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.32–35.

[9-А] Кодиров Д.А. Приближение функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Современные проблемы математики*", посвященной 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С.101–104.

[10-А] Кодиров Д.А. О наилучших приближениях некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Современные проблемы математики и её преподавания*", посвященной 35-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию Конституции Республики Таджикистан, «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физико-математических наук К.Тухлиева. (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С.42–45.

[11-А] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение функций рядами Фурье по собственным функциям в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Математика в современном мире*", посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию доктора физико-математических наук С.Байзоева (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – С.156–160.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Қодиров Далер Абдушукурович

БАҲОДИҲИИ АНИҚИ СУРЪАТИ НАЗДИКШАВИИ ҚАТОРҲОИ ФУРЙЕ АЗ РУИ СИСТЕМАҲОИ ОРТОНОРМИРОНИДАШУДАИ ИХТИЁРӢ ДАР ФАЗОИ ГИЛБЕРТӢ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори фалсафа (PhD) – доктор аз руи ихтисоси 6D060100 – Математика:
6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

ДУШАНБЕ — 2025

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муққаризони расмӣ: **Исҳоқов Сулаймон Абунасрович,** узви вобастаи АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири шуъбаи назарияи функсияҳо ва таҳлили функсионалии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИТ

Қозиев Гулназар Мавлоназарович, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи математика дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Ҳимоя *17-уми сентябри соли 2025 соати 14:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА–011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз руйи нишонии 734027, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш.Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи маркази Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «_______________» соли 2025 аз руи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои
диссертатсионии 6D.КОА-011, номзади
илмҳои физикаю математика **Ғафоров А.Б.**

Муқаддима

Мубрамии мавзуи тадқиқот. Дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ характеристикаи асосии суфтагии функсияҳо модули бефосилагии худи функсия ё ҳосилаи тартиби додашудаи ба шумор меравад. Маълум аст, ки ҳангоми ёфтани баҳоҳои аниқи суръати наздиккшавии (наздиккунии беҳтарини) қаторҳои Фурйе ба воситаи системаи векторҳои ортонормиронидашудаи ихтиёри (дар ҳолати хусусӣ, аз руйи функсияҳои махсуси физикаю математикӣ) дар фазои гилбертӣ роли асосиро модули бефосилагии умумикардашуда мебозад. Вай ба мафҳумҳои бо ном «теоремаҳои ҷамъкунӣ» ва «теоремаҳои зарбкунӣ» барои системаи векторҳои ортогоналӣ дар фазои гилбертӣ вобаста аст. Дар ҳолати умумӣ, чунин теоремаҳо вуҷуд надоранд. Бо истифода аз баъзе далелҳои маъмул, дар ин кор муяссар гардид, ки модули бефосилагии умумикардашудаи функсия сохта шавад, ки он имконият дод суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хоси масъалаи Штурм–Лиувилл, инчунин аз руйи функсияҳои махсуси физикаи математикӣ (функсияҳои Бессел, бисёраъзогиҳои ортонормашудаи Лежандр, Чебишёв–Эрмит, Чебишёв–Лагерр, Якоби ва дигарҳо) баҳо дода шавад.

Бо мақсади ҳал кардани масъалаҳои экстремалӣ дар фазои ихтиёрии гилбертӣ оператори миёнгир (ғеҷиш) сохта шудааст, сипас, модули бефосилагии умумикардашудаи вектори ихтиёрии фазои гилбертӣ муайян карда шудааст, ки имконияти ёфтани сарҳади болоии суръати наздикшавии (наздиккунии беҳтарин)-и қаторҳои Фурйе аз руйи системаи векторҳои ортонормашуда дар фазои гилбертӣ медиҳад. Вобастагии байни суръати наздикшавӣ ва суфтагии векторҳо барқарор карда шуд, ки зарурати ҷорӣ намудани модули бефосилагии умумикардашударо дар фазои гилбертӣ тасдиқ мекунад.

Қайд кардан зарур аст, ки дар ҳолати функсияҳои 2π-даврӣ ба сифати оператори ғеҷиш дар корҳои В.А.Абилов ва Ф.В.Абилова [1], С.Б.Вакарчук ва В.И.Забутная [2], М.Ш.Шабозов ва Г.А.Юсупов [3], М.Ш.Шабозов ва К.Тухлиев [4], М.Ш.Шабозов ва А.А.Шабозова [5] оператори Стеклов истифода бурда шудааст. Дар корҳои Э.В.Селимханов [6, 7], Э.В.Селимханов ва Ф.В.Абилова [8, 9] масъалҳои ёфтани баҳои суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе дар фазои гилбертӣ тадқиқ карда шуда, баъзе теоремаҳои роста ва баръакси назарияи наздиккунӣ исбот карда шудаанд.

Дар диссертатсияи пешниҳодшуда бар хилофи корҳои дар боло зикршуда, масъалаи умумитар, яъне ёфтани баҳои аниқи наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо дар фазои гилбертӣ дида баромада мешавад ва татбиқи онҳо дар масъалаҳои муайян кардани суръати наздикшавии қаторҳои

Фурье аз руйи функсияҳои хоси масъалаи Штурм–Лиувилл ва инчунин аз руйи бисёраъзогиҳои классикии ортогоналӣ пешниҳод мегардад.

Дараҷаи кор карда баромадани мавзуи тадқиқот. Назарияи умумии наздиккунии беҳтарин дар ихтиёри фазои нормиронидашуда хуб таҳия шудааст ва дар чунин фазоҳо элементи наздиккунии беҳтарин ҳамеша мавҷуд аст. Ҳамзамон, агар фазо қатъӣ нормиронидашуда бошад, он гоҳ элементи наздиккунии беҳтарин ягона аст [10]. Дар кори диссертатсионӣ наздиккунии беҳтарин ва суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортонормиронидашуда дар фазои гилбертӣ омухта шуда, татбиқи натиҷаҳои бадастовардашуда барои баҳои суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хоси масъалаи Штурм–Лиувилл пешниҳод шудааст. Ин масъала аз руйи нуқтаи назари масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарин ва ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин дар марҳилаи рушд қарор дорад. Баъзе баҳоҳои асимптотикӣ дар ин самт дар корҳои В.А. Абилов ва шогирдонаш [11–13] ба даст оварда шудаанд. Дар ҳолате, ки функсия аз руйии бисёраъзогиҳои ортонормиронидашудаи Чебишёви навъи якум дар фазои $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}, [-1,1])$ ҷудо карда мешавад, масъалаи мураттабшуда дар кори М.Ш.Шабозов ва К.Тухлиев баррасӣ карда шудааст [14]. Баъзе баҳоҳои аниқи суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руйи бисёраъзогиҳои Чебишёв–Эрмит дар кори К.Тухлиев ва А.М.Туйчиев [15] ёфта шудаанд.

Робитаи кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи дурнамои нақшаи илмӣ-таҳқиқотии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзӯи “Назарияи наздиккунии функсияҳо” иҷро карда шудааст.

Тавсифи умумии кор

Мақсади тадқиқот. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ, ки бо ёфтани қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин ба воситаи қаторҳои Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортогоналӣ дар фазои гилбертӣ ва татбиқи онҳо дар қаторҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл мебошад.

Масъалаҳои тадқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зерин ҷудо карда мешаванд:

- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо ба воситаи суммаи Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортонормиронидашуда ёфта шаванд;

- доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^r(A)$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m ёфта шаванд;
- қиматҳои аниқи n-қутрҳои баъзе синфи векторҳо дар фазои гилбертии H ёфта шаванд;
- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд, ёфта шаванд;
- нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ба воситаи ҳам модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионал аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешаванд, ёфта шаванд.

Объекти таҳқиқот. Объекти тадқиқот масъалаҳои гуногуни экстремалие мебошанд, ки бо наздиккунии беҳтарини синфҳои векторҳо дар фазои гилбертӣ ва татбиқи онҳо дар масъалаи Штурм–Лиувилл алоқамандан.

Предмети тадқиқот. Предмети тадқиқот ин ёфтани сарҳадҳои болоии наздиккунии беҳтарини синфҳои векторҳо дар фазои гилбертӣ ва татбиқи онҳо дар ёфтани баҳоҳои аниқи суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руи қиматҳои хоси масъалаи Штури–Лиувилл мебошад.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо ба воситаи суммаи Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортонормиронидашуда ёфта шуданд;
- доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^r(A)$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m ёфта шуданд;
- қиматҳои аниқи n-қутрҳои баъзе синфи векторҳо дар фазои гилбертии H ёфта шуданд;
- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ба воситаи ҳам модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионал аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешаванд, ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалӣ. Кори диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошад. Натичаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда ва усулҳои исботи онҳоро дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи қаторҳои ортогоналӣ истифода бурдан мумкин аст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оид ба қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо ба воситаи суммаи Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортонормалӣ;
- теоремаҳо оид ба доимии аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^r(A)$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n-қутрҳои баъзе синфи векторҳо дар фазои гилбертии H;
- теоремаҳо оид ба қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд;
- теоремаҳо оид ба нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ба воситаи ҳам модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионал аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешаванд.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кори диссертатсионӣ бо исботи дақиқи математикии ҳамаи теоремаҳои дар диссертатсия овардашуда таъмин карда мешавад ва ҳамзамон бо тадқиқотҳои муаллифони дигар тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқатии рисола ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз руйи ихтисоси 01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ иҷро карда шудааст ва қисмате аз таҳлили математикӣ мебошад, ки дар банди III, параграфи 3-и шиносномаи ихтисоси илмӣ зикр шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои тадқиқот ва интихоби усули ҳалли онҳо аз ҷониби роҳбари илмӣ муайян карда шудаанд ва ҳамзамон машваратҳои илмӣ низ расониданд. Натиҷаҳои асосие, ки дар қисмати «Навоварии илмӣ» оварда шудаанд, шуданд, шахсан аз тарафи худи муаллиф ба даст гирифта шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардиданд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМИТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2019-2024);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои актуалии математикаи муосир», (Душанбе, 25-26 июни соли 2021);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири математикаи амалӣ ва нақши онҳо дар ташаккули чаҳонбинии техникии ҷомеа» (Хуҷанд, 29-30 октябри соли 2021);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи онҳо» (Душанбе, 27 майи соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявии «Масъалаҳои актуалӣ ва дурнамои инкишофи илмҳои табиатшиносӣ ва дақиқ» (Душанбе, 28-29 октябри соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо» (Душанбе, 24-25 июни соли 2022);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика» (Душанбе, 26-27 майи соли 2023).
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Математика дар замони муосир» (Хуҷанд, 19-20 апрели соли 2024);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Масъалаҳои муосири математика ва таълими он» (Хуҷанд, 21-22 июни соли 2024).

Интишорот аз руйи мавзуи рисола. Натиҷаҳои тадқиқотии муаллиф оид ба мавзуи кори диссертатсионӣ дар 11 мақолаи илмӣ ба табъ расидааст, ки аз онҳо 3 мақола дар нашрияҳое, ки ба руйихати амалкунандаи Комиссияи олии аттестатсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон дохиланд ва 8 мақола дар маҷаллаҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ нашр гардидаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 133 номгӯй ва ҳамагӣ 142 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории умумии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст. Онҳо рақамгузории секарата доранд, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

МУҲТАВОИ МУХТАСАРИ ДИССЕРТАТСИЯ

Натиҷаҳои тадқиқот. Муҳтавои кутоҳи рисоларо бо таърифи натиҷаҳои асосӣ пешниҳод мекунем.

Дар муқаддима тавсифи кутоҳи масъалаи экстремалии тадқиқшуда, баррасии таърихии функсияҳои даврии комплексӣ ва таҳияи натиҷаҳои пешакӣ оварда мешаванд.

Дар фасли аввали кори диссертатсионӣ манбаъҳои адабӣ оид ба мавзуи тадқиқот таҳлил шуда, масъалаҳои экстремалии ҳалнашуда вобаста ба мавзуи тадқиқшаванда оварда мешаванд.

Дар фасли дуюм баҳои аниқи суръати наздикшавии (наздиккунии беҳтарини) қаторҳои Фурйе ба воситаи векторҳои хусусии як оператори симметрӣ дар фазои гилбертӣ оварда шудааст. Бо истифода аз далелҳои маълум модули бефосилагии умумикардашудаи вектори ихтиёрӣ дар фазои гилбертӣ сохта мешавад, ки он имкон медиҳад, баҳои аниқи суръати наздикшавии (наздиккунии беҳтарини) қаторҳои Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортогоналӣ тартиб дода шудааст. Бо ёрии оператори симметрӣ дар фазои гилбертӣ аналоги синфи функсияҳои дифференсиронидашаванда, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд дохил карда шуда, дар ин синфи функсияҳо баҳои аниқи суръати наздикшавии (бузургии наздиккунии беҳтарини) қаторҳои Фурйе аз руйи векторҳои хоси ин оператор муайян карда шудааст. Натиҷаҳои бадастомада дар ҷудокунии функсияҳо ба қаторҳои Фурйе бар асоси системаҳои ортонормиронидашудаи бисёраъзогиҳои Чебишёв–Эрмит, Чебишёв–Лагерр, Якоби, функсияҳои Бессел ва ғайраҳо муфассал карда мешаванд. Ғайр аз ин, дар параграфи охирини фасли мазкур қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни синфи векторҳо дар фазои гилбертӣ ҳисоб карда шудаанд.

Дар параграфи якуми фасли дуюм таърифҳои асосӣ ва фактҳои ёрирасон оварда шудаанд

Бигузор H — ихтиёри фазои гилбертии ҳақиқии сепарабелӣ бо зарби скалярии (f, g) векторҳои $f, g \in H$ бошад ва $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ — нормаи вектори $f \in H$. Агар $\{f_k\}$ — системаи ортонормиронидашудаи пурра дар фазои H бошад, он гоҳ, чи хеле ки маълум аст, қатори Фурйеи вектори $f \in H$ намуди зеринро дорад:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) f_k, \quad c_k(f) = (f, f_k), \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Бо символи

$$S_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) f_k, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

суммаи хусусии тартиби n-уми қатори (1) ишора мекунем.

Бигузор $\mathcal{P}_n$ – маҷмуи «бисёраъзогиҳои» умумикардашудаи намуди

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+ \tag{3}$$

бошад. Бо баробарии

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\| :\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} \tag{4}$$

наздиккунии беҳтарини вектори $f \in H$-ро аз руйи элементҳои зерфазои $\mathcal{P}_{n-1}$ муайян мекунем.

Ошкор аст [16], ки миёни ҳамаи бисёраъзогиҳои $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ қимати хурдтарини бузургии (4)-ро суммаи n аъзои аввали (2) доро мешавад. Барои ҳамин

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2} \tag{5}$$

мешавад. Дар фазои H оператори ғеҷиш $F_h : H \to H$-ро чунин муайян мекунем:

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) f_k, \quad h \in (0,1). \tag{6}$$

Ошкор аст, ки барои ҳаргуна ду вектори $f, g \in H$ ва $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ барои оператори ғеҷиш (6) баробариҳои зерин ҷой дорад:

1) $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g);$ 2) $\|F_h f\| \le \|f\|;$

3) $F_h f_n = (1-h)^n f_n;$ 4) $\|F_h f - f\| \to 0,\ h \to 0+ .$

Акнун фарқиятҳои охирноки тартиби якум ва олиро ба монанди ҳолати классикӣ бо баробариҳои зерин муайян мекунем:

$$\triangle_h f = F_h f - f = (F_h - E) f,$$

$$\triangle_h^m f = \triangle_h(\triangle_h^{m-1} f) = (F_h - E)^m f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f,$$

ки дар ин ҷо $F_h^0 f = f,\ F_h^k f = F_h(F_h^{k-1} f),\ k = 1, 2, \ldots, m;\ m \in \mathbb{N};\ E$ — оператори воҳидӣ дар фазои H мебошад. Бузургии

$$\Omega_m(f, t) = \sup\left\{\|\triangle_h^m f\| :\ 0 < h \le t\right\},\ m \in \mathbb{N} \tag{7}$$

модули бефосилагии умумикардашудаи вектори $f \in H$ номида мешавад.

Намуди ошкори модули бефосилагии (7)-ро меёбем. Баробариҳои (1) ва (6)-ро истифода бурда, менависем:

$$\triangle_h f = F_h f - f = -\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)c_k(f)f_k$$

ва дар асоси индуксияи математикӣ барои ҳаргуна $m \in \mathbb{N}$ меёбем:

$$\triangle_h^m f = (F_h - E)^m f = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^m c_k(f)f_k.$$

Аз ин ҷо, дар асоси ортонормиронида будани системаи векторҳои $\{f_k\}$ ҳосил мекунем [6]

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f)$$

ва бинобар ин аз (7) мебарояд, ки

$$\Omega_m^2(f,t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f) : 0 < h \le t\right\}. \tag{8}$$

Азбаски

$$\sup\{(1-(1-h)^k) : 0 < h \le t\} = (1-(1-t)^k),$$

он гоҳ аз (8) ҳосил мекунем:

$$\Omega_m^2(f,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^m c_k^2(f). \tag{9}$$

Бигузор $A : H \to H$ — оператори симметрӣ дар фазои H бошад, яъне операторе, ки дар як бисёршаклии хаттии $\mathscr{L}(A) \subset H$ дода шудааст ва барои ҳаргуна $f, g \in \mathscr{L}(A)$ шарти $(Af, g) = (f, Ag)$-ро қаноат мекунад.

Дар ҳамаи мавридҳои минбаъда таҳти пуррагии системаи ортонормиронидашудаи векторҳои хоси оператори A маънои зеринро дар назар дорем:

1) Векторҳои хоси оператори A – ин чунин векторҳои u_i мебошанд, ки барояшон баробарии $Au_i = \lambda_i u_i$ иҷро мешавад, дар ин ҷо λ_i – қиматҳои хоси векторҳои мувофиқи u_i мебошанд.

2) Ортонормиронидашуда маънои онро дорад, ки векторҳои хоси $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ системаи ортонормиронидашудаи $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_+)$-ро ташкил медиҳанд, ки δ_{ij} — символи Кронекер $\delta_{ij} := \big\{1, \text{ если } i = j, \ \ 0, \text{если } i \neq j\big\}$ $i, j = 0, 1, \ldots$ мебошад.

3) Пуррагӣ маънои онро дорад, ки системаи ортонормалии векторҳои хоси $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ дар фазое, ки оператори A амал мекунад, базаро ташкил медиҳад. Ин маънои онро дорад, ки ҳама гуна вектори u дар чунин фазо аз руйи ин векторҳои хос

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}c_iv_i$$

ҷудо карда мешавад.

Фарз мекунем, ки оператори A системаи пурраи ортонормиронидашудаи векторҳои хоси $\{f_n\}$-ро дорад, ки ба қиматҳои хусусии λ_n мувофиқат мекунад:

$$Af_n=\lambda_nf_n,\ n\in\mathbb{Z}_+,$$

ҳамзамон

$$0\le\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots.$$

Дар ин ҳолат аз баробарии (1) мебарояд, ки

$$Af=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_kc_k(f)f_k. \tag{10}$$

Агар барои $r\in\mathbb{Z}_+$ $A^0f=If=f,\ A^rf=A(A^{r-1}f), r\in\mathbb{N}$ гузорем, он гоҳ баробарии (10)-ро истифода бурда, дар асоси хаттӣ будани оператори A пай дар пай меёбем:

$$A^rf:=A(A^{r-1}f)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^rc_k(f)f_k,\ r\in\mathbb{N}.$$

Ғайр аз ин, бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$E_{n-1}^2(A^rf)=\left\|A^rf-S_{n-1}(A^rf)\right\|=\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k^rc_k(f)f_k\right\|=\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k^{2r}c_k^2(f),$$

$$\Omega_m^2(A^rf;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-t)^k\right)^{2m}c_k^2(A^rf)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-t)^k\right)^{2m}\lambda_k^{2r}c_k^2(f). \tag{11}$$

Дар параграфи дуюми фасли дуюм баъзе натиҷаҳои пешакӣ оварда шудаанд. Дар мавридҳои минбаъда бо $H^r(A),\ r\in\mathbb{Z}_+$ синфи векторҳои $f\in H$-ро ишора мекунем, ки барои онҳо $A^rf\in H$ аст. Теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор* $n \in \mathbb{N}$. *Он гоҳ барои ихтиёри* $r \in \mathbb{Z}_+$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^r}\,. \tag{12}$$

Бигузор $W^{(r)}(A) := WH^{(r)}(A)$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ — синфи векторҳои $f \in H^{(r)}$, ки барояшон $\|A^r f\| \le 1$ аст. Он гоҳ теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.2.2. *Барои ҳаргуна* $n \in \mathbb{N}$ *ва* $r \in \mathbb{Z}_+$ *баробарии*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(A)) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(A)\right\} = \frac{1}{\lambda_n^r}$$

ҷой дорад.

Баёноти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.2.3. *Бигузор* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0,1]$. *Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{13}$$

Ҳолати $r = 0$ будан, баробарии (13) дар кори илмии Э.В.Селимханов ва Ф.В.Абилова [8] оварда шудааст.

Аз теоремаи 2.2.3 якбора мебарояд

Натиҷаи 2.2.1. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи* 2.2.3 *баробарии*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; 1/n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = (1 - e^{-1})^{-m}$$

ҷой дорад.

Аз баробарии экстремалии ҳосилшуда нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}(f)$ ва модули бефосилагии тартиби m-ум $\Omega_m(A^r f, t)$ дар нуқтаи $t = 1/n$-ро ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\lambda_n^r}(1 - e^{-1})^{-m}\omega_m\left(A^r f; \frac{1}{n}\right).$$

Дар оянда ба сифати функсияи вазнӣ дар сегменти $(0, h]$ функсияи ба нол эквивалент набудаи q-ро дар ин сегмент ишора мекунем.

Теоремаи 2.2.4. *Бигузор* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1]$, q — *функсияи вазнӣ дар порчаи* $(0, h]$ *бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}$$

ҷой дорад.

Ду натиҷаи дар поён овардашуда, аз теоремаи 2.2.4 мебароянд, ки мувофиқан ду ҳолати хусусӣ: а) $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ ва б) $q \equiv 1$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$-ро дар бар мегиранд.

Натиҷаи 2.2.2. *Ифодаҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{f\in H^r} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f, t) q(t) dt\right\}^m} = \frac{1}{\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]\varphi(t)dt\right\}^m},$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, *функсияи* q *ва бузургии* h *шартҳои теоремаи* 2.2.4*-ро қаноат мекунад.*

Натиҷаи 2.2.3. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, $q(t) \equiv 1$ *бошанд. Он гоҳ баробарии*

$$\sup_{f\in H^r} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f, t) dt\right\}^m} = \Big\{(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}\Big\}^{-m}$$

ҷой дорад.

Дар баробарии ҳосилшуда $h = 1/(n+1)$ ва $r = 0$ гузошта, яке аз натиҷаҳои асосии кори М.В.Абилов ва Г.А.Айгунов [17]-ро дар ҳолати якченака ҳосил мекунем ва умуман баробарии

$$\sup_{f\in H^r} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f, t) dt\right\}^m} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)m}$$

ҳосил мекунем. Аз ин баробарӣ ифодаи ҳудудии

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in H} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f, t) dt\right\}^m} = e^m$$

мебарояд. Аз ин ҷо, дар навбати худ, нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин бо доимии ошкор мебарояд

$$E_{n-1}(f) \le e^m\, \Omega_m\left(f, \frac{1}{n+1}\right).$$

Ба сифати татбиқи теоремаи 2.2.4 масъалаи экстремалии зеринро дида мебароем:агар $\mathfrak{M}^{(r)} \subset H^r(A)$ ихтиёри зерсинфи векторҳо бошад, он гоҳ ёфтани бузургии

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\big\} \tag{14}$$

талаб карда мешавад. Бузургии (14) сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини синфи векторҳои $\mathfrak{M}^{(r)}$-ро дар фазои H муайян мекунад.

Ба сифати синфи векторҳои $\mathfrak{M}^{(r)}$ синфи векторҳои $W_p^{(r)}(\Omega_m; q) \in H^{(r)}(A)$–ро барои ҳамаи $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1)$ дида мебароем, ки $q(t)$ — функсияи вазнии шарти зеринро қаноаткунанда мебошад:

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t)q(t)dt\right)^{1/p} \le 1.$$

Теоремаи 2.2.5. *Баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Omega_q; q)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Аз теоремаи 2.2.5 ҳосил мекунем:

Натиҷаи 2.2.4. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 2.2.5 *дар ҳолати*

$$g_*(t) = n(1-t)^{n-1} = \frac{d}{dt}\Big[1-(1-t)^n\Big]$$

будан, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) = \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot\left\{\frac{mp+1}{\big[1-(1-h)^n\big]^{mp+1}}\right\}^{1/p} \tag{15}$$

ва дар ҳолати хусусӣ, барои $p = 1/m$, $h = 1/n$ *аз* (15) *мебарояд, ки*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^r\,\mathcal{E}_{n-1}\big(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{2}{[1-(1-(1/n))^n]^2}\right\}^m = \frac{2^m}{\big(1-e^{-1}\big)^{2m}}.$$

Ҳамин тариқ, дар ҳолати хусусӣ

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) \sim \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot\frac{2^m}{\big(1-e^{-1}\big)^{2m}}.$$

Дар параграфи сеюм натиҷаҳои параграфи дуюми фасли дуюм ва баъзе натиҷаҳои дигар умумӣ карда мешаванд. Дар фазои H оператори ғеҷиш $F_h : H \to H$ – ро бо баробарии

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(h) c_k(f) f_k, \tag{16}$$

дохил мекунем, ки дар ин ҷо $\varphi_k(h)$ $(k \in \mathbb{Z}_+, 0 < h \leq 1)$ — функсияҳои ғайриманфии монотони камшаванда буда, шартҳои зеринро қаноат мекунанд:

$$\varphi_k(h) \not\equiv const, \;\; 0 \leq \varphi_k(h) \leq 1, \; \varphi_k(h) \geq \varphi_{k+1}(h).$$

Аз ҷудокунии вектори $f \in H$ ба қатори Фурйе (1) ва намуди умумии оператори ғеҷиш (16) истифода бурда, намуди ошкори фарқҳои охирнокро ва модули бефосилагии умумикардашудаи (7)-ро меёбем:

$$\triangle_h f = F_h(f - \mathbb{I}) = -\sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big) c_k(f) f_k$$

ва дар асоси индуксияи математикӣ барои ҳаргуна $m \in \mathbb{N}$ менависем:

$$\triangle_h^m f = (F_h - \mathbb{I})^m f = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^m c_k(f) f_k. \tag{17}$$

Баробарии Парсевалро истифода бурда, дар асоси ортонормиронидашуда будани системаи векторҳои $\{f_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ аз (17) ҳосил мекунем:

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{18}$$

Ҳамин тариқ, дар асоси баробарии (18), модули бефосилагии (7) намуди зеринро мегирад:

$$\Omega_m(f, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{19}$$

Бигузор $A : H \to H$ — оператори симметрӣ дар фазои H бошад. Он гоҳ, ба монанди параграфи гузашта, барои ҳаргуна $s = 0, 1, 2, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ дар асоси ҳисобкуниҳои пай дар пай бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$E_{n-1}^2(A^s f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f),$$

$$\Omega_m^2(A^r f;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1-\varphi_k(t)\big)^{2m} \cdot \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{20}$$

Бигузор $H^{(r)}(A)$, $r \in \mathbb{N}$, ба монанди гузоришҳои боло $f \in H$ синфи векторҳое, ки барояшон $A^r f \in H$ мебошад. Тасдиқоти зерин ҷой дорад, ки шакли умумии теоремы 2.2.1 мебошад.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Аз теоремаи 2.3.1 барои синфи $W^{(r)}(A)$ мутобиқи нақшаи исботи теоремаи 2.2.2 тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 2.3.2. *Барои ҳаргуна $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq s$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(A)) = \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f \in W^{(r)}(A)\right\} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Теоремаи 2.3.3. *Бигузор $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, A — оператори симметрие мебошад, ки дорои системаи векторҳои пурра ортонормиронидашудаи $\{f_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$ мебошад, ки ба қиматҳои хоси $\{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$ мувофиқ аст. Он гоҳ барои ихтиёри вектори $f \in H^{(r)}(A)$ нобаробарии намуди Колмогоров*

$$\|A^s f\| \leq \|f\|^{1-s/r} \cdot \|A^r f\|^{s/r} \tag{21}$$

ҷой дорад. Нобаробарии (21) беҳтарнашаванда бо он маъно аст, ки чунин вектори $f_0 \in H^{(r)}(A)$ мавҷуд аст, ки барояш (21) ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Аз теоремаи 2.3.3 ҳосил мекунем.

Натиҷаи 2.3.1. *Бо иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.3.3 нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}(A^s f)_2 \leq \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r} \big(E_{n-1}(A^r f)\big)^{s/r}.$$

Дар параграфи 2.2 ба воситаи $W^r(A)$ синфи векторҳои $f \in H^{(r)}(A)$-ро ишора карда будем, ки барояшон $\|A^r f\| \leq 1$ мебошад. Барои чунин синфи векторҳо тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.3.4. *Барои ҳаргуна $0 \leq s \leq r$ баробарии*

$$\sup_{f \in W^r(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{\big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}} = 1$$

ҷой дорад.

Дар параграфи чорум масъалаи экстремалии ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^{(r)}(A)$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m омӯхта мешавад. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t < 1$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{\big(1 - \varphi_n(t)\big)^m}. \tag{22}$$

Қайд мекунем, ки теоремаи 2.4.1 наздиккунии якҷояи беҳтарини векторҳои f ва ҳамаи пайдарпайиҳои Af, $A^2 f, \ldots, A^s f$-ро дар фазои гилбертии векторҳои H механарактеризонад, ки барояшон $\|A^r f\| < \infty$ аст. Ин теорема имконият навиштани нобаробарии Ҷексон–Стечкинро байни бузургии $E_{n-1}(A^s f)$ ва модули бефосилагии $\Omega_m(A^r f, t)$ медиҳад, яъне

$$E_{n-1}(A^s f) \leq C(n, m, r, s; \varphi_n) \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \cdot \Omega_m(A^r f, 1/n).$$

Дар ҳақиқат, аз баробарии (22) барои ҳаргуна $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t < 1$ ва ихтиёри вектори $f \in H^r(A)$ нобаробарии

$$E_{n-1}(A^s f) \leq \big(1 - \varphi_n(t)\big)^{-m} \lambda_n^{-(r-s)} \Omega_m(A^r f; t) \tag{23}$$

мебарояд. Дар тарафи рости (23) $t = 1/n$ гузошта, нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкинро дар шакли

$$E_{n-1}(A^s f) \leq \big(1 - \varphi(1/n)\big)^{-m} \lambda_n^{-(r-s)} \Omega_m(A^r f; 1/n) \tag{24}$$

бо доимии ошкори $C(n, m, r, s; \varphi_n) = (1 - \varphi(1/n))^{-m}$ ҳосил мекунем.

Агар функсияи $\varphi_n(t)$ пешакӣ дода шуда бошад, он гоҳ доимии $C(n, m, r, s; \varphi_n)$-ро аниқ кардан мумкин аст. Масалан, агар $\varphi_n(t) = (1 - t)^n$ бошад, он гоҳ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} C(n, m, r, s; \varphi_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = \big(1 - e^{-1}\big)^{-m}$$

мебошад, ки онро мо дар параграфи 2.2 ҳисоб карда будем.

Тасдиқоти умумитари зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.2. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$ ва $q(t)$ — функсияи вазнӣ дар порчаи $[0, h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой драд:*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \big(1 - \varphi_n(h)\big)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{25}$$

Таърифи характеристикаи суфтагии (20)-ро истифода бурда, дар параграфи 2.2 мо синфи векторҳои $W_p^{(r)}(\Omega_m, q)$-ро дохил карда будем, ки дар ин ҷо $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, q — функсияи вазнӣ дар $[0, h]$ мебошад, ки ба $H^{(r)}(A)$ тааллуқ дошта, шарти

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt \leq 1$$

-ро қаноат мекунонад.

Дар ин ҷо талаб карда мешавад, ки барои ҳаргуна $m, n \in \mathbb{N}$ ва ихтиёрӣ s $(0 \leq s \leq r)$ бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) = \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q)\right\} \tag{26}$$

ёфта шавад.

Теоремаи 2.4.3. *Баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) = \lambda_n^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Натиҷаи 2.4.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 2.4.3 *барои* $q(t) := q_*(t) = -\varphi_n'(t) > 0$, $0 \leq t \leq h$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)) = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{(1 - \varphi_n(h))^{m+1/p}}{(mp+1)^{1/p}}\right\}^{-1/p}.$$

Параграфи панҷуми фасли дуюм ба ҳисоб кардани қимати қутрҳои баъзе синфи векторҳо бахшида шудааст. Пеш аз овардани натиҷаҳои ин параграф, баъзе мафҳумҳои ва таърифҳоро дохил мекунем. Бигузор H — фазои гилбертии векторҳо, $\mathbb{S}$ — курраи воҳидӣ дар H; Q — маҷмуи марказӣ-симметрӣ аз H; $\Lambda_n \subset H$ — фазои n-ченака; $\Lambda^n \subset H$ — зерфазои коченакаи n; $\mathcal{L} : H \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосила; $\mathcal{L}^\perp : H \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосилаи проектиронӣ. Бузургиҳои [18, 19]

$$\begin{gathered}
b_n(Q, H) := \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon\mathbb{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset H\right\}, \\
d_n(Q, H) := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} : \Lambda_n \subset H\right\}, \\
\delta_n(Q, H) := \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\| : f \in Q\right\} : \mathcal{L}H \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H\right\}, \\
d^n(Q, H) := \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset H\right\}, \\
\Pi_n(Q, H) := \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in Q\right\} : \mathcal{L}^\perp H \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H\right\}
\end{gathered}$$

мувофиқан *n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ, проексионии* маҷмуи Q дар фазои H номида мешаванд. Азбаски H фазои гилбертӣ мебошад, он гоҳ байни бузургиҳои номбаршуда муносибатҳои зерин ҷой доранд:

$$b_n(Q,H) \le d^n(Q,H) \le d_n(Q,H) = \delta_n(Q,H) = \Pi_n(Q,H).$$

Синфи векторҳоеро ворид мекунем, ки бароишон қимати аниқи n-қутрҳои дар боло воридшударо дар фазои гилбертии H ҳисоб мекунем:

$W^r(A) := \big\{f \in H^r(A) : \|A^r f\| \le 1\big\}$;

$W^r_m(A,\Phi)$ — синфи векторҳои $f \in H^r(A)$, ки бароишон

$$\Omega_m(A^r f; t) \le \Phi(t), \ \ m \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+,$$

дар ин ҷо $\Phi(t)$ — функсияи ғайриманфии монотони афзуншаванда дар $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ мебошад, ки $\Phi(0) = 0$ аст;

$W^r(\Omega_m; q)$ — синфи векторҳои $f \in H^r(A)$, ки шарти зеринро қаноат мекунонанд:

$$\int\limits_0^h \Omega^p_m(A^r f, t) q(t) dt \le 1.$$

Натиҷаи теоремаи 2.2.1 имконият медиҳад, ки теоремаи зеринро барои синфи векторҳои $W^r(A)$ дар параграфи 2.2 дохилкардашударо исбот намоем.

Теоремаи 2.5.1. *Бигузор $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Он гоҳ баробарии*

$$\rho\big(W^r(A), H\big) = \lambda_n^{-r} \tag{27}$$

ҷой дорад, ки $\rho_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳо: бернштейнӣ $b_n(\cdot)$, колмогоровӣ $d_n(\cdot)$, гелфандӣ $d^n(\cdot)$, хаттӣ $\delta_n(\cdot)$ ва проексионӣ $\Pi_n(\cdot)$ мебошад.

Теоремаи 2.5.2. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\rho_n\big(W^r_m(A,\Phi), H\big) = \lambda_n^{-r}\big[1-(1-h)^n\big]^{-k}\Phi(h), \tag{28}$$

ки дар ин ҷо $\rho_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳои $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ ё $\Pi_n(\cdot)$ мебошад.

Инчунин тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.5.3. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1)$, q — функсияи вазнӣ дар $(0,h)$ бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\rho_n(W^r(\Omega_m, q), H) = E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) = \lambda_n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо

$$E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^r(\Omega_m, q)\right\},$$

ва $\rho_n(\cdot)$ *— ихтиёри аз қутрҳои* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *ва* $\Pi_n(\cdot)$ *мебошад.*

Дар параграфи ниҳоии шашуми боби дуюм бо мақсади муқоиса кардани теоремаи умумии 2.4.2 ва татбиқи он баъзе натиҷаҳо оид ба наздиккунии беҳтарини функсияҳо дар тамоми тири ададӣ тавассути суммаҳои қатор, ки аз руйи бисёраъзогиҳои ортогоналии Чебишёв–Эрмит ҷудо шудаанд, тасвир ёфтаанд.

Дар фасли сеюм қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хоси масъалаи Штурм–Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд, ҳисоб карда шудаанд. Дар ин фасл инчунин нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ҳам бавоситаи модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионалҳо аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешавад, ёфта шудаанд.

Мақсади асосии ин фасл татбиқи теоремаҳои дар фасли дуюм исботкардашуда ба оператори Штурм–Лиувилл мебошад ва дар ҳолати хусусӣ татбиқи онҳо дар наздиккунии беҳтарини функсияҳо, ки дар соҳаҳои мувофиқ аз руйи бисёраъзогиҳои ортогоналии классикӣ (Чебишев–Лагерр, Чебишев–Эрмит, Якоби ва ғайраҳо) ҷудо шудаанд, нишон дода мешавад. Инчунин қимати аниқи n-қутрҳои гуногун барои синфи функсияҳое, ки ҳангоми ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар теоремаҳои 3.1.1, 3.1.2 ва 3.2.2 пайдо шуданд, ҳисоб карда мешаванд. Синфҳои нишондодашуда, бо он муайян карда мешаванд, ки $\mathscr{K}$-функсионали ҳосилаи тартиби r-уми онҳо аз боло бо мажорантаи додашудаи Φ маҳдуд мебошад.

Дар параграфи якуми фасли сеюм наздиккунии беҳтарини функсияҳо ба тавассусти қаторҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл дар фазои L_2 ёфта шудаанд.

Бигузор

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)}\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)\right) - \tag{29}$$

оператори дифференсиалии тартиби дуюми Штурм–Лиувилл бошад, ки функсияҳои $p, q \in C[a,b]$, $k \in C^1[a,b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ барои ҳаргуна $x \in [a,b]$ мебошад.

Хотиррасон мекунем [20], ки масъалаи Штурм–Лиувилл аз ёфтани ҳалли муодилаи

$$\mathcal{D}[u] = \lambda u, \tag{30}$$

дар сегманти $[a,b]$ мебошад, ки шартҳои якҷинсаи канории

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$
$$\gamma u(b) + \mu u'(b) = 0, \quad \gamma^2 + \mu^2 \neq 0 \tag{31}$$

қаноат мекунонанд. Бояд ба назар гирифта шавад, ки соҳаи муайянии оператори $\mathcal{D}$ аз функсияҳои $u(x)$ синфи

$$C^{(2)}(a,b) \cap C^{(1)}(a,b), \quad u''(x) \in L_2(a,b),$$

иборат аст, ки шартҳои (31)-ро қаноат мекунонад.

Пеш аз он ки теоремаҳои дар параграфҳои 2.3 ва 2.4-и боби дуюм исбот шударо ба оператори Штурм–Лиувилл ва ҳолатҳои махсуси он, ба монанди ҷудокунӣ аз руйи функсияҳои хоси масъалаҳои канории навъи Штурм–Лиувилл бо истифода аз бисёраъзогиҳои ортогоналии классикӣ (Чебишев–Лагерр, Чебишев–Эрмит, Якобӣ ва ғайра) татбиқ карда шаванд, лозим аст исбот карда шавад, ки оператори Штурм–Лиувилл, ки бо баробарии (29) муайян шудааст, оператори симметрӣ мебошад. Симметри будани оператори (29) дар параграфи якуми ҳамин боб исбот карда шудааст.

Ошкор аст, ки масъалаи гузошташудаи Штурм-Ливулл (30) – (31) ҳамеша ҳалли нулӣ дорад, ки на он қадар диққатҷалбкунанда аст ва бинобар ҳамин масъалаҳои (30) – (31)-ро ҳамчун масъала доир қимати хоси оператор $\mathcal{D}$ дида баромада шавад. Ҳалҳои ҷустуҷушудаи ғайритривиалӣ функсияҳои хусусии ин масъала номида мешаванд ва қиматҳои λ, ки барояшон ҳал мавҷуд аст, қиматҳои хусусии он номида мешаванд. Хосиятҳои зерини қиматҳои хусусӣ ва функсияи хусусии оператори $\mathcal{D}$ маълум мебошанд:

1) маҷмуи ҳисобии қиматҳои хусусии $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots$$

мавҷуд мебошанд;

2) барои ҳар яки қимати хусусии λ_n ягона функсияи хусусии $u_n(x)$ бо саҳеҳии то зарбшавандаи доимӣ мувофиқат мекунад;

3) функсияҳои хусусии $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ дар порчаи $[a,b]$ системаи ортогоналии бо вазни $p(x)$-ро ташкил медиҳанд

$$\int\limits_a^b p(x)u_k(x)u_n(x)dx = 0, \; n \neq k,$$

ки мувофиқи хосияти 2 онро ортонормиронидашуда фарз кардан мумкин аст.

Бигузор $L_2(p(x),[a,b])$ — фазои функсияҳои бо квадрат суммиронидашаванда $f:[a,b]\to R$ бо вазни $p(x)$ ва нормаи охирноки

$$\|f\|=\left(\int\limits_a^b p(x)f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

бошад.

4) системаи функсияҳои хоси оператори $\mathcal{D}$ пурра дар фазои $L_2(p(x),[a,b])$ хобад;

5) барои шартҳои сарҳадии $u(a)=u(b)=0$ ва $q(x)\geq 0$ қиматҳои хусусии $\lambda_n,\ n\in\mathbb{N}$ — мусбат мебошанд. Бигузор функсияи $f\in L_2(p(x),[a,b])$ ва

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)u_k(x),\quad c_k(f)=\int\limits_a^b p(x)f(x)u_k(x)dx \tag{32}$$

— қатори Фурйеи он мебошад. Бо

$$S_{n-1}(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}c_k(f)u_k(x)$$

суммаҳои хусусии тартиби $(n-1)$-уми қатори Фурйеи (32)-ро ишора мекунем. Инчунин

$$\mathcal{P}_n:=\left\{p_n(x):p_n(x):=\sum_{k=1}^{n}a_ku_k(x)\right\}$$

мегузорем. Бо баробарии

$$E_{n-1}(f):=E_{n-1}(f)_{L_{2,p(x)}}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|:p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

наздиккунии беҳтарини функсияҳои $f\in L_2(p(x),[a,b])$ аз руйи зерфазоҳои $\mathcal{P}_{n-1}$ бисёраъзогиҳои тартибашон аз $n-1$ калон набударо ишора мекунем.

Ошкор аст, ки

$$E_{n-1}(f):=E_{n-1}(f)_{L_{2,p(x)}}=\|f-S_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

Функсияи зеринро дохил мекунем:

$$T(x,y;h)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\upsilon_k(y)h^k, \tag{34}$$

ки дар ин ҷо $h\in(0,1)$, $x,y\in[a,b]$, аломати баробарӣ дар (34) ба маънои наздиккуни дар фазои $L_2(p(x),[a,b])$ фаҳмида мешавад.

Оператори $\mathcal{F}_h : L_2(p(x),[a,b]) \to L_2(p(x),[a,b])$ намуди

$$\mathcal{F}_h f(x) = \int\limits_a^b p(t)f(t)T(x,t;1-h)dt \tag{35}$$

-ро дида мебароем. Қайд мекунем, ки оператори (35) дорои хосиятҳои соддае мебошад, ки онҳоро истифода бурда, модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m-и функсияи $f \in L_2(p(x),[a,b])$-ро дохил мекунем:

$$\Omega_m(f;\delta) := \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\| : 0 < h \le \delta\}$$

Бигузор $\mathcal{D}^0 f := f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$ ва барои ҳаргуна $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{r-1}f)$, ки дар ин ҷо $\mathcal{D}$ — оператори Штурм–Лиувилл мебошад. Бо $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ синфи функсияҳои $f \in L_2(p(x),[a,b])$ ишора мекунем, ки барояшон $\mathcal{D}^r f \in L_2(p(x),[a,b])$ ва функсияи f шартҳои канории зеринро қаноат мекунонад:

$$f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b), \quad l = 1,2,\ldots,(2r).$$

Азбаски оператори Штурм–Лиувилл $\mathcal{D}$ симметрӣ мебошад, он гоҳ барои ин оператор ҳамаи тасдиқотҳои дар параграфи 2.2-и фасли дуюм исботшуда ҷой доранд ва бинобар ҳамин дар ин ҷо мо барои оператори Штурм–Лиувилл $\mathcal{D}$, ки бо баробарии (29) муайян карда мешавад, фақат формулировкаҳояшонро меорем, то ки барои ҳолати хусусии масъалаи намуди Штурм–Лиувилл ва ҷудокунии функсия аз руйи функсияҳои махсуси физикаи математикӣ мушаххас намоем.

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$ бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}$$

ҷой дорад.

Аз ин теорема натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 3.1.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 3.1.1 *барои операторҳои дар масъалаҳои I–III дидабаромадашуда баробариҳои зерин ҷой доранд:*

I. барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Эрмит

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{H}^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}, \ r \ge s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

II. барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Лагерр

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{L})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{n^{r-s}}, \ r \ge s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

III. барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Якоби

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f)}=\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}},\ r\geq s\ (r,s\in\mathbb{Z}_+).$$

Айнан ҳамин тавр, теоремаи 2.4.2-ро барои оператори Штурм–Лиувилл $\mathcal{D}$ татбиқ намуда, тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор $n,m\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $h\in(0,1)$ и $q(t)$ — функсияи вазнӣ дар $[0,h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Аз ин теорема натиҷаи зерин мебарояд:

Натиҷаи 3.1.1. *Барои иҷро шудани шартҳои теоремаи 3.1.2 барои операторҳои дар масъалаҳои I–III-и параграфи 2.2 муайяншуда баробариҳои зерин ҷой доранд:*

I. барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Эрмит

$$\sup_{f\in H^r(\mathscr{H})}\frac{(2n)^{r-s}E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathscr{H}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p};$$

II. барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Лагерр

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{L}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

III. барои бисёраъзогиҳои Якоби

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Параграфи дуюми фасли сеюм ба татбиқи $\mathscr{K}$-функсионал Петре бахшида шудааст. Дар назарияи наздиккунии функсияҳо бисёр вақт аналитикӣ иваз намудани функсияи мураккаб f бо функсияи кифоя суфтаи g чунон истифода бурда мешавад, ки хатогии дар ин маврид ҳосилшуда бояд кифоя хурд бошад. Татбиқи самаранокии ин усул ба методи $\mathscr{K}$-функсионали Петре дар назарияи интерполятсионии фазоҳо асос ёфтааст [21]. Татбиқи $\mathscr{K}$-функсионалҳо инчунин дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳо низ ҳалли худро ёфтааст [21–23]. Бо истифода аз гузоришҳои қаблан воридшуда, мо дар ҳолати дидабаромадашаванда $\mathscr{K}$-функсионаро муайян мекунем

$$\mathscr{K}_m(f,t^m) := \mathscr{K}_m(f,t^m;L_2,L_2^{(m)}) = \inf\left\{\|f-g\| + t^m\|\mathcal{D}^m g\| : g\in L_2^{(m)}\right\}, \quad (36)$$

ки дар ин ҷо $m\in\mathbb{N},\ t\in(0,1)$, $L_2 := L_2(p(x);[a,b])$.

Ҷолиби диққати махсус аст, ки қимати аниқи бузургиҳои экстремалии дар баробарии (13) овардашуда, ки ба ҷои модули бефосилагии (11) $\mathscr{K}$-функсионали (36) истифода мешавад, ҳисоб карда шавад.

Теоремаи 3.2.1. *Барои ҳаргуна $n,m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1/\lambda_n^m)} = 1.$$

Натиҷаи исботкардашудаи теоремаи 3.2.1-ро истифода бурда, қимати n-қутрҳои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи $\mathscr{K}$-функсионал ва $\mathcal{D}^r f$ дода мешаванд, ҳисоб мекунем. Функсияи $\Phi(t)$, ки дар $[0,\infty)$ камнашаванда аст, k-мажоранта меноманд, агар функсияи $\Phi(t)/t^k$ дар $[0,\infty)$ афзуншаванда набошад, $\Phi(0)=0$ ва $\lim\limits_{t\to 0}\Phi(t)=0$ бошад. Ҳолати $k=1$ функсияи Φ, ки шартҳои нишондодашударо қаноат мекунонад, условиям, танҳо мажоранта меноманд.

Бигузор Φ — мажорантаи ихтиёрӣ бошад. Бо символи $W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)$, ки дар ин ҷо $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, синфи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$-ро ишора мекунем, ки ҳосилаҳои $\mathcal{D}^r f$ шарти

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \le \Phi(t^m), \quad t>0$$

-ро қаноат мекунонанд.

Теоремаи 3.2.2. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ бошанд. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\rho_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi);L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right),$$

ки дар ин ҷо

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)\big\},$$

$\rho_n(\cdot)$ *– ихтиёри аз* n*-қутрҳои* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$ *мебошад.*

Натиҷаи 3.2.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 3.2.2 *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\text{I.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi); L_2(e^{x^2},\mathbb{R})\big) = \frac{1}{(2n)^r}\Phi\left(\frac{1}{(2n)^m}\right)$$

— барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Эрмита;

$$\text{II.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi); L_2(x^\alpha e^{-x},\mathbb{R}_+)\big) = \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

— барои бисёраъзогиҳои Чебишев–Лагерр;

$$\text{III.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi); L_2((1-x)^\alpha(1+x)^\beta;(-1,1))\big) =$$

$$= \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r}\Phi\left(\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^m}\right)$$

— барои бисёраъзогиҳои Якоби, ки дар ин ҷо $\rho_n(\cdot)$ *— ихтиёри аз* n*-қутрҳои* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *ва ё* $\Pi_n(\cdot)$ *мебошад.*

Дар параграфи сеюми фасли сеюм сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарин аз руйи суммаҳои хусусии қатори Фурйе ба воситаи функсияҳои хоси масъалаи Штурм–Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки бо модули бефосилагии умумикардашуда тавсиф мешаванд, ёфта шудаанд. Ҳалли як қатор масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарини функсияҳо бо функсияҳои махсуси мушаххаси физикаи математикӣ оварда мешавад. Дақиқтараш, татбиқи теоремаҳои параграфҳои 2.3 ва 2.4 ба масъалаи наздиккунии беҳтарини якҷояи баъзе функсияҳои махсус оварда мешавад.

Татбиқи теоремаҳои исботкардашудаи параграфҳои 2.3 ва 2.4 ба масъалаи наздиккунии беҳтарини якҷояи баъзе функсияҳои махсуси физикаи математикиро меорем. Муодилаҳои (37) барои функсияҳои махсуси соддаро дар намуди зерин навиштан мумкин аст [24]

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + \big(\lambda p(x) - q(x)\big)u(x) = 0. \tag{37}$$

I. Муодилаи Бессел

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{x^2}\right)u(x) = 0$$

ё ин ки

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)u(x)=0$$

ба ҳолати $k(x)=x$, $p(x)=x$, $q(x)=n^2/x$, $a=0$, $b=1$ мувофиқ аст.

Ошкор аст [24], ки функсияи Бессел

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

системаи функсияҳои хоси масъалаи канорӣ мебошад:

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\frac{\nu^2}{x}u=\lambda xu,\ 0<x<1,\ |u(0)|<+\infty,\ u(1)=0, \qquad (38)$$

ки ба қиматҳои хоси $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ мувофиқанд. Бинобар ҳамин, системаи $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ пурра ва ортогоналӣ дар фазои $L_2 := L_2([0,1];xdx)$ функсияҳои бо квадрат суммиронидашаванда бо вазни x ва нормаи охирноки

$$\|f\|=\left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}$$

мебошад.

Гузориши $\mathscr{B}:=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x^2}$–ро дохил намуда, муодилаи дифференсиалии Бессел (38)-ро дар намуди зерин менависем:

$$\mathscr{B}u=-\lambda u.$$

Функсияи $T(x,y;t)$-ро ҳамчун суммаи қатори

$$T(x,y;t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_k y)t^k,\ 0<t<1$$

дохил намуда, дар L_2 оператори умумикардашудаи ғеҷишро ворид мекунем:

$$F_hf(x)=\int_0^1 tf(t)T(x,t;1-h)dt. \qquad (39)$$

Оператори (39)-ро истифода бурда шуда, дар корҳои В.А.Абилов ва Ф.В.Абилова [12], К.Тухлиев [25] модули бефосилагии махсус

$$\Omega_m\big(\mathscr{B}^rf;t\big)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\big[1-(1-t)^k\big]^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\right\}^{1/2},\quad 0<t<1 \qquad (40)$$

дохил карда шудааст. Қайд мекунем, ки формулаи (40) аз (11) дар ҳолате, ки $\mathcal{A} := \mathscr{B}$, $\varphi_k(t) = (1-t)^k$ ва λ_k бо λ_k^2 иваз карда мешавад, мебарояд.

Маълум аст, ки ҳамаи теоремаҳои параграфҳои 2.3 ва 2.4 барои оператори Бессел $\mathscr{B}$ дар шаклҳои мувофиқ ҷой доранд:

Теоремаи 3.3.1. *Бигузор $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{B})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{B}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}}.$$

Теоремаи 3.3.2. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $t \in (0, 1]$ бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{B})} \frac{\lambda_n^{2(r-s)} E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{B}^r f, t)} = \left[1 - (1-t)^n\right]^{-m}.$$

Теоремаи 3.3.3. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 1$, φ — функсияи вазни дар порчаи $[0, h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{B})} \frac{\lambda_n^{2(r-s)} \cdot E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{B}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - (1-t)^n\right)^{2m} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Қайд мекунем, ки теоремаҳои 3.3.1–3.3.3 дар ҳолати $s = 0$ ва $0 < p \leq 2$ қаблан бо ҳисобкунии бевосита ва истифода аз назарияи функсияҳои бесселӣ дар кори К.Тухлиев [24] исбот шуда буданд.

II. Барои $k(x) = 1 - x^2$, $p(x) = 1$, $q(x) \equiv 0$, $a = -1$, $b = 1$ аз (25) муодилаи Лежандрро ҳосил мекунем:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0, \ |u(\pm 1)| < \infty. \tag{41}$$

Ошкор аст [26], ки бисёраъзогиҳои Лежандр

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

ҳалли муодилаи (41) бо $\lambda = n(n+1)$ мебошанд, яъне $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ функсияҳои хусусӣ мебошанд ва ададҳои $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} := \{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ қиматҳои хусусии оператори Лежандр $\mathscr{L} := \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)$ дар масъалаи (41) мебошанд. Барои оператори Лежандра $\mathscr{L}$ теоремаҳои 2.2.1–2.2.5-ро дар шакли зерин таҳия мекунем.

Теоремаи 3.3.4. *Бигузор* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{L}^r f)} = \frac{1}{\big[n(n+1)\big]^{r-s}}.$$

Теоремаи 3.3.5. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Он гоҳ барои ҳамаи қиматҳои* $t \in (0,1)$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\big[n(n+1)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{L}^r f; t)} = \frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m}.$$

Теоремаи 3.3.6. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$ *ва* $q(t)$ *– функсияи вазнӣ дар порчаи* $[0,h]$ *бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\big[n(n+1)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{L}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}$$

ҷой дорад.

III. Муодилаи дифференсиалии Чебишев–Эрмит

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2} u = 0 \text{ или } \frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \lambda u = 0 \tag{42}$$

аз муодилаи дифференсиалии (37) ҳангоми $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $p(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$ ҳосил мешавад.

Ҳалли муодилаи дифференсиалии (42) бисёраъзогии Чебишев–Эрмит [26] мебошад, ки шакли зеринро дорад:

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

с $\lambda = 2n$. Агар оператори дифференсиалии Чебишев–Эрмити дараҷаи дуюм

$$\Lambda := \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} \tag{43}$$

-ро ворид кунем, он гоҳ, чи хеле ки дар корҳои [13, 27] нишон дода шудааст, барои ихтиёри функсия $f \in L_2^r(\Lambda)$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\Omega_m\big(\Lambda^r f, t\big) := \sum_{k=1}^{\infty}\big[1-(1-t^2)^{n/2}\big]^{2m}(2n)^{2r}.$$

Теоремаҳои 2.2.1–2.2.5 барои оператори Λ шаклҳои зеринро мегиранд:

Теоремаи 3.3.7. *Бигузор $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, оператори Λ бо баробарии (43) муайян шуда бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{E_{n-1}(\Lambda^s f)}{E_{n-1}(\Lambda^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}.$$

Теоремаи 3.3.8. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, t)} = \frac{1}{\left[1 - (1 - t^2)^{n/2}\right]^m}$$

мебошад.

Теоремаи 3.3.9. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ – функсияи вазнӣ дар порчаи $[0, h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} \cdot E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\Lambda^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left[1 - (1 - t^2)^{n/2}\right]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Равшан аст, ки аз теоремаҳои 3.3.8 ва 3.3.9 мувофиқан барои қиматҳои гуногуни $t \in (0, 1)$ ва $h \in (0, 1]$, $q(t) = t$ метавон натиҷаҳои мушаххасро ворид намуд. Ҳамин тавр, аз теоремаи 3.3.8 барои $t = \sqrt{2/n}$ баробарии асимптотикии зеринро ҳосил мекунем:

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, \sqrt{2/n})} = \frac{1}{\left[1 - \left(1 - (2/n)\right)^{n/2}\right]^m} \sim \frac{1}{\left(1 - e^{-1}\right)^m} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^m.$$

Аз ин баробарӣ якбора нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин барои наздиккунии беҳтарини полиномиалии якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо $\Lambda^s f \in L_2$ мебарояд:

$$E_{n-1}(\Lambda^s f) \leq \left(\frac{e}{e-1}\right)^m \cdot \frac{1}{(2n)^{r-s}} \cdot \Omega_m\left(\Lambda^r f, \sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

IV. Муодилаи Чебишев–Лагерр

$$\frac{d}{dx}\left(x e^{-x} \frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x} u = 0 \text{ ё ин ки } u'' + (1 - x)u' + \lambda u = 0 \qquad (44)$$

ба $k(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$ мувофиқат мекунад. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии (44) ба воситаи бисёраъзогиҳои Чебишев–Лагерр [26] дода мешавад:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right). \tag{45}$$

Агар

$$\mathcal{L} := e^x\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}\right)$$

гузорем, он гоҳ бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияҳои махсуси муодилаи оператории

$$\mathcal{L}u = -\lambda u$$

бисёраъзогиҳои (45) мебошанд ва ададҳои хусусӣ $\lambda_n = n$ мебошанд. Дар ин ҳолат теоремаҳои 2.2.3–2.2.5 шакли зеринро мегиранд.

Теоремаи 3.3.10. *Бигузор $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ бошанд. Он гоҳ*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^sf)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^rf)} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Теоремаи 3.3.11. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Он гоҳ*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{L}^sf)}{\Omega_m(\mathcal{L}^rf,t)} = \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m},\ t \in (0,1)$$

мебошад.

Теоремаи 3.3.12. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$, $q(t)$ – функсияи вазнӣ дар порчаи $[0,h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}\cdot E_{n-1}(\mathcal{L}^sf)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{L}^rf,t)q(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t)^n\right]^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

V. Дар анҷоми кор қайд мекунем, ки натиҷаҳои монандро метавон барои бисёраъзогиҳои Якоби низ баён кард, ки шакли зеринро доранд [26]

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right],$$

$\alpha, \beta > -1$ ва муодилаи дифференсиалии

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0 \tag{46}$$

қаноат мекунонанд. Оператори

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]\frac{d}{dx},$$

– ро ворид намуда, муодилаи (46)-ро дар намуди зерин менависем:

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}u + \lambda y = 0,\ \lambda = n(n+\alpha+\beta+1).$$

Теоремаҳои 2.2.3–2.2.5 дар ин ҳолат ба таври зерин ифода карда мешаванд:

Теоремаи 3.3.13. *Бигузор* $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $\alpha,\beta>-1$ *бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f)} = \frac{1}{\left[n(n+\alpha+\beta+1)\right]^{r-s}}$$

мешавад.

Теоремаи 3.3.14. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ *бошад. Он гоҳ*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{\left[n(n+\alpha+\beta+1)\right]^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f,t)} = \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m}$$

ҷой дорад.

Теоремаи 3.3.15. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $h\in(0,1)$, $q(t)$ *– функсияи вазнӣ дар порчаи* $[0,h]$ *бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{\left[n(n+\alpha+\beta)\right]^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f,t)q(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ аз масъалаҳои зерин иборат мебошанд:

- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи системаи ихтиёрии векторҳои ортонормиронидашуда ёфта шудаанд [3-М, 4-М, 5-М, 7-М, 8-М];
- доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^r$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m ёфта шудааст [1-М, 2-М, 8-М, 11-М];
- қиматҳои аникӣ n-қутрҳои баъзе синфи векторҳо дар фазои гилберти H ҳисоб карда шудааст [1-М, 2-М, 6-М];
- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм-Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд, ёфта шудаанд [1-М, 4-М, 5-М, 10-М, 11-М];
- нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон-Стечкин, ки бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ҳам бо модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионалҳо аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешаванд, ёфта шудаанд [2-М, 6-М, 9-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, барои ёфтани сарҳади аникӣ болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда татбиқ карда мешаванд. Фаслҳои диссертатсияро дар алоҳидагӣ ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоии муассисаҳои таҳсилоти олии кишвар аз руи ихтисоси «Математика» ва «Математикаи амалӣ» истифода бурдан мумкин аст.

Руйихати адабиёт

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[2] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[3] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.56. – №2. – С.1414–1427.

[4] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. – 2013. – Т.94. – №6. – С.908–917.

[5] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С.255–264.

[6] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. – № 3 (39). – С.5–13.

[7] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования. – 2018. – №4. – С.17–28.

[8] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве // Вестник науки и образования. – 2019. – №9 (63). – С.5–13.

[9] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. – №9 (39). – С.5–8.

[10] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теория приближения // Москва. Наука. – 1976.

[11] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[12] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье–Бесселя // Изв. вузов. Матем. – 2001. – №8. С.3–9.

[13] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье – Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Матем. – 2006. – №1. – С.3–12.

[14] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[15] Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева–Эрмита алгебраическими полиномами // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №2. – С.270–277.

[16] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Наука. – 1978.

[17] Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n; p(x))$ // УМН. – 2004. – Т.59. – Вып. 6. – С.201–202.

[18] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – 1976. – 325 С.

[19] Pinkus A. n-Widths by Approximation Theory // Berlin: Springer. – 1985.

[20] Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М.: Наука. – 1976. – 527 с.

[21] Butzer P.L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, functional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – V.29. – №4. – P.781–793.

[22] Вакарчук С.Б. О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2002. – Т.71. – № 5. – С.522–531.

[23] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2((1-x^2)^{-1/2}; [-1,1])$ // Изв. ТулГу. – 2014. – №1. – Ч.1. – С.83–97.

[24] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Наука. – 1966. – 725 С.

[25] Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функции рядами Фурье-Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов // Чебышевский сборник. – 2016. – Т.17. – №4. – С.141–156.

[26] Суетин П.К. Классические ортогональные полиномы // М.: Наука. – 1979.

[27] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. – №5. – С.666–684.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №9-10. – С.508–515.

[2-М] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Известия НАН Таджикистана. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2022. – №4 (189). – С.35–46.

[3-М] Кодиров Д.А. О наилучшем приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 и некоторые применения к специальным функциям [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №7-8. – С.379–392.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[4-М] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучшего приближения некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в

гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Актуальные проблемы современной математики*", посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Т.Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С.121–123.

[5-М] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*", посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан и «Двадцатлетию изучения и развития естественных, точных и математических наук» (Худжанд, 2021 г.). – С.43–45.

[6-М] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в пространстве L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.78–81.

[7-М] Кодиров Д.А. О наилучшем совместном приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и её приложения*", посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (Душанбе, 27 мая 2022 г.). – С.4–8.

[8-М] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканский научно-практической конференции „*Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук*", (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.32–35.

[9-M] Кодиров Д.А. Приближение функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Современные проблемы математики*”, посвященной 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С.101–104.

[10-M] Кодиров Д.А. О наилучших приближениях некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Современные проблемы математики и её преподавания*”, посвященной 35-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию Конституции Республики Таджикистан, «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физико-математических наук К.Тухлиева. (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С.42–45.

[11-M] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение функций рядами Фурье по собственным функциям в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Математика в современном мире*”, посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию доктора физико-математических наук С.Байзоева (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – С.156–160.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Қодиров Далер Абдушукурович дар мавзуи «Баҳодиҳии аниқи суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе аз руи системаҳои ортонормиронидашудаи ихтиёрӣ дар фазои гилбертӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *наздиккунии беҳтарин, сарҳадҳои болоӣ, модули бефосилагӣ, масъалаи Штурм–Лиувилл, $\mathscr{K}$-функсионал, n-қутрҳо, системаи ортонормиронидашудаи векторҳо, мажорант.*

Мақсади кор. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ, ки бо ёфтани қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарин ба воситаи қаторҳои Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортогоналӣ дар фазои гилбертӣ ва татбиқи онҳо дар қаторҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм–Лиувилл мебошад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои навтарини таҳлили функсионаӣ ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ба таври васеъ истифода шудаанд.

Навоварии илмии таҳқиқот. Хамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ гирифташуда, нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин гирифта шудааст:

- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи векторҳо ба воситаи суммаи Фурйе аз руйи ихтиёри системаи векторҳои ортонормиронидашуда ёфта шуданд;
- доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон-Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини векторҳои $f \in H^r(A)$ ва характеристикаи суфтагии Ω_m ёфта шуданд;
- қиматҳои аниқи n-қутрҳои баъзе синфи векторҳо дар фазои гилбертии H ёфта шуданд;
- қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои Фурйе аз руйи функсияҳои хусусии масъалаи Штурм-Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида мешаванд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои намуди Ҷексон-Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ба воситаи ҳам модули бефосилагии умумикардашуда ва ҳам $\mathscr{K}$-функсионал аз ҳосилаи тартиби r-ум баҳо дода мешаванд, ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошад. Натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда ва усулҳои исботи онҳоро дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи қаторҳои ортогоналӣ истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Кодирова Далера Абдушукуровича на тему «Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по произвольной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве», представленной на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *наилучшее приближение, верхние грани, модуль непрерывности, задача Штурма–Лиувилля,* $\mathscr{K}$*-функционал,* n*-поперечники, ортонормированная система векторов, мажоранта.*

Цель работы. Основная цель диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач, связанных с отысканием точного значения верхней грани наилучшего приближения суммами Фурье по произвольной ортогональной системе векторов в гильбертовом пространстве и их приложение к рядам Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Методы исследования. В работе широко используются новейшие методы функционального анализа и методы решения экстремальных задач.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- найдены точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории ортогональных рядов.

SUMMARY
of the dissertation Qodirov Daler Abdushukurovich on the topic «Sharp estimates of the rate of convergence of Fourier series with respect to an arbitrary orthonormal system in a Hilbert space» submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) the degree of 6D060100 – Mathematics: 6D060101 – Real, complex and functional analysis

Key words: *best approximation, upper bounds, modulus of continuity, Sturm–Liouville problem, $\mathscr{K}$-functional, n-width, orthonormal system of vectors, majorant.*

Work objectives. The main objective of the dissertation is to solve extremal problems related to determining the exact value of the upper bound of the best approximation by Fourier sums with respect to an arbitrary orthogonal system of vectors in a Hilbert space, and to apply these results to Fourier series with respect to the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem.

Research methods. The study extensively employs modern methods of functional analysis and techniques for solving extremal problems.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following main results were obtained:

- Exact values of the upper bounds of the best approximations for certain classes of vectors by Fourier sums with respect to an arbitrary orthonormal system of vectors have been obtained;
- Sharp constants in Jackson–Stechkin-type inequalities relating the best approximation of vectors $f \in H^r(A)$ to the smoothness characteristic Ω_m have been found;
- Exact values of the n-widths for certain classes of vectors in a Hilbert space H have been determined;
- Exact upper bounds of the best approximations by Fourier sums with respect to the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem on certain classes of functions characterized by a generalized modulus of continuity have been obtained;
- Sharp Jackson–Stechkin-type inequalities have been established, in which the best approximation is estimated from above both via the generalized modulus of continuity and via the $\mathscr{K}$-functionals of the r-th derivatives.

Theoretical and practical value. The work is theoretical in nature. The results of the dissertation and the methods used in their proofs can be applied to extremal problems in the theory of orthogonal series.