РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Раимзода Фарахноз

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2021

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Шабозов Мирганд Шабозович**, академик Национальный академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Юсуфзода Гулзорхон Амиршо,** доктор физико-математических наук, профессор, ректор Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева;

Палавонов Курбонназар Курбонбекович, кандидат физико-математических наук, заведующей кафедрой высшей математики и естественно-научных дисциплин Таджикского государственного университета ком мерции

Оппонирующая организация: Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова

Защита состоится *29 сентября 2021 г. в 10:00* часов на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «______» «__________________» 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-012,
доктор физико-математических наук **Р.Н.Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Теория приближения функций – одна из наиболее важных частей математического анализа. Возникшая в результате развития математической науки и потребностей практики, эта теория продолжает интенсивно развиваться на протяжении многих десятилетий. В ней рассматривается одна из фундаментальных проблем математики – приближение сложных объектов более простыми и более удобными. Именно эта идея стимулирует развитие теории приближения функций и связанные с нею экстремальные задачи аппроксимации. Основным объектом теории приближения функций являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций так, чтобы возникающая при этом погрешность была возможно меньшей. Если о функции известны лишь некоторые общие свойства, то целесообразно рассматривать задачу приближения класса таких функций. При этом если класс состоит из периодических функций, то в качестве приближающего аппарата рассматривают подпространство тригонометрических полиномов и структурные свойства характеризуются модулем непрерывности функций заданного порядка.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучшего совместного приближения периодических комплекснозначных функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными. На классах функций, у которых усреднённые с весом норм конечных разностей ограничены сверху заданной мажорантой, вычислены точные значения различных n-поперечников в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$.

Отметим, что вопросами приближения периодических функций в различных нормированных пространствах занимались С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, М.Г.Крейн, Н.И.Ахиезер, С.Б.Стечкин, В.К.Дзядык, А.В.Ефимов, Н.П.Корнейчук, С.А.Теляковский и другие.

Вопросами нахождения точных неравенств в экстремальных задачах теории приближения и отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина в разные времена занимались Н.П.Корнейчук, С.Б.Стечкин, В.И.Бердышев, Н.И.Черных, Л.В.Тайков, Н.Айнуллоев, С.Б.Вакарчук, Ю.Хусейн, М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов и многие другие.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме “Теория аппроксимации функций”.

Цель и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точную константу в неравенстве Джексона между величиною наилучшего среднеквадратического совместного приближения комплекснозначных функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в метрике пространства L_2;
- найти точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функций и их производных на классах функций, характеризующихся усреднёнными значениями нормы разности m-го ($m \geq 2$) порядка в L_2;
- найти точные неравенства типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2;
- вычислить точные значения различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков;
- вычислить точные значения n-поперечников на классах функций, нормы разности которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху заданной мажорантой.

Основные методы исследования. В работе широко используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в нормированных пространствах, а также современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания в функциональных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- решена экстремальная задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона между величиною совместного приближения комплекснозначных функций и их производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в пространстве L_2;
- найден явный вид точного неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных

функций и их производных посредством усреднённых значений норм конечных разностей m-го порядка в L_2;

- найдено точное неравенство типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2;
- вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, нормы разностей которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантой.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках наилучшего совместного приближения функций и их производных в L_2 тригонометрическими полиномами;
- теорема о точной константе в неравенстве Джексона между наилучшими совместными приближениями и их производными тригонометрическими полиномами и усреднённым значением норм разностей первого порядка;
- теоремы о точных константах в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением функций и их производных и усреднённым значением норм конечной разности m-го порядка в L_2;
- теорема о точном неравенстве Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым значением норм конечной разности высших порядков;
- теорема о точных значениях n-поперечников классов функций, нормы разностей высших порядков которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантной функцией.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и схемы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под рукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг);

- на международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- на международной научной конференции “Современные проблемы алгебры и теории чисел” (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции “Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- на международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений ” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.).

Публикации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 6 научных работах, из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 3 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 42 наименования, занимает 72 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Диссертационная работа начинается с введения. В нём освещается актуальность темы, цель работы и апробация полученных результатов.

В первой главе излагаются некоторые вопросы наилучшего среднеквадратического приближения классов периодических дифференцируемых комплекснозначных функций, определяемых нормами разности m-го порядка в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. В первом параграфе приводятся предварительные сведения и некоторые факты, а также излагаются отдельные утверждения с доказательством. Всюду далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, целых, положительных и действительных чисел; $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$

— пространства суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[-\pi,\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Множество алгебраических комплекснозначных полиномов вида

$$p_n(z) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

обозначим через $\mathscr{P}_n$. Далее предполагается, что любая 2π-периодическая комплекснозначная функция $f(x)$ с нормой (1) имеет ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{2}$$

В теории аппроксимации функций $f \in L_2$ весьма важным является задача наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функции f и её производных $f^{(s)}$ $(s = \overline{1, r})$ в метрике L_2:

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \inf\left\{\left\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\right\|_2 : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}$$

на классе $L_2^{(r)}$ или некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Легко подсчитать, что

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \left\{2\sum_{|k|\ge n} |k|^{2s} \left|c_k(f)\right|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) := 2\big(|c_{-k}|^2 + |c_k(f)|^2\big), \ k \in \mathbb{N}$.

Условимся всюду далее в соотношениях общего характера, при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, предполагать, что $f \ne \mathrm{const}$. При выводе дальнейших результатов нам понадобится следующая простая

Лемма 1.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. Тогда верно равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Для произвольной комплекснозначной функции $f \in L_2$ с рядом Фурье (2), при любом $m \in \mathbb{N}$ определим разность m-го порядка

$$\Delta_h^m(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}(e^{ikh}-1)^m. \tag{3}$$

Применяя к соотношению (3) равенство Парсеваля, будем иметь

$$\left\|\Delta_h^m(f)\right\|_2^2 = 2^{m+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|c_k(f)\right|^2\bigl(1-\cos kh\bigr)^m = 2^m\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m.$$

Одним из основных результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любых $t \in (0,\pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \left\|\Delta_h(f)\right\|_2^2 dh} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}. \tag{4}$$

В частности, при $t = \pi/(2n)$ из (4) следует, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/(2n)} \left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 dh} = \frac{\pi}{\pi-2}.$$

Так как модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2^{(r)}$ определяется равенством

$$\omega_m(f^{(r)},\delta)_2 := \sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2 : \ ||h| \leq \delta\right\},$$

то в качестве следствия из теоремы 1.2.1 получаем

Теорема 1.2.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любом $t \in (0,\pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \omega^2(f^{(r)},\tau)_2 d\tau} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}.$$

Замечание. Теорема 1.2.2 является своеобразным обобщением известной теоремы Л.В.Тайкова[1] на случай наилучшего совместного полиномиального приближения функции $f \in L_2^{(r)}$ и её производных $f^{(s)} \in L_2$ $(s = \overline{1,r},\ r \in \mathbb{N})$.

Вторым из основных результатов второго параграфа этой главы является

Теорема 1.2.3. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любом $t \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 dh \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))},$$

где $Si(t) := \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$ *— интегральный синус.*

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.3 имеет место равенства*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}.$$

В третьем параграфе первой главы доказаны теоремы, связывающие величины наилучшего совместного приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ с интегралами, содержащими усреднённое значение нормы разности m-го порядка в L_2.

Здесь основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.3.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любом $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющем неравенству $0 < nh \leq \pi/2$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \left\| \Delta_\tau^m(f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} d\tau \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{m/2}. \tag{5}$$

В частности, если $nh = \pi/2$, то из (5) следует равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\| \Delta_\tau^m(f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} d\tau \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{m/2}.$$

[1] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С.535-542.

Последнее равенство является обобщением одной известной теоремы С.Б.Вакарчука[2] и Л.В.Тайкова[3].

Таким образом, из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *При выполнении условий теоремы 1.3.1 имеет место неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\Big)_2. \tag{6}$$

Отметим, что вопрос о том, является ли константа Джексона-Стечкина $\{\pi/(2(\pi-2))\}^{m/2}$ точной в неравенстве (6), остаётся открытым.

Вторым основным результатом третьего параграфа первой главы является

Теорема 1.3.2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nh\, dh\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Неравенство (7) точно в том смысле, что существует комплекснозначная функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Из теоремы 1.3.2 вытекает ряд следствий

Следствие 1.3.2 *В условиях теоремы 1.3.2 имеют место равенства*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nhdh\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m},$$

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^2(f^{(r)}, h)_2 \sin nhdh\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}.$$

Второе равенство при $s=0,\ m=1$ получен Н.И.Черных[4], а при $s=0, m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ – Х.Юссуфом[5].

[2]Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78, – №5. – С.792-796

[3]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С.433-438.

[4]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. №5. – С.513-522.

[5]Юссуф Х.

Следствие 1.3.3. *Для произвольной комплекснозначной функции* $f \in L_2^{(r)}$ *при любых* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left\|\Delta^m_{\pi/n}(f^{(r)})\right\|_2,$$

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \, \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_2.$$

В четвёртом параграфе первой главы теоремы, доказанные в предыдущих параграфах, предоставляют возможность решить экстремальную задачу о наилучшем совместном приближении $E_{n-1}(f^{(s)})$ комплекснозначной функции f и её последовательных производных $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \cdots, r)$ на некотором подклассе функций из $L_2^{(r)}$. Другими словами, требуется найти точное значение верхней грани

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-1}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2 := \sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 \colon \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\|f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)})\|_2 \colon \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{M}^{(r)}$ — некоторый класс функций из множеств $L_2^{(r)}$, $S_{n-1}(f^{(s)})$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье $f^{(s)}(x) \in L_2$:

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (ik)^s e^{ikx}, \quad S_{n-1}(f^{(s)}, x) = \sum_{|k| \leq n-1} (ik)^s e^{ikx}.$$

Введём следующие классы функций. Пусть $\Phi(h)$, где $0 \leq h \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее функцию Φ назовём мажорантой. Символом $W_m^{(r)}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $0 < h \leq \pi/n$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h).$$

Аналогичным образом, через $W_m^{(r)}(\Phi, \sin \cdot)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$ и $h \in [0, \pi/n]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} \sin nh dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h).$$

Приводим решение сформулированной задачи (8) в случаях, когда $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi)$ и $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi, \sin \cdot)$. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.4.1. *При любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $h \in [0, \pi/(2n)]$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\,(h)\,. \tag{9}$$

В частности, при $h = \pi/(2n)$ *из* (9) *следует, что*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Замечание 1.4.1. Заметим, что из утверждения теоремы 1.4.1, в частности при $s = 0$, получаем точную верхнюю грань наилучшего приближения класса $W_m^{(r)}(\Phi)$:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\,(h)\,. \tag{10}$$

Полученная оценка (10) представляет собой оценку сверху всех далее рассматриваемых нами n-поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)$ в следующей главе. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.4.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Замечание 1.4.2. В утверждении теоремы 1.4.2 при $s = 0$ получаем значение верхней грани наилучшего приближения класса функций $W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)$ подпространством $\mathscr{T}_{2n-1}$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{11}$$

В второй главе рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений целого ряда n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными значениями норм разностей высших порядков, вытекающих из результатов последних параграфов первой главы. Прежде чем сформулировать результаты этой главы, приводим необходимые понятия и определения.

Пусть $B := \{f \in L_2,\ \|f\| \le 1\}$ — единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из L_2; $\mathscr{L}_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\mathscr{L}^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^{\perp} : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon B \cap \mathscr{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathscr{L}_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda L_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L} \subset L_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\right\} : \mathscr{L}^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \Lambda^{\perp} f\| : f \in \mathfrak{N}\Big\} : \Lambda^{\perp} L_2 \subset \mathscr{L}_n\Big\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками* множества $\mathfrak{N}$ в L_2. Известно, что в пространстве L_2 между приведёнными выше n-поперечниками выполняются соотношения[6,7]:

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \le d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \le d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \Pi\big(\mathfrak{N}; L_2\big). \tag{12}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$ и $h \in [0, \pi/(2n)]$ — любое число. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi)\Big)_2 = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi(h), \tag{13}$$

где $\gamma_N(\cdot)$ — любой из N-поперечников: бернштейновский $b_N(\cdot)$, колмогоровский $d_N(\cdot)$, линейный $\delta_N(\cdot)$, гельфандовский $d^N(\cdot)$, проекционный $\Pi_N(\cdot)$. В частности, из (12) при $h = \pi/(2n)$ следует равенство

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big).$$

[6] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – М. – 1976. – 325 с.

[7] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 p.

Одним из основных результатов первого параграфа второй главы является следующее утверждение

Теорема 2.1.2. *При любых* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,$ *и* $h \in (0, \pi/(2n)]$ *имеют место равенства*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)\Big)_2 = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Прежде чем продолжить вычисление n-поперечников других классов функций в пространстве L_p, вводим в рассмотрение аппроксимационные характеристики следующего вида

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|^p dh\right)^{1/p}},$$

где $m, n, r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ 1/r < p \le 2,\ h \in (0, \pi/n]$.

Имеет место следующая общая

Теорема 2.2.1. *Для произвольных* $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2,\ h \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) = \left\{\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p}.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1 при* $h = \pi/n$ *имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,r,p,s}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\int\limits_0^{\pi/n} (1 - \cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{mp \cdot \Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp + 1/2)}\right\}^{1/p} \cdot n^{-(r-s)+1/p},$$

где $\Gamma(a)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Через $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L^{(r)}_2$, которые для любых $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2$ и $0 < h \le \pi/n$ удовлетворяют неравенству

$$\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta^m_\tau(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p} \le \Phi(h).$$

Поставим целью при некоторых ограничениях на множестве $\Phi(u)$ найти точное значение перечисленных в начале этой главы n-поперечников. Для этого введём следующее обозначение

$$(\sin\tau)_+ := \Big\{\sin\tau,\ \text{если } 0 \le \tau \le \pi/2;\ \ 1,\ \text{если } \tau > \pi/2\Big\}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $\nu \in \mathbb{R}_+$ — произвольное число, $r, m \in \mathbb{N},\ u \in (0,\pi],\ 1/r < p \le 2$, а мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\nu u)}{\Phi^p(u)} \ge \frac{\int\limits_0^{\nu u} (1-\cos\tau)^{mp}_+ d\tau}{\int\limits_0^{\pi} (1-\cos\tau)^{mp} d\tau}. \tag{14}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right)_2 = 2^{-m-1/p}\cdot n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\pi} \sin^{mp}\tau d\tau\right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\gamma_k(\cdot)$ — любой из k-поперечников: колмогоровский $d_k(\cdot)$, бернштейновский $b_k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, проекционный $\Pi_k(\cdot)$.

Отметим, что теорема 2.2.2 является обобщением одной теоремы М.Ш.Шабозова[8].

Из теоремы 2.2.2 вытекает следующее утверждение

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 справедливы равенства*

$$\gamma_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) =$$

[8] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87, – №4. – С.616-623.

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{mp \cdot \Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp+1/2)} \right\}^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n^{-r+1/p}.$$

В связи с условием (14) возникает следующий вопрос: существует ли функция $\Phi_0(u)$, удовлетворяющая условию (14). На этот вопрос отвечает следующая теорема

Теорема 2.2.3. *Функция* $\Phi_0(\tau) = \tau^{\beta}$, *где*

$$\beta = \pi \cdot \left\{ p \int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{\upsilon}{2}\right)^{mp} d\upsilon \right\}^{-1},$$

удовлетворяет условию (14).

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- решена экстремальная задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона между величиною совместного приближения комплекснозначных функций и их производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в пространстве L_2 [1-A, 2-A, 4-A];
- найден явный вид точного неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функции и их производных посредством усреднённых значений норм конечных разностей m-го порядка в L_2 [1-A, 2-A, 5-A];
- найдено точное неравенство типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2 [1-A, 3-A, 6-A];
- вычислено точное значение различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков [3-A, 5-A, 6-A];
- вычислены значения n-поперечников классов функций, нормы разностей которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантой [1-A, 2-A, 3-A, 6-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и схемы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Раимзода Ф. Об одновременном приближении функции и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – 2020. – №1(178). – С.29-36.

[2-А] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения функций и нормы разности в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т. 63. – №11-12. – С.679-687.

[3-А] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения и нормы разности высших порядков в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2021. – Т. 64. – № 3-4. – С. 315-320.

В других изданиях:

[4-А] Раимзода Ф. О приближении функций и её производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). С. 58-59.

[5-А] Раимзода Ф. Одновременное приближение функции и ее производные тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 248-250.

[6-А] Раимзода Ф. Приближение функций и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 258-261.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Раимзода Фараҳноз

НАЗДИККУНИИ ҲАМҶОЯИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲОИ КОМПЛЕКСҚИМАТАИ ДАВРӢ ВА ҲОСИЛАҲОИ ОНҲО ДАР L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе — 2021

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ:	**Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор
МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:	**Юсуфзода Гулзорхон Амиршо,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, ректори Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев
	Палавонов Қурбонназар Қурбонбекович, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи фанҳои математика ва табиӣ – илмии Донишгоҳи давлатии тиҷорат
МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА:	Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б. Ғафуров

Ҳимоя *29-уми сентябри соли 2021 соати 10:00* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-012 дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «_______________» соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои
диссертатсионии 6D.КОА-012,
доктори илмҳои физикаю математика **Р.Н. Одинаев**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммият ва дараҷаи кор карда баромадани мавзӯи таҳқиқот. Назарияи наздиккунии функсияҳо яке аз қисмҳои бештар муҳими таҳлили функсионалӣ ба ҳисоб меравад. Ин назария дар натиҷаи рушди илмҳои математика ва эҳтиёҷоти амалия пайдо шуда, дар тӯли даҳсолаҳо торафт интенсивӣ рушд меёбад. Дар он яке аз муаммоҳои бунёдии математика – наздиккунии объектҳои мураккаб бо объектҳои бештар сода ва бештар қулай муоина карда мешавад. Маҳз ҳамин ғоя рушди назарияи наздиккунии функсияҳо ва ба масъалаҳои экстремалии аппроксиматсия алоқамандро ҳавасманд мегардонад. Объекти асосии назарияи наздиккунии функсияҳо масъалаҳое мебошанд, ки бо зарурати ҳамин тавр ивазкунии функсияҳои мураккаб ба суммаҳои миқдори охирноки бештар функсияҳои сода алоқаманде, ки хатогии дар ин маврид ҳосилшуда, то қадри имкон хурдтар бошад. Агар оиди функсия танҳо баъзе хосиятҳои умумӣ маълум бошад, он гоҳ масъалаи наздиккунии синфи чунин функсияҳоро муоина кардан ба мақсад мувофиқ аст. Дар ин маврид, агар синф аз функсияҳои даврӣ иборат бошад, он гоҳ ба сифати асбоби наздиккунӣ зерфазои полиномҳои тригонометриро дида мебароянд ва хосиятҳои сохторӣ бо модули бефосилагии функсияҳои тартиби додашуда, тавсиф карда мешаванд. Дар кори диссертатсионӣ баҳоҳои ниҳоии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврии комплексқимата ва пайдарпаии ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо, муайян карда шудааст. Дар синфи функсияҳои нормаҳои миёнашуда бо вазни фарқҳои охирнокашон аз боло бо мажоранти додашуда маҳдуданд, қиматҳои аниқи n-қутри мухталиф дар фазои $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ ҳисоб карда шудаанд.

Қайд мекунем, ки бо масъалаҳои наздиккунии функсияҳои даврӣ дар фазоҳои нормиронии мухталиф С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров, С.М.Николский, М.Г.Крейн, Н.И.Ахиезер, С.Б.Стечкин, В.К.Дзядик, А.В.Ефимов, Н.П.Корнейчук, С.А.Теляковский ва дигарон машғул шудаанд. Бо масъалаҳои ҷустуҷӯи нобаробариҳои аниқ дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ ва ҷустуҷӯи константаҳои аниқ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон-Стечкин дар солҳои гуногун Н.П.Корнейчук, С.Б.Стечкин, В.И.Бердишев, Н.И.Черних, Л.В.Тайков, Н.Айнуллоев, С.Б.Вакарчук, Ю.Хусейн, М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов ва дигарон машғул шудаанд.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи дурнамои нақшаи илмӣ-таҳқиқотии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2015-2020 ва 2021-2025 аз рӯи мавзӯи “Назарияи наздиккунии функсияҳо” иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексони байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва пайдарпаии ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби якум дар метрикаи фазои L_2 ёфта шавад;
- нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон-Стечкини байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо дар синфи функсияҳои бо қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои тартиби m-ум ($m \geq 2$) дар L_2 тавсиф шуда, ёфта шаванд;
- нобаробарии аниқи намуди Черниxи байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва бо вазн миёнашудаи $\sin nt$ бо қимати нормаи фарқҳои тартиби олӣ дар L_2 ёфта шавад;
- қиматҳои аниқи n-қутри мухталиф дар синфи функсияҳои бо қиматҳои бо вазн миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби олӣ тавсифшуда, ҳисоб карда шаванд;
- қиматҳои аниқи n-қутр дар синфи функсияҳои нормаҳои фарқашон дар метрикаи L_p $(0 < p \leq 2)$ аз боло бо мажоранти додашуда маҳдуд, ҳисоб карда шаванд.

Усулҳои асосии тадқиқот. Дар кор усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳо дар фазоҳои нормиронидашаванда, инчунин усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои экстремалии дорои мӯҳтавои вариатсионӣ дар фазоҳои функсионалӣ, ба таври васеъ мавриди истифода қарор меёбад.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ чунин натиҷаҳои асосии зерин гирифта шудаанд:

- масъалаи экстремалии ҷустуҷӯи доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексони байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби якум дар метрикаи фазои L_2 ҳал карда шудаанд;
- намуди ошкори нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо ёрии қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби m-ум дар L_2 ёфта шудааст;

- нобаробарии аниқи намуди Чернихи байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва бо вазн миёнашудаи $\sin nt$ бо қимати нормаи фарқҳои тартиби олӣ дар L_2 ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи n-қутри мухталиф дар синфи функсияҳои бо қиматҳои бо вазн миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби олӣ тавсифшуда, ҳисоб карда шудаанд;
- қиматҳои n-қутр дар синфи функсияҳои нормаҳои фарқашон дар метрикаи L_p $(0 < p \leq 2)$ аз боло бо мажорант маҳдуд, ҳисоб карда шудаанд.

Муқаррароти диссертатсия барои дифоъ:

- теоремаҳои асосӣ дар бораи баҳоҳои аниқи наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ дар L_2;
- теорема дар бораи доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексони байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби якум;
- теоремаҳо дар бораи константаҳои аниқ дар нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо ва бо ёрии қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби m-ум дар L_2;
- теорема дар бораи нобаробарии аниқи Чернихи байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва бо қимати миёнашудаи нормаи фарқҳои охирноки тартиби олӣ;
- теорема дар бораи қиматҳои аниқи n-қутри синфи функсияҳои нормаҳои фарқашон тартиби олӣ дар метрикаи L_p $(0 < p \leq 2)$-и аз боло бо функсияи мажорантӣ маҳдуд.

Арзиши назариявӣ ва амалӣ. Кор дорои аҳамияти назариявист. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва схемаҳои исботи онҳоро дар масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳои аналитикии дар доираи функсияҳои ба фазои Хардии H_p мансуббуда, истифода кардан мумкин аст.

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои диссертатсия ва натиҷаҳои асосие, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд, саҳми шахсии муаллифро дар корҳои ба тавсибрасида, инъикос мекунад. Ҳамаи натиҷаҳои кори диссертатсиониро шахсан муаллиф ҳосил карда аст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия якчанд маротиба дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- семинари кафедраи „Таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ"-и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АМИ Тоҷикистон, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2020);
- конференсияи илмии байналхалқии “Муаммоҳои муосири математика ва татбиқи он” (Душанбе, 14-15 марти соли 2018);
- конференсияи илмии байналхалқии “Муаммоҳои муосири алгебра ва назарияи ададҳо” (Душанбе, 14-15 декабри соли 2018);
- конференсияи илмии ҷумҳуриявии “Анализи математикӣ ва татбиқи он” (Душанбе, 10-11 июни соли 2019);
- конференсияи илмии байналхалқии “Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ” (Душанбе, 30-31 январи соли 2020);
- конференсияи илмӣ – амалии ҷумҳуриявии “Муаммоҳои муосири назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ” (Душанбе, 26 сентябри соли 2020);
- конференсияи илмии байналхалқии “Назарияи наздиккунӣ ва татбиқи онҳо” (Днепро, Украина, 16-19 сентябри соли 2020).

Интишорот. Натиҷаҳои кори муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 6 корҳои илмӣ, аз онҳо 3 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КАО-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 3 мақола дар осори конференсияҳои байналхалқӣ дарҷ гардида аст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боби таҳқиқоти шахсӣ, феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аз 42 номгӯй, ҳамагӣ 72 саҳифаи компютериро дарбар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои қулаӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо мавриди истифода шудааст, дар кадоме рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Кори диссертатсионӣ аз муқаддима оғоз мешавад. Дар он муҳиммияти мавзӯъ, мақсади кор ва апробатсияи натиҷаҳои ҳосилшуда, таҷассум ёфтааст. Дар боби якум баъзе масъалаҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини синфҳои функсияҳои диффересиронидашавандаи даврии комплексқиматаи бо нормаи фарқи тартиби m-ум дар фазои $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ муайяншаванда, баён карда мешаванд. Дар параграфи якум маълумоти зарурӣ ва баъзе далелҳо, инчунин тасдиқотҳои алоҳида бо исботаш, оварда мешаванд. Минбаъд дар ҳама ҷо бо $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ — мувофиқан маҷмӯи ададҳои натуралӣ, ғайриманфии бутун, бутун, мусбат ва ҳақиқиро ишора мекунем; бо $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$ — фазои бо квадрат суммиронидашавандаи Лебеги функсияҳои 2π-даврии комплексқимата бо нормаи охирноки

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[-\pi,\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{1}$$

– ро ишора мекунем. Маҷмӯи полиномҳои алгебравии комплексқиматаи намуди

$$p_n(z) = \sum_{|k| \le n} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

– ро бо $\mathscr{P}_n$ ишора мекунем. Минбаъд фарз карда мешавад, ки ҳар гуна функсияи 2π-даврии комплексқиматаи $f(x)$ бо нормаи (1) дорои қатори Фурйе мебошад:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{2}$$

Дар назарияи аппроксиматсиякунии функсияи $f \in L_2$ масъалаи муҳим – масъалаи аппроксиматсияи полиномиалии наздиккунии ҳамҷояи функсияи f ва ҳосилаҳои он – $f^{(s)}$ $(s = \overline{1, r})$ дар метрикаи L_2 дар синфи $L_2^{(r)}$ ё ягон зерсинфи $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$, ба ҳисоб меравад:

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \inf\left\{\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}.$$

Ба осонӣ ҳисоб кардан мумкин аст, ки

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \left\{2\sum_{|k| \ge n} |k|^{2s} |c_k(f)|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

мебошад, ки дар ин ҷо $\rho_k^2(f) := 2\big(|c_{-k}|^2 + |c_k(f)|^2\big)$, $k \in \mathbb{N}$.

Шарт мекунем, ки минбаъд дар ҳама ҷо дар муносибатҳои тавсифи умумӣ дошта, ҳангоми ҳисобкунии сарҳади болоӣ аз рӯи ҳамаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фарз мекунем, ки $f \ne \text{const}$ аст. Ҳангоми ҳосилкунии натиҷаҳои минбаъда ба мо леммаи содаи зерин зарур мешавад.

Леммаи 1.1.2. *Бигзор $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Он гоҳ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Барои функсияи комплексқиматаи ихтиёрии $f \in L_2$ бо қатори Фурйеи (2) барои ҳар гуна $m \in \mathbb{N}$ фарқи тартиби m-умро муайян мекунем:

$$\Delta_h^m(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}(e^{ikh}-1)^m. \tag{3}$$

Ба муносибати (3) баробарии Парсевалро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\left\|\Delta_h^m(f)\right\|_2^2 = 2^{m+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|c_k(f)\right|^2\left(1-\cos kh\right)^m = 2^m\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m.$$

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби якум теоремаи зерин аст.

Теоремаи 1.2.1. *Барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва ҳар гуна $t \in (0, \pi/n]$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \left\|\Delta_h(f)\right\|_2^2 dh} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}. \tag{4}$$

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $t = \pi/(2n)$ аз (4) ҳосил мешавад:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/(2n)} \left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 dh} = \frac{\pi}{\pi-2}.$$

Азбаски модули бефосилагии тартиби m-и функсияи $f \in L_2^{(r)}$ бо баробарии

$$\omega_m(f^{(r)},\delta)_2 := \sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2 : \ |h| \leq \delta\right\},$$

муайян карда мешавад, он гоҳ ба сифати натиҷа аз теоремаи 1.2.1 ҳосил мекунем.

Теоремаи 1.2.2. *Барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва ҳар гуна $t \in (0, \pi/n]$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \omega^2(f^{(r)},\tau)_2 d\tau} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}.$$

Қайд. Теоремаи 1.2.2 теоремаи маъмули умумишудаи ба худ хоси Л.В.Тайков[9] дар ҳолати наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини полиномиалии функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ва ҳосилаҳои $f^{(s)} \in L_2$ ($s = \overline{1,r}$, $r \in \mathbb{N}$) мебошад.

Дуюмин аз натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби мазкур теоремаи зерин ба ҳисоб меравад.

Теоремаи 1.2.3. *Барои ҳар гуна* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *ва ҳар гуна* $t \in (0, \pi/n]$ *баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 dh \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))},$$

ки дар ин ҷо $Si(t) := \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$ *– синуси интегралӣ мебошад.*

Натиҷаи 1.2.1. *Дар мавриди иҷрои шартҳои теоремаи 1.2.3 баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}.$$

Дар параграфи сеюми боби якум теоремаҳои бузургиҳои наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})$ бо интегралҳои қимати миёнашудаи нормаи фарқи тартиби m дар L_2 алоқамандбуда, ҳосил карда шудаанд.

Дар ин ҷо натиҷаи асосии параграфи мазкур чунин аст.

Теоремаи 1.3.1. *Барои ҳар гуна* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *ва ҳар гуна* $h \in \mathbb{R}_+$*-и нобаробарии* $0 < nh \leq \pi/2$*-ро қаноаткунонанда, баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \left\| \Delta_\tau^m(f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} d\tau \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{m/2}. \tag{5}$$

[9]Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С.535-542.

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $nh = \pi/2$ аз (5) баробарии зерин ҳосил мешавад:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/(2n)} \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}.$$

Баробарии мазкур яке аз теоремаҳои маъмули С.Б.Вакарчук[10] ва Л.В.Тайков[11] ба ҳисоб меравад. Ба ҳамин тариқ, аз теоремаи 1.3.1 натиҷаи зерин ҳосил мешавад.

Натиҷаи 1.3.1. *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 1.3.1 нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\Big)_2. \tag{6}$$

Қайд мекунем, ки масъала дар бораи он ки оё константаи Ҷексон-Стечкин – $\{\pi/(2(\pi-2))\}^{m/2}$ дар нобаробарии (6) аниқ аст, кушод боқӣ мемонад.

Натиҷаи дуюми асосии параграфи сеюми боби якум теоремаи зерин ба ҳисоб меравад.

Теоремаи 1.3.2. *Бигзор $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. Он гоҳ барои ҳар гуна функсияи $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин дуруст аст:*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nh\, dh\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Нобаробарии (7) ба он мазмун аниқ аст, ки функсияи комплексқиматаи $f_0 \in L_2^{(r)}$, мавҷуд аст, ки барои вай ба баробарӣ табдил меёбад.

Аз теоремаи 1.3.2 якчанд натиҷа ҳосил мешавад.

Натиҷаи 1.3.2 *Ҳангоми иҷрои шартҳои теоремаи 1.3.2 баробариҳои зе-*

[10] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78, – №5. – С.792-796

[11] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С.433-438.

рин ҷой доранд:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}}=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m},$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},h)_2\sin nhdh\right)^{1/2}}=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}.$$

Баробарии дуюмро ҳангоми $s=0$, $m=1$ Н.И.Черних[12] ва ҳангоми $s=0$, $m\geq 2$, $m\in\mathbb{N}$ Х.Юссуф[13] ҳосил кардаанд.

Натиҷаи 1.3.3. *Барои фунсияи ихтиёрии комплексқиматаи* $f\in L_2^{(r)}$ *ва ҳар гуна* $n,m,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ *нобаробариҳои зерин дурустанд:*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\left\|\Delta_{\pi/n}^m(f^{(r)})\right\|_2,$$

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\,\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2.$$

Дар параграфи чоруми боби якум теоремаҳои дар параграфҳои гузашта исботшуда, имконияти ҳалли масъалаи экстремалӣ оиди наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})$-и комплексқиматаи функсияи f ва пайдарпаии ҳосилаҳои он – $f^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots,r)$ дар ягон зерсинфи функсияҳо аз $L_2^{(r)}$-ро медиҳад. Дигар хел карда гӯем, ёфтани қимати аниқи сарҳади болоии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2:=\sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)})_2\colon\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\right\}=$$

$$=\sup\left\{\|f^{(s)}-S_{n-1}(f^{(s)})\|_2\colon\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\right\},\tag{8}$$

талаб карда мешавад, ки дар ин ҷо $\mathfrak{M}^{(r)}$ ягон синфи функсияҳо аз маҷмӯи $L_2^{(r)}$, $S_{n-1}(f^{(s)})$ — суммаи хусусии тартиби $(n-1)$-и қатори Фурйе $f^{(s)}(x)\in L_2$:

$$f^{(s)}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(ik)^se^{ikx},\quad S_{n-1}(f^{(s)},x)=\sum_{|k|\leq n-1}(ik)^se^{ikx}.$$

[12]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. №5. – С.513-522.

[13]Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин. – 1988. – С. 100-110.

Синфҳои фунсияҳои зеринро ҷорӣ мекунем. Бигзор $\Phi(h)$, ки дар ин ҷо $0 \leq h \leq 2\pi$ чунин функсияи бефосилаи афзуншавандаи $\Phi(0) = 0$ мебошад. Минбаъд дар ҳама ҷо функсияи Φ-ро мажорант меномем. Бо рамзи $W_m^{(r)}(\Phi)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$-ро ишора мекунем, ки барои ҳар гуна $0 < h \leq \pi/n$ ва $m \in \mathbb{N}$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h).$$

Айнан ҳамин тавр бо $W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$-ро ишора мекунем, ки барои ҳар гуна $m, n, r \in \mathbb{N}$ ва $h \in [0, \pi/n]$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} \sin nh dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h).$$

Ҳалли масъалаи баёншудаи (8)-ро ҳангоми $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi)$ ва $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$ будан меорем. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.4.1. *Барои ҳар гуна $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва $h \in [0, \pi/(2n)]$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\left(h\right). \tag{9}$$

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $h = \pi/(2n)$ из (9) хулоса мебароял, ки

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Қайди 1.4.1. *Қайд мекунем, ки аз тасдиқоти теоремаи 1.4.1 дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $s = 0$ сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини синфи $W_m^{(r)}(\Phi)$-ро ҳосил мекунем:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\left(h\right). \tag{10}$$

Баҳои ҳосилшудаи (10) баҳои болоии ҳамаи n-қутри синфи $W_m^{(r)}(\Phi)$-и минбаъд дар боби оянда муоинашавандаро ифода мекунад. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.4.2. *Бигзор $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Қайди 1.4.2. *Дар тасдиқоти теоремаи 1.4.2 ҳангоми s=0 қимати сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои $W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)$-и зерфазои $\mathscr{T}_{2n-1}$-ро ҳосил мекунем:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (11)$$

Дар боби дуюм масъалаи экстремалии ҳисобкунии қиматҳои аниқи яккатор n-қутри синфи функсияҳои бо қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои тартибҳои олии аз натиҷаҳои параграфҳои охирини боби якум ҳосилшаванда, муоина карда мешавад. Пеш аз он ки натиҷаҳои ин бобро баён кунем, мафҳумҳо ва таърифҳои заруриро меорем.

Бигзор $B := \{f \in L_2,\ \|f\| \leq 1\}$ — кураи воҳидӣ дар фазои L_2; $\mathfrak{N}$ — маҷмӯи барҷастаи марказӣ-симметрӣ аз L_2; $\mathscr{L}_n \subset L_2$ зерфазои n-ченака; $\mathscr{L}^n \subset L_2$ — зерфазои коченакаи n; $\Lambda : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — оператори бефосилаи хаттӣ; $\Lambda^{\perp} : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — оператори хаттии проектиронии хаттӣ бошанд. Бузургиҳои

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon B \cap \mathscr{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathscr{L}_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda L_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L} \subset L_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\right\} : \mathscr{L}^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda^{\perp} f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda^{\perp} L_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\right\}$$

мувофиқан n-қутрҳои *бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ ва проектсионӣ*-и маҷмӯи $\mathfrak{N}$ дар L_2 номида мешаванд. Маълум аст, ки дар фазои L_2 дар байни n-қутрҳоии дар боло номбаршуда, муносибатҳои зерин иҷро мешаванд[14,15]:

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \leq d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \leq d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \Pi\big(\mathfrak{N}; L_2\big). \qquad (12)$$

---

[14] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – М. – 1976. – 325 с.

[15] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 p.

Теоремаи 2.1.1. *Бигзор $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ ва $h\in[0,\pi/(2n)]$ — хар гуна адад бошад. Он гоҳ баробариҳои зерин дурустанд:*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\Big)=\gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\Big)=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi)\Big)_2=\frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\cdot\Phi(h),\qquad(13)$$

ки дар ин ҷо $\gamma_N(\cdot)$ — ҳар гуна аз N-қутри бернштейнии $b_N(\cdot)$, колмогоровии $d_N(\cdot)$, хаттии $\delta_N(\cdot)$, гелфандии $d^N(\cdot)$, проектсионии $\Pi_N(\cdot)$. Дар ҳолати хусусӣ, аз (12) ҳангоми $h=\pi/(2n)$ баробарии зерин ҳосил мешавад:

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\Big)=\gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\Big)=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\Big)=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}\cdot\frac{1}{n^r}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big).$$

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи якуми боби дуюм тасдиқоти зерин ба ҳисоб меравад.

Теоремаи 2.1.2. *Барои ҳар гуна $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ва $h\in(0,\pi/(2n)]$ баробариҳои зер ин ҷой доранд:*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin\cdot),L_2\Big)=\gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin\cdot),L_2\Big)=$$

$$=E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin\cdot)\Big)_2=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Пеш аз он ки ҳисобкунии n-қутри синфҳои дигари функсияҳоро дар фазои L_p давом диҳем, дар муоина тавсифи аппроксиматсионии намуди зеринро ҷорӣ мекунем:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\big\|\Delta_h^m(f^{(r)})\big\|^p dh\right)^{1/p}},$$

ки дар ин ҷо $m,n,r\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{Z}_+,\ 1/r<p\leq2,\ h\in(0,\pi/n]$.

Теоремаи бештар умумии зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.2.1. *Барои ҳар гуна $m,n,r\in\mathbb{N},\ 1/r<p\leq2,\ h\in(0,\pi/n]$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h)=\left\{\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}.$$

Аз теоремаи 2.2.1 ҳосил мешавад:

Натиҷаи 2.2.1. *Ҳангоми иҷрошавии шартҳои теоремаи 2.2.1 дар мавриди $h = \pi/n$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\chi_{m,n,r,p,s}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right)^{-1/p} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{mp\cdot\Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp+1/2)}\right\}^{1/p}\cdot n^{-(r-s)+1/p},$$

ки дар ин ҷо $\Gamma(a)$ — гамма-функсияи Эйлер.

Бо $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои ҳар гуна $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2$ ва $0 < h \le \pi/n$ нобаробарии

$$\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p} \le \Phi(h)$$

– ро қаноат мекунанд, ишора мекунем. Мақсад мегузорем, ки ҳангоми баъзе маҳдудиятҳоро ба маҷмӯи $\Phi(u)$ гузоштан, қимати аниқи n-қутри дар аввали ин боб номбаршуда, ёфта шавад. Барои ин ишораи зеринро ҷорӣ мекунем:

$$(\sin\tau)_+ := \Big\{\sin\tau,\ \text{если } 0 \le \tau \le \pi/2;\ \ 1,\ \text{если } \tau > \pi/2\Big\}.$$

Теоремаи 2.2.2. *Бигзор $\nu \in \mathbb{R}_+$ — адади ихтиёрӣ, $r, m \in \mathbb{N}$, $u \in (0, \pi]$, $1/r < p \le 2$ ва мажорантаи $\Phi(h)$ шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^p(\nu u)}{\Phi^p(u)} \ge \frac{\int\limits_0^{\nu u}(1-\cos\tau)_+^{mp}d\tau}{\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau}. \tag{14}$$

Он гоҳ барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$ баробариҳои зерин дурустанд:

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_2 = 2^{-m-1/p}\cdot n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\pi}\sin^{mp}\tau d\tau\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

ки дар ин ҷо $\gamma_k(\cdot)$ *— ҳар гуна аз* k*-қутри зерин бошад: колмогоровии* $d_k(\cdot)$*, бернштейнии* $b_k(\cdot)$*, хаттии* $\delta_k(\cdot)$*, гелфандии* $d^k(\cdot)$*, проектсионии* $\Pi_k(\cdot)$*.*

Қайд мекунем, ки теоремаи 2.2.2 яке аз теоремаҳои умумикардаи М.Ш.Шабозов[16] ба ҳисоб меравад. Аз теоремаи 2.2.2 тасдиқоти зерин ҳосил мешавад.

Натиҷаи 2.2.2. *Ҳангоми иҷрошавии шартҳои теоремаи 2.2.2 баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{mp \cdot \Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp+1/2)}\right\}^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n^{-r+1/p}.$$

Вобаста ба шарти (14) саволи зерин пайдо мешавад: оё функсияи $\Phi_0(u)$-и шарти (14)-ро қаноаткунонанда, мавҷуд аст? Ба ин савол теоремаи зерин ҷавоб медиҳад.

Теоремаи 2.2.3. *Функсияи* $\Phi_0(\tau) = \tau^{\beta}$*, ки дар ин ҷо*

$$\beta = \pi \cdot \left\{p \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp} dv\right\}^{-1},$$

аст, шарти (14)-ро қаноат мекунонад.

---

[16]Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87, – №4. – С.616-623.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- масъалаи экстремалии ҷустуҷӯи доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексони байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби якум дар метрикаи фазои L_2 ёфта шудаанд [1-А, 2-А, 4-А];
- намуди ошкори нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо ёрии қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби m-ум дар L_2 ёфта шудааст [1-А, 2-А, 5-А];
- нобаробарии аниқи намуди Чернихи байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва бо вазн миёнашудаи $\sin nt$ бо қимати нормаи фарқҳои тартиби олӣ дар L_2 ёфта шудаанд [1-А,3-А,6-А];
- қиматҳои аниқи n-қутри мухталиф дар синфи функсияҳои бо қиматҳои бо вазн миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби олӣ тавсифмешуда, ҳисоб карда шудаанд [3-А, 5-А, 6-А];
- қиматҳои n-қутр дар синфи функсияҳои нормаҳои фарқашон дар метрикаи L_p $(0 < p \leq 2)$ аз боло бо мажорант маҳдуд, ҳисоб карда шудаанд [1-А, 2-А, 3-А, 6-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва схемаҳои исботи онҳоро дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои дар доира аналитикии ба фазои Хардии H_p мансуббуда, истифода кардан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Раимзода Ф. Об одновременном приближении функции и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – 2020. – №1(178). – С.29-36.

[2-М] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения функций и нормы разности в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т. 63. – №11-12. – С.679-687.

[3-М] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения и нормы разности высших порядков в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2021. – Т. 64. – № 3-4. – С. 315-320.

В других изданиях:

[4-М] Раимзода Ф. О приближении функций и её производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). С. 58-59.

[5-М] Раимзода Ф. Одновременное приближение функции и ее производные тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 248-250.

[6-М] Раимзода Ф. Приближение функций и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 258-261.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Раимзода Фараҳноз дар мавзӯи «Наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқиматаи даврӣ ва ҳосилаҳои онҳо дар L_2» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин, нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин, нобаробарии намуди Черних, полиноми тригонометрӣ, фарқҳои охирнок, n-қутр, мажорант.*

Мақсади кор. Мақсади таҳқиқот ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои комплексқиматаи даврӣ бо полиномҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии L_2 мебошад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор усули ҳисобкунии сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфҳои функсияҳои комплексқимата бо полиномҳои тригонометрӣ ва методикаи ҷустуҷӯи қиматҳои аниқи қутрҳои аз тарафи Н. П. Корнейчук ва В. М. Тихомиров коркардшуда, мавриди истифода қарор меёбад.

Навоварии илмии таҳқиқот. Хамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ гирифташуда, нав мебошанд. Натиҷахои асосии зерин гирифта шудааст:

- масъалаи экстремалии ҷустуҷӯи доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексони байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо полиномҳои тригонометрӣ ва қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби якум дар метрикаи фазои L_2 ҳал карда шудаанд;
- намуди ошкори нобаробарии аниқи Ҷексон-Стечкини байни бузургии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои комплексқимата ва ҳосилаҳои онҳо бо ёрии қиматҳои миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби m-ум дар L_2 ёфта шудааст;
- нобаробарии аниқи намуди Черних\и байни наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин ва бо вазн миёнашудаи $\sin nt$ бо қимати нормаи фарқҳои тартиби олӣ дар L_2 ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи n-қутри мухталиф дар синфи функсияҳои бо қиматҳои бо вазн миёнашудаи нормаҳои фарқҳои охирноки тартиби олӣ тавсифмешуда, ҳисоб карда шудаанд;
- қиматҳои n-қутр дар синфи функсияҳои нормаҳои фарқашон дар метрикаи L_p $(0 < p \leq 2)$ аз боло бо мажорант маҳдуд, ҳисоб карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кор дорои аҳамияти назариявист. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва схемаҳои исботи онҳоро дар масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳои аналитикии дар доираи функсияҳои ба фазои Хардии H_p мансуббуда, истифода кардан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Раимзода Фарахноз на тему «Наилучшее совместное приближение комплекснозначных периодических функций и их производных в L_2», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *наилучшее совместное приближение, неравенства типа Джексона-Стечкина, неравенства типа Черныха, тригонометрический полином, конечные разности, n-поперечник, мажоранта.*

Цель работы. Целью исследования является решение экстремальных задач теории приближении комплекснозначных периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве L_2.

Методы исследования. В работе используются метод вычисления верхних граней наилучших приближений классов комплекснозначных функций тригонометрическими полиномами и разработанная Н.П. Корнейчуком и В.М. Тихомировым методика отыскания точных значений поперечников.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- решена экстремальная задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона между величиною совместного приближения комплекснозначных функций и их производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в пространстве L_2;
- найден явный вид точного неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функций и их производных посредством усреднённых значений норм конечных разностей m-го порядка в L_2;
- найдено точное неравенство типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2;
- вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, нормы разностей которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантой.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и схемы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p.

SUMMARY
of the dissertation Raimzoda Farahnoz on the topic «Best Joint Approximation of Complex-Valued Periodic Functions and Their Derivatives in L_2» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Key words: *best joint approximation, Jackson-Stechkin-type inequalities, Chernykh-type inequalities, trigonometric polynomial, finite differences, n-width, majorant.*

Work objectives. The purpose of the research is to solve extreme problems in the theory of approximation of complex-valued periodic functions by trigonometric polynomials in the Hilbert space L_2.

Research methods. The article uses a methods for calculating upper bounds for the best approximate classes of complex-valued functions by trigonometric polynomials and a technique developed by N.P.Korneichuk and V.M.Tikhomirov for finding the exact widths.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following main results were obtained:

- solved extremal problems of finding the exact constant in Jackson's inequalities between the value of the combined application of complex-valued functions and their derivatives by trigonometric polynomials and the averaged values of the norms of the first order finite difference if the space L_2;
- found a clear view of an exact Jackson-Stechkin-type inequality between the value of the best joint approximation of complex-valued functions and their derivatives using the averaged values of the norms of finite differences of the m-th order in L_2;
- an exact Chernikh-type inequality between the best joint approximation and the values of the norms of higher-orders differences L_2 averaged with the weight $\sin nt$ found;
- the exact values of various n-widths are calculated for the classes of functions characterized by the weighted average value of the norms of finite differences of higher orders;
- the values of the n-widths of the classes of functions are calculated, the norms of the difference of which in the metric L_p $(0 < p \leq 2)$ are bounded from the top by the majorant.

Theoretical and practical value. The work is both theoretical and practical. The results of the dissertation work and their schemes proofs can be applied to extremal problems of the theory approximations of analytic functions in the disk belonging to the space Hardy H_p.