РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК:517911/.958
ББК: 22.193
Р-18

На правах рукописи

Раимзода Фаррухшох

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Душанбе-2025

Научная работа выполнена на кафедре математического и компьютерного моделирования Таджикского национального университета

Научные руководители:	**Юнуси Махмадюсуф Камарзода** -доктор физико-математических наук, профессор. **Илолов Мамадшо Илолович,** академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского националь-ного университета.
Официальные оппоненты:	**Фарход Шокир** – д.ф.-м.н., ведущего научного сотрудника отдела наноматериалов и нанотехнологий Физико-технического института имени С.У.Умарова НАН Таджикистана **Козиев Гулназар Мавлоназарович -** к.ф.-м.н.,, заведующего кафедрой математики в экономике Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана
Ведущая организация:	Институт математики имени А. Джураева НАН Таджикистана. .

Защита состоится 11.06.2025 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.КАО-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734025, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «____» ____ 2025__ г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 6D.КАО-011,
кандидат физико-математических наук Гафоров А.Б

Введение

Актуальность темы исследования. Многие задачи физики, механики, химии, биологии и других отраслей науки описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Особое внимание уделяется классу таких уравнений второго порядка, относящихся к параболическому типу, для которых рассматриваются различные варианты начальных и краевых условий. В этой сфере значительный вклад внесли А.Фридман[1], В.С.Владимиров[2], О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева и В.А.Солонников[3], В.П.Михайлов[4], А.Н.Тихонов и А.А.Самарский[5], Р.Курант[6], А.Ф.Филиппов[7] , О.А.Олейник и С.Н.Кружков[8] и многие другие ученые. Эти исследования сосредоточены на проверке корректности начальных и краевых условий как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах, получении априорных оценок и формул для представления решений, а также на анализе устойчивости стационарных решений. Также исследованы необходимые и достаточные условия принципа максимума, установлены теоремы сравнения решений и ряд других аспектов. В последние десятилетия в таких областях науки, как математическая биология, физика, экология и экономика возникли новые начально-краевые задачи для уравнений в частных производных с функциональными условиями. Линейные уравнения первого порядка с функциональными условиями были исследованы в работах таких учёных, как Вольтерра В[9], Полуэктов Р. А.[10], Моисеев Н. Н[11], М. Юнуси[12]. В трудах М.К. Юнуси[12] были детально проанализированы различные аспекты функциональных условий, связанные с задачами динамики популяций.

Новый этап развития теории нелинейных дифференциальных уравнений с функциональными начальными условиями связан с развитием информационных

---

[1] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа .-М.: Мир, 1968.-423с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М:,Наука,1988.-512с.

[3] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, м. Наука, 1967.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука, 1976.-39Iс.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, м., Наука, 1972.

[6] П.Курант Р. Уравнения с частными производными, М.: Мир 1964.

[7] Филиппов А.Ф. Об условиях существования решений квазилинейного параболического уравнения, дан СССР, т.141,N3(I961), с. 568-570.

[8] Олейник О.А. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН, т.16 в 5(1961), с. 115-155.

[9] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: ИКИ, 2004. – 288 с.

[10] Полуэктова Р.А. Динамическая теория биологических популяций [Текст] / под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

[11] Моисеев, Н.Н. Модели экологии и эволюции [Текст] / М.Н. Моисеев. – М.: Знание, 1983. – 64 с. – (Новое в жизни науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. № 10).

[12] Юнусов М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями. Диссертация на соискание ученной степени доктора физ-мат. наук.м.: ВЦ АН СССР, 1990г.-312с.

технологий и численных методов анализа. С развитием информационных технологий теория нелинейных дифференциальных уравнений как научная дисциплина начала активно развиваться, что позволило приблизиться к численным методам решения уравнений в частных производных, описывающих распространение волн в различных средах. Создание мощного математического инструментария открыло возможности для точного аналитического решения ряда нелинейных уравнений в частных производных. Математическое моделирование стало ключевым инструментом для изучения различных сценариев развития и взаимодействия популяций, оценки временно-пространственной динамики биологических сообществ и предсказания реакции природных систем на внешние воздействия. Изменения в одной или нескольких характеристиках исследуемой биологической системы, с учетом ее временно-возрастной и пространственной структуры, могут быть описаны с помощью математических моделей.

В диссертации рассматривается один из важнейших вопросов математического моделирования и прикладной математики - моделирование процессов роста биологических популяций и их обоснования, а также разработки алгоритмов с целью обнаружения и формирования нелинейных стоячих популяционных волн с учетом временно-возрастных и пространственных распределений сложных систем (социальные, экономические, экологические, технические и другие). Поэтому данная диссертационная работа актуальна и востребованна.

Степень разработанности темы исследуемой проблемы. В математической популяционной биологии описание структурированных популяций является одной из актуальных и интереснейших задач основанных на аппарате дифференциальных уравнений в частных производных. Изучаемые математические задачи в данной диссертационной работе посвящены биологическим сообществам, популяциям с учетом временно-возрастного состава пространственных распределений популяционных волн описывающихся с помощью некоторого класса интегро-дифференциальных задач.

С. С. Четвериковым в 1905 г. впервые было введено в экологический обиход понятие популяционных волн. С того времени активно исследовался многими специалистами вопрос о численности взаимодействующих биологических популяций, которые отражены в многочисленных работах учёных таких как Вольтерра В.[9], Свирежев Ю. М.[13], Логофет.Д. О.[14], Базыкин А. Д.[15], содержащие широкие библиографические списки.

Связь работы с научными программами, проектами и темам. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета Таджикского национального университета на 2016 - 2020 гг. по теме «Разработка математических моделей, алгоритмов и программ для решения прикладных задач" и на 2020-2025гг. по теме "Разработка математических и компьютерных моделей, алгоритмов, комплекс программ и методики преподавания информатики, математики и естественных наук».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основная цель исследования настоящей диссертационной работы заключается в разработке аналитического метода математического моделирования некоторых физических явлений, таких, как популяционные волны и популяционные стоячие волны в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго и третьего порядка с функциональными начальными условиями.

Задачи исследования. Основные задачи исследования данной диссертационной работы заключаются в следующем:

- для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказать теорему об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для третьей краевой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найти и обосновать решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями;

- доказать принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найти априорные оценки, так же найти решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями;

[13]Свирежев Ю.М. Математическое моделирование биологических систем / Ю.М. Свирежев, Е.Я. Елизаров. – М.: Наука, 1972. – 160 с.

[14] Логофет, Д.О. Исследование системы пар «хищник—жертва», связанных по конкуренции [Текст] / Д.О. Логофет // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 224, № 3. – С. 529-531.

[15] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 181 с.

- создание математической модели интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказать существование её решения;

- доказать и обосновать существование стационарного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложить определение стационарной численности популяции с учетом возраста и пространственных распределений;

- найти решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений;

- разработать алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Объект исследования. Объектом исследования является класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными начальными условиями**.**

Предмет исследования. Предметом анализа является математическое моделирование популяционных волн с применением линейных и нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными начальными условиями**.**

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для третьей краевой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найдено и обосновано решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями;
- доказан принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найдены априорные оценки, так же найдено решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями;
- создана математическая модель интегро-дифференциальной задачи

популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказано её решение;

- доказано и обосновано стационарное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложено определение стационарной численности популяции с учетом возраста и пространственных распределений;
- найдено решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений;
- разработан алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи, а также создан комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический и практический характер. Теоретическая ценность работы состоит в исследовании линейных и нелинейных задач с функциональными начальными условиями. Теоретические результаты диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов и магистров специальности «Информатика» по дисциплине «Математическое моделирование биологических систем» и «Математическое моделирование сложных систем» в ВУЗах Республики Таджикистан.

Практическая значимость заключается в использовании результатов, полученных в диссертационной работе при математическом моделировании численности популяции биологических сообществ и для решения прикладных задач в экологии, биологии и управлении.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для третьей краевой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления;
- теоремы о принципе максимума для линейных задач с функциональными условиями и априорных оценок;
- теоремы о существование и единственности классического решения для пространственно-одномерных задач и задач с функциональными условиями на плоскости;
- теоремы о существовании решений математической модели интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с

учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений.

- теоремы о существовании стационарного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи с учетом возраста и пространственных распределений.
- теоремы о существовании решения интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями.
- для нелинейной системы интегро-дифференциальных задач разработан алгоритм численного решения и создан комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена в соответствии со следующими разделами паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ» (пункты 2,5,6,8):

-***пункт*** **2**. Развитие качественных и приближённых аналитических методов исследования математических моделей.

-***пункт*** **5**. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

-***пункт*** **6**. Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента.

-***пункт*** 8. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

Личный вклад соискателя учёной степени. Все результаты, представленные в диссертационном исследовании, были получены автором лично. Обсуждение и публикация научных результатов проводились с соавторами и научным руководителем, но основное содержание данного исследования и положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в выполненную работу.

Апробация и реализация результатов диссертации. Материалы диссертации докладовались и обсуждались на международных и республиканских конференциях: Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ посвищенной 25-летию государственной независимости Республики

Таджикистан (2016); Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвищенной “20-ой годовщине Дня национального единства” и “Году молодёжи” (Душанбе 2017г); Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвищенной “Международному десятилетию действия вода для устойчивого развития, 2018-2018 годы”, “Годы развития туризма и народных ремесел”, “140-ой со дня рождения Героя Таджикистана Садриддина Айни и “70-ой годовщине со дня создания Таджикского Национального Университета” (2018); Международной научно – теоретической конференции, 70 – летию образования ТНУ и посвященной 80 – летию со дня рождения академика АН Республика Таджикистан, д.ф.-м.н, профессор Н.Р. Раджабова «Современные задачи математики и их приложений» (Душанбе, 2018г.); Республиканской научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященной «Годам развития села, туризма и народных промыслов (2019-2021)» и «400-летию Мировида Сайдои Насафи» (20-27 апреля, 2019); Республиканской научной конференции, посвящённой 80 – летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова (Душанбе, 10-11 июня, 2019г.); Республиканской научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященной “5500-летию древнего Саразма”, “700-летию выдающегося таджикского поэта Камола Худжанди” и «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образовании (2020-2040 годы)»; XI Международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию Таджикского национального университета и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Юнуси Махмадюсуф Камарзода (Душанбе, 27-28 декабря 2018г.); Международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (Душанбе, 30-31 января 2020 г.); Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.); Международной научной конференции, «Современные проблемы математики и её приложения» посвящённой 20–летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.); Международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год; Международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук

2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Нусрата. г.Душанбе 2023 год; XII-международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы,20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе,18 май 2024).

Публикации по теме диссертации. По материалам диссертационного исследования опубликовано 13 научной статьей, в том числе 6 статьи в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации и 7 статьей в трудах республиканских и международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 136 страниц, в том числе 16 рисунков и 134 библиографических списков. Нумерация формул отдельная для каждой главы и общая для рисунков и таблиц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных, а именно метод априорных оценок, принцип максимума, метод разделения переменных, принцип сжимающихся отображений, метод преобразования Фурье и метод последовательных приближений.

Результаты исследования. Приведём краткое изложение результатов диссертационной работы.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, кратко описывается содержание работы, приводится краткий обзор уже существующих результатов, касающихся темы диссертации.

Первая глава посвящена анализу изученной литературы математического моделирования популяционных волн, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с функциальными начальными условиями.

Во **второй главе** диссертационной работы исследуется линейная интегро-дифференциальная задача с функциальными начальными и краевыми условиями.

Вторая глава диссертации состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию интегро-дифференциальной задачи с функциальными начальными и краевыми условиями.

В первом параграфе **второй главы** для интегро-дифференциальной задачи в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для третьей краевой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления.

Рассмотрим в области

$$Q = G \times [0, t_k] \times [0, \infty], \ 0 \le t_k < \infty, \ где \ \ddot{G} = G + S, \ G = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i, \ L_i < \infty, \ i = 1,2\}$$

S– граница области G, следующую задачу $[1 - A]$:

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F(a,t)N + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i}, \ x \in G, \ 0 < t \le t_k, \ 0 < a < \infty \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$N|_{t=0} = N_0(x,a), \ \ x \in \ddot{G}, \ 0 \le a < \infty \qquad (2)$$

$$N|_{t=0} = \int_0^\infty B(a,t) N(x,a,t) da, \ \ x \in \ddot{G}, \ \ 0 \le t \le t_k, , \qquad (3)$$

$$N(x,a,t)|_S = 0, \ \ 0 \le a < \infty, \ \ 0 \le t \le t_k, \ \ x \in \ddot{G}. \qquad (4)$$

Здесь $\vartheta_i, D_i = 1{,}2$ – заданные положительные числа, $\mathrm{F(a,t)}, \mathrm{B(a,t)}, N_0(x,a)$ – заданные неотрицательные функции своих аргументов. Функция $N_0 = N_0(x,a), \ x \in \overline{G}, \ 0 \le a < \infty,$ имеет обобщённые производные $\frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}$ и они ограничены по $a, \ 0 \le a < \infty, \ i = 1{,}2.$

Отметим, что уравнение (1) описывает распределение численности некоторой популяции в точке $x \in \ddot{G}$ возраста $a \in [0, \infty)$ в момент времени $t \in [0, t_k]$, а (3) характеризует уравнение функции рождаемости для численности новорожденных. Задача (1) - (4) является естественным обобщением соответствующих задач из работ[16] где рассматривается случай, когда *N=N(a,t).*

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования:

[16] Ф. Раимзода Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами / М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник Таджикского национального университета. -Душанбе. -2015. -1/4(168).-С.15-17.

$N(x,a)|_S = 0,\quad N_0(x,a) = \int\limits_0^\infty B(a,0)N_0(x,a)da.$ В противном случае пришлось бы считать функцию $N(x,a,t)$ разрывной, что внесло бы некоторые формальные трудности, ничего не меняя, по существу.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $F(a,t)\equiv F(a),\ B(a,t)\equiv B(a)$ *для всех* $0\le a<\infty,\ 0\le t\le t_k$, $\|F(a)\|_C<\infty,\ \|B(a)\|_C<\infty,\ \dfrac{\partial N_0}{\partial a}\in C_{(0,\infty)}$ *и* $\delta^{\max}_{n_1,n_2}$, $\delta|_{n_1,n_2}$ *- являются корнями уравнения*

$$\int\limits_0^\infty \tilde{B}_n(a)e^{-\delta a}da = 1,\ \ \tilde{B}_n(a) = B(a)e^{-\lambda_n a+\int\limits_0^\infty F(\xi)d\xi}, \tag{5}$$

$$n_k = 1,2,3,...,\quad n=(n_1,n_2),\ k=1,2$$

Тогда решение задачи (1)-(4) представляется в виде

$$N_0(x,a,t) = \frac{2}{L_1L_2}\sum_{n=1}^\infty C_n^j e^{\delta_n^{\max}(t-a)} + \sum_{j=1}^\infty C_n^j e^{a_n^j(t-a)}\cos(\omega_n^j(t-a))\exp\{-\lambda_n a+\int\limits_0^a F(\xi)d\xi + \frac{V_1x_1}{2D_1}+\frac{V_2x_2}{2D_2}\} *$$

$$*\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \tag{6}$$

где

$\lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{2}\left[\dfrac{V^2k}{nD_k}+D_k\left(\dfrac{\pi n_k}{L_k}\right)^2\right],\ n=(n_1,n_2),\ n_k = 1,2.3,...,\ k=1,2,\ C_n^j,\ j=1,2,3,4.$ *- являются коэффициентами разложения функции*

$$\tilde{N}_n^0(a) = \int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2} N_0(x,a)\,e^{\frac{V_1x_1}{2D_1}-\frac{V_2x_2}{2D_2}-\int\limits_0^a F(\xi)d\xi+\lambda_n a}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

в ряд по экспонентам с показателями

$$\beta_n^j = \delta_n^j + \lambda_n,\ \delta_n^j = a_n^j + i\,\omega_n^j,\ n=(n_1,n_2),\ n_k = 1,2,3,...$$

Замечания 2.1.1. *Пусть* $\int\limits_0^\infty \tilde{B}_n(a)da = 1,\ n_k = 1,2,3,...,\ n=(n_1,n_2),$ *тогда существует стационарное решение задачи* (1)-(4) *и оно представляется в виде*

$$N^*(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n a+\int\limits_0^a F(\xi)d\xi+\frac{V_1x_1}{2D_1}+\frac{V_2x_2}{2D_2}}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}$$

Если

$$\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a)da = 1,\ \ n_k = 1,2,3,...,\quad n = (n_1, n_2),$$

то в формуле (6) $\delta_n^{\max} > 0$, *и следовательно, с ростом* t *функция* $N(x,a,t)$ *неограниченно растет.*

Если же

$$\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a)da < 1,\ \ n_k = 1,2,3,...,\quad n = (n_1, n_2),\ \textit{то}\ \ \delta_n^{\max} < 0\ \ \textit{и}\quad N(x,a,t) \to 0$$

Во втором параграфе **второй главы** для неоднородной задачи с функциональными условиями получено и обосновано решение в виде рядов Фурье.

Рассмотрим следующую задачу: найти решение линейного дифференциального неоднородного уравнения

$$\partial_{tax}N = F_0(a,t)N + f(x,a,t),\qquad x \in G,\ \ 0 < a < \infty,\quad 0 < t \le t_k, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$N(x,a) = N_0(x,a),\quad x \in \bar{G},\quad 0 \le a < \infty, \tag{8}$$

$$N(x,0,t) = \int_0^\infty B_0(\xi,t)N(x,\xi,t)d\xi,\qquad x \in \bar{G},\quad 0 \le t \le t_k, \tag{9}$$

$$N|_s = 0, \tag{10}$$

где $\partial_{tax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2}\left[V_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]$, $N = N(x,a,t)$- численность популяции в точке x возраста a в момент времени $t, F_0(.),\ B_0(.)$- соответственно коэффициенты смертности и рождаемости некоторой изолированной популяции, $V_i,\ D_i,\ \alpha -$заданные положительные числа.

Наряду с граничным условием (10) рассмотрим также граничное условие третьего рода

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i} + \alpha_i N\right)|_s = 0,\qquad\qquad \alpha_i = -\frac{V_i}{2D_i},\quad i = 1,2. \tag{11}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования граничных и начальных условий.

Определение. Под решением неоднородной задачи (7) – (10) , ((11)) мы будем понимать непрерывную функцию $N = N(x,a,t)$, имеющую непрерывные производные $\frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial a}, \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \quad i = 1,2.$ и удовлетворяющие условия (7) – (10) , ((11)).

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) $F_0(a,t) = F_0(a), \ B_0(a,t) = B_0(a), \qquad V_i = const > 0, \ D_i = const > 0.$

Функции $F_0(a), \ B_0(a), N_0(x,a)$ *определены и непрерывны по своим переменным.*

б) $|F_0(.)| \le F_0, \ |B_0(.)| \le B_0, \ |N_0(.)| \le N_0$ *где* $F_0, \ B_0, \ N_0$ *- const > 0.*

в) Функция $N_0 = N_0(x,a), \ x \in \overline{G}, \ 0 \le a < \infty,$ *имеет обобщённые производные* $\frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}, \ \ i = 1,2.$ *и они ограничены по* a *,* $0 \le a < \infty.$

г) $\|B_0\|_{L_2[0,\infty)} < \infty$.

Тогда решение неоднородной задачи (7) – (10) представляется в следующем виде:

$$N(x,a,t) = e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2 a}{4D_i} + \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i X_i}{2D_i}} \cdot \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty} \mu_{n_1 n_2}(t-a) e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} +$$

$$+ \int_0^a \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} G(x_1, x_2, a, x_1^`, x_2^`, a^`) f(x_1^`, x_2^`, a^`, t) dx_1^` dx_2^` da^`$$

где

$$G(x_1, x_2, a, x_1^`, x_2^`, a^`) = \frac{4}{L_1 L_2} \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty} e^{-\lambda_{n_1 n_2}(a-a^`)} \cdot \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \cdot \sin\frac{\pi n_1 x_1^`}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2^`}{L_2}$$

$$\lambda_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^{2} D_i \left(\frac{\pi n_i}{L_i} \right)^2, \qquad n_1, n_2 = 1,2,3,....$$

$\mu_{n_1 n_2}(t)$ *- является решением интегрального уравнения типа восстановления:*

$$\begin{cases} \mu_{n_1 n_2}(t) = \int_0^\infty B_{n_1 n_2}(\xi, t) \mu_{n_1 n_2}(t-\xi) d\xi, \\ B_{n_1 n_2}(a) = B_0(a) \exp\left(\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^2 a}{4D_i} - \lambda_{n_1 n_2} a \right). \end{cases} \tag{12}$$

В третьем параграфе **второй главы** доказан принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач, из которого следует не отрицательность и ограниченность решений рассматриваемых задач.

Рассмотрим следующую интегро-дифференциальную задачу:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F_0(a,t) N + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \qquad x \in G,\ 0 < a < \infty,\ 0 < t \le t_k, \tag{13}$$

$$N(x,a,0) = N_0(x,a), \qquad x \in \bar{G},\ \ 0 \le a < \infty, \tag{14}$$

$$N(x,0,t) = \int_0^\infty B_0(\xi,t) N(x,\xi,t) d\xi, \qquad x \in \bar{G},\ \ 0 \le t \le t_k, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i} + \alpha_i N \right) |_s = 0, \qquad \alpha_i = const, \quad i = 1.2 \tag{16}$$

Здесь функция $N = N(x,a,t)$, означает численность некоторой изолированной популяции в точке x возраста a в момент времени t. $F_0(a,t),\ B_0(a,t) -$ соответственно коэффициенты смертности и рождаемости популяции возраста a в момент времени t. $N_0(x,a) -$ заданная неотрицательная функция.

Определение. Функция $N = N(x,a,t)$, из класса $C^{2,1,1}(Q)$, удовлетворяющая уравнению (13), начальному условия (14) и граничным условиям (15) – (16) в обычном классическом смысле называется классическим решением смешанной задачи (13) – (16).

1. Априорные оценки. Основная наша цель заключается в том, чтобы установить корректность постановки задачи (13) – (16). Для этого сперва докажем справедливость принципа максимума для задачи (13) – (16).

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) *Функция* $F_0(.), B_0(.), N_0(.)$ *определены и непрерывны по совокупности переменных. Кроме того* $F_0(a,t) \le 0,\ B_0(a,t) \ge 0$.

б) $V_i, D_i = const > 0.$

в) $0 \le \max\limits_{(t,a)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1$, $\quad 0 < \min\limits_{(x,t)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1.$

г) $N_0(x,a) \ge 0,\ x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty.$

Тогда справедливы оценки:

$$N(x,a,t) \ge 0 \ \text{для всех} \ (x,a,t) \in Q = \overline{G} \times [0,\infty) \times [0,t_k], \tag{17}$$

$$\|N\|_{C(Q)} \le \|N_0\|_{C(\bar{G}\times[0.\infty))}. \tag{18}$$

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены все условия* **теоремы 2.3.1**, *и кроме того, пусть* N_i *– решение задачи* (13) – (16), *соответстувующее начальным функциям* N_i^0, $i = 1,2.$ *Тогда справедливо неравенство*

$$\min\left\{0, \min_{(x,a)} \Delta N^0, \min_{(x,t)} \Delta N\,|_{a=0}\right\} \le \Delta N \le \max\left\{0, \max_{(x,a)} \Delta N^0, \max_{(x,t)} \Delta N\,|_{a=0}\right\}, \tag{19}$$

из которого следует:

1) *если* $\Delta N^0 = N_1^0(x,a) - N_2^0(x,a) \ge 0$, *то* $\Delta N = N_1(x,a,t) - N_2(x,a,t) \ge 0$ *в* Q.

2) $\|\Delta N\|_{C(Q)} \le \|\Delta N^0\|_{C(\overline{G}\times[0,\infty))}$.

Теорема 2.3.3. *Пусть выполнены условия* **теоремы 2.3.2**. *Тогда интегро – дифференциальная задача (13) – (16) имеет не более одного классического решения.*

Теорема 2.3.4. *(О существовании решения третьей смешанной задачи). Пусть выполнены все условия* **теоремы 2.3.2**, *тогда классическое решение задачи* (13) – (16) *существует.*

Теорема 2.3.5. *При выполнении условий* **теоремы 2.3.2** *классическое решение задачи* (13) – (16) $N(x,a,t)$ *непрерывно зависит от начальной функции* $N_0(x,a)$.

Завершающий четвертый параграф **второй главы** посвящен исследованию пространственно-одномерной линейной системы с функциональными начальными условиями, описывающих состояние биологических систем.

Третья глава диссертации посвящена исследованию нелинейных интегро-дифференциальных задач с учётом временно-возрастных и пространственных распределений.

В первом параграфе **третьей главы** рассматривается математическая модель популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений.

Математическая модель процесса рождаемости и смертности особей в изолированной популяции во многих работах представлена начально-краевой задачей для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных.

Рассмотрим следующие системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих состояние биосистемы в виде[17]:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \qquad x\in G,\ 0<a<\infty,\ 0<t<t_k, \tag{20}$$

в области $\overline{Q}=\overline{G}[0,t_k]\cdot[0,\infty)$, $t_k<\infty$, *где* $\overline{G}=G+S$, $G=\{x=(x_1,x_2):0<x_i<L_i$,

$L_i<\infty$, $i=1.2\}$ S- граница G.

Для выделения единственного решения уравнения (20) зададим начальные и граничные условия:

$$N(x,a,0)=N_0(x,a),\ x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty, \tag{21}$$

$$N(x,0,t)=\int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi, \quad x\in G \tag{22}$$

$$N|_S=0 \tag{23}$$

где $B=B(.)$ – является коэффициентом рождаемости наряду с краевым

[17] Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.

условием (23). Задача (21) - (23) введена и изучена профессором Юнуси М.К. Мы будем рассматривать аналогично третью краевую задачу:

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=0} = 0 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=L_i} = 0, \quad d_i = const > 0 \ , \ i = 1{,}2.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования граничных и начальных условий.

Сформулируем основные предположения на функции, входящие в постановку (20)-(23):

a) Функции $\mathcal{F}(.)$, $B(.)$, $N_0(.)$ определены и непрерывны по совокупности переменных $V_i = const > 0$, $D_i = const > 0.$;

b) $B(N,\xi,t) = B_0(N,\xi,t), |B_0(.)| \leq \nu(\xi,t)$, $\int_0^\infty \nu^2(\xi,t)d\xi < \infty$, $F(N,a,t) = F_0(N,a,t)N$,

$|F_0(.)| \leq F_0$, $F_0 = const > 0$;

c) Функция $N_0 = N_0(x,a)$ имеет обобщенные производные: $\frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}$, $i = 1{,}2$ и они ограничены $x \in \overline{G}$, $0 \leq a < \infty$;;

d) $\frac{\partial F}{\partial N} \leq 0$, $\max\limits_{(x,t)} \int_0^\infty |\frac{\partial B}{\partial N}| d\xi < 1.$

Рассмотрим случай, когда $F_0(N,a,t) = F_0(a)$, $B_0(N,a,t) = B_0(a)$, введем последовательно замены вида

$$\begin{cases} t = a + \tau \ , \ \varphi(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau), \\ \varphi(x,a,\tau) = u(x,a,\tau)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i x_i}{2D_i}\right) \end{cases} \tag{24}$$

тогда задачу (20-23) представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^2 D_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad x \in \overline{G} \ , 0 < a < \infty \\ u(x,0,\tau) = \int_0^\infty \widetilde{B}(\xi)u(x,\xi,\tau)d\xi \ , \ x \in \overline{G} \\ u|_{x_i=0} = 0, \ u|_{x_i=L_i} = 0, \quad i = 1{,}2... \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\widetilde{B}(a) = B_0(a)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^{\,2}a}{4D_i}\right)$$

Теорема 3.1.1. *Пусть имеют место условия a) – c), тогда решение задачи* (20)-(23) *представляется в виде*:

$$N(x,a,t) = \frac{2}{L_1L_2}e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}}\sum_{n_1n_2=1}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \qquad (26)$$

где

$$\lambda_{n_1n_2} = \sum_{i=1}^{2}D_i(\frac{\pi n_1}{L_1})^2 \ , \ n_1 = 1,2..., \ n_2 = 1,2....$$

$\mu_{n_1n_2}(t)$ *-является решением интегрального уравнения типа восстановления*

$$\mu_{n_1n_2}(t) = \int_0^a B_{n_1n_2}(\xi)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi \ , \qquad (27)$$

$$B_{n_1n_2}(a) = \widetilde{B}(a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\ , \ \ 0 \le a < \infty, \ 0 \le t \le t_k \ , \ \ n_i = 1,2...., \ i = 1,2.$$

Теорема 3.1.2. *Пусть имеют место условия a) – c), тогда решение задачи* (25)-(27) *представляется в виде:*

$$|N(x,a,t)| = \frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}}e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\cos\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\cos\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\ .$$

где $\lambda_{n_1n_2} = \sum_{i=1}^{2}D_i(\frac{\pi n_i}{L_i})^2$, $\mu_{n_1n_2}(t)$ -является решением интегрального уравнения (27).

Во втором параграфе **третьей главы** приводится решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями.

Теорема. 3.2.1. *Пусть имеют место условия a)-в) из* §*3.1, тогда существует единственное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи* (22)-(25).

Замечание 3.2.1. Теорема справедлива в случае, когда
$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(N) > 0, \ \ V = V(N) > 0.$

В третьем параграфе **третьей главы** решена интегро-дифференциальная нелинейная система и доказано справедливость решения в случаи третьей краевой задачи.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N}{\partial {x_i}^2}, \tag{28}$$

$$x\in G \quad 0<a<\infty \quad 0<t<t_k$$

$$N(x,a,o)=N_0(x,a),\ x\in G,\ 0\le a<\infty, \tag{29}$$

$$N(x,o,t)=\int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi, \tag{30}$$

$$N\big|_S=0, \tag{30*}$$

где

$$N=(N_1,N_2,...,N_m),\quad N_i=N_i(x,a,t)\ge 0.\quad i=\overline{1,m},$$

$$F(\cdot)=\begin{pmatrix} f_n(\cdot) & ... & f_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ f_{m1} & ... & f_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},\ B(\cdot)=\begin{pmatrix} b_n(\cdot) & ... & b_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ b_{m1} & ... & b_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},$$

$$V_i=\begin{pmatrix} V_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & V_{im}\end{pmatrix},\ D_i=\begin{pmatrix} d_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & d_{im}\end{pmatrix};$$

V_{ij}, d_{ij} - заданные постоянные числа.

Решение задачи (28) – (30) представляется в виде:

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot\cdot Sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty,\ \ 0\le t\le t_n \tag{31}$$

$$Z(a)=\sum_{j=0}^{\infty}Z_j(a),\ Z_j(a)=\int_0^a F_0(\xi)Z_{j-1}(\xi)d\xi,\ Z_0=I,$$

$$E_{\lambda n_1 n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^{n}{}_{n_1n_2}a} & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda^{m}{}_{n_1n_2}a} \end{pmatrix},\ E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}} & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}} \end{pmatrix}$$

Мы докажем справедливость (31) для случая 3-ой краевой задачи.

Действительно, вводя замены $a=a$, $t=a+\tau$, $\varphi(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau)$ уравнение (27) перепишем в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=F_0(a)\varphi+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i{}^2}. \tag{32}$$

В силу условия (29) $N_0(x,a)$ является известной функцией. Действительно, при *t=0* из (31) имеем:

$$N_0(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot\cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot\cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$\mu_{n_1n_2}(-a)=E^{-1}{}_{\lambda n_1n_2}(a)Z^{-1}(a)\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}N_0(x,a)E^{-1}{}_{DV}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

В четвёртом и пятом параграфе **третьей главы** соответственно приведено исследование стационарной численности популяций с учетом возраста и пространственного распределения.

Рассмотрим стационарную численность популяций модельных биосистем, описываемых следующей интегро-дифференциальной системой:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial a}=F(N,a),0<a<\infty\\ N(0)=\displaystyle\int_0^{\infty}B(N(\xi),\xi)d\xi\end{cases} \tag{33}$$

где $N(a)=(N_1(a)...,N_m(a))$- стационарная численность возраста *a,* $0<a<\infty: F(\cdot),B(\cdot)$ -*m* –мерные векторы функции, характеризующие «смертность» и «рождаемость» в биосистеме и являются непрерывными, ограниченными функциями.

Определение. Под решением задачи (33) будем понимать непрерывную дифференцируемую функцию *N=N(a),* $0\le a<\infty$, удовлетворяющей условий (32).

Численность популяций в стационарном случае удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений типа:

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_i}=F\left(\tilde{N}(x,a),a\right)+\sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x_i{}^2},\ x\in G,\ 0<a<\infty, \tag{34}$$

$$\tilde{N}(x,0)=\int_0^\infty B\left(\tilde{N}(x,\xi),\xi\right)d\xi,\ x\in G, \tag{35}$$

$$\tilde{N}\big|_S=0, \tag{36}$$

где $\tilde{N}(x,a)=\left(\tilde{N}_1(x,a)...\tilde{N}_m(x,a)\right)$– численность популяций в точке $x\in G$, $x\in(x_1,x_2)$, $0\le x_i\le L_i, i=1,2$; возраст *a,* $0\le a<\infty$; V_i, D_i- постоянные диагональные матрицы порядка m с неотрицательными элементами, $F=F(\cdot)$, $B=B(\cdot)$- m – мерные вектора, характеризующие смертность и рождаемость популяций.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $F(\tilde{N},a)=A_0(a)\tilde{N}$, $B(\tilde{N},a)=B_0(a)\tilde{N}$, *где* $A_0(a)$, $B_0(a)$- *заданные матрицы порядка* m *определяются как в предыдущем пункте, тогда решение задачи* (35),(36),(37) *определяется следующим образом:*

$$\tilde{N}(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(a)\cdot Sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),\ x\in G,\ 0\le a<\infty \tag{37}$$

где

$$\mu_{n_1n_2}(a)=E_{\lambda n_1n_2}(a)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}, \tag{38}$$

$$\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}:(I-A)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}=0,$$

$$A=\int_0^\infty B(\xi)Z(\xi)E_{\lambda n_1n_2}(\xi)d\xi,$$

а матрица $Z=Z(a)$ *является решением задачи:*

$$\frac{dZ}{da}=A_0(a)Z,\ 0<a<\infty,$$

$$Z(0)=I.$$

Следуя **теореме 3.5.1.** мы докажем, что справедлива аналогичная теорема для 3-ой краевой задачи. Введем замену $\tilde{N}(x,a)=Z(a)\psi(x,a)$, тогда легче видеть, что функция $\psi(x,a)$ удовлетворяет задаче:

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_ik\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{2}D_{ik}\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x_i{}^2},$$

$\psi_k(x_1,x_2,a)=0$ при $x_i=0, x_i=L_i, i=1,2.$

Решение последней задачи представляется в виде:

$$\psi(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sum_{n1n2=1}^{\infty}\overline{\mu}^{k}_{n1n2}e^{-\lambda^k_{n1n2}a}Cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\,e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ik}x_i}{2D_{ik}}} \qquad (39)$$

и с учетом введенного обозначения получим (38).

Коэффициент $\overline{\mu}_{n1n2}$ определим так, чтобы имело место условие (35). Подставляя функцию (38) в (35), получим уравнение (40).

Следствие 3.5.1. *Если* $\det(I-A)\neq 0$, *то* $\tilde{N}(x,a)=0$. *В самом деле, однородная система* (41) *имеет только нулевое решение* $\overline{\mu}_{n1n2}=0$ *и в силу* (37) *получим, что* $\tilde{N}(x,t)=0$

Следствие 3.5.2. *Пусть* $\det(I-A)=0$, *тогда система* (38) *кроме нулевого решения имеет и ненулевые решения. Например,* $\overline{\mu}^{i}_{n1n2}=(-1)^{i-1}M_i$, *где* M_i *- миноры (m-1)-го порядка матрицы* $(I-A)$ *(предполагается, что ранг* $(I-A)=m-1$*).*
В этом случае $\left\|\overline{\mu}^{i}_{n1n2}\right\|\leq C_1\exp\left(-C_2\sum n_i^2\right)$, *где* $C_i=const>0$.

В шестом параграфе **третьей главы** приведено исследование численности изолированной популяции описываемой интегро-дифференциальной задачей для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений.

Пусть численность изолированной популяции описывается при помощи следующих уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i(N)\frac{\partial N}{\partial x_i}\right), \qquad (40)$$

$$N(x,0,t)=\int_0^{\infty}B(N(x,\xi,t))d\xi, \qquad (41)$$

где $N=N(x,a,t)$ - численность популяций в точке $x\in E^2$,

$x=(x_1,x_2)$, возраста a, $0\leq a$ в момент времени t,

$0\leq t\leq\infty$, V_i, $F(\cdot)$, $D_i(\cdot)$, $B(\cdot)$ - биологические характеристики популяций.

Мы будем рассматривать для популяционной модели (39)—(41) образования плоских и S-волн. Плоские волны без учета возрастного состава изучены в работах[18], а S - волны были введены и изучены для нелинейных задач математической физики академиком А.А.Самарским[19] а также в работе Ю.М.Свирежева[13]

Стоячие волны. Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} = k_0 \frac{\partial}{\partial x}(N^\sigma \frac{\partial N}{\partial x}) + q_0 N^\beta , \\ N(x,0,t) = \int_0^\infty B(N(x,a^`,t))da^` . \;\; x \in E^1 , a \geq 0 , t \geq 0 , \end{cases} \tag{42}$$

где $\beta > 1,\ \sigma \geq 0,\ k_0,\ q_0$ - положительные константы. Введя замены $t = a + \tau$, $U(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau)$ получим систему S-волн:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a} = k_0 \frac{\partial}{\partial x}(U^\sigma \frac{\partial U}{\partial x}) + q_0 U^\beta , \\ U|_{a=0} = \int_0^\infty B(U(x,a,\tau)da^{``} . \end{cases} \tag{43}$$

Решение (43) будем искать в виде:

$$U(x,a,\tau) = g(a,\tau) f(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\varphi(a,\tau)} .$$

Таким образом, решение исходной части задачи имеет вид:

$$N(x,a,t) = \mu(t-a)[1 - q_0(\beta-1)\mu^{\beta-1}(t-a)a]^{-\frac{1}{\beta-1}} f(\xi), \tag{44}$$

$$M(t) = \int_0^\infty B_0(a)[1 - q_0\mu(t-a)a]^{-1}\mu(t-a)da. \tag{45}$$

Заметим, что если $\sigma + 1 \neq \beta$, то достаточно для определения функции $M(t)$ выполнения условия (44) в одной точке x (например, $x = 0$).

---

18 Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.

19 Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.

<u>Стационарные волны.</u> Рассмотрим задачу (43) в случае, когда $F(N)=0,\ \frac{\partial N}{\partial t}=0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial a}=k_0\frac{\partial}{\partial x}(N^\sigma\frac{\partial N}{\partial x}),\ -\infty<x<\infty\ ,\ a>0, \\ N(x,0)=\int\limits_0^\infty B(N(x,\xi^`))d\xi^`. \end{cases} \tag{46}$$

Решение уравнения (46) будем искать в виде:

$$N(x,a)=g(a)f(\xi),\ \xi=\frac{x}{\varphi(a)}$$

Заметим, что если $\sigma+1=\beta$, то $\varphi(a,t-a)=\sqrt{\frac{k_0}{q_0}}$, $\xi=\sqrt{\frac{k_0}{q_0}}x$, $f(\xi)=f(\xi_0)$ и уравнение (46) принимает следующий вид:

$$\mu(t)=\int\limits_0^\infty\frac{B_0(a)\mu(t-a)}{[1-q_0\sigma\mu^\sigma(t-a)a]^{\frac{1}{\sigma}}}da. \tag{47}$$

В этом случае, волны, порождаемые формулой (47) по аналогии назовем S-волнами. Если же $\beta>\sigma+1$, то соответствующие волны (45) назовем HS и при $\beta<\sigma+1$ LS волнами.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена алгоритму численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и разработки комплексов компьютерных программ для образования популяционных волн.

В первом параграфе **четвертой главы** для нелинейной системы интегро-дифференциальных задачи приведён алгоритм численного решения.

Во втором параграфе **четвертой главы** приведены описания и результаты комплекса компьютерных программ. Для решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи разработан комплекс компьютерных программ на языке программирования высокого уровня С++.

Пятая глава диссертационной работы состоит из двух параграфов, является заключительной и посвящена обсуждению полученных результатов, а также рассмотрению некоторых вопросов их практического применения.

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы

- для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для третьей краевой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найдено и обосновано решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями [1-А, 6-А, 8-А, 11-А];

- доказан принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найдены априорные оценки, так же найдено решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями [5-А, 9-А, 12-А];
- создана математическая модель интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказано её решение [4-А, 7-А];
- доказано и обосновано стационарное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложено определение стационарной численности с учетом возраста и пространственных распределений [2-А, 7-А];
- найдено решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений [7-А,8-А];
- разработан алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и приведены результаты комплекса компьютерных программ [2-А, 3-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты исследования имеют значительный вклад в теорию популяционных динамик и могут быть полезны для решения прикладных задач в экологии, биологии и управлении.

Разработанный алгоритм и программный комплекс позволяют решать широкий класс нелинейных интегро-дифференциальных задач, связанных с моделированием популяционных волн, с учётом как временных, так и пространственных эффектов. Применение этих методов в реальных биологических и экологических задачах может значительно повысить точность предсказаний динамики популяций в условиях сложных взаимодействий и внешних воздействий.

Ключевым результатом является создание инструмента, который может быть использован для анализа широкого спектра моделей, от популяционных волн в экосистемах до более специализированных биологических моделей, например, для оценки устойчивости популяций или разработки эффективных стратегий управления ресурсами. Программный комплекс также может стать основой для дальнейших разработок в области численного моделирования экологических и биологических процессов.

Результаты диссертационной работы показывают значимость математического моделирования с функциональными начальными и краевыми условиями для более точного и комплексного понимания динамики популяционных волн. Эти результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области экологии, биологии и управления.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в рецензируемых журналах:

[1-А] Ф. Раимзода Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами / М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник Таджикского национального университета. -Душанбе. -2015. -1/4(168). – С.15-17.

[2-А] Ф. Раимзода Об одном методе решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/2(196). – С. 8-13.

[3-А] Ф. Раимзода Алгоритм численного решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/3(200). – С. 20-22.

[4-А] Ф. Раимзода Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2021. №2. – С. 71-80.

[5-А] Ф. Раимзода Решение одной пространственно-одномерной линейной задачи с функциональными условиями / М.Илолов, Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. Т.66. №7-8. С. 400-408.

[6-А] Ф. Раимзода. Представление решения одной неоднородной задачи/ Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана, Т.67, №5-6, 254-260 с.

Статьи и тезисы в публикациях конференций:

[7-А] Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода //

Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.
[8-А] Раимзода Ф. Решение неоднородной интегро-дифференциальной задачи с функциональными начальными условиями / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, «Современные проблемы математики и её приложения» посвященной 20–летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.) С.180-182.
[9-А] Раимзода Ф. Компьютерное моделирование процесса защиты растенй с произвольными трофическими функциями / Одинаев Р.Н., Раимзода Ф. // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата (Душанбе, 25-26 сентября 2018 г.) С.132-137.
[10-А] Раимзода Ф. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф, Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз. // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год, 298-302 с.
[11-А] Раимзода Ф. Об одной обратной задаче для теплопроводности / Илолов М., Раимзода Ф. // Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат. г.Душанбе 2023 год,
[12-А] Раимзода Ф. Об одном решении задачи с начальными и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф // Материалы XII-международной научно-

практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы,20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе,18 май 2024), 333-336 с.

[13-А] Раимзода Ф. Решение одной задачи с функциональными начальными условиями и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф., Раимзода Ф., Мусоев С.С. // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования».(22-23 ноября 2024г.), 107-110с.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК:517911/.958
ББК: 22.193
Р-18

Бо ҳуқуқи дастнавис

Раимзода Фаррухшох

ОИД БА НАЗАРИЯИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ҒАЙРИХАТТӢ ДАР ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ БО ШАРТҲОИ ИБТИДОИИ ФУНКСИОНАЛӢ ВА ТАТБИҚИ ОН ДАР ДИНАМИКАИ ПОПУЛЯТСИЯҲО

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 05.13.18 Моделсозии математикӣ, методҳои ададӣ ва маҷмуъи барномаҳо

Душанбе-2025

Кори илмӣ дар кафедраи моделсозии математикӣ ва компютерии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро гардидааст.

Роҳбарони илмӣ: **Юнусӣ Маҳмадюсуф Қамарзода** доктори илмҳои физика ва математика, профессор.
Илолов Мамадшо Илолович, академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физика ва математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиали Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муқаризони расмӣ: **Фарҳод Шокир** - д.и.ф.м., ходими пешбари илмии шубаи наномавод ва нанотехнологияи Институти физикаю техника ба номи С.У.Умарови АМИТ
Қозиев Гулназар Мавлоназарович – н.и.ф.м., мудири кафедраи риёзиёт дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Институти математика ба номи А.Ҷураеви АМИТ.

Ҳимоя 11 июни соли 2025 соати 14:00 дар ҷаласаи шурои диссертатсионии 6D.КАО-011 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки дар суроғаи: 734025, Шаҳри Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, корпуси 17, аудиторияи 203 ҷойгир аст, баргузор мешавад.

Диссертатсияро дар Китобхонаи маркази илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё дар сомонаи http://www. tnu.tj.
Автореферат фиристода шудааст «_____» «____» 2025с.

Котиби илмӣ шурои диссертатсионии 6D.КАО-011,
номзади илмҳои физика ва математика Ғафоров А.Б.

Муқаддима

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Дар таҳқиқи масъалаҳо дар соҳаҳои физика, механика ва дигар фанҳои илмӣ муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ аҳамияти муҳим доранд. Ба синфи чунин муодилаҳои тартиби дуюм, ки ба намуди параболикӣ тааллуқ доранд, диққати махсус дода мешавад ва барои онҳо вариантҳои гуногуни шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ баррасӣ карда мешаванд. Дар ин соҳа олимон ба монанди А. Фридман[1], В. С. Владимиров[2], О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников[3], Б. П. Михайлов[4], А. Н. Тихонов ва А. А. Самарский [5], Р. Курент[6] ва корҳои А. М.Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник [56], А. Ф. Филиппов [7], О. А. Олейник ва С. Н. Кружков[8], инчунин бисёр олимони дигар ҳиссаи калон гузоштанд. Ин таҳқиқотҳо ба тафтиши дурустии шартҳои ибтидоӣ ва сарҳадӣ дар фазои маҳдуд ва беохир, ба даст овардани ҳисобҳои априорӣ ва формулаҳо барои муаррифии ҳалҳо ва таҳлили устувории ҳаллӣ статсионарӣ нигаронида шудаанд. Принсипҳои максимум, теоремаҳои муқоисаи ҳалҳо ва як қатор дигар ҷиҳатҳо низ омухта мешаванд. Дар протсесси кор дар чунин соҳаҳо, монанди биологияи математикӣ, физика, экология ва иктисодиёт, тартиб додани масъалаҳои нави муодилаҳои дифференсиалии дар ҳосилаҳои хусусӣ дорои шартҳои функсионалӣ ба миён омаданд. Муодилаҳои тартиби аввал бо масъалаҳои хаттӣ ва шартҳои функсионалӣ дар осори олимон ба монанди Вольтерра В[9], Полуэктов

---

[1] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа .-М.: Мир, 1968.-423с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М:, Наука,1988.-512с.

[3] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, м.Наука, 1967.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука, 1976.-39Iс.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, м., Наука, 1972.

[6] П.Курант Р. Уравнения с частными производными, М.: Мир 1964.

[7] Филиппов А.Ф. Об условиях существования решений квазилинейного параболического уравнения, дан СССР, т.141,N3(I961), с. 568-570.

[8] Олейник О.А. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН, т.16 в 5(1961), с. 115-155.

[9] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: ИКИ, 2004. – 288 с.

Р.А[10], Моисеев Н.Н[11], М.Юнус[12] мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд. Дар асарҳои М. Юнусӣ[12] ҷанбаҳои гуногуни шартҳои функсионалӣ муфассал таҳлил шудааст.

Бо рушди технологияи иттилоотӣ назарияи мавҷҳои ғайрихаттӣ ҳамчун фанни илмӣ фаъолона инкишоф ёфта наздикшавӣ барои ҳалли ададии муодилаҳои хусусиро имкон медиҳад, ки паҳншавии мавҷҳоро дар муҳити гуногун тавсиф кунанд. Ба вуҷуд овардани асбобҳои пуриқтидори математикӣ барои ҳалли дақиқи аналитикии як қатор муодилаҳои дифференциалии гайрихаттӣ имкониятҳо фароҳам овард. Моделсозии математикӣ воситаи асосии омӯзиши сенарияҳои гуногуни инкишоф ва таъсири мутақобилаи популятсияҳо, баҳодиҳии динамикаи вақтӣ-фазоии системаҳои биологӣ ва пешгӯии аксуламали системаҳои табиӣ ба таъсироти беруна гардид. Тағйироти як ё якчанд характеристикаҳои системаи биологии омӯхташавандаро бо назардошти синну сол ва сохтори фазоии онро бо истифода аз моделҳои математикӣ тавсиф кардан мумкин аст.

Дар диссертатсия яке аз масъалаҳои муҳими моделсозии математикӣ ва математикаи амалӣ – моделсозии равандҳои популятсияҳои биологӣ ва асосноккунии онҳо, инчунин таҳияи алгоритмҳо бо мақсади ошкор ва ташаккул додани мавҷҳои истодаи популятсияи ғайрихаттӣ бо назардошти вақту синну солӣ, тақсимоти фазоии системаҳои мураккаб (иҷтимоӣ, иқтисодӣ, экологӣ, техникӣ ва ғайра) баррасӣ мешавад. Аз ин рӯ, диссертатсияи мазкур мубрам ва серталаб аст.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ. Дар биологияи математикии популятсия тавсифи популятсияҳои сохторӣ яке аз масъалаҳои муҳимтарин ва ҷолибтарин дар асоси дастгоҳи муодилаҳои дифференсиалии дар ҳосилаҳои хусуси мебошад. Масъалаҳои математикие, ки дар ин кори диссертатсионӣ омӯхта шудаанд, ба

[10] Полуэктова Р.А. Динамическая теория биологических популяций [Текст] / под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

[11] Моисеев Н.Н. Модели экологии и эволюции [Текст] / М.Н. Моисеев. – М.: Знание, 1983. – 64 с. – (Новое в жизни науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. № 10).

[12] Юнусов М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями. Диссертация на соискание ученной степени доктора физ-мат. наук.м.: ВЦ АН СССР, 1990г.-312с.

системаҳои биологӣ, популятсияҳо бо назардошти таркиби синну солӣ, тақсимоти фазоии мавҷҳои популятсия, ки бо истифода аз синфи масъалаҳои интегро-дифференсиалӣ тасвир шудаанд, бахшида шудааст.

Соли 1905 С.С.Четвериков аввалин маротиба мафҳуми мавҷҳои популятсияро ба истифодаи экологӣ ворид кард. Аз он вақт инҷониб, бисёр мутахассисон масъалаи шумораи популятсияҳои биологии ба ҳам таъсиркунандаро фаъолона омӯхтанд, ки он дар корҳои сершумори олимон ба монанди В. Вольтер[9], Ю.М.Свирежев[13], Д.О.Логофет[14], А.Д.Базыкин[15] инъикос ёфта, дорои руйхати библиографии васеъ мебошад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва ё мавзуъҳои илмӣ. Диссертатсия илмӣ дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмӣ-тадқиқотии кафедраи моделсозии математикӣ ва компютерии факултети механика-математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 анҷом дода шудааст, дар мавзӯи «Таҳияи моделҳои математикӣ, алгоритмҳо ва барномаҳои ҳалли масъалаҳои амалӣ» ва барои солҳои 2020-2025 дар мавзуи «Таҳияи моделҳои математикӣ ва компютерӣ, алгоритмҳо, комплекси программаҳо ва методҳои таълими информатика, математика ва табиатшиносӣ».

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии таҳқиқи кори диссертатсионии мазкур таҳияи усули таҳлилии моделсозии математикии баъзе падидаҳои физикӣ, аз қабили мавҷҳои популятсионӣ ва мавҷҳои истодаи популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти тақсимоти вақт ва фазоӣ мебошад, ки бо муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм ва сеюм бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ тавсиф карда мешаванд.

---

[13]Свирежев Ю.М. Математическое моделирование биологических систем / Ю.М. Свирежев, Е.Я. Елизаров. – М.: Наука, 1972. – 160 с.

[14] Логофет, Д.О. Исследование системы пар «хищник—жертва», связанных по конкуренции [Текст] / Д.О. Логофет // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 224, № 3. – С. 529-531.

[15] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 181 с.

Вазифаҳои таҳқиқот. Вазифаҳои асосии таҳқиқоти диссертатсионӣ иборат аст:

- барои масъалаи интегро-дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда дар ҳолати хаттӣ исбот кардани теоремаи мувофиқати мутлақи якхелаи қаторҳои Фурьеро барои масъалаи 3-канорӣ, ки дар он коэффициентҳои қатори Фурье муодилаи интегралии навъи баркароркуниро қонеъ мекунанд, ҳалли масъалаи якҷинса бо шартҳои функсионалӣ дар шакли қаторҳои Фурьеро ёфта асоснок шавад;
- принсипи максимум барои масъалаҳои хаттии интегро-дифференсиалӣ бо шартҳои функсионалӣ исбот карда шавад ва арзёбиҳои априори пайдо карда шавад, инчунин ҳалли масъалаҳои хаттии фазоӣ-якченака бо шартҳои функсионалӣ пайдо карда шавад;
- сохтани модели математикии масъалаи интегро-дифференсиалии мавҷҳои популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти сохтори вақту синну сол ва тақсимоти фазоӣ ва исботи ҳалли он;
- ҳалли статсионарии масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттиро исбот ва асоснок кардан, муайян кардани шумораи статсионарии популятсияҳо бо назардошти тақсимоти синну сол ва фазоӣ.
- ҳалли масъалаи интегро-дифференсиалии шумораи популятсияи маҳдудкардашуда дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалии ташаккули мавҷҳои ҳамворӣ, S-мавҷҳо, мавҷҳои истода ва статсионарӣ бо назардошти таркиби синну сол ва тақсимоти фазоӣ ёфта шавад;
- таҳия кардани алгоритми ҳалли ададии масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ ва комплекси барномаҳои компютерӣ барои мавҷҳои популятсионӣ дар системаҳои биологӣ.

Объекти таҳқиқот. Объекти омӯзиш синфи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ мебошад.

Предмети таҳқиқот. Моделсозии математикии мавҷҳои популятсия бо истифода аз системаҳои хаттӣ ва ғайрихаттии муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ.

Навгони илмии таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- барои масъалаи интегро-дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда дар ҳолати хаттӣ исботи теоремаи мувофиқати мутлақи якхелаи қаторҳои Фурьеро барои масъалаи 3-канорӣ, ки дар он коэффитсиентҳои қатори Фурье муодилаи интегралии навъи барқароркуниро қонеъ мекунанд, ҳалли масъалаи якҷинса бо шартҳои функсионалӣ дар шакли қаторҳои Фурье ёфта ва асоснок шудааст;
- принсипи максимум барои масъалаҳои хаттии интегро-дифференсиалӣ бо шартҳои функсионалӣ исбот карда шуда ва арзёбиҳои априорӣ пайдо карда шудааст, инчунин ҳалли масъалаҳои хаттии фазоӣ-якченака бо шартҳои функсионалӣ пайдо карда шудааст;
- сохтани модели математикии масъалаи интегро-дифференсиалии мавҷҳои популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти сохтори вақту синну сол, тақсимоти фазоӣ ва исботи ҳалли он оварда шудааст;
- ҳалли статсионарии масъалаи интегро-дифферентсиалии ғайрихаттӣ исбот ва асоснок карда шудааст, муайян кардани шумораҳои популятсияи статсионариро бо назардошти синну сол ва тақсимоти фазоӣ пайдо карда шудааст;
- ҳалли масъалаи интегро-дифференсиалии шумораи популятсияи ҷудошуда дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалии ташаккули мавҷҳои ҳамвор, S-мавҷҳо, мавҷҳои истода ва статсионарӣ бо назардошти таркиби синну сол ва тақсимоти фазоӣ пайдо карда шудааст;
- алгоритми ҳалли ададии масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ таҳия карда шудааст, инчунин комплекси барномаҳои компютерӣ барои мавҷҳои популятсионии системаҳаи биологӣ сохта шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Кор характери назариявӣ ва амалӣ дорад. Қимати назариявии кор дар омӯзиши масъалаҳои хаттӣ ва ғайрихаттӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ мебошад. Натиҷаҳои назариявии кори диссертатсиёниро барои таълими курсҳои махсуси донишҷӯён ва магистрҳои ихтисоси «Информатика» аз фанни «Моделсозии математикии системаҳои биологӣ» ва «Моделсозии математикии системаҳои мураккаб» дар донишгоҳҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон истифода бурдан мумкин аст.

Аҳамияти амалӣ аз истифодаи натиҷаҳои кори диссертатсиёнӣ ба даст овардашуда дар моделсозии математикии шумораи популятсияҳои биологӣ ва барои ҳалли масъалаҳои амалии экология, биология ва идоракуни мебошад.

Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- теоремаҳо дар бораи мувофиқати мутлақи қаторҳои Фурье барои масъалаи 3-канорӣ, ки коэффитсиентҳои қатори Фурье ба муодилаи интегралии намуди барқарорсозӣ қаноат мекунад;
- теоремаҳои принсипи максимум барои масъалаҳои хаттӣ бо шартҳои функсионалӣ ва арзёбиҳои априорӣ;
- теоремаҳо дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли классикӣ барои масъалаҳои фазоӣ-якченака ва масъалаҳо бо шартҳои функсионалӣ дар ҳамворӣ;
- теоремаҳо дар бораи мавҷудияти роҳҳои ҳалли модели математикии масъалаи интегро-дифференсиалии мавҷҳои популятсия дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти сохтори синну сол ва тақсимоти фазоӣ;
- теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалли статсионарии масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ бо назардошти тақсимоти синну сол ва фазоӣ;
- теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалли масъалаи интегро-дифференсиалии шумораи популятсияҳои ҷудошуда дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ;
- барои системаи ғайрихатии масъалаҳои интегро-дифференсиалӣ алгоритми ҳалли ададӣ таҳия шуда, барои мавҷҳои популятсионии биологӣ комплекси барномаҳои компютерӣ тартиб дода шудааст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Ҳама теоремаҳо, тасдиқотҳо ва формулаҳо дар таҳқиқоти диссертатсионӣ бо далелҳои дақиқ тасдиқ карда шудаанд, як қатор хулосаҳо бо таҳқиқоти дигар муаллифон мувофиқанд.

Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ (бо шарҳ ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ мувофиқи бахшҳои зерини шиносномаи ихтисоси 05.13.18 – «Моделсозии математикӣ, усулҳои ададӣ ва комплекси барномаҳо» анҷом дода шудааст» (бандҳои 2,5,6,8):

***банди* 2**. Таҳияи усулҳои сифатӣ ва тахминии таҳлилии омӯзиши моделҳои математикӣ.

***банди* 5**. Таҳқиқи комплексии проблемахои илмӣ-техникӣ бо истифода аз технологияи ҳозиразамони моделсозии математикӣ ва таҷрибаи ҳисоббарор.

***банди* 6**. Кор карда баромадани усулҳо ва алгоритмхои нави математики барои шарҳ додани таҷрибаҳои мукаммал дар асоси модели математикии он.

***банди* 8**. Таҳияи системаҳои компютерӣ ва моделсозӣ.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои дар таҳқиқоти диссертатсионӣ пешниҳодшуда аз ҷониби муаллиф шахсан ба даст оварда шудааст. Муҳокима ва нашри натиҷаҳои илмӣ бо ҳаммуаллифон ва роҳбар анҷом дода шуд, аммо мазмуни асосии ин таҳқиқот ва муқаррароти барои дифоъ пешниҳодшуда саҳми шахсии муаллифро дар кори иҷрошуда инъикос мекунанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Маводҳои диссертатсия дар конфронсҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ муаррифӣ ва муҳокима гардиданд: Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии ҳайати профессорӣ-омӯзгорӣ ва кормандони ДМТ бахшида ба 25-солагии истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон (2016); Конференсияи илмӣ-назариявии ҷумҳуриявии ҳайати профессорӣ-омӯзгорӣ ва кормандони ДМТ, бахшида ба “20-умин солгарди Рӯзи Ваҳдати миллӣ” ва “Соли ҷавонон” (Душанбе 2017г); Конференсияи илмӣ-назариявии ҷумҳуриявии ҳайати профессорону омӯзгорон ва кормандони ДМТ бахшида ба "Даҳсолаи байналмилалии амал об барои рушди устувор, солҳои 2018-2018", "Солҳои рушди сайёҳӣ ва ҳунарҳои мардумӣ", "140-

солагии зодрӯзи қаҳрамони Тоҷикистон Садриддин Айнӣ ва 70-солагии таъсиси Донишгоҳи миллии Тоҷикистон" (2018); Конференсияи байналмилалии илмӣ-назариявӣ, бахшида ба 70-солагии таъсисёбии ДМТ ва бахшида ба 80-солагии таваллуди академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, д.ф.-м.н., профессор Н.Р. Раҷабова "Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи онҳо" (Душанбе, 2018); Конференсияи илмӣ-амалӣ ҷумҳуриявии ҳайати устодону омӯзгорони ДМТ, бахшида ба "Солҳои рушди деҳот, сайёҳӣ ва ҳунарҳои мардумӣ (2019-2021) " ва "400-солагии Миробид Сайдои Насафӣ" (20-27 апрели соли 2019); Конференсияи илмии ҷумҳуриявӣ бахшида ба 80-солагии математики маъруфи тоҷик, профессор Бекназар Имомназар (Душанбе, 10-11 июни соли 2019); Конференсияи илмӣ-амалӣ ҷумҳуриявии ҳайати устодону омӯзгорони Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, бахшида ба "5500-солагии Саразми қадимӣ" , "700-солагии шоири барҷастаи тоҷик Камоли Хуҷандӣ" ва "20-солагии омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф (2020-2040 солҳо)"; XI Конференсияи байналмилалии илмӣ-назариявӣ бахшида ба 70-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Юнуси Маҳмадюсуф Қамарзод (Душанбе, 27-28 декабри соли 2018); Конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 70-солагии профессор Ҷангибеков Гулхоҷа (Душанбе, 30-31 январи соли 2020); Конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 70-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон Шабозов Мирганд Шабозович (Душанбе, 24-25 июни соли 2022); Конференсияи байналмилалии илмӣ, "Мушкилоти муосири математика ва барномаҳои он" бахшида ба 20-солаи рушди илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ солҳои 2020-2040 (Душанбе, 20-21 октябри соли 2022); Конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии "Таҳлили компютерии мушкилоти илму техника", бахшида ба "2020-2040, 20-солаи омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф" ва "75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон" Душанбе 2023; дар Конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 75-солагии ДМТ, 20-умин солгарди рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ 2020-2040 ва 85-солагии академики

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон Нусрат Раҷабов. Душанбе 2023; Конференсияи XII-байналмилалии илмию амалии “Мушкилоти муосири моделсозии математикӣ ва татбиқи он”, бахшида ба “Эълоншудани солҳои 2020-2040, 20-солагии омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илм ва маориф” ва “75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон” (Тоҷикистон, Душанбе, 18 майи соли 2024).

Интишорот аз рӯйи мавзӯи диссертатсия. Тибқи маводҳои таҳқиқоти диссертатсионӣ 12 мақолаи илмӣ, аз ҷумла 6 мақола дар нашрияҳои аз ҷониби КОА назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА Федератсияи Россия таҳризишаванда ва 6 мақола дар маводҳои конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалӣ нашр шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Кори диссертатсионӣ аз муқаддима, панҷ боб, хулоса ва рӯйхати адабиёт истифодашуда иборат аст. Ҳаҷми умумии диссертатсия 136 саҳифаро ташкил медиҳад, аз ҷумла 16 расм ва 134 рӯйхати библиографӣ. Рақамгузории формулаҳо барои ҳар як боб алоҳида ва барои расмҳо ва ҷадвалҳо умумӣ аст.

МУҲТАВОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Маводҳо ва усулҳои таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ, яъне усули арзёбии априорӣ, принсипи максимум, усули ҷудо кардани тағирёбандаҳо, усули табдили Фурье ва усули наздикшавии пайдарпайӣ истифода мешаванд.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро мухтасар шарҳ медиҳем.

Дар **муқаддима** аҳамияти мавзӯи кори диссертатсионӣ асоснок карда мешавад, мундариҷаи кор мухтасар тасвир карда мешавад, шарҳи мухтасари натиҷаҳои мавҷуда дар мавзӯи диссертатсия оварда мешавад.

Боби якуми таҳқиқоти диссертатсионӣ ба таҳлили адабиёти омухташудаи моделсозии математикии мавҷҳои популятсионӣ, ки бо муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ тасвир карда мешаванд, бахшида шудааст.

Дар **боби дуюми** кори диссертатсионӣ масъалаи хаттии интегро-дифференсиалӣ бо шартҳои функсионалии ибтидоӣ ва канорӣ таҳқиқ карда мешавад.

Боби дуюми диссертатсия аз 4 параграф иборат аст ва ба таҳқиқи масъалаи интегралӣ-дифференсиалӣ бо шартҳои функсионалии ибтидоӣ ва канорӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи дуюми **боби дуюм** барои масъалаи интегралӣ-дифференсиалӣ дар ҳолати хаттӣ теорема дар бораи мувофиқати мутлақи қатори Фурье барои масъалаи 3-канорӣ исбот карда шудааст, ки дар он коэффитсиентҳои қатори Фурье ба муодилаи интегралии намуди барқарорсозӣ қаноат мекунад.

Дар соҳаи

$Q = G \times [0,t_k] \times [0,\infty],\ 0 \le t_k < \infty,$ дар инҷо

$\ddot{G} = G + S,\ G = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < L_i,\ L_i < \infty,\ i = 1,2\}$

$S-$ ҳудуди соҳаи G. Масъалаи зеринро дида мебароем [1 − A]:

Ҳалли муодилаи

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F(a,t)N + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i},\ x \in G,\ 0 < t \le t_k,\ 0 < a < \infty \qquad (1)$$

ёфта шавад, ки шартҳои ибтидои ва сарҳадии зеринро қаноат мекунад:

$$N|_{t=0} = N_0(x,a),\ \ x \in \ddot{G},\ 0 \le a < \infty \qquad (2)$$

$$N|_{t=0} = \int_0^\infty B(a,t)N(x,a,t)da,\ \ x \in \ddot{G},\ \ 0 \le t \le t_k, \qquad (3)$$

$$N(x,a,t)|_S = 0,\ \ 0 \le a < \infty,\ \ 0 \le t \le t_k,\ \ x \in \ddot{G}. \qquad (4)$$

Дар ин ҷо $V_i, D_i = 1,2$ – ададҳои мусбати додашуда, $F(a,t), B(a,t), N_0(x,a)-$ функсияҳои муқарраршудаи манфии аргументҳои худ. Функсия $N_0 = N_0(x,a),\ x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty,$ ҳосилаҳои умумӣ доранд

$\frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}$ ва онҳо бо a, маҳдуд карда шудаанд, $0 \le a < \infty,\ i = 1,2.$

Қайд мекунем, ки муодилаи (1) тақсимоти шумораи популятсияро дар нуктаи $x \in \ddot{G}$ сину соли $a \in [0, \infty)$ дар вақти $t \in [0, t_k]$ тасвир мекунад, ва муодилаи (3) функсияи таваллудёбиро барои шумораи навзодон муайян мекунад.

Масъалаи (1) - (4) умумикунии табиии масъалаҳои мувофиқи дар корҳои[16] мебошад, ки дар он ҳолати *N=N(a,t)*, баррасӣ карда мешавад.

Аз ин баъд чунин меҳисобем, ки шартҳои мувофиқа иҷро шудаанд: $N(x,a)|_S = 0,\ \ N_0(x,a) = \int_0^\infty B(a,0) N_0(x,a) da.$ Дар акси ҳол, мо бояд функсияи $N(x,a,t)$ -ро ҷудошаванда ҳисоб кунем, ки ин баъзе мушкилоти формалиро ба вуҷуд меорад, аммо ҳеҷ чизро тағйир намедиҳад.

Теоремаи 2.2.1. *Бигзор* $F(a,t) \equiv F(a),\ B(a,t) \equiv B(a)$ барои ҳамаи $0 \le a < \infty,\ 0 \le t \le t_k,\ \|F(a)\|_C < \infty,\ \|B(a)\|_C < \infty,\ \frac{\partial N_0}{\partial a} \in C_{(0,\infty)}$ ва $\delta_{n_1,n_2}^{\max}$, $\delta|_{n_1,n_2}$ *- решаҳои муодали ҳисоб карда мешавад*

$$\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a) e^{-\delta a} da = 1,\ \ \widetilde{B}_n(a) = B(a) e^{-\gamma_n a + \int_0^\infty F(\xi) d\xi}, \tag{5}$$

$$n_k = 1,2,3,...,\ \ n = (n_1, n_2),\ k = 1,2$$

Дар ин ҳолат ҳалли масъалаи (1) - (4) дар шакли

$$N_0(x,a,t) = \frac{2}{L_1 L_2} \sum_{n=1}^\infty C_n^j e^{\delta_n^{\max}(t-a)} + \sum_{j=1}^\infty C_n^j e^{a_n^j (t-a)} \cos(\omega_n^j (t-a)) \exp\{-\lambda_n a + \int_0^a F(\xi) d\xi + \frac{V_1 x_1}{2D_1} + \frac{V_2 x_2}{2D_2}\} *$$
$$* \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \tag{6}$$

[16] Ф. Раимзода Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами / М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник Таджикского национального университета. -Душанбе. -2015. -1/4(168).-С.15-17.

пешниҳод мешавад, ки дар ин ҷо

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{V^2 k}{nD_k} + D_k\left(\frac{\pi\, n_k}{L_k}\right)^2\right],\ n=(n_1,n_2),\ n_k=1{,}2.3,...,\ k=1{,}2,\ C_n^j,\ j=1{,}2{,}3{,}4.\text{-}$$

коэффитсиентҳои тақсимоти функсияи

$$\widetilde{N}_n^0(a) = \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} N_0(x,a)\, e^{\frac{V_1 x_1}{2D_1} - \frac{V_2 x_2}{2D_2} - \int_0^a F(\xi)d\xi + \lambda_n a} \sin\frac{\pi\, n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi\, n_2 x_2}{L_2} \quad \textit{мебошад.}$$

Ба қатори экспонентҳо бо нишондиҳандаҳои

$$\beta_n^j = \delta_n^j + \lambda_n\,, \delta_n^j = a_n^j + i\,\omega_n^j\,,\ n=(n_1,n_2),\ n_k=1{,}2{,}3,...$$

Эзоҳ 2.2.1. *Бигзор* $\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a)da = 1,\ n_k = 1{,}2{,}3,...,\ n=(n_1,n_2),$ *он гоҳ ҳалли статсионарии масъалаи (1) - (4) мавҷуд аст ва он дар шакли*

$$N^*(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n a + \int_0^a F(\xi)d\xi + \frac{V_1 x_1}{2D_1} + \frac{V_2 x_2}{2D_2}} \sin\frac{\pi\, n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi\, n_2 x_2}{L_2}$$

пешниҳод мешавад.

Агар

$\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a)da = 1,\ n_k = 1{,}2{,}3,...,\ n=(n_1,n_2),$ *дар формулаи* (6) $\delta_n^{\max} > 0$ *ва аз ин рӯ бо афзоиши t функсияи N ((x,a,t) ҳисобкунии номаҳдуд.*

Агар

$$\int_0^\infty \widetilde{B}_n(a)da < 1,\ n_k = 1{,}2{,}3,...,\ n=(n_1,n_2),\quad \textit{он гоҳ}\ \delta_n^{\max} < 0 \qquad \textit{ва}\ \ N(x,a,t)\to 0$$

Дар параграфи дуюми **боби дуюм** барои масъалаи ғайриякҷинсаи бо шартҳои функсионалӣ ҳал дар шакли қаторҳои Фурье ҳосил ва асоснок карда шудааст. Масъалаи зеринро дида мебароем: ҳалли муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриякҷинсаи

$$\partial_{tax} N = F_0(a,t)N + f(x,a,t), \qquad x\in G,\ \ 0<a<\infty,\quad 0<t\le t_{k,} \tag{7}$$

ёфта шавад, ки шартҳои ибтидои ва сарҳадии зеринро қаноат мекунад:

$$N(x,a) = N_0(x,a), \quad x\in\overline{G},\quad 0\le a<\infty, \tag{8}$$

$$N(x,0,t)=\int_0^\infty B_0(\xi,t)N(x,\xi,t)d\xi, \quad x\in\overline{G},\ \ 0\le a\le t_k, \tag{9}$$

$$N|_s=0, \tag{10}$$

дар ин ҷо $\partial_{tax}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}\left[V_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right],\quad N=N(x,a,t)$ - шумораи популятсия дар нуқтаи x сину соли a дар вақти t, $F_0(.)$, $B_0(.)$ - мувофиқан коэффитсиенти фавт ва таваллуди баъзе популятсияи ҷудошуда, V_i, D_i, α – адаҳои мусбати додашуда мебошанд.

Дар баробари шарти сарҳадӣ (10) шарти сарҳадии навъи сеюмро низ дида мебароем

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}+\alpha_i N\right)|_s=0, \qquad \alpha_i=-\frac{V_i}{2D_i}, \quad i=1,2. \tag{11}$$

Аз ин пас, фарз мекунем, ки шартҳои мувофиқати сарҳадӣ ва шартҳои ибтидоӣ иҷро шудаанд.

Таъриф. Ҳалли масъалаи ғайриякҷинсаи (7) – (10) , (11) -ро дар шакли функсияи бефосилаи $\frac{\partial N}{\partial t},\frac{\partial N}{\partial a},\frac{\partial N}{\partial x_i},\frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2},\quad i=1,2$ мефаҳмем, ки дорои ҳосилаҳои бефосила буда, шартҳои (7) – (10), (11)-ро қаноат мекунанд.

Теоремаи 2.2.1. *Бигзор шартҳои зерин иҷро шаванд:*

а) $F_0(a,t)=F_0(a),\ B_0(a,t)=B_0(a),\qquad V_i=const>0,\ D_i=const>0.$

Функсияҳои $F_0(a),\ B_0(a),N_0(x,a)$ *муайян ва бефосила бо таъғирёбандаҳои худ.*

б) $|F_0(.)|\le F_0,\ |B_0(.)|\le B_0,\ |N_0(.)|\le N_0$ *где* $F_0,\ B_0,\ N_0$*- const > 0.*

в) Функсияи $N_0=N_0(x,a),\ x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty,$ *дорои ҳосилаҳои умумӣ мебошад*

$\frac{\partial N_0}{\partial a},\frac{\partial N_0}{\partial x_i},\frac{\partial^2 N_0}{\partial a\partial x_i},\frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^3 N_0}{\partial a\partial x_1\partial x_2},\ i=1,2.$ *ва онҳо бо* a *маҳдуд мебошанд,*

$0\le a<\infty,$

г) $\|B_0\|_{L_2[0,\infty)}<\infty$.

Он гоҳ ҳалли масъалаи ғайриякҷинсаи (7) – (10) дар шакли зерин дода мешавад:

$$N(x,a,t)=e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2 a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i X_i}{2D_i}}\cdot\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}+$$

$$+\int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}G(x_1,x_2,a,x_1^`,x_2^`,a^`)\,f(x_1^`,x_2^`,a^`,t)dx_1^`dx_2^`da^`$$

ки дар ин ҷо

$$G(x_1,x_2,a,x_1^`,x_2^`,a^`)=\frac{4}{L_1L_2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2^`}{L_2}$$

$$\lambda_{n_1n_2}=\sum_{i=1}^{2}D_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2,\qquad n_1,n_2=1,2,3,....$$

$\mu_{n_1n_2}(t)$ - *ҳалли муодилаи интегралии намуди барқарорсозӣ мебошад:*

$$\begin{cases}\mu_{n_1n_2}(t)=\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi,t)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi,\\ B_{n_1n_2}(a)=B_0(a)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}-\lambda_{n_1n_2}a\right).\end{cases}\qquad(12)$$

Дар параграфи сеюми **боби дуюм** принсипи максимум барои масъалаҳои хаттии интегро-дифференсиалӣ исбот шудааст, ки аз он ғайриманфӣ ва маҳдудияти ҳалли масъалаҳои баррасишаванда бармеояд.

Масъалаи интегралӣ-дифференсиалии зеринро дида мебароем:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F_0(a,t)N+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2N}{\partial x_i^2},\qquad x\in G,\ 0<a<\infty,\ 0<t\le t_k,\qquad(13)$$

$$N(x,a,0)=N_0(x,a),\qquad x\in\overline{G},\ \ 0\le a<\infty,\qquad(14)$$

$$N(x,0,t)=\int_0^{\infty}B_0(\xi,t)\,N(x,\xi,t)d\xi,\qquad x\in\overline{G},\ \ 0\le t\le t_k,\qquad(15)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}+\alpha_iN\right)|_s=0,\qquad \alpha_i=const,\ \ i=1.2\qquad(16)$$

Дар ин ҷо функсия $N=N(x,a,t)$, маънои шумораи баъзе популятсияи ҷудошударо дар нуқтаи x, синну соли a, дар вақти t дорад . $F_0(a,t),\ B_0(a,t)-$ мувофиқан коэффитсиентҳои фавт ва таваллудёбии популятсияҳо дар синну соли a, дар вақти t . $N_0(x,a)$ – функсияи ғайриманфии додашуда мебошад.

Таъриф. Функсияи $N = N(x,a,t)$, аз синфи $C^{2,1,1}(Q)$, ки ба муодилаи (13), шартҳои ибтидоии (14) ва шартҳои сарҳадии (15) – (16) муофиқ аст, дар маънои классикии оддӣ ҳалли классикии масъалаи омехтаи (13) – (16) номида мешавад.

1. **Арзёбии априорӣ.** Мақсади асосии ин аст, ки дурустии масъалаи (13) – (16) - ро муқаррар кунем. Барои ин, аввал мо дурустии принсипи максимуми зеринро барои масъалаи (13)-(16) исбот мекунем.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор шартхои зерин иҷро гарданд:*

а) Функсияи $F_0(.), B_0(.), N_0(.)$ *муайян ва бефосила дар маҷмӯи тағирёбандаҳо. Ғайр аз ин* $F_0(a,t) \le 0,\ B_0(a,t) \ge 0$.

б) $V_i, D_i = const > 0.$

в) $0 \le \max\limits_{(t,a)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1$, $\quad 0 < \min\limits_{(x,t)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1.$

г) $N_0(x,a) \ge 0,\ x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty.$

Он гоҳ баҳогузориҳо дурустанд:

$$N(x,a,t) \ge 0 \text{ для всех } (x,a,t) \in Q = \overline{G} \times [0,\infty) \times [0,t_k], \qquad \textbf{(}17\textbf{)}$$

$$\|N\|_{C(Q)} \le \|N_0\|_{C(\overline{G}\times[0.\infty))}. \qquad (18)$$

Теоремаи 2.3.2. *Бигузор ҳамаи шартҳои* **теоремаи 2.3.1** *иҷро шаванд ва бигузор* N_i – *ҳалли масъалаи (13) – (16), мувофиқ бо функсияҳои ибтидоӣ* N_i^0, $i = 1,2.$ *Он гоҳ, нобаробарии зерин дуруст аст.*

$$\min\left\{0, \min_{(x,a)} \Delta N^0, \min_{(x,t)} \Delta N\,|_{a=0}\right\} \le \Delta N \le \max\left\{0, \max_{(x,a)} \Delta N^0, \max_{(x,t)} \Delta N\,|_{a=0}\right\}, \qquad (19)$$

аз он бармеояд, ки:

1. *агар* $\Delta N^0 = N_1^0(x,a) - N_2^0(x,a) \ge 0$, *то* $\Delta N = N_1(x,a,t) - N_2(x,a,t) \ge 0$ *дар* Q.

2. $\|\Delta N\|_{C(Q)} \le \left\|\Delta N^0\right\|_{C(\overline{G}\times[0,\infty))}.$

Теоремаи 2.3.3. *Бигзор шартҳои* **теоремаи 2.3.2** *иҷро шаванд. Он гоҳ, масъалаи интегро-дифференсиалии (13) -(16) на бештар аз як ҳалли классикӣ дорад.*

Теоремаи 2.3.4. *(Дар бораи мавҷудияти ҳалли масъалаи сеюми омехта). Бигзор ҳамаи шартҳои* **теоремаи 2.3.2** *иҷро шаванд, он гоҳ ҳалли классикии масъалаи (13)- (16) вуҷуд дорад.*

Теоремаи 2.3.5. *Ҳангоми иҷрои шартҳои* **теоремаи 2.3.2** *ҳалли классикии масъалаи (13)-(16)* $N(x,a,t)$ *бефосила аз функсияи ибтидоии* $N_0(x,a)$ *вобаста аст.*

Параграфи чоруми **боби дуюм** ба таҳқиқи системаи хаттии фазоӣ-якченака бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ, ки ҳолати системаҳои биологиро тасвир мекунад, бахшида шудааст.

Боби сеюми диссертатсия ба омӯзиши масъалаҳои интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ бо назардошти синну сол ва тақсимоти фазоӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми **боби сеюм** модели математикии мавҷҳои популятсия дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти тақсимоти синну сол ва фазоӣ баррасӣ мешавад.

Модели математикии раванди таваллуд ва фавти фардҳо дар популятсияи ҷудошуда дар бисёр корҳои илмӣ ҳамчун масъалаи ибтидоӣ-канорӣ барои муодилаи дифференсиалии ғайрихаттӣ дар ҳосилаҳои хусуси пешниход шудааст.

Системаҳои муодилаҳои интегро-дифференсиалиро дида мебароем, ки ҳолати биосистемаро дар шакли зерин навишта шудааст [5-А]:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}\,, \qquad x\in G,\ 0<a<\infty\ ,0<t<t_k\ , \qquad (20)$$

дар соҳаи $\overline{Q}=\overline{G}[0,t_k]\cdot[0,\infty),\ t_k<\infty,$ *ки* $\overline{G}=G+S\,,\ G=\{x=(x_1,x_2):0<x_i<L_i\ ,\ L_i<\infty\ ,\ i=1.2\}$, S- ҳудуди G.

Барои муайян кардани ҳалли ягонаи муодилаи (20) мо шартҳои ибтидоӣ ва сарҳадӣ муқаррар мекунем:

$$N(x,a,0) = N_0(x,a),\ \ x \in \overline{G},\ \ 0 \le a < \infty\ , \qquad (21)$$

$$N(x,0,t) = \int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi\ ,\quad x \in G \qquad (22)$$

$$N|_S = 0 \qquad (23)$$

ки дар он B=B(.) коэффисиенти таваллуд дар баробари шарти сарҳадии (23) мебошад. Масъалаи (21) - (23)-ро профессор Юнуси М.К. баррасӣ кардааст.

Ҳамин тавр, масъалаи канории 3-ро баррасӣ мекунем:

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=0} = 0\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=L_i} = 0,\quad d_i = const > 0\ ,\ i = 1,2.$$

Дар оянда, фарз мекунем, ки шартҳои мувофиқати сарҳадӣ ва шартҳои ибтидоӣ иҷро карда шудаанд.

Фарзияҳои асосиро оид ба функсияҳое, ки дар гузориши (20)-(23) дохил карда шудаанд, тартиб медиҳем:

a) Функсияҳои $\mathcal{F}(.),\ \mathrm{B}(.),\ \mathrm{N}_0(.)$ муайян ва бефосила бо таъғирёбандаҳои $V_i = const > 0,\ D_i = const > 0.$ мебошанд ;

b) $B(N,\xi,t) = B_0(N,\xi,t), |B_0(.)| \le \nu(\xi,t),\ \int_0^\infty \nu^2(\xi,t)d\xi < \infty,\ F(N,a,t) = F_0(N,a,t)N,$

$|F_0(.)| \le F_0\ ,\ F_0 = const > 0$

c) Функсияи $N_0 = N_0(x,a)$ дорои ҳосилаҳои умумӣ:

$\frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}\ ,\ \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}\ ,\ i = 1,2$ ва онҳо бо $x \epsilon \overline{G},\ 0 \le a < \infty$ маҳдуд ҳастанд;

d) $\frac{\partial F}{\partial N} \le 0,\quad \max_{(x,t)} \int_0^\infty |\frac{\partial B}{\partial N}|\, d\xi < 1.$

Ҳолатеро дида мебароем, ки $F_0(N,a,t) = F_0(a),\ B_0(N,a,t) = B_0(a)$,пай дар пай ивазкуниҳои воридкардаи Юнусӣ М.Қ-ро ворид мекунем.

$$\begin{cases} t = a+\tau\,, \ \ \varphi(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau)\,, \\ \varphi(x,a,\tau) = u(x,a,\tau)\exp\left(\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}\right) \end{cases} \tag{24}$$

он гоҳ, масъалаи (20)-(23)-ро дар шакли зерин пешниҳод кардан мункин аст:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{2} D_i \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad x \in \overline{G}\ ,\ 0 < a < \infty \\ u(x,0,\tau) = \int\limits_0^{\infty} \widetilde{B}(\xi)u(x,\xi,\tau)d\xi\ ,\ \ x \in \overline{G} \\ u\,|_{x_i=0} = 0\,,\ u\,|_{x_i=L_i} = 0\,, \quad i = 1,2... \end{cases} \tag{25}$$

ки дар ин ҷо

$$\widetilde{B}(a) = B_0(a)\exp\left(\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i}\right)$$

Теоремаи 3.1.1. *Бигзор шартҳои а) - с) ҷой дошта бошанд, он гоҳ ҳалли масъалаи (20)-(23) дар шакли зерин пешниҳод карда мешаванд:*

$$N(x,a,t) = \frac{2}{L_1L_2} e^{\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}} \sum_{n_1 n_2 = 1}^{\infty} \mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi\, n_1\, x_1}{L_1}\sin\frac{\pi\, n_2\, x_2}{L_2} \tag{26}$$

ки дар инҷо $\lambda_{n_1n_2} = \sum\limits_{i=1}^{2} D_i(\frac{\pi\, n_1}{L_1})^2$, $n_1 = 1,2...,\ n_2 = 1,2....$

$\mu_{n_1n_2}(t)$*-ҳалли муодилаи интегралии намуди барқарорсозӣ мебошад*

$$\mu_{n_1n_2}(t) = \int\limits_0^a B_{n_1n_2}(\xi)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi\ ,$$

(27)

$$B_{n_1n_2}(a) = \widetilde{B}(a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\ ,\ \ 0 \le a < \infty,\ 0 \le t \le t_k\ \ ,\ \ n_i = 1,2....,\ i = 1,2.$$

Теоремаи 3.1.2. *Бигзор шартҳои а) - с) ҷой дошта бошанд, он гоҳ ҳалли масъалаи (20)-(23) дар шакли зерин пешниҳод карда мешавад:*

$$|N(x,a,t)| = \frac{2}{\sqrt{L_1L_2}} e^{\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} + \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}} e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\cos\frac{\pi\, n_1\, x_1}{L_1}\cos\frac{\pi\, n_2\, x_2}{L_2}$$

ки дар инҷо $\lambda_{n_1n_2}=\sum_{i=1}^{2}D_i(\frac{\pi\, n_i}{L_i})^2$, $\mu_{n_1n_2}(t)$ *-ҳалли муодилаи интегралии намуди барқарорсозӣ мебошад* (27).

Дар параграфи дуюми **боби сеюм** ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ оварда шудааст.

Теоремаи. 3.2.1. *Бигзор шартҳои а)-в) аз §3.1 иҷро шаванд, он гоҳ ҳалли ягонаи масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ (22)-(25) мавҷуд аст.*

Эзоҳ 3.2.1. Теорема дар ҳолате дуруст аст, ки

$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(N)>0,\ \ V=V(N)>0.$

Дар параграфи сеюми **боби сеюм** системаи ғайрихаттии интегро-дифференсиалӣ ҳал карда шуда, дурустии ҳалли масъала дар ҳолатҳои масъалаи канорӣ 3-юм исбот шудааст.

Масъалаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N}{\partial {x_i}^2},\tag{28}$$

$$x\in G,\ 0<a<\infty,\ 0<t<t_k,$$

$$N(x,a,o)=N_0(x,a),\, x\in G,\, 0\le a<\infty,\tag{29}$$

$$N(x,o,t)=\int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi,\tag{30}$$

$$N\big|_S=0,$$

ки дар инҷо $N=(N_1,N_2,...,N_m),\quad N_i=N_i(x,a,t)\ge 0.\quad i=\overline{1,m}$,

$$F(\cdot)=\begin{pmatrix} f_n(\cdot) & ... & f_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ f_{m1} & ... & f_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},\ B(\cdot)=\begin{pmatrix} b_n(\cdot) & ... & b_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ b_{m1} & ... & b_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},$$

$$V_i=\begin{pmatrix} V_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & V_{im}\end{pmatrix},\ D_i=\begin{pmatrix} d_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & d_{im}\end{pmatrix};$$

V_{ij}, d_{ij} - ададҳои доимии додашуда.

Ҳалли масъалаи (28) – (30) дар шакли зерин пешниҳод мешавад:

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot\cdot Sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$x\in\overline{G}\ ,\ 0\le a<\infty,\quad 0\le t\le t_n \tag{31}$$

$$Z(a)=\sum_{j=0}^{\infty}Z_j(a),\ Z_j(a)=\int_0^a F_0(\xi)Z_{j-1}(\xi)d\xi\ ,\ Z_0=I,$$

$$E_{\lambda n_1n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^{n}{}_{n_1n_2}a} & 0 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda^{m}{}_{n_1n_2}a}\end{pmatrix},\ E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}} & 0 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}}\end{pmatrix}$$

Мо дурустии (31)-ро дар мавриди масъалаи 3-юми канорӣ исбот мекунем. Дар ҳақиқат, ворид намудани ивазкуниҳои $a=a$, $t=a+\tau$ $\varphi(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau)$ муодилаи (28)-ро дар шакли зерин аз нав менависем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=F_0(a)\varphi+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i{}^2}\quad . \tag{32}$$

Дар асоси шарти (29) функсия маълум аст. Дар ҳақиқат, дар ҳолати *t=0* аз (31) ҳосил мекунем:

$$N_0(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot\cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot\cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$\mu_{n_1n_2}(-a)=E^{-1}{}_{\lambda n_1n_2}(a)Z^{-1}(a)\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}N_0(x,a)E^{-1}{}_{DV}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Дар параграфи чорум ва панҷуми **боби сеюм** мувофиқан таҳқиқи шумораи статсионарии популятсияҳо бо назардошти синну сол ва тақсимоти фазоӣ оварда шудааст.

Шумораи статсионарии популятсияи биосистемаҳои моделиро дида мебароем, ки бо системаи интегро-дифференсиалии зерин навишта шудааст:

$$\begin{cases}\frac{\partial N}{\partial a}=F(N,a),0<a<\infty\\ N(0)=\int_0^{\infty}B(N(\xi),\xi)d\xi\end{cases} \tag{33}$$

ки дар инҷо $N(a)=(N_1(a)...,N_m(a))$- шумораи статсионарии сину соли a, $0<a<\infty$: $F(\cdot),B(\cdot)$-m –ченакаи вектор функсия, "фавт" ва "таввалуд" дар биосистема тавсиф мекунанд ва функсияҳои бефосила, маҳдуд мебошанд.

Таъриф. Ҳалли масъалаи (33) гуфта, функсияи бефосилаи $N=N(a)$ $0\le a<\infty$ -ро мефаҳмем, ки ҳосилаи бефосила дошта, шартҳои (32)-ро қаноат мекунад**.**

Шумораи популятсия дар ҳолати статсионарӣ системаи муодилаҳои намуди интегро-дифференсиалии зеринро қаноат мекунонад:

$$\frac{\partial\tilde{N}}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x_i}=F\left(\tilde{N}(x,a),a\right)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\tilde{N}}{\partial x_i{}^2},\ x\in G,\ 0<a<\infty, \quad (34)$$

$$\tilde{N}(x,0)=\int_0^\infty B\left(\tilde{N}(x,\xi),\xi\right)d\xi,\ x\in G, \quad (35)$$

$$\tilde{N}\big|_S=0, \quad (36)$$

ки дар инҷо $\tilde{N}(x,a)=\left(\tilde{N}_1(x,a)...\tilde{N}_m(x,a)\right)$– шумораи популятсия дар нуқтаи $x\in G$, $x\in(x_1,x_2)$, $0\le x_i\le L_i, i=1,2$; сину соли a, $0\le a<\infty$; V_i,D_i- матритсаҳои доимии диагоналии тартиби m бо элементҳои ғайриманфӣ, $F=F(\cdot)$, $B=B(\cdot)$- m – ченакаи векторӣ, ки фавт ва таввалуди популятсияро тавсиф мекунад .

Теоремаи 3.5.1. *Бигзор* $F(\tilde{N},a)=A_0(a)\tilde{N}$, $B(\tilde{N},a)=B_0(a)\tilde{N}$, *ки дар ин ҷо* $A_0(a)$, $B_0(a)$ *-матритсаҳои додашудаи тартиби т ҳамчун дар банди пештара муайян карда шаванд, он гоҳ ҳалли масъалаи (35), (36), (37) ба таври зерин муайян карда мешавад:*

$$\tilde{N}(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(a)\cdot Sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),\ x\in G,\ 0\le a<\infty, \quad (37)$$

ки дар инҷо

$$\mu_{n_1n_2}(a)=E_{\lambda n_1n_2}(a)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}, \quad (38)$$

$$\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}:(I-A)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}=0,$$

$$A=\int_0^\infty B(\xi)Z(\xi)E_{\lambda n_1n_2}(\xi)d\xi,$$

матритсаи $Z=Z(a)$ *ҳалли масъали зерин ҳисобида мешавад:*

$$\frac{dZ}{da} = A_0(a)Z\,,\ 0 < a < \infty,$$

$$Z(0) = I.$$

Бо назардошти **теоремаи 3.5.1**. исбот менамоем, ки айнан теорема барои масъалаи 3-юми канорӣ дуруст аст. Ивазкунии $\tilde{N}(x,a) = Z(a)\psi(x,a)$-ро ҷорӣ мекунем, он гоҳ дида мешавад, ки функсияи $\psi(x,a)$ масъалаи зеринро қаноат мекунонад:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{2} D_{ik} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i^{\ 2}}\,,$$

$\psi_k(x_1, x_2, a) = 0$ дар ҳолати $x_i = 0, x_i = L_i, i = 1{,}2.$

Ҳалли масъалаи охирин дар шакли зерин пешниҳод карда мешавад:

$$\psi(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n1n2=1}^{\infty} \overline{\mu}^{\,k}_{n1n2} e^{-\lambda^k_{n1n2} a} Cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cdot Cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\, e^{\sum_{i=1}^{2} \frac{V_{ik} x_i}{2 D_{ik}}} \qquad (39)$$

ва бо назардошти ишоракуниҳои воридкардашуда (38)-ро ба даст меорем.

Коэффитсиенти $\overline{\mu}_{n1n2}$ тавре муайян кунем, ки шарти (35) риоя шавад. Функсияи (38)-ро ба (35) гузошта, муодилаи (40)-ро пайдо мекунем.

Натиҷаи 3.5.1. *Агар* $\det(I - A) \neq 0$*, пас* $\tilde{N}(x,a) = 0$*. Дар асл, системаи якҷинсаи (38) танҳо ҳалли нули дорад* $\overline{\mu}_{n1n2} = 0$ *ва аз рӯи (37)* $\tilde{N}(x,t) = 0$*-ро ба даст меорем.*

Натичаи 3.5.2. *Бигзор* $\det(I - A) = 0$*, он гоҳ системаи (38) ба ғайр аз ҳалли нули низ ҳалҳои ғайринули дорад. Масалан* $\overline{\mu}^{\,i}_{n1n2} = (-1)^{i-1} M_i$ *ки* M_i*-минори тартиби (m-1)-и матритсаи* $(I - A)$ *(фарз карда мешавад, ки ранг-и* $(I - A) = m - 1$ *аст).*

Дар ин маврид,

$\left\| \overline{\mu}^{\,i}_{n1n2} \right\| \leq C_1 \exp\left(-C_2 \sum n_i^2\right)$*, ки дар инҷо* $C_i = const > 0$.

Дар банди шашуми **боби сеюм** таҳқиқи шумораи популятсияи ҷудошударо бо масъалаи интегро-дифференсиалӣ барои ташаккули мавҷҳои ҳамворӣ, S-мавҷҳо, мавҷҳои истода ва статсионарӣ бо назардошти таркибии синну сол ва тақсимоти фазоӣ оварда шудааст.

Бигзор популятсияи ҷудошуда бо истифода аз муодилаҳои зерин навишта шуда бошад:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(D_i(N)\frac{\partial N}{\partial x_i})\ , \tag{40}$$

$$N(x,0,t)=\int_0^{\infty}B(N(x,\xi,t))d\xi\ , \tag{41}$$

ки дар инҷо $N = N(x, a, t)$ - шумораи популятсия дар нуқтаи $x \in E^2$,

$x = (x_1, x_2)$, сину соли a, $0 \le a$ дар вақти t,

$0 \le t \le \infty$, V_i, $F(\cdot)$, $D_i(\cdot)$, $B(\cdot)$ – хусусияти популятсияи биологӣ.

Мо барои модели популятсия (39)-(41) ташаккули ҳамворӣ ва S мавҷҳоро дида мебароем. Мавҷҳои ҳамворӣ бидуни ба назар гирифтани таркиби синну сол дар мақолаи[17], ва мавҷҳои S - барои масъалаҳои ғайрихаттии физикаи математикӣ аз ҷониби академик А.А Самарски[18] ва Ю.М.Свирежев[13] таҳқиқ карда шудаанд.

Мавҷҳои истода. Масъалаи ғайрихаттиро дида мебароем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial t}+\dfrac{\partial N}{\partial a}=k_0\dfrac{\partial}{\partial x}(N^{\sigma}\dfrac{\partial N}{\partial x})+q_0N^{\beta}\ , \\ N(x,0,t)=\displaystyle\int_0^{\infty}B(N(x,a^{`},t))da^{`}.\ \ x\in E^1\,,a\ge 0\,,t\ge 0\,,\end{cases} \tag{42}$$

ки дар инҷо $\beta > 1$, $\sigma \ge 0$, k_0, q_0 – доимиҳои мусбат. Бо ворид кардани ивазкунандаҳои $t = a + \tau$, $U(x, a, \tau) = N(x, a, a + \tau)$ системаи S-мавҷро ба даст меорем:

---

[17] Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.

[18] Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a} = k_0 \frac{\partial}{\partial x}(U^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial x}) + q_0 U^{\beta}, \\ U|_{a=0} = \int_0^{\infty} B(U(x,a,\tau)da^{``}. \end{cases} \quad (43)$$

Ҳалли (43)-ро дар шакли зерин меҷӯем:

$$U(x,a,\tau) = g(a,\tau) f(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\varphi(a,\tau)}.$$

Ҳамин тавр, ҳалли масъала чунин намуд дорад:

$$N(x,a,t) = \mu(t-a)[1 - q_0(\beta-1)\mu^{\beta-1}(t-a)a]^{-\frac{1}{\beta-1}} f(\xi), \quad (44)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} B_0(a)[1 - q_0\mu(t-a)a]^{-1}\mu(t-a)da. \quad (45)$$

Агар $\sigma + 1 \neq \beta$ бошад, он гоҳ $\varphi(a, t-a) = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}$, $\xi = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}x$, $f(\xi) = f(\xi_0)$ барои муайян кардани функсияи M(t) иҷро шудани шарти (44) дар нуқтаи *x* (масалан, x = 0) кифоя аст.

<u>Мавҷҳои статсионарӣ.</u> Масъалаи (43)-ро дар ин маврид дида бароем, ки $F(N) = 0$, $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ бошад.

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial a} = k_0 \frac{\partial}{\partial x}(N^{\sigma} \frac{\partial N}{\partial x}), \; -\infty < x < \infty, \; a > 0, \\ N(x,0) = \int_0^{\infty} B(N(x,\xi^{`}))d\xi^{`}. \end{cases} \quad (46)$$

Ҳалли муодилаи (46)-ро дар намуди зерин ҷустуҷӯ мекунем:

$$N(x,a) = g(a) f(\xi), \; \xi = \frac{x}{\varphi(a)}$$

Агар $\sigma + 1 = \beta$, пас $\varphi(a, t-a) = \sqrt{\frac{k_0}{q_0}}$, $\xi = \sqrt{\frac{k_0}{q_0}}x$, $f(\xi) = f(\xi_0)$ ва муодилаи (46) намуди зеринро мегирад:

$$\mu(t) = \int_0^{\infty} \frac{B_0(a)\mu(t-a)}{[1 - q_0\sigma\mu^{\sigma}(t-a)a]^{\frac{1}{\sigma}}} da. \quad (47)$$

Дар ин ҳолат мавҷҳое, ки аз рӯйи формулаи (47) мавҷҳои S номида мешаванд. Агар $\beta > \sigma + 1$, бошад, он гоҳ мавҷҳои мувофиқ (45) HS ва барои $\beta < \sigma + 1$ мавҷҳои LS номида мешаванд.

Боби чоруми диссератсия барои алгоритми ҳалли ададӣ системаи ғайрихаттии масъалаи интегро-дифференсиалии ва коркарди комплекси барномаҳои компютерӣ барои ҳосилкардани мавҷҳои популятсионӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми **боби чорум** алгоритми ҳалли ададӣ барои системаи ғайрихаттии масъалаи интегро-дифференсиалӣ оварда шудааст.

Дар параграфи дуюми **боби чорум** натиҷаҳои комплекси барномаҳои компютерӣ оварда шудааст. Барои ҳалли ғайрихаттии масъалаи интегро-дифференсиалӣ, комплекси барномаҳои компютерӣ дар забони барномасозии сатҳи баланд C++ коркард шудааст.

Боби панҷуми диссертатсия аз ду параграф иборат буда, боби ниҳоӣ мебошад, ки ба муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада, инчунин баррасии баъзе масаълаҳои татбиқи амалии онҳо бахшида шудааст.

Хулосаҳо

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

- ✓ барои масъалаи интегро-дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда дар ҳолати хаттӣ исботи теоремаи мувофиқати мутлақи якхелаи қаторҳои Фурьеро барои масъалаи 3-канорӣ, ки дар он коэффитсиентҳои қатори Фурье муодилаи интегралии навъи барқароркуниро қонеъ мекунанд, ҳалли масъалаи якҷинса бо шартҳои функсионалӣ дар шакли қаторҳои Фурье ёфта ва асоснок шудааст[1-А, 6-А, 8-А, 11-А];
- ✓ принсипи максимум барои масъалаҳои хаттии интегро-дифференсиалӣ бо шартҳои функсионалӣ исбот карда шуда ва арзёбиҳои априорӣ пайдо карда шудааст, инчунин ҳалли масъалаҳои хаттии фазоӣ-якченака бо шартҳои функсионалӣ пайдо карда шудааст[5-А, 9-А, 12-А];

- ✓ сохтани модели математикии масъалаи интегро-дифференсиалии мавҷҳои популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти сохтори вақту синну сол, тақсимоти фазоӣ ва исботи ҳалли он оварда шудааст[4-А, 7-А];
- ✓ ҳалли статсионарии масъалаи интегро-дифферентсиалии ғайрихаттӣ исбот ва асоснок карда шудааст, муайян кардани шумораҳои популятсияи статсионарӣ бо назардошти синну сол ва тақсимоти фазоӣ пайдо карда шудааст[2-А, 7-А];
- ✓ ҳалли масъалаи интегро-дифференсиалии шумораи популятсияи ҷудошуда дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалии ташаккули мавҷҳои ҳамворӣ, S-мавҷҳо, мавҷҳои истода ва статсионарӣ бо назардошти таркиби синну сол ва тақсимоти фазоӣ пайдо карда шудааст[7-А, 8-А];
- ✓ алгоритми ҳалли ададии масъалаи интегро-дифференсиалии ғайрихаттӣ таҳия шудааст ва комплекси барномаҳои компютерӣ оварда шудааст[2-А, 3-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот

Натиҷаҳои таҳқиқот дар назарияи динамикаи мавҷҳои популятсионӣ саҳми назаррас доранд ва метавонанд барои ҳалли масъалаҳои амалии экология, биология ва идоракунӣ муфид бошанд.

Алгоритм ва комплекси барномаҳои компютерии таҳияшуда имкон медиҳад, ки синфи васеи масъалаҳои ғайрихатти интегро-дифференсиалӣ, ки бо моделсозии мавҷҳои популятсия алоқамандӣанд, бо назардошти таъсироти вақтӣ ва фазоӣ ҳал карда шаванд. Татбиқи ин усулҳо ба масаълаҳои реалии биологӣ ва экологӣ метавонад дурустии пешгуии динамикаи популятсияро дар шароити таъсири мутақобилаи мураккаб ва таъсири беруна хеле беҳтар кунад.

Натиҷаи калидӣ -ин асбоби сахташуда мебошад, ки метавонад барои таҳлили доираи васеи моделҳо, аз мавҷҳои популятсия дар экосистемаҳо то моделҳои махсуси биологӣ, ба монанди баҳодиҳии устувории популятсия ё таҳияи стратегияҳои самараноки идоракунии захираҳо истифода шавад.

Комплекси барномаҳо, инчунин метавонад барои таҳияи минбаъдаи соҳаи моделсозии ададии равандҳои экологӣ ва биологӣ бошанд.

Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ аҳамияти моделсозии математикиро бо шартҳои функсионалии ибтидоӣ ва сарҳадӣ барои дақиқтар ва ҳамаҷониба дарки динамикаи мавҷҳои популятсиёнӣ нишон медиҳад. Ин натиҷаҳоро барои таҳқиқоти минбаъда дар соҳаҳои экология, биология ва идоракунӣ истифода бурдан мумкин аст.

РУЙХАТИ МАҚОЛАҲОИ НАШРШУДАИ УНВОНҶӮ

Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда:

[1-А] Ф. Раимзода Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами / М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник Таджикского национального университета. -Душанбе. -2015. -1/4(168). – С.15-17.

[2-А] Ф. Раимзода Об одном методе решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/2(196). – С. 8-13.

[3-А] Ф. Раимзода Алгоритм численного решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/3(200). – С. 20-22.

[4-А] Ф. Раимзода Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2021. №2. – С. 71-80.

[5-А] Ф. Раимзода Решение одной пространственно-одномерной линейной задачи с функциональными условиями / М.Илолов, Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. Т.66. №7-8. С. 400-408.

[6-А] Ф. Раимзода. Представление решения одной неоднородной задачи/ Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана, Т.67, №5-6, 254-260 с.

Мақолаҳо ва фушурдаҳои асосии интишорот дар дигар нашрияҳо:

[7-А] Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода //

Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.
[8-А] Раимзода Ф. Решение неоднородной интегро-дифференциальной задачи с функциональными начальными условиями / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, «Современные проблемы математики и её приложения» посвященной 20–летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.) С.180-182.
[9-А] Раимзода Ф. Компьютерное моделирование процесса защиты растенй с произвольными трофическими функциями / Одинаев Р.Н., Раимзода Ф. // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата (Душанбе, 25-26 сентября 2018 г.) С.132-137.
[10-А] Раимзода Ф. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф, Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз. // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год, 298-302 с.
[11-А] Раимзода Ф. Об одной обратной задаче для теплопроводности / Илолов М., Раимзода Ф. // Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат. г.Душанбе 2023 год,
[12-А] Раимзода Ф. Об одном решении задачи с начальными и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф // Материалы XII-международной научно-

практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы,20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе,18 май 2024), 333-336 с.

[13-А] Раимзода Ф. Решение одной задачи с функциональными начальными условиями и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф., Раимзода Ф., Мусоев С.С. // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования».(22-23 ноября 2024г.), 107-110с.

АННОТАЦИЯ
диссертации Раимзода Фаррухшох на тему «Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями”, представленой на соискание учёной степени кандидата физико-математических найк по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Ключевые слова: математическое моделирование, популяционные волны, нелинейная система, интегро-дифференциальная задача, изолированные популяции, начальные и краевые условия, частные производные, функции рождаемости и смертности, возрастная структура, численности биологических популяций, неоднородная задача, ряды Фурье, уравнения типа восстановления.

Цель исследования. Основной целью исследования настоящей диссертационной работы заключается в разработке аналитического метода математического моделирования некоторых физических явлений, таких, как популяционные волны и популяционные стоячие волны в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго и третьего порядка с функциональными начальными условиями.

Объект исследования. Объектом исследования является класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями**.**

Предмет исследования. Математическое моделирование популяционных волн с применением линейных и нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями**.**

Методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных, а именно метод приорных оценок, принцип максимума, метод разделения переменных, принцип сжимающих отображений, метод преобразования Фурье и метод последовательных приближений.

Научная новизна исследования. В диссертации получены результаты по интгеро-дифференциальным задачам с переменными коэффициентами и функциональными условиями, включая доказательства сходимости рядов Фурье, принципа максимума и решения линейных задач. Создана математическая модель популяционных волн в нелинейныъ системах с учётом временно-возрастной структуры. Также разработан алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический и практический характер. Теоретическая ценность работы состоит в исследовании линейных и нелинейных задач с функциальными начальными условиями.

Практическая значимость заключается в использовании результатов, полученных в диссертационной работе при математическом моделировании численности популяции биологических сообществ и для решения прикладных задач в экологии, биологии и управлении.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Раимзода Фаррухшох дар мавзӯи "Дар бораи як синфи муодилаҳои дифференсиалии ғайридавлатӣ дар тухмҳои хусусӣ бо шароити ибтидоии функсионалӣ", ки барои дарефти дараҷаи илмии номзади найкҳои физика-математикӣ аз рӯи ихтисоси 05.13.18 моделсозии Математикӣ пешниҳод шудааст, усулҳои рақамӣ ва маҷмӯи барномаҳо

Калимаҳои калидӣ: моделсозии математикӣ, мавҷҳои популятсионӣ, системаи ғайрихаттӣ, масъалаи интегро-дифференсиалӣ, популятсияҳои ҷудошуда, шарҳои ибтидоӣ ва канорӣ, ҳосилаҳои хусусӣ, фуксияҳои таваллуд ва фавт, сохтори синну сол, шумораи популятсияҳои биологӣ, масъалаи ғайриякҷинса, қаторҳои Фурье, муодилаҳои намуди барқарорсозӣ.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии таҳқиқи кори диссертатсионии мазкур таҳияи усули таҳлилии моделсозии математикии баъзе падидаҳои физикӣ, аз қабили мавҷҳои популятсион ва мавҷҳои истодаи популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти тақсимоти муваққатӣ ва фазоӣ мебошад, ки бо муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм ва сеюм бо шароити ибтидоии функсионалӣ тавсиф карда мешаванд.

Объекти таҳқиқот. Объекти омӯзиш синфи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ мебошад.

Предмети таҳқиқот. Моделсозии математикии мавҷҳои популятсия бо истифода аз системаҳои хаттӣ ва ғайрихаттии муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ, яъне усули баҳодиҳии приорӣ, принсипи максимум, усули ҷудо кардани тағиребандаҳо, принсипи тасвирҳои фишурда, усули табдили Фурье ва усули тақризҳои пайдарпай истифода мешаванд.

Навгони илмии таҳқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳо аз рӯи масъалаҳои интегро-дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои тағйиребанда ва шартҳои функсионалӣ, аз ҷумла тасдиқотҳои мувофиқати қаторҳои Фурье, принсипи максимум ва ҳалли масъалаҳои хаттӣ ба даст оварда шуданд. Модели математикии мавҷҳои популятсионӣ дар системаҳои ғайрихаттӣ бо назардошти сохтори вақту синну сол сохта шудааст. Инчунин алгоритми ҳалли ададии масъалаи ғайрихаттии интегро-дифференсиалӣ таҳия шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Кор хусусияти назариявӣ ва амалӣ дорад. Арзиши назариявии кор аз таҳқиқи масъалаҳои хаттӣ ва ғайрихаттӣ бо шартҳои ибтидоии функсионалӣ иборат аст. Аҳамияти амалӣ аз истифодаи натиҷаҳои дар кори диссертатсия ба даст овардашуда дар моделсозии математикии шумораи популятсияҳои биологӣ ва барои ҳалли масъалаҳои амалии экология, биология ва идоракуни мебошад.

ANNOTATION

of the thesis of Raimzod Farrukhshoh on the topic "On a class of nonlinear partial differential equations with functional initial conditions", submitted for the degree of Candidate of Physico-mathematical Sciences in the specialty 05.13.18 – Mathematical modeling, numerical methods and software packages

Keywords: mathematical modeling, population waves, nonlinear system, integro-differential problem, isolated populations, initial and boundary conditions, partial derivatives, fertility and mortality functions, age structure, number of biological populations, heterogeneous problem, Fourier series, equations of the recovery type.

The purpose of the study. The main purpose of the research of this dissertation is to develop an analytical method for mathematical modeling of certain physical phenomena, such as population waves, diffusion and population standing waves in nonlinear systems, taking into account time-age and spatial distributions, which are described by partial differential equations of the second and third order with functional initial conditions.

The object of the study. The object of the study is a class of nonlinear partial differential equations with functional initial conditions.

The subject of the study. Mathematical modeling of population waves using linear and nonlinear systems of partial differential equations with functional initial conditions.

Research methods. The thesis uses modern methods of functional analysis and the theory of partial differential equations, namely the method of prior estimates, the maximum principle, the method of separation of variables, the principle of compressive maps, the Fourier transform method and the method of successive approximations.

Scientific novelty of the research. The thesis provides results on integro-differential problems with variable coefficients and functional conditions, including proofs of convergence of Fourier series, the maximum principle, and solutions of linear problems. A mathematical model of population waves in nonlinear systems has been created, taking into account the time-age structure. An algorithm for numerical solution of nonlinear problems for isolated populations has also been developed.

Theoretical and practical value. The work is theoretical and practical in nature. The theoretical value of the work consists in the study of linear and nonlinear problems with functional initial conditions. The practical significance lies in the use of the results obtained in the dissertation work in mathematical modeling of the population of biological communities, the number of workers employed in the field of production, medicine, etc.