МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК: 517.986.7(09)
ББК:

На правах рукописи

Рахматов Джамшед Шавкатович

К ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

ДУШАНБЕ — 2024

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений механико-математического факультета Таджикского национального университета

Научный руководитель:	**Илолов М.** академик Национальной академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Шамсиддинов Ф.** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава
	Раҳмонов Б. кандидат физико-математических наук, заведующий отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ
Ведущая организация:	**Российско-Таджикский Славянский университет**

Защита состоится «05» июля 2024 года в «14:00» ч. на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета, а также на сайте: http: // www.tnu.tj

Автореферат разослан «__» «__» 2024 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета 6D.КОА-011, доктор физико-математических наук, доцент **И.Дж. Нуров**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. За последние 10-20 лет теория нечетких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения в различных областях науки и техники стала привлекать внимание математиков различных стран. Важнейшими работами в этой теории являются статьи M. Puri, D. Raleski[1], G. B. Price[2], M. Hukuhara[3], H. Radstrom[4], A. Ichikawa[5], G. Da Prato, J. Zabczyk[6], I. V. Melnikova[7], A. V. Balakrishnan[8], В. Н. Афанасьева, В. Б. Колмановского, В. Р. Носова[9], А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника[10] и многих других.

Актуальными в теории нечетких и стохастических уравнений в частных производных являются исследования существования и единственности решений, устойчивости этих решений. Для доказательства теорем необходимо привести предварительный анализ соответствующих нечеткозначных и множествозначных отображений.

Диссертационная работа посвящена исследованию некоторых классов нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В случае нечетких уравнений рассматриваются лишь скалярные уравнения. В случае же стохастических уравнений изучаются эволюционные уравнения с неограниченным оператором в главной линейной части. В качестве стохастического возмущения рассматривается белый шум в смысле Балакришнана. Следует подчеркнуть, что в этом случае берется вероятностное пространство с конечно-аддитивной мерой.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Теоремы существования, единственности и стохастической устойчивости решений нечетких и стохастических

---

[1]Puri, M., Raleski, D. Fuzzy random variables [Text] / M. Puri, D. Raleski // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — v. 4. — P 409-422.

[2]Price, G. B. The theory of integration [Text] / G. B. Price // Trans. Amer. Math. Sot. — 47. — 1940. — P 1-50

[3]Hukuhara, M. Integration des applications mesurables dont la valuer est un compact convexe [Text] / H. Hukuhara // Funkcial. Ekvac. — 10. — 1967. — P 205-223.

[4]Radstrom, H. An embedding theorem for spaces of convex sets [Text] / H. Radstrom // Proc. Amer. Math. Soc. 3. — 1952. — P 165-169.

[5]Ichikawa, A. Stability of semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // J. Math. Anal. Appl. — 1982.— N90.— pp. 12-44.

[6]Da Prato, G., Zabczyk, J. Stochastic equations in infinite dimensions [Text] / G. Da Prato, J. Zabczyk // Cambridge: Camb. Univ. Press. — 2014.

[7]Melnikova, I. V. Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions [Text] / I. V. Melnikova // Boca Raton; London; New York: CRS Press — 2016.

[8]Balakrishnan, A.V. Applied Functional Analysis [Text] / A. V. Balakrishnan // Springer - Verlag, Applications of Mathematics. — 1976.

[9]Афанасьев, В. Н., Колмановский, В. Б., Носов, В. Р. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов // Москва, Высшая школа. — 1989.

[10]Плотников, А. В., Скрипник, Н. В. Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью Асимптотические методы [Текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник // Одесса: Астропринт. — 2009. — 192 с.

дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения были предметом исследований в научных трудах T. Abdeljawad[11], A. V. Balakrishnan[8], O. Kaleva[12], А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника[10], M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov[13], M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov[14], М. Илолова, Дж. Ш. Рахматова[15] и др.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Исследования по теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и ее приложений» и на 2021-2025 гг. по теме «Исследования по теории стохастических эволюционных уравнений и ее приложения».

[11]Abdeljawad, T. On conformable fractional calculus [Text] / T. Abdeljawad // Journal of Computational and Applied Mathematics — 279. — 2015. — P 57–66. — DOI 10.1016/j.cam.2014.10.016.

[12]Kaleva, O. Fuzzy differential equations [Text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — v. 24, №3. — P 301-317.

[13]Ilolov, M., Kuchakshoev, K. S., Rahmatov, J. S. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[14]Ilolov, M., Kuchakshoev, K., Mirshahi, M., Rahmatov, J. Sh. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — V. 10. No. 3. — (December, 2023). — P 75-84.

[15]Илолов, М., Рахматов, Дж. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель исследования. Исследование нечеткого дробноподобного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}} + \alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}} = F(\nu,\tau,\Phi(\nu,\tau)),$$

с начальными условиями

$$\Phi(\nu,0) = g(\nu), \Phi(0,\tau) = h(\tau),$$

где α-нечеткое число и абстрактное стохастическое дробное дифференциальное уравнение

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t),$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0,$$

где ${}^{c}D_t^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f : H \to H$ - нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ - абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришиана) в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B - линейный оператор, определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H, u_0 - заданный элемент в H.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью необходимо дать анализ решений следующих задач:

1. Дать определение нечетких случайных переменных и их математические ожидания, и изучить их свойства.

2. Дать концепцию обобщенного дифференциала нечеткой функции и установить аналог теоремы Радстрема.

3. Доказать теоремы существования и единственности решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных на основе дробноподобного преобразования Лапласа.

4. Доказать теорему существования и единственности решений нечеткого интегро-дифференциального уравнения типа Урысона.

5. Найти явные формулы для решения линейной стохастической задачи Коши с почти секториальным неограниченным оператором в главной части.

6. Доказать основные теоремы второго метода Ляпунова для устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с дробноподобными производными.

7. Дать подробный анализ одной конкретной задачи математическиой эпидемиологии возникающей при изучении режимов распространения пандемии COVID-19.

Объект исследования. Объектом исследования являются нечеткие дифференциальные уравнения с дробноподобными производными и дробные стохастические дифференциальные уравнения.

Предмет исследования. Предметом исследования являются доказательста теорем о существовании единственности и устойчивости решений рассматриваемых уравнений в частных производных и некоторые их приложения.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми и заключатся в следующем:

- определены нечеткие случайные переменные и их математические ожидания и изучены их свойства;
- дана концепция обобщенного дифференциала нечеткой функции и установлен аналог теоремы Радстрема;
- доказаны теоремы существования и единственности решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных на основе двойного дробноподобного преобразования Лапласа;
- доказана теорема существования решений нечеткого интегро - дифференциального уравнения типа Урысона;
- найдены явные формулы для решения линейной стохастической задачи Коши с почти секториальным неограниченным оператором в главной части;
- доказаны основные теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобным производным;
- приведен подробный анализ конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при изучении режимов распространения пандемии COVID-19.

Положения, выносимые на защиту:

- леммы и теоремы о свойствах нечетких случайных переменных (величин) и их математическое ожидание;
- аналог теоремы Радстрема на случай обобщенного дифференциала нечеткой функции;
- теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений с дробноподобными частными производными;

- теорема существования и единственности решения нечеткого интегро-дифференциального уравнения Урысона;

- формула явного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с начальным условием и с почти секториальным неограниченным оператором в главной части;

- теорема второго (прямого) метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобной производной;

- решение одной конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при анализе режимов распространения пандемии COVID-19.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Методы развитые в диссертации и полученные здесь результаты могут быть использованы при исследовании новых и более общих нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

Личный вклад соискателя ученой степени. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Все результаты приведенные в разделе «Научная новизна исследования» получены лично соискателем.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 — дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление. Все результаты относятся к составной части этой специальности — нечеткие и стохастические дифференциальные уравнения и полностью соответствуют формуле специальности и пункту «Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

— Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико – математических наук, профессора Илолова Мамадшо, Душанбе, 14-15 марта 2018г.

— Республиканская научная конференция «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова, Таджикистан, Душанбе, 10-11 июня 2019г.

— Международная научная конференция «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020 г.

— Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.

— Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, Душанбе, 25-26 июня 2021 г.

— Международная научная конференция «Уфимская осеняя, математическая школа», Уфа, 6-9 октября 2021 г.

— Международная конференция по стохастическим методам, Геленджик, 2–9 июня 2022 г.

— Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, Душанбе, 24-25 июня 2022 г.

— Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 27 января - 1 февраля 2023 г.

— Научный семинар «Дробный анализ и его приложения» при Центре инновационного развития науки и новых технологий НАНТ (руководитель академик НАНТ Илолов М., 2018-2023 гг.)

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации.Основные результаты диссертации опубликованы в 19 статьях и материалах конференций [1—A] — [19—A]. Работы [1—A] — [10—A] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий рекомендуемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан и журналы входящие в Scopus в 2021-2023 годах. Из совместных работ с соавторами на защиту вносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов, а также списка литературы, в который включены 150 наименований. В диссертации используется тройная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй номер параграфа и третий номер относится к определениям, теоремам и другим утверждениям в данном параграфе. Аналогичным образом ведется нумерация формул. Общий объем диссертации 242 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Материал и методы исследования. Исследование состоит из анализа существования и единственности решения соответствующих начальных задач и их устойчивости для нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В диссертации используются методы функционального, нечеткого и стохастического анализа.

Результаты исследования. Приведем краткое изложение результатов диссертационной работы.

Первая глава (§§1.1, 1.2) диссертации посвящена обзору библиографических источников по исследуемой теме. В первом параграфе приводится анализ опубликованных работ, посвященных нечетким дифференциальным уравнениям. В основном рассмотрены случаи дифференциальных уравнений с постоянными нечеткими коэффициентами в главной линейной части уравнения. Анализ приводится с помощью операционного метода Лапласа. Во втором параграфе дается обзор работ, посвященных линейным и нелинейным стохастическим дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Эти уравнения возмущены белым шумом Балакришнана и впервые изучаются в монографическом плане.

Вторая глава (§§2.1 — 2.4) диссертации посвящена нечеткому анализу дифференциальных уравнений и одному классу интегро-дифференциальных уравнений с нелинейностью типа Урысона.

В первом параграфе приводится материал по элементам нечеткого анализа, используемый в диссертационной работе. Приведены понятия нечетких множеств, операции с нечеткими множествами, множеств уровня α — срезки и выпуклые нечеткие множества, теоремы о разложении, принцип расширения Л.Заде, теоремы о представлении, нечеткие числа пяти типов (интервальные, $(\cdot, c)$—типа, T—типа, $(L-R)$—типа, плоского типа).

В §2.2 изучаются нечеткие случайные величины. Нечеткие случайные величины являются одновременным обобщением векторных случайных величин и случайные множества. Математическое ожидание нечетких случайных величин является естественным обобщением интеграла многозначных функций. Поэтому сначала приводятся некоторые результаты интегрального исчисления для множественнозначных функций.

Пусть A и B две непустые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$. Метрика Хаусдорфа или расстояние между A и B задается в виде

$$d_H(A,B) = max\big[\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\big]$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим также через $Q(\mathbb{R}^n)$ множество всех непустых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Имеет место утверждение

Теорема 2.2.1[1]**.** *Метрическое пространство $(Q(\mathbb{R}^n), dh)$ полное и сепарабельное.*

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ вероятностное пространство, где Ω-подмножество из $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$-алгебра всех подмножеств из $\mathbb{R}^n$, P-вероятностная мера. Пусть через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ обозначено множество нечетких подмножеств $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ со следующими свойствами:

1) множество $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\}$ компактно для каждого;

2) $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\} \neq \emptyset$.

Определение 2.2.6. *Нечеткая случайная переменная (или нечеткая переменная) является функция $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\{(\omega, x) : x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

для каждого $\alpha \in [0,1]$, где $X_\alpha(\omega) : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ определен равенством

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

Теорема 2.2.8[2]**.** *Если $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограниченная нечеткая переменная, то существует единственное нечеткое множество $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такое, что*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha \text{ для любого } \alpha \in [0,1].$$

Определение 2.2.9. *Математическое ожидание случайной переменной X обозначенное через $E(X)$ называется нечетким множеством $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha$ для каждого $\alpha \in [0,1]$.*

Нашей очередной целью является распространение основной теоремы Лебега о сходимости на случай нечетких случайных переменных. Для этого вводим обобщение метрики Хаусдорфа на множество $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $u, v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ и введем число

$$d(u,v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)),$$

где d_H-метрика Хаусдорфа, и

$$L_\alpha(u) = \{x : u(x) \geq \alpha\}, L_\alpha(v) = \{x : v(x) \geq \alpha\}.$$

Теорема 2.2.11. *Метрическое пространство $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$ полное пространство.*

В §2.3 «Дифференциалы нечетких функций», изучается концепция дифференциала нечеткой функции являющейся обобщением дифференциала множествозначных функций Хукухара[3]. Понятие нечеткой случайной величины введенное нами в §2.1 являетсяобобщением случайных множеств и учитывает неопределенности как нечеткого так и случайного характера. В определение дифференциала множествозначных функций ключевым элементом является теорема вложения H.Radstrom[4].

Если X рефлексивное банахово пространство, то в порядке расширения хаусдорфовой метрики мы будем рассматривать подмножества $\mathcal{F}_0(X)$ множества $\mathcal{F}(X)$ содержащие все нечеткие множества $u : X \to [0,1]$ и обладающие следующими свойствами:

(1) u полунепрерывное сверху отображение;

(2) u является нечетко выпуклым;

(3) Если $u, v \in \mathcal{F}_0(X)$, то можно определить расстояние между u и v через равенства

$$(u, v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)),$$

где через d_H обозначено расстояние Хаусдорфа.

Верно утверждение

Теорема 2.3.1. $(\mathcal{F}_0(X), d)$ *является полным метрическим пространством.*

Рассмотрим теперь концепцию обобщенной дифференцируемости в смысле Хукухара, введенной впервые в работах S.Markov[16,17]. В этих работах были предложены альтернативные определения для производной нечеткозначной функции.

Определение 2.3.28. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ и $x_0 \in (a,b)$. Будем говорить, что F является сильно обобщенная дифференцируемая по Хукухара функция в x_0 (GH-дифференцируема для краткости), если существует элемент $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ такой, что для всех $h \geq 0$ достаточно малое выполняются условия:

(i) существует $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0), f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ и

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h} = f'_G(x_0)$$

или (ii) существуют $f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h), f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)$ и

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_G(x_0)$$

[16]Markov, S. Existence and uniqueness of solutions of the interval differential equation X '= f (t,X) [Text] / S. Markov // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 31. — 1978. — P 1519–1522.

[17]Markov, S. Calculus for interval functions of areal variable [Text] / S. Markov // Computing. — 22. — 1979. — P 325–337.

или (iii) существуют $f(x_0+h)\ominus_H f(x_0), f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)$ и

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)}{h}=f'_G(x_0)$$

или (iv) существуют $f(x_0)\ominus_H f(x_0+h), f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)$ и

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0+h)}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=f'_G(x_0).$$

Здесь через $\ominus_H$ обозначена обычная разность Хукухара.

Глава 3 диссертации посвящена нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пусть $\eta, v\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, тогда сложение этих нечетких чисел по γ-срезкам определяется как

$$[(\eta+v),\gamma]=[(\eta_*,\gamma)+(v_*,\gamma),(\eta^*,\gamma)+(v^*,\gamma)].$$

H - разность для двух нечетких чисел η и v, обозначаемая как $\eta\ominus v$ определяется как нечеткое число $\omega=\eta+v$.

$$[(\eta\ominus v),\gamma]=[(\eta_*,\gamma)-(v^*,\gamma),(\eta^*,\gamma)-(v_*,\gamma)].$$

Нечеткозначная функция с двумя переменными ν и τ сопоставляет упорядоченную пару (ν,τ) нечеткому числу $\Phi(\nu,\tau)$. В форме γ-среза $\Phi(\nu,\tau)$ представляется в виде

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)].$$

Нечеткозначная функция $\Phi(\nu,\tau)$ непрерывна в любой точке (ν_0,τ_0) , если из $\|\Phi(\nu,\tau)-\Phi(\nu_0,\tau_0)\|<\delta$, следует, что $\Phi(\nu,\tau)-L<\epsilon$.

Или другая запись

$$\lim_{(\nu,\tau)\to(\nu_0,\tau_0)}\Phi(\nu,\tau)=L.$$

В параграфе 3.1 диссертации дается определение нечеткого двойного преобразования Лапласа и сильно обобщенной дробноподобной частной производной.

Определение 3.1.4. *Для нечеткозначной функции* $\Phi(\nu,\tau)$ *сильно обобщенная дробноподобная частная производная по* ν *имеет порядок* Ψ *и определяется как нечеткое число* $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$ *такое, что*

1. Для любой $\theta>0$, H*-разности* $\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)$ *и* $\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)$

существуют и

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)}{\theta}.$$

2. Для любой $\theta>0$, *H -разности* $\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)$ *и* $\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)$ *существуют и*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi^{\Psi}(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)}{-\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)}{-\theta}.$$

Аналогично определяется сильно обобщенная дробноподобная частная производная от функции $\Phi(\nu,\tau)$ по τ порядка $\delta-1$.

Лемма 3.1.9. *Для непрерывной нечеткозначной функции* $\Phi(\nu,\tau)$, *являющейся сильно обобщенной дробноподобной частично дифференцируемой по* v, *имеем*

$$\int_a^b\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}\nu^{\Psi-1}d\nu=\Phi(b,\tau)-\Phi(a,\tau).$$

Нечеткое двойное преобразование Лапласа нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$ определяется в виде равенства

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)]=\phi(r_1,r_2)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-r_2\tau}\odot e^{-r_1\nu}\odot\Phi(\nu,\tau)d\nu d\tau,$$

где двойной интеграл справа существует.

Существует интервальное определение преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)]=[\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma)],\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]].$$

Нечеткое двойное обратное преобразование Лапласа определяется в виде равенства

$$\mathcal{L}_{\nu}^{-1}\mathcal{L}_{\tau}^{-1}[\phi(r_1,r_2)]=\Phi(\nu,\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+\infty}e^{-r_2\tau}e^{-r_1\tau}\odot\phi(r_1,r_2)dr_1dr_2.$$

Нечеткое двойное преобразование Лапласа существует не для всех нечеткозначных функций. Например, $\Phi(\nu,\tau)=\nu\tau\odot\eta$ или $\nu^2+\tau^2\odot\eta$ не является нечетким двойным преобразованием Лапласа какой-либо нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$, так как $\Phi(\nu,\tau)$ не сходится к нулю при $\nu\to\infty,\tau\to\infty$. Кроме того, нечеткое двойное преобразование Лапласа для $\Phi(\nu,\tau)=exp(\alpha\nu^2+\beta\tau^2)\odot\eta$ с $\alpha,\beta>0$ не существует, так как оно не имеет экспоненциального порядка, потому что

$$\lim_{\nu\to\infty,\tau\to\infty} exp(\alpha\nu^2+\beta\tau^2-r_1\nu^2+r_2\tau^2)\odot\tau=\infty.$$

Верно утверждение.

Теорема 3.1.14. *Если нечеткозначная функция Φ удовлетворяет двум условиям:*

1. Φ имеет нечеткий экспоненциальный порядок.

2. Φ ограничено и кусочно-непрерывно, то нечеткое двойное преобразование Лапласа существует и сходится абсолютно.

Далее устанавливаются теоремы 3.1.15 - 3.1.19 о свойствах прямых и обратных нечетких двойных преобразований Лапласа.

Устанавливается также аналог теоремы о свертке в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1.22. *Для нечеткого двойного преобразования Лапласа теорема о свертке дается формулой*

$$\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[(\Phi\circ\circ\Psi)(\nu,\tau)]=\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[\Phi(\nu,\tau)]\odot\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[\Psi(\nu,\tau)].$$

В параграфе §3.2 приводится обобщение понятия нечеткого двойного преобразования на случай нечеткого дробноподобного двойного преобразования Лапласа.

Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа для нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$ имеет вид

$$\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[\Phi(\nu,\tau)]=\phi(r_1,r_2)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}}\odot\Phi(\nu,\tau)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau,$$

где двойной интеграл справа существует.

Интервальная запись выглядит так:

$$\mathcal{L}^\nu_\Psi\mathcal{L}^\tau_\delta[\Phi(\nu,\tau)]=[\mathcal{L}^\nu_\Psi\mathcal{L}^\tau_\delta[\Phi_*(\nu,\tau)],\mathcal{L}^\nu_\Psi\mathcal{L}^\tau_\delta[\Phi^*(\nu,\tau)]].$$

Нечеткое дробноподобное двойное обратное преобразование Лапласа для нечеткозначной функции $\phi(r_1,r_2)$ имеет вид

$$\mathcal{L}^{\nu-1}_\Psi\mathcal{L}^{\tau-1}_\delta[\phi(r_1,r_2)]=\Phi(\nu,\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}}\odot e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}\odot\phi(r_1,r_2)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}dr_1dr_2.$$

В теоремах 3.2.4 — 3.2.12 приведены критерии существования прямых и обратных нечетких двойных дробноподобных преобразований Лапласа и их свойства.

Далее на основе утверждений этих теорем изучаются нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных, например, вида

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}} + \alpha \odot \frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}} = F(\nu,\tau,\Phi(\nu,\tau)),$$

с начальными условиями

$$\Phi(\nu,0) = g(\nu), \Phi(0,\tau) = h(\tau).$$

Рассматривают различные случаи дифференцируемости функции. Φ по типу $(\delta - 1)$ по τ и по типу $(\psi - 1)$ по ν. Изучаются как аналитические решения, так и графические представления. Например при $\delta = \psi = 1$ и функции

$$\Phi_*(\nu,\tau,\gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(\gamma-1)\nu + (\gamma-1)\tau, 0 \le \gamma \le 1$$

$$\Phi^*(\nu,\tau,\gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(1-\gamma)\nu + (1-\gamma)\tau, 0 \le \gamma \le 1.$$

найден график функции:

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma) = [\frac{\nu^2}{2} - 3\nu - \tau, \frac{\nu^2}{2} + 3\nu + \tau]$$

в виде рис. 3.2.1 .

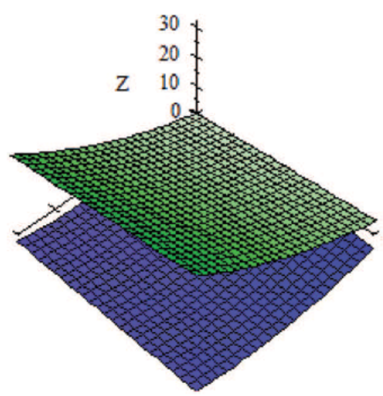

Рис. 3.2.1 График $\Phi(\nu,\tau,\gamma) = [\Phi_*(\nu,\tau,\gamma), \Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ с $\gamma = 0$

Найдены также решения нечетких дробноподобных уравнений теплопроводности и волнового уравнения. При этом рассматривались различные варианты нечетких данных.

§3.3 посвящен нечеткому интегро-дифференциальному уравнению типа Урысона.

Рассматривается в нечетком n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение вида

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0,T] = I,$$

где

$$(Kx)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

и выполняются следующие условия:

(1) $F : I \times \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ такое, что

$t \to F(t, x, y)$ – сильно измеримое отображение для всех $x, y \in \mathbb{E}^n$;

$(x, y) \to F(t, x, y)$ – непрерывное отображение для почти всех $t \in I$.

Пусть, также, существует функция

$$a(\cdot), b(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+);$$

(2) $\rho(F(t, A, B)) \leq \lambda(t)(\rho(A) + \rho(B))$ для всех непустых ограниченных подмножеств $A, B \in \mathbb{E}^n$ и $\lambda(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+), \rho$ – мера некомпактности Куратовского;

(3) $D(F(t, x, y), \hat{o}) \leq a(t) + b(t)[D(x, \hat{o}) + D(y, \hat{o})]$;

(4) Оператор

$$(Ax)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

действует из I в $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ и вполне непрерывен.

Теорема 3.3.6. *Если условия (1) — (4) имеют место, то задача имеет, по крайней мере, одно решение на* I.

Последняя, четвертая глава диссертации посвящена дробным стохастическим эволюционным уравнениям. Такие уравнения получили существенное развитие за последние десятилетия. Такое развитие связано с тем, что их конечномерные реализации часто возникают в качестве математических моделей в физике, технике, математической биологии, финасовой математике и других областях знаний. Обобщение теории Ито — Стратановича — Скорохода на бесконечномерном случае берет свой начало в работах A. Ichikawa[18]. В рамках этой теории, в частности, было исследовано линейное дифференциальное уравнение Ито с мультипликативным шумом G.Da Prato, J. Zabczyk[6], L. Gawarecki, V. Mandrekar[19], I.V. Melnikova[7], A. Filinkov, J. Sorensen[20]. В работах Yu. E. Gliklich[21], E. Nelson[22], M. Kovach,

[18]Ichikawa, A. Semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // Stochastics. — 1984.— N12.— P 1-39.

[19]Gawarecki, L., Mandrekar, V. Stochastic Differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations [Text] / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Berlin; Heidelberg: Springer — Verl. — 2011.

[20]Filinkov, A., Sorensen, J. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions [Text] / A. Filinkov, J. Sorensen // Stoch. Stoch. Rep. — 2003. — v. 72.– N3-4. — P 129-173.

[21]Gliklich, Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Appercations to Mathematical Physics [Text] / Yu. E. Gliklich // London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer. — 2011.

[22]Nelson, E. Dynamical Theory of Brownian motion [Text] / E. Nelson // Princeton: Princeton University

S. Larsson[23], G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva, S.A. Zagrebina[24] был предложен иной подход к анализу стохастических уравнений на основе производной Нельсона-Гликлиха. В работе G. A. Sviridynk at al.[24] установлено, что производная Нельсона-Гликлиха от винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна-Смолуховского, поэтому соответствующий стохастический процесс был назван «белым шумом».

В параграфе §4.1 рассматривается теория разрешимости стохастических эволюционных уравнений с дробным по времени порядком производной и аддитивным слагаемым типа «белого шума». Полученные здесь результаты могут найти применение при анализе разнообразных стохастических релаксационных и диффузионных процессов в пористых и фрактальных средах.

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного уравнения

$$^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0$$

где $^{c}D_t^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f : H \to H$ - нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ - абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришиана) в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B - линейный оператор, определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H, u_0 - заданный элемент в H.

При анализе разрешимости задачи Коши стандартным требованием является порождение оператором А резольвентных семейств операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Такое условие гарантирует корректность задачи Коши для детерминированного, невозмущенного однородного уравнения

$$^{c}D_t^{\alpha} + A(t)u(t) = 0.$$

Далее нужно потребовать от нелинейного отображения $f(\cdot)$ условия типа Липщица. Условия накладываемые на оператор B, тесно связаны со свойствами абсолютного случайного процесса (белого шума). Под случайным процессом будем понимать белый шум в смысле Балакришнана. Это понятие впервые введено в монографии A.V. Balakrishnan[8].

Press. — 1967.

[23]Kovach, M. Larsson, S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. New Directions on the Mathematical and Computer Sciences. [Text] / M. Kovach, S. Larsson // National Universities Commission, Auja, Nigeria.Lagos.Publications of the ICMCS. — 2007. — V.4. — P 159-232.

[24]Sviridyuk, G. A, Zamyshlyaeva, A. A., Zagrebina, S. A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive "white noise" [Text] / G. A. Sviridynk, A. A. Zamyshlyaeva, S. A. Zagrebina // Vestnik YUUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i proramirovanie". — V.11.– N3. — 2018. — P 103-117.

Здесь рассматривается функциональное пространство $W = L_2((0,T),H)$, где $0 < T \leq \infty$, которое будет сепарабельным гильбертовым пространством, если таковым является H. Далее через ω и μ обозначим элемент пространства W и стандартную гауссову меру на W соответственно. Так определенное пространство W называется белым шумом, а каждый его элемент $\omega \in W$ реализацией белого шума.

Введем далее функцию

$$W(t,\omega) = \int_0^t \omega(s)ds,$$

которая является непрерывной по t, и при $t > s$ разность $[W(t,\omega) - W(s,\omega)]$ является гауссовой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $(t-s)\|h\|^2$, где $h \in W$. Тем не менее, функция $[W(t,\omega), h]$ не может быть реализацией винеровского процесса, ввиду того, что такая реализация имеет неограниченную вариацию на каждом конечном интервале при фиксированном ω.

Модель пространственно-временной корреляции Балакришнана является одной из возможных моделей и основана на дельта-функции. В параграфе 4.1 разделы 1 и 2 носят вспомогательный характер и посвящены изучению дробных интегралов и производных и резольвентных операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ соответственно.

В разделе 3 приводятся основные свойства белого шума Балакришнана и соответствующего стохастического интеграла. Определена цилиндрическая мера на (W, Σ), Σ - алгебра цилиндрических множеств в виде

$$\mu(E) = \int_B G(x)dx,$$

где B - борелевское множество в $\mathbb{R}^n$ и $G(x)$ - n - мерная гауссова плотность с нулевым средним и единичной ковариацией, т.е. $G(x)$ - гауссова мера на W.

Под конечно-аддитивным белым шумом в W будем понимать процесс с траекторией $\omega(\cdot)$ в W с гауссовой мерой μ и с характеристической функцией

$$C(h) = E[exp\bigg(i\int_0^T [N(t), h(t)]dt\bigg) = exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^T [h(t), h(t)]dt\bigg).$$

Эта мера не может быть расширена до счетно-аддитивной в W.

Далее, в разделе 4 §4.1 изучается линейное стохастическое уравнение

$${}^cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = B\omega(t), t > 0, u(0) = u_0,$$

решение которого определяется формулой

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau\tau)\omega(\tau)d\tau.$$

Для решения $u(t,\omega)$ вычислен корреляционный оператор.

В нелинейном случае дробная задача Коши решена для случая почти секториального оператора A. Установлено следующее утверждение.

Теорема 4.1.15. *Предположим, что оператор A является почти секториальным и $u(t,\omega)$ является решением стохастической задачи Коши. Тогда для каждого $u_0 \in H$ функция $u(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению*

$$u(t,\omega) = S_\omega(t) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(t,\omega))d\tau + \\ + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)\omega(\tau)d\tau.$$

Анализу взамосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер — трудной задаче теории мер и интеграла — посвящен §4.2. Первые результаты относительно этой проблемы были получены в 40-50-ых годах прошлого столетия и принадлежат академику A. Alexandroff [25] и K. Yosida, E. Hewitt[26]. В этих работах рассматриваются вещественнозначные меры, которые обладают свойством конечной аддитивности но не обязательно счетной аддитивностью. Современное состояние проблемы подробным образом изложено в работе H. Duanmu, W. Weiss[27]. В работе M. S. Baltbelt[28] отмечено, что в отличие от результатов Ю. В. Прохорова[29] и А. Н. Ширяева[30], можно доказать, что для каждой конечно-аддитивной мере P на тотально ограниченном сепарабельном метрическом пространстве найдется последовательность счетно-аддитивных вероятностных мер $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\int f dP_n = \int f dP$$

[25] Alexandroff, A. D. Additive set-functions in abstract spaces. I [Text] / A. D. Alexandroff // Mat. Sb. — 8:2. — 1940. — P 307–348.

[26] Yosida, K., Hewitt, E. Finitely-Additive Measures [Text] / K. Yosida, E. Hewitt // Transactions of the American Mathematical Society, 1952. — v. 72. — N1. — P 46-66.

[27] Duanmu, H., Weiss, W. Finitely-Additive [Text] / H. Duanmu, W. Weiss // Countable-Additive and Internal probability Measures. — 2020. — arXiv: 2020.02463v1[math.l0]6Oct2020.

[28] Baltbelt, M. S. An Introduction to Stochastic Process, with special reference to methods and applications [Text] / M. S. Baltbelt // Cambridge Univ. Press. — 1978. — 388 p.

[29] Прохоров, Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей [Текст] / Ю. В. Прохоров // Теория вероятностей и ее применения. — т. 1. — вып. 2. — 1956. — С 177-238.

[30] Ширяев, А. Н. Вероятность: В 2-х книгах [Текст] / А. Н. Ширяев // М.:МЦНМО. — 2007.

для каждой ограниченной равномерно непрерывной действительнозначной функции f. В случае бесконечномерных фазовых пространств возникают иные математические трудности. В монографии A. V. Balakrishnan[31] описана структура измеримых множеств гильбертовых пространств, согласованная с ее топологией. Важным является то, что теория меры в гильбертовом пространстве отличается от классической тем, что мера определенная на алгебре цилиндрических множеств оказывается лишь конечно-аддитивной.

Параграф 4.2 посвящен более конкретному вопросу — анализу разрешимости начальной задачи для стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с конечно-аддитивной вероятностной мерой и с дробным порядком производной по времени. С этой целью построена мера Гаусса иллюстрирующая особенность бесконечномерного случая. Вводится также новый стохастический интеграл Балакришнана на основе конечно-аддитиной вероятностной меры и исследуется его взаимосвязь с хорошо известным интегралом Ито. Основными результатами §4.2 являются Теорема 4.2.8 и Теорема 4.2.9 в которых приведены необходимые и достаточные условия существования физических случайных процессов.

В параграфе 4.3 установлены основные теоремы второго метода Ляпунова для устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с дробно-подобными производными. Дробно-подобные производные введены в §4.3.1. За последние годы появилось большое количество публикаций посвященных различным вариантам дробно-подобных производных. Такие производные возникают при изучении наследственных свойств памяти сложных систем (см. напр. B. Bayor, D.F.M. Torres[32], A. Chadha, S.N. Boca[33]). В работах T. Abdeljawad[11], T. Allahviranloo at al.[34], M. L.Puri, D. Ralescu[35] изложены новые результаты для нейронных сетей с дробным дискретным временем. С другой стороны, в последние десятилетия получила развитие теория устойчивости дробных стохастических дифференциальных уравнений и ее приложений. И это неудивительно, поскольку стохастичность является важнейшим свойством реального мира, а устойчивость является главным приоритетом при анализе прикладных сложных систем.

Математическая теория — устойчивость решений нелинейных стохастических уравне-

---

[31]Balakrishnan, A. V. Introduction to optimization theory in a Hilbert Space [Text] / A. V. Balakrishnan // New York: Springer-Verlag. — 1971.

[32]Bayor, B., Torres, D.F.M. Existence of solution to a local fractional nonlinear differenial equations [Text] / B. Bayor, D. F. M. Torres // J.Appl.Mech.Tech.Phys. — 55(2).— 2014.— P 191-198.

[33]Chadha, A., Boca, S. N. Existence and exponential stability for neutral stochastic fractional differential equations with impulses driven by Poisson [Text] / A. Chadha, S.N. Boca // Stochastic.— 90(5).— 2018.— P 663-681.

[34]Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A., Hasanoglu, A. On fuzzy solutions for heat equation based on generalized hukuhara differentiability [Text] / T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu // Fuzzy Sets and Systems. — 265. — 2015. — P 1–23. — DOI 10.1016/j.fss.2014.11.009.

[35]Puri, M. L., Ralescu D. Differentielle d'une fonction floue [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. P 293. — 1981. — P 237-239.

ний целого или дробного порядков производных по времени в основном, развивается в двух направлениях. Это второй (или прямой) метод Ляпунова изложенный для простейших случаев в монографиях В.Н. Афанасьева и др.[9], Р.З. Хасьминского [36] и статьи N. Aguila-Camacho и др.[37] и метод неподвижных точек приведенный в работах T.A. Burton[38,39,40]. В §4.3 диссертации изучаются функции Ляпунова и дробно-подобные производные для них.

Сначала рассматривается детерминированное уравнение с дробно-подобной производной

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(x(t)) = b(t, x(t)), x(t_0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n, b \in C(R_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), t_0 \geq 0$.

Определение 4.3.10 *Пусть V непрерывная и α - дифференцируемая функция, $V : R_+ \times B_r \to \mathbb{R}^m$ и $x(t, t_0, x_0)$ является решением задачи для дробно-подобного уравнения. Тогда для $(t, x) \in R_+ \times B_r$ выражение*

$${}^{+}\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} V(t, x) = \limsup\{\frac{V(t + \theta(t - t_0)^{1-\alpha}, x(t + \theta(t - t_0)^{1-\alpha}, t, x)) - V(t, x)}{\theta}, \theta \to 0+\}$$

называется верхней правой дробно-подобной производной функции Ляпунова $V(t, x)$.

Далее вводится формула Ито для функций с дробно-подобной производной.

Определение 4.3.13. *Для каждого $X_{t_0} \in \mathfrak{L}_0\, \mathfrak{F}$ - адаптированный случайный процесс X называется решением задачи*

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt}, t > 0, 0 < \alpha \leq 1$$

$$X(0) = X_{t_0}$$

если выполнено следующее равенство для $t_0 \in [0, \infty)$:

$$X(t) = X(t, t_0, X_{t_0}) =$$

[36]Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях [Текст] / Р. З. Хасьминский // М.Наука. — 1969.

[37]Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A., Gallegos, J.A. Lyapunov functions for fractional order systems [Text] / N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos // Commun.Nonlinear Sci.Numer.Simul. — 19. — 2014. — P 2951-2957.

[38]Burton, T. A. Fractional differential equations and Lyapunov functionals [Text] / T. A. Burton // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. — 74. — 2011. — P 5648-5662.

[39]Burton, T.A., Furumochi, T. Krasnoselski's fixed point theorem and stability [Text] / T.A. Burton, T. Furumochi // Nonlinear Anal.Theory Methods. — 49. — 2002. — P 445-454.

[40]Burton, T., Zhang, B. Fixed points and fractional differential equations [Text] / T. Burton, B. Zhang // Fixed Point Theor. — 13. — 2013. — P 313-325.

$$= X_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} (s-t_0)^{\alpha-1} b(s, X(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} (s-t_0)^{\alpha-1} \sigma(s, X(s))dW(s).$$

Лемма 4.3.15. *Пусть* $Y(\cdot) = Y(\cdot, Z(\cdot)) \in C^{1,2}(R_+ \times R, R)$. *Тогда* $Y(t), t \geq 0$ *является процессом Ито заданный равенством*

$$dY(t) = [Y_t(t, Z(t)) + Y_Z(t, Z(t))\tilde{b}(t)\frac{1}{2}y_Z(t, Z(t))]dt +$$

$$+Y_z(t, Z(t))\bar{\sigma}(t)dW(t) \text{ почти наверное.}$$

На основе определения 4.3.10 и леммы 4.3.15 приводятся определения стохастической устойчивости, ассимптотической стохастической устойчивости Ляпунова и ассимптотической устойчивости Ляпунова, экспоненциальной устойчивости почти наверное. Установлены различные критерии стохастической устойчивости.

В параграфе 4.4 рассматривается одна стохастическая задача математической эпидемиологии. В ней установлены устойчивые и неустойчивые режимы пандемии COVID — 19.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы некоторые классы нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с целыми, дробными и дробноподобными порядками производных.

По итогам исследования получены следующие новые результаты:

- доказаны леммы и теоремы о свойствах нечетких случайных переменных (величин) и их математическое ожидание [1—А], [2—А], [3—А];
- доказан аналог теоремы Радстрема на случай обобщенного дифференциала нечеткой функции [3—А], [4—А], [5—А];
- доказаны теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений с дробноподобными частными производными [5—А], [6—А], [7—А];
- доказана теорема существования и единственности решения нечеткого интегро-дифференциального уравнения Урысона [6—А], [7—А], [8—А];
- найдена формула явного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с начальным условием и с почти секториальным неограниченным оператором в главной части [7—А], [8—А], [9—А];

- доказана теорема второго (прямого) метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобной производной [6—A], [8—A], [9—A];
- найдено решение одной конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при анализе режимов распространения пандемии COVID-19 [8—A], [9—A], [10—A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Методы развитые в диссертации и полученные результаты можно применить при исследовании новых и более общих классов нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных с целыми и дробными порядками производных. Приложения указанных результатов могут быть использованы при анализе стохастических моделей эпидемий. Отдельные части диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности «Математика» и «Прикладная математика».

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и РИНЦ:

[1—A] Рахматов Дж. Ш. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

[2—A] Рахматов Дж. Ш. Дробные интегро-дифференциальные включения типа Хейла в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов М., Д.Н. Гулджонов, Дж.Ш. Рахматов // Известия АН РТ. — 2019. — №1(174). — С 7-16.

[3—A] Рахматов Дж. Ш. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Чебышевский сборник. — 2019. — т. 20, вып. 4. — С 208-225.

[4—A] Rahmatov J. Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[5—A] Рахматов Дж. Ш. Эволюционные уравнения дробного порядка с запаздыванием в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, С. Расули (ИРА), Дж. Ш. Рахматов. // Известия АН РТ. — 2020. — №3(180). — С 7-21.

[6—A] Rahmatov J. Sh. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — 2021. — V. 8 №2. — P 87-99.

[7—A] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[8—A] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона [Текст] / Дж. Ш. Рахматов // Доклады НАН Таджикистана. — 2021. — том 64, №9-10. — С 491 - 500.

[9—A] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[10—A] Rahmatov J. Sh. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / Ilolov M., Kuchakshoev K., Mirshahi M., Rahmatov J. Sh. // Global and Stochastic Analysis Vol. — 10 № 3. — P 75-84.

В других изданиях:

[11—А] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое уравнение теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико – математических наук, профессора Илолова Мамадшо. — Душанбе. — 2018. — С 113 – 118.

[12—А] Рахматов Дж. Ш. Об одном приложении теоремы Красносельского о неподвижной точке [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. — Таджикистан. — Душанбе. — 10-11 июня 2019г. — Душанбе. — ТНУ. — С 101-109.

[13—А] Рахматов Дж. Ш. Об одной теореме существования для функционально-дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (Таджикистан, Душанбе, 30-31 января 2020 г.) «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». — ТНУ. — Душанбе. — 2020. — С 131-135.

[14—А] Рахматов Дж. Ш. О стохастической инвариантности дробных дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Актуальные проблемы современной математики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). — С 82-84.

[15—А] Рахматов Дж. Ш. О решениях нечетких дифференциальных уравнений дробного порядка. Современные методы теории функций и смежные проблемы [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова; Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2021. — С 129-131.

[16—А] Рахматов Дж. Ш. Об эквивалентности экспоненциальной дихотомии и устойчивости по Хайеру-Улам линейных периодических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Уфимская осеняя, математическая школа: Материалы международной научной конференции (г.Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В двух томах. — Том 1. — Уфа: Аэтерна. — 2021. — С 189-191.

[17—А] Рахматов Дж. Ш. Задача Коши для дробных абстрактных стохастических дифференциальных уравнений [Текст] / М. Илолов, Рахматов Дж. Ш., С. М. Лашкарбеков //

Материалы Конференции “7th International Conference on Stochastic Methods” - сателлитная конференция Международного конгресса математиков 2022 (МКМ-2022) (2–9 июня 2022 г., г. Геленджик, пос. Дивноморское)

[18—А] Рахматов Дж. Ш. Об одном примере почти секторального оператора [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов, С. М. Лашкарбеков // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). — 2022. — С 238-241.

[19—А] Рахматов Дж. Ш. Дробные стохастические дифференциальные уравнения с процессом Леви [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы. Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2023. — С 171-175.

ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК: 517.986.7(09)
ББК:

Бо ҳуқуқи дастхат

Рахматов Ҷамшед Шавкатович

БА НАЗАРИЯИ МУОДИЛАҲОИ ҒАЙРИ САҲЕҲ ВА СТОХАСТИКӢ ВА ИСТИФОДАИ ОНҲО

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика
01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

ДУШАНБЕ — 2024

Кори диссертатсионӣ дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро гардидааст.

Роҳбари илмӣ:	**Илолов М.** академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор
Муқarризони расмӣ:	**Шамсиддинов Ф.** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатиии Бохтар ба номи Носири Хусрав
	Раҳмонов Б. номзади илмҳои физикаю математика, мудири шуъбаи муодилаҳои дифференсиалии Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви АМИТ
Муассисаи пешбар:	**Донишгоҳи славянии Русияву Тоҷикистон**

Ҳимоя санаи «05» июли соли 2024 соати «14 : 00» дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.KOA-011-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргузор мегардад: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, факултети механикаю математика, бинои 17, синфхонаи 216.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «__» «__» соли 2024 ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои диссертатсионии 6D.KOA-011, доктори илмҳои физикаю математика, дотсент **И.Ҷ. Нуров**

Муқаддима

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Дар 10-20 соли охир назарияи муодилаҳои ғайрисаҳехи дифференсиалӣ ва татбиқи он дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника диққати математикони ҷаҳонро ба худ ҷалб намуд. Муҳимтарин асарҳои ин назария M. Puri, D. Raleski[1], G. B. Price[2], M. Hukuhara[3], H. Radstrom[4], A. Ichikawa[5], G. Da Prato, J. Zabczyk[6], I. V. Melnikova[7], A. V. Balakrishnan[8], В. Н. Афанасев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носова[9], А. В. Плотников, Н. В. Скрипник[10] ва ғайра мебошанд.

Таҳқиқоти мавҷудият ва ягонагии ҳалҳо ва устувории ин ҳалҳо дар назарияи муодилаҳои ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ хеле муҳим ва актуалӣ мебошанд. Барои исботи теоремаҳои мувофиқ, зарур аст, ки таҳқиқи босалобати тасвирҳои ғайрисаҳеҳқимата ва бисёрқимата гузаронида шавад.

Кори диссертатсионӣ ба таҳқиқи баъзе синфҳои муодилаҳои ғайрисаҳеҳ ва стохастикии дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ бахшида шудааст. Дар мавриди муодилаҳои ғайрисаҳеҳ фақат муодилаҳои скалярӣ дида баромада мешаванд. Дар мавриди муодилаҳои стохастикӣ бошад, муодилаҳои эволютсионӣ бо оператори бемаҳдуд дар қисми асосии хаттӣ омӯхта мешаванд.

Дар мавриди муодилаҳои ғайрисаҳеҳ танҳо муодилаҳои скалярӣ баррасӣ мешаванд. Дар мавриди муодилаҳои стохастикӣ муодилаҳои эволютсионӣ бо оператори номаҳдуд дар қисми хаттии асосӣ омӯхта мешаванд. Садои сафед ба маънои Балакришнан ҳамчун халалдоршавии стохастикӣ ҳисобида мешавад. Бояд қайд кард, ки дар ин ҳолат фазои эҳтимолӣ бо ченаки ниҳоии аддитивӣ гирифта мешавад.

---

[1] Puri, M., Raleski, D. Fuzzy random variables [Text] / M. Puri, D. Raleski // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — v. 4. — P 409-422.

[2] Price, G. B. The theory of integration [Text] / G. B. Price // Trans. Amer. Math. Sot. — 47. — 1940. — P 1-50

[3] Hukuhara, M. Integration des applications mesurables dont la valuer est un compact convexe [Text] / H. Hukuhara // Funkcial. Ekvac. — 10. — 1967. — P 205-223.

[4] Radstrom, H. An embedding theorem for spaces of convex sets [Text] / H. Radstrom // Proc. Amer. Math. Soc. 3. — 1952. — P 165-169.

[5] Ichikawa, A. Stability of semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // J. Math. Anal. Appl. — 1982.— N90.— pp. 12-44.

[6] Da Prato, G., Zabczyk, J. Stochastic equations in infinite dimensions [Text] / G. Da Prato, J. Zabczyk // Cambridge: Camb. Univ. Press. — 2014.

[7] Melnikova, I. V. Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions [Text] / I. V. Melnikova // Boca Raton; London; New York: CRS Press — 2016.

[8] Balakrishnan, A.V. Applied Functional Analysis [Text] / A. V. Balakrishnan // Springer - Verlag, Applications of Mathematics. — 1976.

[9] Афанасьев, В. Н., Колмановский, В. Б., Носов, В. Р. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов // Москва, Высшая школа. — 1989.

[10] Плотников, А. В., Скрипник, Н. В. Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью Асимптотические методы [Текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник // Одесса: Астропринт. — 2009. — 192 с.

Дараҷаи коркарди илмии проблемаи мавриди омӯзиш. Теоремаҳои мавҷудият, ягонагӣ ва устувории стохастикии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ ва татбиқи онҳо дар корҳои илмии T. Abdeljawad[11], A. V. Balakrishnan[8], O. Kaleva[12], А. В. Плотников, Н. В. Скрипник[10], M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov[13], M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov[14], М. Илолов, Ҷ. Ш. Рахматов[15] ва ғайра мавриди таҳқиқ қарор гирифтаанд.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо), мавзуъҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи нақшаҳои дарозмуддати корҳои илмӣ-тадқиқотии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 дар мавзӯи «Тадқиқот оид ба назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ дар фазои Банах ва татбиқи он» ва барои солҳои 2021-2025 дар мавзӯи «Тадқиқот оид ба назарияи муодилаҳои эволютсионии стохастикӣ ва татбиқи он» ба анҷом расонида шудааст.

Тавсифи умумии таҳқиқот

Мақсади таҳқиқот. Таҳқиқи муодилаи ғайрисаҳеҳи касримонанд дар ҳосилаҳои хусусии

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}}=F(\nu,\tau,\Phi(\nu,\tau)),$$

бо шартҳои ибтидоии

$$\Phi(\nu,0)=g(\nu),\Phi(0,\tau)=h(\tau).$$

ки дар ин ҷо α-адади ғайрисаҳеҳ ва муодилаи абстрактии стохастикии дифференсиалии

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(t)+Au(t)=f(u(t))+B\omega(t),$$

бо шартҳои ибтидоии

$$u(0)=u_0,$$

[11]Abdeljawad, T. On conformable fractional calculus [Text] / T. Abdeljawad // Journal of Computational and Applied Mathematics — 279. — 2015. — P 57–66. — DOI 10.1016/j.cam.2014.10.016.

[12]Kaleva, O. Fuzzy differential equations [Text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — v. 24, №3. — P 301-317.

[13]Ilolov, M., Kuchakshoev, K. S., Rahmatov, J. S. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[14]Ilolov, M., Kuchakshoev, K., Mirshahi, M., Rahmatov, J. Sh. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — V. 10. No. 3. — (December, 2023). — P 75-84.

[15]Илолов, М., Рахматов, Дж. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

ки дар ин ҷо ${}^{c}D_t^{\alpha}$ - ҳосилаи касрии Капутои тартиби $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - оператори қариб секториалӣ дар фазои сепарабелии Ҳилбертии H, $f : H \to H$ - тасвири додашудаи ғайрихаттӣ, $\omega(t)$ - раванди тасодуфии мутлақ (садои сафед ба маънои Балакришнан) фазои сепарабелии Ҳилбертии H_n, B - оператори хаттии дар H муайяншуда бо қиматҳо дар фазои операторҳо аз H_n ба H, u_0 - элементи додашуда дар H мебошанд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқ ба мақсади гузошташуда, таҳлили ҳалҳои масъалаҳои зерин мушаххас карда шаванд:

1. Таърифи тағйирёбандаҳои ғайрисаҳеҳи тасодуфӣ ва интизории математикии онҳо муайян карда шаванд, хосиятҳои он омӯхта шаванд.

2. Консепсияи дифференсиали умумикардашудаи функсияи ғайрисаҳеҳ пешниҳод карда шавад ва аналоги теоремаи Радстрём муқаррар карда шавад.

3. Теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои ғайрисаҳеҳи дифференсиалии касримонанд дар ҳосилаҳои хусусӣ дар асоси табдилоти касримонанди Лаплас исбот карда шавад.

4. Теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои ғайрисаҳеҳи интегро-дифференсиалии навъи Урисон исбот карда шавад.

5. Формулаҳои возеҳ барои ҳалли масъалаи хаттии стохастикии Кошӣ бо оператори қариб секториалии бемаҳдуд дар қисми асосӣ ёфта шаванд.

6. Теоремаҳои асосии усули дуюми Ляпунов барои устувории ҳалли муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ бо ҳосилаҳои касримонанд исбот карда шаванд.

7. Таҳлили муфассали як масъалаи мушаххаси эпидемиологияи математикӣ, ки ҳангоми омӯзиши паҳншавии пандемияи COVID-19 ба миён меояд, пешниҳод карда шавад.

Объекти таҳқиқот. Объекти таҳқиқот муодилаҳои ғайрисаҳеҳи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои касримонанд ва муодилаҳои стохастикии дифференсиалии касрӣ мебошанд.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот аз исботи теоремаҳо оид ба мавҷудияти ягонагӣ ва устувории ҳалҳои муодилаҳое, ки мавриди баррасӣ қарор доранд ва татбиқи он иборат аст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои таҳқиқот комилан ҷадид буда, аз нуқтаҳои зерин иборатанд:

- тағйирёбандаҳои тасодуфии ғайрисаҳеҳ ва интизориҳои математикии онҳо муайян ва хосиятҳои онҳо омӯхта шудаанд;

- консепсияи дифференсиали умумикардашудаи функсияи ғайрисаҳеҳ дода шуда аст ва аналоги теоремаи Радстрём муайян карда шуда аст;

- теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳали муодилаҳои ғайрисаҳеҳи касримонанд дар ҳосилаҳои хусусӣ дар асоси табдилоти дукаратаи касримонанди Лаплас исбот карда шудаанд;

- теоремаи мавҷудияти ҳали муодилаи ғайрисаҳеҳи интегро-дифференсиалии намуди Урисон исбот карда шудааст;

- формулаҳои возеҳ барои ҳалли муодилаи хаттии стохастикии Коши бо оператори қариб секториалии бемаҳдуд дар қисми асосӣ ёфта шуданд;

- теоремаҳои асосии усули дуюми Ляпунов дар бораи устувории ҳалли муодилаҳои стохастикӣ бо ҳосилаҳои касримонанд исбот карда шуданд;

- таҳлили пурраи масъалаи мушаххаси эпидемиологияи математикӣ, ки ҳангоми таҳқиқи режаҳои паҳншавии пандемияи COVID-19 пайдо мешавад, оварда шудааст.

Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- леммаҳо ва теоремаҳо дар бораи хосиятҳои тағйирёбандаҳои тасодуфии ғайрисаҳеҳ (бузургиҳо) ва интизории математикии онҳо;

- аналоги теоремаи Радстрём барои ҳолати дифференсиали умумикардашудаи функсияи ғайрисаҳеҳ;

- теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ бо ҳосилаҳои хусусии касримонанд;

- теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳали муодилаи ғайрисаҳеҳи интегро-дифференсиалии Урисон;

- формулаи ҳалли возеҳи муодилаи дифференсиалии хаттии стохастикӣ бо шарти ибтидоӣ ва оператори қариб секториалии бемаҳдуд дар қисми асосӣ;

- теоремаи усули дуюм (бевосита)-и Ляпунов дар бораи устувории ҳалли муодилаҳои стохастикӣ бо ҳосилаи касримонанд;

- ҳалли як масъалаи мушаххаси эпидемиологияи математикӣ, ки ҳангоми таҳлили паҳншавии пандемияи COVID-19 ба миён меояд.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ дорад. Усулҳои дар диссертатсия инкишоф додашуда ва натиҷаҳои ҳосилшударо барои таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ ва стохастикии нав ва умумитар истифода бурдан мумкин аст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Ҳамаи теоремаҳо, таърифҳо ва формулаҳо дар диссертатсия дорои исботи қатъӣ буда, баъзе натиҷаҳо бо таҳқиқотҳои муаллифони дигар мутобиқат мекунанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 6D060102 — муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ, идоракунии оптималӣ анҷом дода шудааст. Ҳама натиҷаҳо ба ҷузъи ин ихтисос —– муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ тааллуқ доранд ва ба формулаи ихтисос ва банди «Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ»-и соҳаи тадқиқот комилан мувофиқанд.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Таҳияи масъала ба роҳбари илмӣ тааллуқ дорад. Ҳамаи натиҷаҳое, ки дар бахши «Навгонии илмии тадқиқот» оварда шудаанд, шахсан аз ҷониби унвонҷӯ гирифта шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳои зерин баррасӣ ва муҳокима гардидаанд:

— Конференсияи байналмилалии илмии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он», бахшида ба 70-солагии зодрӯзи академики АИҶТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Илолов Мамадшо, ш. Душанбе, 14-15 марти соли 2018.

— Конференсияи илмии ҷумҳуриявии «Таҳлили математикӣ ва татбиқи он» бахшида ба 80-солагии риёзидони барҷастаи тоҷик, профессор Бекназар Имомназаров, Тоҷикистон, Душанбе, 10-11 июни соли 2019.

— Конференсияи байналмилалии илмии «Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ» бахшида ба 70-солагии профессор Ҷангибеков Гулхоҷа, Душанбе, 30-31 январи соли 2020.

— Конференсияи байналмилалии «Мактаби зимистонаи математикии Воронеж», Воронеж, 28 январ – 2 феврали соли 2021.

— Конференсияи байналмилалии «Мушкилоти актуалии математикаи муосир» бахшида ба 80-солагии зодрӯзи доктори илмҳои физикаю математика, профессор Темур Собиров, Душанбе, 25-26 июни соли 2021.

— Конференсияи байналмилалии илмии «Мактаби тирамоҳии математикии Уфа», Уфа, 6-9 октябри соли 2021.

— Конференсияи байналмилалӣ оид ба усулҳои стохастикӣ, Геленҷик, 2-9 июни соли 2022.

— Конференсияи байналмилалии илмии «Мушкилоти муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики Академияи илмҳои Тоҷикистон Шабозов Мирганд Шабозович, Душанбе, 24-25 июни соли 2022

— Конференсияи байналмилалии «Мактаби зимистонаи математикии Воронеж», Воронеж, 27 январ - 1 феврали соли 2023

— Семинари илмии «Таҳлили касрӣ ва татбиқи он» дар Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави АМИТ (роҳбар академики АМИТ Илолов М., солҳои 2018-2023)

Як қатор натиҷаҳои диссертатсия дар таълими курсҳои махсус барои магистрантон ва донишҷӯён истифода шудаанд.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 19 мақолаҳои илмӣ ва маводи конференсияҳо чоп шудаанд [1—М] — [19—М]. Мақолаҳои [1—М] — [10—М] дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва маҷаллаҳои ба системаи Scopus дар солхои 2021-2023 дохил шуда, ба табъ расидаанд. Аз корҳои шариктаълиф ба ҳимоя танҳо натиҷаҳои аз тарафи муаллифи диссертатсия ҳосилкардашуда, пешниҳод карда мешаванд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Кори диссертатсионӣ аз муқаддима, чор боб, хулосаҳо, тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот ва библиография, ки 150 номгӯйро дарбар мегирад, иборат аст. Дар рисола рақамгузории сегонаи истифода мешавад. Рақами якум рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ва сеюм таърифҳо, теоремаҳо ва дигар изҳороти by параграф ишора мекунад. Формулаҳо низ ҳамин тавр рақамгузорӣ карда мешаванд. Ҳаҷми умумии рисола аз 242 саҳифа иборат аст.

Қисмҳои асосии таҳқиқот

Мавод ва методҳои таҳқиқот. Тадкиқот аз таҳлили мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои ибтидоии мувофиқ ва устувории онҳо барои муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ, стохастикии дифференсиалӣ ва интегродифференсиалӣ иборат аст. Дар рисола усулҳои таҳлили функсионалӣ, ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ истифода мешаванд.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Маълумоти мухтасар оид ба натиҷаҳои кори диссертатсиониро меорем.

Боби якӯми (§§1.1, 1.2) диссертатсия ба баррасии сарчашмаҳои библиографии мавзӯи таҳқиқшуда бахшида шудааст. Дар параграфи якӯм таҳлили корҳои нашршуда оид ба муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ оварда шудааст. Асосан ҳодисаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии номуайян дар қисми асосии хаттии муодила баррасӣ карда мешаванд. Таҳлил бо усули оператсионии Лаплас гузаронида мешавад. Дар параграфи дуюм шарҳи корҳое, ки ба муодилаҳои хатӣ ва ғайрихаттии дифференсиалии стохастикӣ дар фазои Ҳилберт бахшида шудаанд, оварда шудаанд. Ин муодилахо аз садои сафеди Балакришнан халалдор шудаанд ва бори аввал ба таври монография омухта мешаванд.

Боби дуюми (§§2.1 — 2.4) диссертатсия ба таҳқиқи муодилаҳои ғайрисаҳеҳи дифференсиалӣ ва як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ғайрихатигии намуди Урисон бахшида шудааст.

Дар параграфи якӯм мавод оид ба элементҳои таҳлили ғайрисаҳеҳ, ки дар кори диссертатсионӣ истифода бурда мешавад, оварда шудааст. Мафҳумҳои маҷмӯи ғайрисаҳеҳ, амалиётҳо бо маҷмӯҳои ғайрисаҳеҳ, маҷмӯҳои сатҳи α — печида ва маҷмӯҳои ғайрисаҳеҳи барҷаста, теорема оид ба таҷзия, принсипи васеъшавии Л.Заде, теоремаҳои муаррифӣ ва панҷ намуди ададҳои ғайрисаҳеҳ (фосилагӣ, $(\cdot, c)$—намуд, T—намуд, $(L-R)$—намуд ва намуди ҳамвор) оварда шудаанд.

Дар §2.2 бузургиҳои ғайрисаҳеҳи тасодуфӣ омӯхта мешаванд. Бузургиҳои ғайрисаҳеҳи тасодуфӣ ҳамзамон умумикардашудаи бузургиҳои тасодуфии векторӣ ва маҷмӯҳои тасодуфӣ мебошад. Интизории математикии бузургиҳои ғайрисаҳеҳи тасодуфӣ худ умумикардашудаи табиии интеграли функсияҳои бисёрқимата аст. Аз ҳамин сабаб дар аввал баъзе натиҷаҳои ҳисобҳои интегралӣ барои функсияҳои бисёрқимата оварда мешаванд.

Бигузор A ва B ду маҷмӯи маҳдуди ғайри холӣ дар $\mathbb{R}^n$ аст. Метрикаи Хаусдорф ё масофаи байни A ва B дар намуди зерин дода мешавад

$$d_H(A,B) = max\big[\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\big]$$

ки дар он бо $\|\cdot\|$ норма дар фазои Евклид $\mathbb{R}^n$ ифода карда мешавад.

Мо инчунин бо $Q(\mathbb{R}^n)$ маҷмӯи ҳамаи зермаҷмӯҳои ғайрихолии $\mathbb{R}^n$-ро ишора мекунем. Изҳороти зерин вуҷуд дорад

Теоремаи 2.2.1[1]**.** *Фазои метрикии* $(Q(\mathbb{R}^n), dh)$ *пурра ва ҷудошаванда аст.*

Бигзор $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ фазои эҳтимолӣ бошад, ки дар он Ω-зермаҷмӯ аз $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$-алгебраи ҳамаи зермаҷмӯҳо аз $\mathbb{R}^n$, P-ченаки эҳтимолият мебошанд. Бигузор бо $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ маҷмӯи зермаҷмӯҳои ғайрисаҳеҳи $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ бо хосиятҳои зерин бошанд:

1) маҷмӯи $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\}$ компактӣ барои ҳар кадом x аст;

2) $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\} \neq \emptyset$.

Таърифи 2.2.6. *Тағйирёбандаи ғайрисаҳеҳи тасодуфӣ (ё тағйирёбандаи тасодуфӣ) функсияи* $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(P\mathbb{R}^n)$ *мебошад, ки*

$$\{(\omega, x) : x \in X_\alpha(\omega)\}\mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

барои ҳар кадом $\alpha \in [0,1]$*, ки дар ин ҷо* $X_\alpha(\omega) : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *бо баробарии зерин муайян карда мешавад*

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

Теоремаи 2.2.8[2]**.** *Агар* $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *тағйирёбандаи ғайрисаҳеҳи интегралии маҳдудшуда бошад, пас маҷмӯи ғайрисаҳеҳи* $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *вуҷуд дорад, ки*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha \text{ для любого } \alpha \in [0,1].$$

Таърифи 2.2.9. *Интизории математикии тағйирёбандаи тасодуфии* X, *ки бо* $E(X)$ *ишора мешавад, маҷмӯи ғайрисаҳеҳ номида мешавад.* $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, *ки он* $\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha$ *барои ҳар кадом* $\alpha \in [0,1]$.

Ҳадафи навбатии мо паҳн намудани теоремаи асосии Лебег оид ба ҳамҷояшавӣ ба ҳолати тағйирёбандаҳои тасодуфии ғайрисаҳеҳ мебошад. Барои ин, мо ҷамъбасти метрикаи Ҳаусдорффро ба маҷмӯи $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ ворид мекунем.

Бигузор $u, v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ бошад, адади зеринро ворид мекунем

$$d(u,v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)),$$

ки дар ин ҷо d_H-метрикаи Ҳаусдорф ва

$$L_\alpha(u) = \{x : u(x) \geq \alpha\}, L_\alpha(v) = \{x : v(x) \geq \alpha\}.$$

Теоремаи 2.2.11. *Фазои метрикии* $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$ *фазои пурра мебошад.*

Дар §2.3 «Дифференсиалҳои функсияҳои ғайрисаҳеҳ», консепсияи дифференсиали функсияи ғайрисаҳеҳ, ки умумикардашудаи дифференсиали функсияҳои бисёрқиматаи Ҳукухара[3] мебошад. Мафҳуми дифференсиали функсияҳои бисёрқимата, ки дар §2.1 ворид карда шуд, умумикардашудаи маҷмӯҳои тасодуфӣ буда, номуайянии ҳам ғайрисаҳеҳ ҳам тасодуфиро ба назар мегирад. Дар таърифи дифференсиалӣ функсияҳои маҷмӯӣ унсури асосии теоремаи дохилкунӣ мебошад (H. Radstrom[4]).

Агар X фазои рефлексии банах бошад, пас барои васеъ кардани метрикаи Ҳаусдорф мо зермаҷмӯи $\mathcal{F}_0(X)$-и маҷмӯи $\mathcal{F}(X)$, ки дорои ҳамаи маҷмӯҳои ғайрисаҳеҳи $u : X \to [0,1]$-ро баррасӣ мекунем, ки он хосиятҳои зеринро дорост:

(1) u инъикоси болоии нимпайваста;

(2) u ғайрисаҳеҳи барҷаста аст;

(3) Агар $u, v \in \mathcal{F}_0(X)$ бошад, пас масофаи байни u ва v бо воситаи баробарии зерин муайян кардан мумкин аст

$$(u,v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)),$$

ки дар ин ҷо бо d_H масофаи Ҳаусдорф ишора шудааст.

Таърифи зерин дуруст аст

Теоремаи 2.3.1. $(\mathcal{F}_0(X), d)$ *фазои метрикии пурра мебошад.*

Акнун мафҳуми дифференсиронии умумиро ба маънои Ҳукухара, ки бори аввал дар корҳои S.Markov[16,17] ворид шудааст, дида мебароем. Дар ин корҳо таърифҳои алтернативии ҳосилаҳои функсияи ғайрисаҳеҳ пешниҳод карда щудаанд.

Таърифи 2.3.28. Бигзор $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ и $x_0 \in (a, b)$ бошад. Мегӯем, ки F дар x_0 (GH-дифференсиронидашаванда, барои кӯтоҳӣ) як функсияи ба таври қатъӣ умумишудаи Ҳукухара мебошад, агар унсури $f'(x_0) \in \mathbb{R}\mathcal{F}$ мавҷуд бошад, чунон ки барои ҳама $h \geq 0$ кофӣ хурд шартҳои зерин иҷро карда шаванд:

(i) $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0), f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ мавҷуд аст ва

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'_G(x_0)$$

ё (ii) $f(x_0) \ominus f(x_0 + h), f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)$ мавҷуд аст ва

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_G(x_0)$$

ё (iii) $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0), f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)$ мавҷуд аст ва

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_G(x_0)$$

ё (iv) $f(x_0) \ominus f(x_0 + h), f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)$ мавҷуд аст ва

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 - h)}{h} = f'_G(x_0).$$

Дар ин ҷо бо $\ominus_H$ фарқи оддии Ҳукухара ишора карда шудааст.

Боби 3 диссертатсия ба муодилаҳои ғайрисаҳеҳи дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бахшида шудааст.

Бигзор $\eta, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, онгоҳ ҳосили ҷамъи ин ададҳои ғайрисаҳеҳ аз рӯи γ-печида ба таври зерин муайян карда мешавад.

$$[(\eta + v), \gamma] = [(\eta_*, \gamma) + (v_*, \gamma), (\eta^*, \gamma) + (v^*, \gamma)].$$

[16]Markov, S. Existence and uniqueness of solutions of the interval differential equation X '= f (t,X) [Text] / S. Markov // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 31. — 1978. — P 1519–1522.
[17]Markov, S. Calculus for interval functions of areal variable [Text] / S. Markov // Computing. — 22. — 1979. — P 325–337.

H -фарқият барои ду адади ғайрисаҳеҳи η ва v, ки бо $\eta \ominus v$ ишора карда мешавад, ҳамчун адади ғайрисаҳеҳи $\omega = \eta + v$ муайян карда мешавад:

$$[(\eta \ominus v), \gamma] = [(\eta_*, \gamma) - (v^*, \gamma), (\eta^*, \gamma) - (v_*, \gamma)].$$

Функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи бо ду тағйирёбандаи ν ва τ ҷуфти тартибёфтаи (ν, τ) ба адади ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu, \tau)$ мувофиқ менамояд. Дар намуди γ-печида $\Phi(\nu, \tau)$ ба таври зерин тасвир карда мешавад:

$$\Phi(\nu, \tau, \gamma) = [\Phi_*(\nu, \tau, \gamma), \Phi^*(\nu, \tau, \gamma)].$$

Функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu, \tau)$ дар дилхоҳ нуқтаи (ν_0, τ_0) пайваста буда, агар аз $\|\Phi(\nu, \tau) - \Phi(\nu_0, \tau_0)\| < \delta$, ҳосил шавад, ки $\Phi(\nu, \tau) - L < \epsilon$.

Ё ба таври дигар

$$\lim_{(\nu,\tau)\to(\nu_0,\tau_0)} \Phi(\nu, \tau) = L.$$

Дар параграфи 3.1 диссетатсия таърифи табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас ва ҳосилаи хусусии сахт умумикардашудаи касрӣ-монанд дода мешавад.

Таърифи 3.1.4. *Барои функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu, \tau)$ ҳосилаи хусусии сахт умумикардашудаи касрӣ-монанд аз рӯи ν тартиби Ψ-ро дороcт ва ҳамчун адади ғайрисаҳеҳи $\frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu^\Psi}$ муайян карда мешавад, ки он*

1. Барои дилхоҳ $\theta > 0$, H-фарқиятҳои $\Phi(\nu_0 + \theta\nu^{1-\Psi}, \tau) \ominus \Phi(\nu_0, \tau)$ ва $\Phi(\nu_0, \tau) \ominus \Phi(\nu_0 - \theta\nu^{1-\Psi}, \tau)$ мавҷуданд ва

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\Phi(\nu_0 + \theta\nu^{1-\Psi}, \tau) \ominus \Phi(\nu_0, \tau)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\Phi(\nu_0, \tau) \ominus \Phi(\nu_0 - \theta\nu^{1-\Psi}, \tau)}{\theta}.$$

2. Барои дилхоҳ $\theta > 0$, H-фарқиятҳои $\Phi(\nu_0, \tau) \ominus \Phi(\nu_0 + \theta\nu^{1-\Psi}, \tau)$ ва $\Phi(\nu_0 - \theta\nu^{1-\Psi}, \tau) \ominus \Phi(\nu_0, \tau)$ мавҷуданд ва

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\Phi(\nu_0, \tau) \ominus \Phi^\Psi(\nu_0 + \theta\nu^{1-\Psi}, \tau)}{-\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\Phi(\nu_0 - \theta\nu^{1-\Psi}, \tau) \ominus \Phi(\nu_0, \tau)}{-\theta}.$$

Ҳосилаи хусусии сахт умумикардашудаи касрӣ-монанд аз функсияи $\Phi(\nu, \tau)$ аз рӯи τ тартиби $\delta - 1$ низ ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Леммаи 3.1.9. *Барои функсияи бефосилаи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu, \tau)$, ки сахт умумикардашудаи касрӣ-монанди қисман дифференсиронидашаванда аз рӯи v аст, чунин баробарӣ дорем:*

$$\int_a^b \frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu^\Psi} \nu^{\Psi-1} d\nu = \Phi(b,\tau) - \Phi(a,\tau).$$

Табдилоти дукаратаи Лапласи функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu,\tau)$ дар намуди баробарӣ муайян карда мешавад.

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,r_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r_2\tau} \odot e^{-r_1\nu} \odot \Phi(\nu,\tau) d\nu d\tau,$$

ки дар ин ҷо интеграли тарафи рост мавҷуд аст.

Таърифи интервалии табдилоти Лаплас вуҷуд дорад.

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\Phi(\nu,\tau)] = [\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\Phi_*(\nu,\tau,\gamma)], \mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]].$$

Табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи баръакси Лаплас дар намуди баробарӣ муайян карда мешавад.

$$\mathcal{L}_\nu^{-1} \mathcal{L}_\tau^{-1} [\phi(r_1,r_2)] = \Phi(\nu,\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+\infty} e^{-r_2\tau} e^{-r_1\tau} \odot \phi(r_1,r_2) dr_1 dr_2.$$

Табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас на барои ҳамаи функсияҳои ғайрисаҳеҳ мавҷуд аст. Масалан, $\Phi(\nu,\tau) = \nu\tau \odot \eta$ ё $\nu^2 + \tau^2 \odot \eta$ табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас барои ягон функсияи ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu,\tau)$ намебошад, чунки $\Phi(\nu,\tau)$ ҳангоми $\nu \to \infty, \tau \to \infty$ будан, ба сифр майл намекунад. Ба ғайр аз ин, табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас барои $\Phi(\nu,\tau) = exp(\alpha\nu^2 + \beta\tau^2) \odot \eta$ бо $\alpha, \beta > 0$ вуҷуд надорад, чунки он тартиби экспоненсиалӣ надорад, аз барои он, ки

$$\lim_{\nu\to\infty,\tau\to\infty} exp(\alpha\nu^2 + \beta\tau^2 - r_1\nu^2 + r_2\tau^2) \odot \tau = \infty.$$

Таърифоти зерин дуруст аст.

Теоремаи 3.1.14. *Агар функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи* Φ *ду шарти зеринро қонеъ намояд:*

1. Φ *тартиби экспоненсиалии ғайрисаҳеҳ дорад.*

2. Φ *маҳдуд ва қисман бефосила бошад, пас табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас мавҷуд буда, комилан наздикшаванда мебошад.*

Минбаъд, теоремаҳои 3.1.15 - 3.1.19-ро оид ба хосиятҳои табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лапласи мустақим ва баръакс муқаррар карда мешаванд.

Аналоги теорема оид ба печида инчунин дар шакли таърифоти зерин муқаррар карда мешавад.

Теорема 3.1.22. *Барои табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи Лаплас теорема оид ба печида бо формулаи зерин дода мешавад:*

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[(\Phi \circ \circ \Psi)(\nu,\tau)] = \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] \odot \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Psi(\nu,\tau)].$$

Дар параграфи §3.2 мафҳуми умумии табдилоти ғайрисаҳеҳи дукарата барои ҳолати табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи касримонанди Лаплас оварда мешавад

Табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи касримонанди Лаплас барои функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\Phi(\nu,\tau)$ намуди зерин дорад:

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,r_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-r_2\frac{\tau^{\delta}}{\delta}} e^{-r_1\frac{\nu^{\Psi}}{\Psi}} \odot \Phi(\nu,\tau)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau,$$

ки дар ин ҷо интеграли тарафи рост вуҷуд дорад.

Сабти интервалӣ чунин намуд дорад:

$$\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi(\nu,\tau)] = [\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi_*(\nu,\tau)], \mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi^*(\nu,\tau)]].$$

Табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи касрӣ-монанди баръакси Лаплас барои функсияи қиматаш ғайрисаҳеҳи $\phi(r_1,r_2)$ намуди зерин дорад:

$$\mathcal{L}^{\nu-1}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau-1}_{\delta}[\phi(r_1,r_2)] = \Phi(\nu,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{-r_1\frac{\nu^{\Psi}}{\Psi}} \odot e^{-r_2\frac{\tau^{\delta}}{\delta}} \odot \phi(r_1,r_2)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}dr_1dr_2.$$

Дар теоремаҳои 3.2.4 — 3.2.12 меъёрҳои мавҷудияти табдилоти ғайрисаҳеҳи дукаратаи касримонанди мустақим ва баръакси Лаплас ва хосиятҳои онхо оварда шудаанд.

Минбаъд, дар асоси изҳороти ин теоремаҳо муодилаҳои ғайрисаҳеҳи касримонанд дар ҳосилаҳои хусусӣ, масалан намуди дар поён буда, омӯхта мешаванд:

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}} + \alpha \odot \frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}} = F(\nu,\tau,\Phi(\nu,\tau)),$$

бо шартҳои ибтидоии

$$\Phi(\nu,0) = g(\nu), \Phi(0,\tau) = h(\tau).$$

Ҳолатҳои гуногуни дифференсиронидашавандагии функсия дида баромада мешаванд. Φ аз рӯи $(\delta-1)$ бо τ ва аз рӯи $(\psi-1)$ бо ν. Ҳам ҳалҳои аналитикӣ ва ҳам тасвири графикии онҳо омӯхта мешаванд. Масалан, ҳангоми $\delta = \psi = 1$ будан ва функсияи

$$\Phi_*(\nu, \tau, \gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(\gamma - 1)\nu + (\gamma - 1)\tau, 0 \le \gamma \le 1$$

$$\Phi^*(\nu, \tau, \gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(1 - \gamma)\nu + (1 - \gamma)\tau, 0 \le \gamma \le 1.$$

графики функсияи:

$$\Phi(\nu, \tau, \gamma) = [\frac{\nu^2}{2} - 3\nu - \tau, \frac{\nu^2}{2} + 3\nu + \tau]$$

дар намуди расми 3.4.1 ёфта шуда аст.

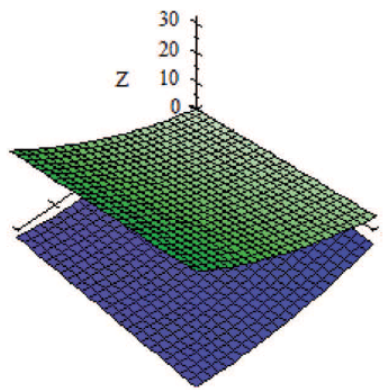

Рис. 3.4.1 Графики $\Phi(\nu, \tau, \gamma) = [\Phi_*(\nu, \tau, \gamma), \Phi^*(\nu, \tau, \gamma)]$ с $\gamma = 0$

Инчунин ҳалҳои муодилаҳои ғайрисаҳеҳи касрӣ-монанди гармигузаронӣ ва муодилаи мавҷӣ ёфта шудаанд. Ҳамзамон вариантҳои гуногуни додаҳои ғайрисаҳеҳ баррасӣ шудаанд.

§3.3 ба муодилаи ғайрисаҳеҳи интегро-дифференсиалии навъи Урисон бахшида шудааст.

Дар фазои ғайрисаҳеҳи n-ченакаи $\mathbb{R}^n$ муодилаи шакли зерин баррасӣ карда мешавад:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T] = I, \tag{0.1}$$

ки дар ин ҷо

$$(Kx)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

ва шартҳои зерин иҷро карда мешаванд:

(1) $F : I \times \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ чунин, ки

$t \to F(t, x, y)$ – тасвири сахт ченшаванда барои ҳамаи $x, y \in \mathbb{E}^n$;

$(x, y) \to F(t, x, y)$ – тасвири бефосила барои қариб ҳамаи $t \in I$.

Бигзор, инчунин, функсияи зерин вуҷуд дошта бошад

$$a(\cdot), b(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+);$$

(2) $\rho(F(t, A, B)) \leq \lambda(t)(\rho(A) + \rho(B))$ барои ҳамаи зермаҷмӯҳои ғайрихолии маҳдуди $A, B \in \mathbb{E}^n$ ва $\lambda(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, ρ – меъёри ғайрикомпактнокии Куратовский;

(3) $D(F(t, x, y), \hat{o}) \leq a(t) + b(t)[D(x, \hat{o}) + D(y, \hat{o})]$;

(4) Оператори

$$(Ax)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

аз I ба $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ амал мекунад ва комилан бефосила аст.

Теоремаи 3.3.6. *Агар шартҳои (1) — (4) иҷро шаванд, он гоҳ масъала ҳадди аққал як ҳалли худро дар I дорад.*

Боби охирин, яъне боби чоруми рисола ба муодилаҳои эволютсионии касрии стохастикӣ бахшида шудааст. Ин гуна муодилаҳо дар давоми даҳсолаҳои охир инкишофи назаррас ба даст оварданд. Ин рушд ба он вобаста аст, ки амалисозии андозагириҳои онҳо аксар вақт ҳамчун моделҳои математикӣ дар физика, техника, математикаи биологӣ, математикаи молиявӣ ва дигар соҳаҳои дониш пайдо мешаванд. Умумисозииии назарияи Ито — Стратанович — Скороход ибтидои худро аз корҳои A. Ichikawa[18] оғоз кардааст. Дар доираи ин назария, махсусан, муодилаи хаттии дифференсиалии Ито бо садои мултипликативӣ омӯхта шудааст. Дар корҳои G.Da Prato, J. Zabczyk[6], L. Gawarecki, V. Mandrekar[19], I.V. Melnikova[7], A. Filinkov, J. Sorensen[20]. Дар корҳои Yu. E. Gliklich[21], E. Nelson[22], M. Kovach, S. Larsson[23], G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva, S.A. Zagrebina[24] роҳи дигар барои таҳқиқи муодилаҳои стохастикӣ дар асоси ҳосилаи Нелсон-Гликлих пешниҳод карда шуд. Дар кори G. A. Sviridynk at al.[24] муайян карда шуд, ки ҳосилаи Нелсон-Гликлих аз раванди Винер

[18]Ichikawa, A. Stability of semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // J. Math. Anal. Appl. — 1982.— N90.— pp. 12-44.

[19]Gawarecki, L., Mandrekar, V. Stochastic Differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations [Text] / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Berlin; Heidelberg: Springer — Verl. — 2011.

[20]Filinkov, A., Sorensen, J. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions [Text] / A. Filinkov, J. Sorensen // Stoch. Stoch. Rep. — 2003. — v. 72.– N3-4. — P 129-173.

[21]Gliklich, Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Appercations to Mathematical Physics [Text] / Yu. E. Gliklich // London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer. — 2011.

[22]Nelson, E. Dynamical Theory of Brownian motion [Text] / E. Nelson // Princeton: Princeton University Press. — 1967.

[23]Kovach, M. Larsson, S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. New Directions on the Mathematical and Computer Sciences. [Text] / M. Kovach, S. Larsson // National Universities Commission, Auja, Nigeria.Lagos.Publications of the ICMCS. — 2007. — V.4. — P 159-232.

[24]Sviridyuk, G. A, Zamyshlyaeva, A. A., Zagrebina, S. A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive "white noise" [Text] / G. A. Sviridynk, A. A. Zamyshlyaeva, S. A. Zagrebina // Vestnik YUUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i proramirovanie". — V.11.– N3.

бо пешгӯиҳои назарияи Эйнштейн-Смолуховский дар бораи ҳаракати Браун мувофиқат мекунад, бинобар ин раванди стохастикии мувофиқро «садои сафед» номиданд.

Дар параграфи 4.1 назарияи ҳалшавандагии муодилаҳои стохастикии эволютсионӣ бо ҳосилаи тартиби касрӣ аз рӯи вақт ва ҷамъшавандаи аддитивии намуди «садои сафед» дида баромада мешавад. Натиҷаҳои дар ин ҷо ба даст овардашуда метавонанд дар таҳлили равандҳои гуногуни релаксатсия ва диффузияи стохастикӣ дар муҳити ковок ва фракталӣ истифода шаванд.

Масъалаи Коширо барои муодилаи абстрактӣ дида мебароем.

$$^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0$$

ки дар ин ҷо $^{c}D_t^{\alpha}$ - ҳосилаи касрии Капуто тартиби $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - оператори қариб секториалӣ дар фазои ҷудошавандаи Ҳилберт H, $f : H \to H$ - тасвири ғайрихаттии дода шуда, $\omega(t)$ - раванди тасодуфии мутлақ (садои сафед ба маънои Балакришнан) дар фазои ҷудошавандаи Ҳилберт H_n, B - оператори хаттӣ, ки дар H бо бузургиҳо дар фазои оператор аз H_n ба H муайян шудааст, u_0 - элементи муайяншуда дар H. Ҳангоми таҳлили ҳалли муодилаи Коши, талаботи стандартӣ аз он иборат аст, ки оилаҳои операторҳои ҳалкунандаи $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ ва $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ аз оператори А тавлид шуда бошанд. Ингуна шарт дурустии масъалаи Коширо барои масъалаи якҷинсаи детерминистии халалдорнашудаи зеринро кафолат медиҳад:

$$^{c}D_t^{\alpha} + A(t)u(t) = 0.$$

Баъдан, мо бояд аз тасвири ғайрихаттии $f(\cdot)$ шартҳои навъи Липшитсро талаб кунем. Шартҳое, ки ба оператори B гузошта шудаанд, бо хосиятҳои раванди тасодуфии мутлақи (садои сафед) зич алоқаманданд. Таҳти мафҳуми раванди тасодуфӣ мо садои сафедро ба маънои Балакришнан мефаҳмем. Ин мафҳум бори аввал дар монографияи A.V. Balakrishnan[8] оварда шудааст. Фазои функсионалие, ки дар ин ҷо баррасӣ мешавад, $W = L_2((0,T), H)$ мебошад, ки дар он $0 < T \leq \infty$, фазои ҷудошавандаи Ҳилберт хоҳад буд, агар H низ чунин бошад. Минбаъд, бигзор ω ва μ як элементи фазои W ва ченаки стандартии Гауссиро дар W мувофиқан, ифода кунанд. Ин фазои муайяншуда W садои сафед номида мешавад ва ҳар як аз элементҳои он $\omega \in W$ амалисозии садои сафед аст.

Минбаъд функсияи зеринро ворид мекунем

$$W(t,\omega) = \int\limits_0^t \omega(s)ds,$$

— 2018. — P 103-117.

ки аз рӯи t бефосила буда, ҳангоми $t > s$ будан фарқияти $[W(t,\omega) - W(s,\omega)]$ қимати тасодуфии гауссӣ бо интизории сифрии математикӣ ва дисперсияи баробар ба $(t-s)\|h\|^2$, ки дар ин ҷо $h \in W$ мебошад, аст. Бо вуҷуди ин, функсияи $[W(t,\omega), h]$ наметавонад амалисозии раванди винерӣ бошад, аз сабаби он, ки чунин амалисозӣ вариантҳои бемаҳдуд дар ҳар кадом интервали охирнок ҳангоми ω будан, дорад.

Модели коррелатсияи фазоӣ-вақтии Балакришнан яке аз моделҳои эҳтимолии дар делта-функсия асос ёфта мебошад. Дар параграфи 4.1 қисмҳои 1 ва 2 характери кумаккунанда дошта, ба омӯзиши интеграл ва ҳосилаҳои касрӣ ва операторҳои резолвентии $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ ва $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ мувофиқан бахшида шудааст.

Дар қисми 3 хосиятҳои асосии садои сафеди Балакришнан ва интеграли стохастикии мувофиқ оварда шудаанд. Меъёри силиндрӣ дар (W, Σ) фта шудааст, Σ - алгебраи маҷмӯҳои силиндрӣ дар намуди

$$\mu(E) = \int\limits_B G(x)dx,$$

ки дар ин ҷо B - маҷмӯи борелӣ, $\mathbb{R}^n$ ва $G(x)$ - зичии n - ченакаи Гаусс бо миёнаи сифрӣ ва ковариатсияи воҳидӣ, яъне $G(x)$ - меъёри Гаусси дар W.

Зери мафҳуми садои сафеди охирнок-аддитивӣ дар W раванд бо траекторияи $\omega(\cdot)$ дар W бо меъёри гауссии μ функсияи характеристикии зерин фаҳмида мешавад:

$$C(h) = E[exp\bigg(i\int\limits_0^T [N(t), h(t)]dt\bigg) = exp\bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T [h(t), h(t)]dt\bigg).$$

Ин меъёр наметавонад то ба меъёри ҳисобӣ-аддитивӣ дар W васеъ карда шавад.

Минбаъд, дар фасли 4 §4.1 муодилаи стохастикии хатии зерин омӯхта мешавад

$$^cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = B\omega(t), t > 0, u(0) = u_0,$$

ки ҳали он аз рӯи формулаи

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau\tau)\omega(\tau)d\tau$$

ҳисоб карда мешавад.

Барои ҳали $u(t,\omega)$ оператори коррелатсионӣ ҳисоб карда шудааст.

Дар ҳолати ғайрихаттӣ будан масъалаи Кошӣ барои ҳолати оператори қариб секториалии A ҳал шудааст. Изҳороти зерин муқаррар шудааст.

Теоремаи 4.1.15. *Фарз мекунем, ки оператори A қариб секториалӣ ва $u(t,\omega)$ ҳали* *масъалаи стохастикии Кошӣ мебошанд. Онгоҳ барои ҳар кадом* $u_0 \in H$ *функсияи* $u(t,\omega)$ *баробарии зеринро қонеъ мекунад*

$$u(t,\omega) = S_\omega(t) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(t,\omega)) d\tau + \\ + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)\omega(\tau) d\tau.$$

Параграфи §4.2 ба таҳлили таносуби байни ченакҳои аддитивӣ-охирнок ва ҳисобӣ—аддитивӣ — масъалаи мураккаби назарияи ченакҳо ва интегралҳо бахшида шудааст.

Натиҷаҳои аввалини ҳалли ин муаммо дар солҳои 40-50-уми асри гузашта ба даст оварда шуда буд ва онҳо ба академик A. Alexandroff [25] ва K. Yosida, E. Hewitt[26] таалуқ доранд. Дар ин корҳо меъёрҳои воқеъӣ-қимата дида баромада мешаванд, ки онҳо дорои хосиятҳои охирнок-аддитивӣ мебошанд, аммо ҳатмӣ нест, ки хисобӣ-аддитивӣ бошанд. Вазъи кунунии ин масъала муфассал дар корҳои H. Duanmu, W. Weiss [27]. Дар кори M.S. Baltbelt[28] қайд карда шудааст, ки дар фарқият аз натиҷаҳои Ю. В. Прохоров[29] ва А. Н. Ширяев [30], исбот кардан мумкин аст, ки барои ҳар кадом меъёри охирнок-аддитивии P дар фазои метрикии ҷудошавандаи комилан маҳдуд пайдарпаии ҳисобӣ-аддитивии меъёрҳо эҳтимолии $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ки

$$\int f dP_n = \int f dP$$

барои ҳар кадом функсияи мунтазам бефосилаи маҳдудшудаи қимати ҳақиқӣ доштаи f ёфта мешавад. Дар ҳолати фазоҳои фазавии беохирченака мушкилоти дигари математикӣ ба вуҷуд меояд. дар монографияи A. V. Balakrishnan[31] сохтори маҷмӯи ченшавандаи фазои Ҳилберт тавсиф карда шудааст, ки бо топологияи он мувофиқ карда шуда аст. Муҳим он аст, ки назарияи меъёр дар фазои Ҳилберт аз назарияи классикӣ бо он фарқ мекунад, ки

[25] Alexandroff, A. D. Additive set-functions in abstract spaces. I [Text] / A. D. Alexandroff // Mat. Sb. — 8:2. — 1940. — P 307–348.

[26] Yosida, K., Hewitt, E. Finitely-Additive Measures [Text] / K. Yosida, E. Hewitt // Transactions of the American Mathematical Society, 1952. — v. 72. — N1. — P 46-66.

[27] Duanmu, H., Weiss, W. Finitely-Additive [Text] / H. Duanmu, W. Weiss // Countable-Additive and Internal probability Measures. — 2020. — arXiv: 2020.02463v1[math.l0]6Oct2020.

[28] Baltbelt, M. S. An Introduction to Stochastic Process, with special reference to methods and applications [Text] / M. S. Baltbelt // Cambridge Univ. Press. — 1978. — 388 p.

[29] Прохоров, Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей [Текст] / Ю. В. Прохоров // Теория вероятностей и ее применения. — т. 1. — вып. 2. — 1956. — С 177-238.

[30] Ширяев, А. Н. Вероятность: В 2-х книгах [Текст] / А. Н. Ширяев // М.:МЦНМО. — 2007.

[31] Balakrishnan, A. V. Introduction to optimization theory in a Hilbert Space [Text] / A. V. Balakrishnan // New York: Springer-Verlag. — 1971.

меъёри дар алгебраи маҷмӯҳои силиндрӣ муайян шуда фақат охирнок-аддитивӣ мебошад.

Параграфи 4.2 ба саволи мушаххас — таҳлили ҳалшавандагии масъалаи ибтидоӣ барои муодилаҳои стохастикии дифференсиалӣ дар фазои Ҳилберт бо меъёри эҳтимолии охирнок-аддитивӣ ва бо ҳосилаи тартиби касрӣ аз рӯи вақт бахшида шудааст. Бо ин мақсад меъёри Гаусс сохта шудааст, ки хусусияти ҳолати беохирченакаро тасвир менамояд. Инчунин интеграли нави стохастикии Балакришнан дар асоси меъёри эҳтимолии охирнок-аддитивӣ ворид карда мешавад, инчунин муносибати он бо интеграли машҳури Ито таҳқиқ карда мешавад. Натиҷаҳои асосии §4.2 Теоремаи 4.2.8 ва Теоремаи 4.2.9 мебошанд, ки дар онҳо шартҳои лозима ва кифояи мавҷудияти равандҳои эҳтимолии физикӣ оварда шудаанд.

Дар параграфи 4.3 теоремаҳои асосии усули дуюми Ляпунов барои устувории ҳалли муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ бо ҳосилаҳои касримонанд муқаррар карда шудаанд. Ҳосилаҳои касрӣ дар §4.3.1 ворид карда шуданд. Дар солҳои охир шумораи зиёди мақолаҳо ба вариантҳои гуногуни ҳосилаҳои касримонанд бахшида шудаанд. Чунин ҳосилаҳо ҳангоми омӯзиши хосиятҳои ирсии хотираи системаҳои мураккаб ба вуҷуд меоянд (масалан ниг. B. Bayor, D.F.M. Torres[32], A. Chadha, S.N. Boca[33]). Дар корҳои T. Abdeljawad[11], T. Allahviranloo at al.[34], M. L.Puri, D. Ralescu[35] натиҷаҳои нав барои шабакаҳои нейронӣ бо вақти касрии дискретӣ оварда шудаанд. Аз тарафи дигар, дар даҳсолаҳои охир назарияи устувории муодилаҳои дифференсиалии касрӣ ва татбиқи он таҳия карда шудааст. Ва ин тааҷҷубовар нест, зеро стохастикӣ будан муҳимтарин хосияти ҷаҳони воқеӣ аст ва устуворӣ афзалияти асосӣ ҳангоми таҳлили системаҳои мураккаби татбиқшаванда мебошад.

Назарияи математикӣ — устувории ҳалли муодилаҳои стохастикии ғайрихаттии тартиби бутун ё касрии ҳосилаҳо аз рӯи вақт асосан дар ду самт инкишоф ёфта истодаанд. Ин усули дуюм (ё бевосита)-и Ляпунов аст, ки барои ҳолатҳои соддатарин дар монографияҳои В.Н. Афанасев ва дигарон[9], Р.З. Хасминский [36] ва мақолаҳои N. Aguila-Camacho ва диг.[37]

[32]Bayor, B., Torres, D.F.M. Existence of solution to a local fractional nonlinear differenial equations [Text] / B. Bayor, D. F. M. Torres // J.Appl.Mech.Tech.Phys. — 55(2).— 2014.— P 191-198.

[33]Chadha, A., Boca, S. N. Existence and exponential stability for neutral stochastic fractional differential equations with impulses driven by Poisson [Text] / A. Chadha, S.N. Boca // Stochastic.— 90(5).— 2018.— P 663-681.

[34]Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A., Hasanoglu, A. On fuzzy solutions for heat equation based on generalized hukuhara differentiability [Text] / T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu // Fuzzy Sets and Systems. — 265. — 2015. — P 1–23. — DOI 10.1016/j.fss.2014.11.009.

[35]Puri, M. L., Ralescu D. Differentielle d'une fonction floue [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. P 293. — 1981. — P 237-239.

[36]Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях [Текст] / Р. З. Хасьминский // М.Наука. — 1969.

[37]Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A., Gallegos, J.A. Lyapunov functions for fractional order systems [Text] / N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos // Commun.Nonlinear Sci.Numer.Simul. — 19. — 2014. — P 2951-2957.

ва усули нуқтаҳои беҳаракат, ки дар корҳои T.A. Burton[38,39,40] оварда шудаанд. Дар §4.3 диссертатсия функсияи Ляпунов ва ҳосилаҳои касримонанд барои он омӯхта мешаванд.

Аввалан, мо муодилаи детерминистиро бо ҳосилаи касримонанди зерин дида мебароем

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(x(t)) = b(t, x(t)), x(t_0) = x_0,$$

ки дар ин ҷо $x \in \mathbb{R}^n, b \in C(R_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), t_0 \geq 0$ аст.

Таърифи 4.3.10 *Бигзор V пайваста ва α - функсияи дифференсиронидашаванда бошанд, онгоҳ $V : R_+ \times B_r \to \mathbb{R}^m$ ва $x(t, t_0, x_0)$ ҳали масъала барои муодилаи касримонанд мебошад. Онгоҳ барои $(t, x) \in R_+ \times B_r$ ифодаи*

$$^{+}\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}V(t, x) = \limsup\{\frac{V(t + \theta(t - t_0)^{1-\alpha}, x(t + \theta(t - t_0)^{1-\alpha}, t, x)) - V(t, x)}{\theta}, \theta \to 0+\}$$

ҳосилаи болоии тарафи рости функсияи касримонанди Лапунов $V(t, x)$ мебошад.

Минбаъд, формулаи Ито барои функсияҳо бо ҳосилаҳои касримонанд ворид карда мешавад.

Таърифи 4.3.13. *Барои ҳар кадом $X_{t_0} \in \mathfrak{L}_0\,\mathfrak{F}$ - раванди тасодуфии мутобиқшуда X ҳалли масъалаи зерин номида мешавад*

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\frac{dW(t)}{dt}, t > 0, 0 < \alpha \leq 1$$

$$X(0) = X_{t_0}$$

агар баробарии зерин барои $t_0 \in [0, \infty)$ иҷро карда шавад:

$$X(t) = X(t, t_0, X_{t_0}) =$$

$$= X_{t_0} + \int_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-1}b(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-1}\sigma(s, X(s))dW(s).$$

Леммаи 4.3.15. *Бигзор $Y(\cdot) = Y(\cdot, Z(\cdot)) \in C^{1,2}(R_+ \times R, R)$ бошад. Онгоҳ $Y(t), t \geq 0$ процесси Ито мебошад, ки бо баробарии зерин дода мешавад*

$$dY(t) = [Y_t(t, Z(t)) + Y_Z(t, Z(t))\tilde{b}(t)\frac{1}{2}y_Z(t, Z(t))]dt+$$

[38]Burton, T. A. Fractional differential equations and Lyapunov functionals [Text] / T. A. Burton // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. — 74. — 2011. — P 5648-5662.

[39]Burton, T.A., Furumochi, T. Krasnoselski's fixed point theorem and stability [Text] / T.A. Burton, T. Furumochi // Nonlinear Anal.Theory Methods. — 49. — 2002. — P 445-454.

[40]Burton, T., Zhang, B. Fixed points and fractional differential equations [Text] / T. Burton, B. Zhang // Fixed Point Theor. — 13. — 2013. — P 313-325.

$$+Y_z(t, Z(t))\bar{\sigma}(t)dW(t) \text{ қариб мумкин.}$$

Дар асоси таърифи 4.3.10 ва леммаи 4.3.15 таърифҳои устуворияти стохастикӣ, устувորияти стохастикии ассимптотикӣ, устуворияти Ляпунов ва устуворияти ассимптотикии Ляпунов, устуворияти экспоненсиалии қариб мумкин оварда шудаанд. Меъёрҳои гуногуни устувории стохастикӣ муқаррар карда шудаанд.

Дар параграфи 4.4 масъалаи стохастикии эпидемиологияи математикӣ дида баромада шудааст. Дар он режаҳои устувор ва ноустувори пандемияи COVID — 19 муайян карда шудаанд.

ХУЛОСАҲО

Дар кори диссертатсионӣ баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо тартиби бутун, касрӣ ва касримонанди ҳосилаҳо баррасӣ мешаванд

Дар натиҷаи тадқиқот натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шуданд:

- леммаҳо ва теоремаҳо дар бораи хосиятҳои тағйирёбандаҳои тасодуфии ғайрисаҳеҳ (бузургиҳо) ва интизории математикии онҳо исбот карда шудаанд [1—М], [2—М], [3—М];
- аналоги теоремаи Радстрём барои ҳолати дифференсиали умумикардашудаи функсияи ғайрисаҳеҳ исбот карда шудааст [3—М], [4—М], [5—М];
- теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ бо ҳосилаҳои хусусии касримонанд исбот карда шудаанд [5—М], [6—М], [7—М];
- теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳали муодилаи ғайрисаҳеҳи интегро-дифференсиалии Урисон исбот карда шудааст [6—М], [7—М], [8—М];
- формулаи ҳалли возеҳи муодилаи дифференсиалии хаттии стохастикӣ бо шарти ибтидоӣ ва оператори қариб секториалии бемаҳдуд дар қисми асосӣ ёфта шудааст [7—М], [8—М], [9—М];
- теоремаи усули дуюм (бевосита)-и Ляпунов дар бораи устувории ҳалли муодилаҳои стохастикӣ бо ҳосилаи касримонанд исбот карда шудааст [6—М], [8—М], [9—М];
- ҳалли як масъалаи мушаххаси эпидемиологияи математикӣ, ки ҳангоми таҳлили паҳншавии пандемияи COVID-19 ба миён меояд, ёфта шудааст [8—А], [9—М], [10—М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот

Натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Усулҳои дар диссертатсия инкишоф додашуда ва натиҷаҳои ба даст овардашударо дар таҳқиқотҳои синфҳои нав ва умумитари муодилаҳои ғайрисаҳеҳ ва стохастикии дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо тартиби бутун ва касрии ҳосилаҳо истифода бурдан мумкин аст. Татбиқоти натиҷаҳои номбаршударо дар таҳлили стохастикии моделҳои эпидемикӣ истифода бурдан мумкин аст. Қисмҳои алоҳидаи диссертатсия барои хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрантони ихтисосҳои “Математика” ва “Математикаи амалӣ” истифода бурдан мумкин аст.

Интишороти муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия

1. Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда:

[1—М] Рахматов Дж. Ш. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

[2—М] Рахматов Дж. Ш. Дробные интегро-дифференциальные включения типа Хейла в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов М., Д.Н. Гулджонов, Дж.Ш. Рахматов // Известия АН РТ. — 2019. — №1(174). — С 7-16.

[3—М] Рахматов Дж. Ш. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Чебышевский сборник. — 2019. — т. 20, вып. 4. — С 208-225.

[4—М] Rahmatov J. Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[5—М] Рахматов Дж. Ш. Эволюционные уравнения дробного порядка с запаздыванием в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, С. Расули (ИРА), Дж. Ш. Рахматов. // Известия АН РТ. — 2020. — №3(180). — С 7-21.

[6—М] Rahmatov J. Sh. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — 2021. — V. 8 №2. — P 87-99.

[7—М] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[8—М] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона [Текст] / Дж. Ш. Рахматов // Доклады НАН Таджикистана. — 2021. — том 64, №9-10. — С 491 - 500.

[9—М] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[10—М] Rahmatov J. Sh. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / Ilolov M., Kuchakshoev K., Mirshahi M., Rahmatov J. Sh. // Global and Stochastic Analysis Vol. — 10 № 3. — P 75-84.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[11—М] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое уравнение теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико – математических наук, профессора Илолова Мамадшо. — Душанбе. — 2018. — С 113 – 118.

[12—М] Рахматов Дж. Ш. Об одном приложении теоремы Красносельского о неподвижной точке [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. — Таджикистан. — Душанбе. — 10-11 июня 2019г. — Душанбе. — ТНУ. — С 101-109.

[13—М] Рахматов Дж. Ш. Об одной теореме существования для функционально-дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (Таджикистан, Душанбе, 30-31 января 2020 г.) «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». — ТНУ. — Душанбе. — 2020. — С 131-135.

[14—М] Рахматов Дж. Ш. О стохастической инвариантности дробных дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Актуальные проблемы современной математики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). — С 82-84.

[15—М] Рахматов Дж. Ш. О решениях нечетких дифференциальных уравнений дробного порядка. Современные методы теории функций и смежные проблемы [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова; Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2021. — С 129-131.

[16—М] Рахматов Дж. Ш. Об эквивалентности экспоненциальной дихотомии и устойчивости по Хайеру-Улам линейных периодических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Уфимская осеняя, математическая школа: Материалы международной научной конференции (г.Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В двух томах. — Том 1. — Уфа: Аэтерна. — 2021. — С 189-191.

[17—М] Рахматов Дж. Ш. Задача Коши для дробных абстрактных стохастических дифференциальных уравнений [Текст] / М. Илолов, Рахматов Дж. Ш., С. М. Лашкарбеков // Материалы Конференции “7th International Conference on Stochastic Methods” - сателлитная конференция Международного конгресса математиков 2022 (МКМ-2022) (2–9 июня 2022 г., г. Геленджик, пос. Дивноморское).

[18—М] Рахматов Дж. Ш. Об одном примере почти секторального оператора [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов, С. М. Лашкарбеков // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). — 2022. — С 238-241.

[19—М] Рахматов Дж. Ш. Дробные стохастические дифференциальные уравнения с процессом Леви [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы. Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2023. — С 171-175.

АННОТАЦИЯ

диссертации Рахматова Джамшед Шавкатовича «К теории нечетких, и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложений», на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление»

Ключевые слова: нечеткие множества, нечеткие отображения, нечеткие дифференциальные уравнения, стохастические дифференциальные уравнения, теоремы существования и единственности решений, стохастическая устойчивость, модели эпидемий.

Объект исследования. Объектом исследования являются нечеткие и стохастические дифференциальные уравнения дробного порядка.

Предмет исследования. Доказательства теорем существования, единственности и устойчивости решений уравнений в частных производных дробного порядка с нечеткими и стохастическими данными.

Методы исследования. Для решения целей и задач, поставленных в диссертации, используются методы стохастического, дробного и функционального анализа.

Научная новизна работы. В работе приведены новые подходы к определению нечетких случайных величин, дана концепция обобщенного дифференциала нечеткой функции, доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений и дробных стохастических уравнений, найдены явные формулы для решений стохастической задачи Коши с почти секториальными неограниченными операторами.

Степень достоверности результатов диссертации. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Область применения: Методы развитые в диссертации и полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании новых и более общих классов нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Раҳматов Ҷамшед Шавкатович дар мавзӯи «Ба назарияи муодилаҳои ғайри саҳеҳ ва стохастикӣ ва истифодаи онҳо» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика 01.01.02 – «Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ»

Вожаҳои калидӣ: маҷмӯҳои ғайрисаҳеҳ, тасвирҳои ғайрисаҳеҳ, муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ, муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ, теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалҳо, устувории стохастикӣ, моделҳои эпидемиявӣ.

Объекти таҳқиқот. Объекти таҳқиқот муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ ва стохастикии тартиби касрӣ мебошанд.

Предмети таҳқиқот. Исбот намудани теоремаҳои мавҷудият, ягонагӣ ва устувории ҳалҳои муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби касрӣ бо додаҳои ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ.

Методҳои таҳқиқот. Барои расидан ба ҳадаф ва ҳалли масъалаҳои дар диссертатсия гузошташуда, усулҳои таҳлили стохастикӣ, касрӣ ва функсионалӣ истифода мешаванд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар кори илмӣ роҳҳои нави муайян намудани бузургиҳои тасодуфии ғайрисаҳеҳ оварда шудаанд, консепсияи умумикардашудаи функсияи ғайрисаҳеҳ дода шудааст, теоремаҳои мавҷудият, ягонагӣ ва устувории ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳи касримонанд ва муодилаҳои стохастикии касрӣ исбот карда шудаанд, формулаҳои возеҳ барои ҳалли муодилаи стохастикии Кошӣ бо операторҳои қариб секториалии бемаҳдуд ёфта шудаанд.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсия. Ҳамаи теоремаҳо, таърифҳо ва формулаҳо бо далелҳои қатъӣ тасдиқ карда шудаанд, як қатор хулосаҳо бо таҳқиқоти дигар муаллифон мувофиқанд.

Соҳаи татбиқ: Усулҳои дар рисола таҳияшуда ва натиҷаҳои дар он бадастомада метавонанд дар омӯзиши синфҳои нав ва умумтари муодилаҳои дифференсиалии ғайрисаҳеҳ ва стохастикӣ истифода шаванд.

ANNOTATION

dissertation of Rahmatov Jamshed Shavkatovich «On the theory of fuzzy and stochastic differential equations and its applications», for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.02 – «Differential equations, dynamic systems, optimal control»

Key words: fuzzy sets, fuzzy mappings, fuzzy differential equations, stochastic differential equations, existence and uniqueness theorems for solutions, stochastic stability, epidemic models.

Object of research. The object of research is fuzzy and stochastic differential equations of fractional order.

Subject of research. Proofs of theorems of existence, uniqueness and stability of solutions to partial differential equations of fractional order with fuzzy and stochastic data.

Research methods. To solve the goals and objectives set in the dissertation, methods of stochastic, fractional and functional analysis are used.

Scientific novelty of the work. The work presents new approaches to the definition of fuzzy random variables, gives the concept of a generalized differential of a fuzzy function, proves theorems for the existence, uniqueness and stability of solutions of fuzzy fractional differential equations and fractional stochastic equations, finds explicit formulas for solutions to the stochastic problem Cauchy with almost sectorial unbounded operators.

The degree of reliability of the dissertation results. All theorems, statements and formulas in the dissertation are supported by rigorous proofs, a number of conclusions are consistent with the research of other authors.

Scope of application: The methods developed in the thesis and the results obtained in it can be used in the study of new and more general classes of fuzzy and stochastic differential equations.