РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

**Сайнаков Восиф Додхудоевич**

# НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Душанбе — 2021**

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

**Научный руководитель:** **Шабозов Мирганд Шабозович**, академик Национальный Академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:** **Юсуфзода Гулзорхон Амиршо,** доктор физико-математических наук, профессор, ректор Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева;

**Саидусайнов Муким Саидусайнович,** кандидат физико-математических наук, преподаватель математики Университета Центральной Азии

**Оппонирующая организация:** Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

Защита состоится *21 апреля 2021 г. в 11:00* часов на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «______» «__________________» 2021 г.

**Ученый секретарь**
**диссертационного совета 6D.KOA-012,**
**доктор физико-математических наук** **Р.Н.Одинаев**

# Общая характеристика работы

**Актуальность и степень разработанности темы.** Среди экстремальных задач теории приближения функций двух переменных наиболее важными являются задачи вычисления верхних граней приближения классов функций линейными агрегатами, состоящими из конечного числа произведения одномерных функций. При этом, как правило, в качестве такого агрегата часто используют обобщенные полиномы (так называемые квазиполиномы, или "углы"), порожденные тензорным произведением одномерных тригонометрических или алгебраических полиномов. Такая постановка задачи приближения функций двух переменных является весьма актуальной в силу того, что позволяет решать двумерные экстремальные задачи, которые ранее другими методами не поддавались решению.

Вопросами приближения функций двух переменных суперпозициями функций одного переменного ранее занимались Н.П.Корнейчук и С.В.Переверзов, А.В.Вайндинер, М.К.Потапов, В.Ю.Брудный, В.Н.Темляков, С.Б.Вакарчук[1,2], М.Ш.Шабозов и М.О.Акобиршоев[3,4,5] и многие другие.

**Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами.** Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме "Теория аппроксимации функций".

**Цель и задачи исследования.** Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точную константу в неравенстве Джексона-Стечкина между величиною наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности частных производных высшего порядка указанных функций;

[1] Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. – 1991. – 3 – С. 14-25.

[2] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении "углом" в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інститут математики НАН. Украіни. – 2014. – Т.11. – №3. – С. 35-46.

[3] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. – 2005. – Т.404. – №4. – С.460–464.

[4] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журн. – 2009. – Т.61. – №6. – С. 855-864.

[5] Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables // Analysis Mathematica. – 2009. – V.35. – №1. – P. 61-72.

- вычислить точные значения колмогоровских и линейных квазипоперечников классов периодических функций двух переменных, задаваемых усредненными значениями модулей непрерывности частных производных в пространстве $L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$;
- найти точное неравенство типа Колмогорова для функций двух комплексных переменных, аналитических внутри бикруга, принадлежащих пространству Бергмана, и привести его приложения к экстремальным задачам совместного приближения функций и их последовательных частных производных.

**Основные методы исследования.** В работе широко использованы общие методы функционального анализа, методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций многих переменных, а также современные методы решения многомерных задач вариационного содержания.

**Научная новизна исследований.** В диссертации получены следующие основные результаты:

- решена задача о нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;
- найдены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения обобщенными полиномами функций двух переменных с усредненными модулями непрерывности высших порядков частных производных с весовыми функциями в $L_2(Q)$. Вычислены колмогоровские и линейные квазипоперечники некоторых классов функций;
- найдено точное неравенство типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и дано его приложение к экстремальным задачам совместного приближения функций и их производных обобщенными полиномами.

**Положения, выносимые на защиту:**

- основные теоремы о точных оценках приближения функций двух переменных обобщенными полиномами;
- теорема о точной константе в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;

- теорема о точном неравенстве типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и ее приложения в экстремальных задачах теории приближения функций двух комплексных переменных.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в экстремальных задачах теории приближения многомерных функций суперпозициями функций меньшего числа переменных, как в действительной, так и в комплексной областях.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные результаты, вносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Основные результаты диссертационной работы получены лично автором.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры "Функционального анализа и дифференциальных уравнений" Таджикского национального университета подрукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы алгебры и теории чисел" (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложия" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы теории дифференциальных уравнений " (Душанбе, 26 сентября 2020 г.).
- международной научной конференции "Теория приближения и её применение" (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.).

**Публикации.** Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах. Из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 5 в трудах международных конференций.

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 44 наименования, занимает 70 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

## Краткое содержание работы

Диссертационная работа начинается с введения. В нём освещается актуальность темы диссертации, цель работы и апробация полученных результатов.

В первой главе излагаются некоторые вопросы среднеквадратического приближения дифференцируемых периодических функций двух переменных $f(x, y)$ обобщенными "тригонометрическими углами".

В первом параграфе приводятся предварительные сведения и некоторые факты, а также излагаются отдельные утверждения с доказательством.

Всюду далее символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ будут обозначаться соответственно множества натуральных, целых неотрицательных, целых и вещественных чисел. Через $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ обозначим гильбертово пространство периодических функций двух переменных $f(x, y)$ суммируемых с квадратом в области $Q$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} |f(x, y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Символом $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество периодических функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате $Q$ непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu \partial y^\mu}, \;\; \mu \leq r, \nu \leq s, \; \mu, \nu, r, s \in \mathbb{N},$$

а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(x, y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}(x, y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x, y)$, $\mu = \overline{0, r-1}, s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x, y) \in L_2(Q)$, то есть норма $\left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2} < \infty$. Предположим, что функция $f \in L_2(Q)$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье следующего вида

$$f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}, \tag{1}$$

где

$$c_{k,l}(f):=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(Q)}f(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy$$

– коэффициенты Фурье ряда (1).

Если $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$, то

$$\left\|f^{(r,s)}\right\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}k^{2r}l^{2s}|\rho_{k,l}(f)|^2, \tag{2}$$

где

$$\rho^2_{k,l}(f)=|c_{-k,-l}(f)|^2+|c_{k,-l}(f)|^2+|c_{-k,l}(f)|^2+|c_{k,l}(f)|^2. \tag{3}$$

Далее рассмотрим задачу отыскания точных значений величины наилучшего приближения периодических функций двух переменных тригонометрическими "углами", пользуясь работами[1–5].

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ – два линейных нормированных пространства функций одной переменной, а

$$U_m:=span\left\{u_0(x),u_1(x),\ldots,u_m(x)\right\},$$

$$V_n:=span\left\{v_0(y),v_1(y),\ldots,v_n(y)\right\}$$

их конечномерные подпространства, то есть $U_m\subset X$, $V_n\subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y)=\sum_{k=0}^{m}u_k(x)\psi_k(y)+\sum_{l=0}^{n}v_l(y)\varphi_l(x),$$

где $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^n$ и $\{\psi_k(y)\}_{k=0}^m$ – наборы произвольных функций, соответственно из пространств $X$ и $Y$, назовём обобщённым полиномом (квазиполиномом), порождённым подпространствами пространства $U_m$ и $V_n$. Указанные обобщённые полиномы образуют подпространство $Z$, которое обозначим

$$G_{m,n}=G(U_m,V_n):=U_m\otimes Y\oplus V_n\otimes X,$$

где операции "$\otimes$" и "$\oplus$" обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z:=\mathscr{E}(f;G_{m,n}))_Z=\inf\left\{\|f-g_{m,n}\|_Z:g_{m,n}\in G_{m,n})\right\} \tag{4}$$

и если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству $Z$, то положим

$$\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \sup\left\{\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z : \, f \in \mathfrak{M}\right\} = \\ = \sup\left\{\mathscr{E}(f, G(U_m, V_n))_Z : \, f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{5}$$

Величина (4) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а величина (5) – отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) := \inf\left\{\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M}; G_{m,n})_Z : \; U_m \subset X, \, V_n \subset Y\right\} \tag{6}$$

называют колмогоровским квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$[3–5].

Пусть $\Lambda$ – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, причем образ $\Lambda(\mathfrak{M}) := \{\Lambda(f) : \, f \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит множеству $G_{m,n}$. Положим

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z := \sup\left\{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\right\},$$

$$e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \inf\left\{e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z : \, \Lambda(\mathfrak{M}) \subset G_{m,n}\right\}.$$

Следуя работам[3–5,6,7], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) := \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G_{m,n})_Z : \, U_m \subset X, V_n \subset Y\right\} \tag{7}$$

назовём линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $Z$. Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z \geq \mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z, \tag{8}$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z). \tag{9}$$

При вычислении величин (6)-(9) всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространства суммируемых с квадратом $2\pi$-периодических функций $f$ на отрезке $[0, 2\pi]$, а $Z := L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

Пусть теперь $U^*_{2m+1} \subset L_2[0, 2\pi]$, $V^*_{2n+1} \subset L_2[0, 2\pi]$ – два конечномерных подпространства тригонометрических полиномов соответственно порядка $2m+1$ по переменной $x$ и $2n+1$ – по переменной $y$, то есть

$$U^*_{2m+1} := span\left\{e^{ikx}\right\}_{k=-m}^{m}, \; V^*_{2n+1} := span\left\{e^{ily}\right\}_{l=-n}^{n}.$$

[6]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. – 1996. – Т.48. – №3. – С. 301-308.

[7]Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение „углом" в метрике $L_2$ и значение квазипоперечников некоторых классов функций. // Укр. матем. журнал. – 2020. – Т.72, – №6. – С.852-864.

Очевидно, что каждый элемент $g_{m,n}(x,y) \in G^*_{2m+1,2n+1} := G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$ представим в виде

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{|k|\le m} \psi_k(y)e^{ikx} + \sum_{|l|\le n} \varphi_l(x)e^{ily}, \tag{10}$$

где последовательности $\{\psi_k(y)\}_{k=-m}^{m} \subset L_2[0,2\pi], \{\varphi_l(x)\}_{l=-n}^{n} \subset L_2[0,2\pi]$ – произвольные наборы функций. Функции вида (10) называют квазиполиномами или тригонометрическими “углами”. Положим $\mathbb{Z} = L_2(Q)$. Очевидно, что множество $G^*_{2m+1,2n+1} \subset L_2(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ равенством

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)} := \mathscr{E}(f; G^*_{2m+1,2n+1}) = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_{L_2(Q)} : g_{m,n} \in G^*_{2m+1,2n+1}\right\}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f$ элементами (тригонометрическими “углами”) из множества $G^*_{2m+1,2n+1}$.

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье (1) квазиполиномом Фурье порядка $(m,n), m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y) = \left(\sum_{|k|\le m}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{|l|\le n} - \sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n}\right) c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}.$$

**Лемма 1.1.1.** *Среди всех обобщенных полиномов вида* (10)*, принадлежащих множеству* $G^*_{2m-1,2n-1} := G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})$*, наилучшее приближение функции* $f \in L_2(Q)$ *доставляет ее квазиполином Фурье порядка* $(m-1, n-1)$*. При этом*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \inf\left\{\|f - g_{m-1,n-1}\|^2_{L_2(Q)} : g_{m-1,n-1} \in G^*_{2m-1,2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - \mathscr{F}_{m-1,n-1}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n} |c_{k,l}(f)|^2. \tag{11}$$

**Замечание 1.1.1.** Принимая во внимание обозначение (3), формулу (11) запишем в виде

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} \rho^2_{k,l}(f), \tag{12}$$

более удобном в приложении. В частности, из (11) в силу (12) следует, что если $F(x,y) = \varphi(x)g(y)$, то имеем:

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(F)_{L_2(Q)} = \mathscr{E}^2(F; G^*_{2m-1,2n-1})_{L_2(Q)} =$$

$$= \mathscr{E}^2(\varphi; U^*_{2m-1})_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathscr{E}^2(g; V^*_{2n-1})_{L_2[0,2\pi]} = \mathscr{E}^2_{2m-1}(\varphi)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathscr{E}^2_{2n-1}(g)_{L_2[0,2\pi]},$$

где

$$\mathscr{E}_{2\nu-1}(\psi)_{L_2[0,2\pi]} := \inf\left\{\|\psi - T_{\nu-1}(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_{\nu-1} \subset G_{2\nu-1}\right\}.$$

Имеет место также следующая важная

**Лемма 1.1.2.** *Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \le m^{-r} n^{-s} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)},$$

*которое является точным в том смысле, что для функции*

$$f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

*обращается в равенство.*

Из этой леммы непосредственно вытекает

**Следствие 1.1.1.** *Справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} = \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}(f; G^*_{2m-1,2n-1})_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}\left(f^{(r,s)}; G^*_{2m-1,2n-1}\right)_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}.$$

Имеет место следующее утверждение

**Теорема 1.1.1.** *Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}}. \tag{13}$$

*Существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}(Q)$, которая реализует знак равенства в соотношении* (13).

Во втором параграфе первой главы решается экстремальная задача отыскания верхних граней величины наилучшего приближения самой функции и ее старших частных производных на классе $W^{(r,s)}L_2(Q)$.

Через $W^{(r,s)}L_2(Q)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которых при всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство $\left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)} \le 1$.

Основным результатом этого параграфа является

**Теорема 1.2.2.** *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s$ имеет место экстремальное равенство*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} = \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}}.$$

В третьем параграфе излагаются основные теоремы о приближении "углом". С этой целью предварительно находится явный вид модуля непрерывности в пространстве $L_2(Q)$.

Для функции $f(x,y)\in L_2(Q)$ определим модуль непрерывности порядка $p\in\mathbb{N}$ по переменной $x$ и порядка $q\in\mathbb{N}$ по переменной $y$ равенством

$$\omega_{p,q}(f;t,\tau)_2 := \sup\left\{\|\Delta_{u,v}^{p,q}f(x,y)\|_{L_2(Q)} :\ |u|\le t,\ |v|\le\tau\right\}, \qquad (14)$$

где

$$\Delta_{u,v}^{p,q}f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\mu+\nu}\binom{p}{\mu}\binom{q}{\nu}f(x+\mu u,y+\nu v)$$

– конечная разность $p$-го порядка с шагом $u$ по переменной $x$ и $q$-го порядка с шагом $v$ по переменной $y$ функции $f(x,y)\in L_2(Q)$. Доказывается следующая важная в дальнейшем

**Лемма 1.3.1.** *Для произвольной функции $f\in L_2(Q)$ функция* (14) *имеет вид*

$$\omega_{p,q}^2(f;t,\tau)_2 :=$$

$$:= 2^{p+q}\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^q :\ |u|\le t,\ |v|\le\tau\right\}.$$

Условимся всюду в дальнейшем при $p=q$ вместо $\omega_{p,p}(f;t,\tau)$ писать $\omega_p(f;t,\tau)_{L_2(Q)}$. В соотношениях общего характера, при вычислении верхней грани по всем функциям $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ предполагается $f^{(r,s)}(x,y)\neq const$.

В принятых обозначениях справедлива следующая

**Теорема 1.3.1.** *Для любых натуральных $m$ и $n$ и любых чисел $r,s\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих неравенства $0<mt\le\pi, 0<n\tau\le\pi$, при любом $p\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2}{\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt\sin n\tau\,dt\,d\tau\right)^p}=\frac{1}{16^p}. \qquad (15)$$

*Существует функция $g_1(x,y)\in L_2^{(r,s)}$, для которой верхняя грань в левой части* (15) *реализуется и равняется правой части* (15).

Отметим, что теорема 1.3.1 является обобщением хорошо известного результата В.В.Шалаева[8] о точном неравенстве, связывающем величину наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций одного переменного $f \in L_2^{(r)}$, с интегралом содержащим усредненное значение модуля непрерывности высшего порядка $\omega_m^{1/m}\left(f^{(r)}, t\right)_2$ с весом $\sin nt$ на случай наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций двух переменных $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ тригонометрическими "углами" с интегралами, содержащими усредненное значение модуля непрерывности $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ с весом $\sin mt \sin n\tau$.

Из теоремы 1.3.1 как следствие получаем

**Теорема 1.3.2.** *При всех $m, n, p \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и любой функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ справедливо неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2^p m^r n^s} \cdot \omega_p\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{16}$$

Заметим, что если функция $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ для любых $p \in \mathbb{N}$ и $(t, \tau) \in [\pi/m, \pi/n]$ удовлетворяет условию выпуклости

$$\begin{gathered} 2\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_2 \geq \\ \geq \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2 + \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m} - t, \frac{\pi}{n} - \tau\right)_2, \end{gathered} \tag{17}$$

то неравенство (16) можно уточнить. В этом случае справедлива

**Теорема 1.3.3.** *На множестве функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, у которых функция $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ удовлетворяет условию* (17)*, справедливо точное неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2^p m^r n^s} \cdot \omega_p\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_2$$

*в том смысле, что существует функция $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой оно обращается в равенство.*

Из теоремы 1.3.3 вытекает

**Следствие 1.3.4.** *В предположении теоремы 1.3.3, при всех $m, n, p \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}.$$

[8]Шалаев В.В. О поперечниках в $L_2$ классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125-129.

Пользуясь результатом следствия 1.3.4, доказывается

**Теорема 1.3.4.** *В предположении следствия 1.3.4 при всех* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *и* $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}.$$

В четвертом параграфе вычислены точные значения квазипоперечников некоторых классов периодических функций.

Пусть $\Psi_l(t)$, $l = 1, 2$; $0 \le t < \infty$ – непрерывные, неубывающие функции, обращающиеся в нуль в точке $t = 0$. Для $p \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \le u, v \le 2\pi$ определим в множестве $L_2^{(r,s)}(Q)$ класс функций

$$W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2) := \left\{ f \in L_2^{(r,s)}(Q) : \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2u} \cdot \frac{\pi}{2v} \int_0^u \int_0^v \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2 \sin\frac{\pi}{u} t \sin\frac{\pi}{v} \tau \, dt d\tau \le \Psi_1^2(u) \Psi_2^2(v) \right\}$$

Введем обозначения

$$(1 - \cos q\theta)_* := \{1 - \cos q\theta, \text{ если } q\theta \le \pi; \;\; 2, \text{ если } q\theta > \pi.\}$$

В этих обозначениях справедлива следующая

**Теорема 1.4.1.** *Пусть функции* $\Psi_l(t), (l = 1, 2)$ *удовлетворяют условию*

$$\Psi_l^2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos\theta)_* \sin\frac{\theta}{\mu} d\theta \le 2\mu \Psi_l^2(u), \; l = 1, 2$$

*при любом* $\mu > 0$ *и любом* $\tau \in (0, 2\pi]$. *Тогда при любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) = d'_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 =$$

$$= e_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 = \frac{1}{2^p m^r n^s} \Psi_1^p\left(\frac{\pi}{m}\right) \Psi_2^p\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Во второй главе работы найдено точное неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений функций двух комплексных переменных, аналитических в бикруге $U^2 = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ обобщенными квазимногочленами или "углами", составленными из тензорного произведения алгебраических комплексных полиномов одного переменного, принадлежащих пространству $B_2(U^2)$.

В монографии[9] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных (неравенствам типа Колмогорова) функций с различными областями определения, как классических, так и полученных в последнее время. При этом основное внимание уделено точным неравенствам такого типа. В работе В.В.Арестова[10] приведен обстоятельный обзор неравенств типа Колмогорова, где получены наилучшие константы и анализируется их связь с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования на различных классах функций. Следует отметить, что почти все результаты[9,10] получены для вещественнозначных функций. Естественно, что представляет большой интерес получение неравенств типа Колмогорова для функций комплексного переменного. Для функции одного комплексного переменного некоторые результаты получены в работах Р.Р.Акопяна и М.С.Саидусайнова[11], С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука[12], М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова[13], М.С.Саидусайнова[14]. В случае функций нескольких переменных получено значительно меньше окончательных результатов[12,15]. В данной главе доказано неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений функций $f$ двух комплексных переменных аналитических в бикруге квазиполиномами (или "углами" и дано его приложение к экстремальной задаче нахождения точной верхней грани наилучшего совместного приближения самой функции

[9]Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

[10]Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, – № 6. – С. 89–124.

[11]Акопян Р.Р., Саидусайнов М.С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге // ИМ и М УрО РАН. – 2017. – Т.23, № 3. – С. 22–32.

[12]Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух переменных и их приложения к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. – 2011. – Т.63. – № 22. – С. 1579–1601.

[13]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН Республики Таджикистан. – 2007. – Т.50, – № 1. – С. 14–19.

[14]Саидусайнов М.С. Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. – Труды Международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа, 2016. – С. 217–223.

[15]Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. – 2013. – Т.18. – №6/1. – С. 61–66.

и ее последовательных производных указанными квазиполиномами.

Пусть $\mathbf{z} := (\xi, \zeta) = (re^{it}, \rho e^{i\tau})$, где $0 \le r, \rho < \infty$, $0 \le t, \tau \le 2\pi$ — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$. Класс всех аналитических в бикруге $U^2$ функций $f(z) := f(\xi, \zeta)$ обозначим через $\mathcal{A}(U^2)$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ полагаем

$$M_2(f; r, \rho) := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f(re^{it}, \rho e^{i\tau}) \right|^2 dt d\tau \right\}^{1/2},$$

где $0 \le r, \rho < 1$. Символом $B_2(U^2)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} = \left\{ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 r\rho M_2^2(f; r, \rho) dr d\rho \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$, принадлежащей пространству $B_2(U^2)$, исходя из разложения в двойной ряд Тейлора в $U^2$

$$f(\xi, \zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) \xi^p \zeta^q, \tag{19}$$

где $c_{pq}(f)$ — коэффициенты Тейлора функции $f$, в силу (18) и равенства Парсеваля, запишем следующее соотношение

$$\|f\|_2 = \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)} \right\}^{1/2}.$$

Через $B_2^{(k,l)}(U^2)$, где $k, l \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f(\xi, \zeta) \in \mathcal{A}(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(k,l)}$ по переменным $\xi, \zeta$ и частные производные $f^{(k,0)}$ и $f^{(0,l)}$ соответственно по переменной $\xi$ и $\zeta$ принадлежат пространству $B_2(U^2)$, то есть $B_2^{(k,l)}(U^2) \subset B_2(U^2)$. Для натуральных $p \ge k, q \ge l$ числа $\alpha_{p,k}$ и $\alpha_{q,l}$ определяем равенствами

$$\alpha_{p,k} = p(p-1)\cdots(p-k+1), \quad \alpha_{q,l} = q(q-1)\cdots(q-l+1).$$

В работе С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука[15] при некоторых естественных ограничениях на коэффициенты Тейлора $c_{p,q}(f)$ функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ доказано неравенство типа Колмогорова следующего вида

$$\left\| f^{(k-\mu, l-\nu)} \right\|_2 \le \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(\mu+1)^{1/2}} \cdot \frac{\alpha_{l,l-\nu}(l+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{l,l}^{1-\nu/l}(\nu+1)^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \|f\|_2^{\mu\nu/(kl)} \cdot \left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l} \cdot \left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k} \cdot \left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

которое является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой оно обращается в равенство.

Наша цель доказать аналогичного типа неравенство Колмогорова для наилучшего совместного приближения "углом".

Пусть $(\mathbb{Z}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_1})$ и $(\mathbb{Z}_2, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_2})$ — два линейных нормированных пространства аналитических в единичном круге функций одного комплексного переменного, а $\mathfrak{M}_m \subset \mathbb{Z}_1$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathbb{Z}_2$ — конечномерные подпространства с базисами $\{a_p(\xi)\}_{p=0}^m$ и $\{b_q(\zeta)\}_{q=0}^n$ соответственно. Положим

$$\widehat{G}_{m,n} := G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) := \mathbb{Z}_2 \otimes \mathfrak{M}_m \oplus \mathbb{Z}_1 \otimes \mathfrak{N}_n, \tag{20}$$

где $\otimes$ и $\oplus$ означают соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Очевидно, что каждый элемент множеств (20) представим в виде

$$g_{m,n}(\xi,\zeta) := \sum_{p=0}^m \varphi_p(\zeta) a_p(\xi) + \sum_{q=0}^n \psi_q(\xi) b_q(\zeta), \tag{21}$$

где последовательности функций $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^m \subset \mathbb{Z}_2$ и $\{\psi_l(\xi)\}_{l=0}^n \subset \mathbb{Z}_1$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (21) называют обобщенными квазиполиномами или "углами". Пусть теперь $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ — линейное нормированное пространство аналитических в единичном бикруге $U^2 := \{(\xi,\zeta) : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ функций $f(\mathbf{z}) := f(\xi,\zeta)$ двух комплексных переменных, а множество $\widehat{G}_{m,n} \subset \mathbb{Z}$. Для произвольной функции $f \in \mathbb{Z}$ равенством

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{\mathbb{Z}} := \mathscr{E}\left(f, \widehat{G}_{m,n}\right)_{\mathbb{Z}} = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\| : g_{m,n} \in \widehat{G}_{m,n}\right\} \tag{22}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f$ элементами множества (20) или наилучшим приближением функции $f$ "углом". Мы рассмотрим случай $\mathbb{Z} := B_2(U^2)$, $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = B_2(U), \mathfrak{M}_m := \mathcal{P}_m, \mathfrak{N}_n := \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_m$ и $\mathcal{P}_n$ — соответственно множество комплексных алгебраических полиномов одного переменного степени не более $m$ и $n$. В этом случае

$$\widehat{G}_{m,n} := \left\{g_{m,n}(\xi,\zeta) : g_{m,n}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^m \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^n \psi_q(\xi)\zeta^p :\ \varphi_p, \psi_q \in B_2\right\}. \tag{23}$$

Множество (23) называют подпространством квазиполиномов. Для аналитической функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ с разложением в ряд Тейлора (19) квазиполиномом Тейлора порядка $(m,n), m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$T_{m,n}(f;\xi,\zeta) := \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \quad (24)$$

Очевидно, что $T_{m,n}(f) \in G(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n)$. Следующая лемма является основным результатом второго параграфа второй главы.

**Лемма 2.2.1.** *Среди всех обобщенных полиномов вида*

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{m-1}\varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n-1}\psi_q(\xi)\zeta^q,$$

*принадлежащих множеству $\widehat{G}_{m-1,n-1}$, наилучшее приближение функции $f \in B_2(U^2)$ доставляет ее квазиполином Тейлора $T_{m-1,n-1}(f)$ порядка $(m-1,n-1)$. При этом*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \|f - T_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}.$$

Пользуясь основной леммой 2.2.1, в третьем параграфе доказана основная

**Теорема 2.3.1.** *Пусть $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1,\ m,n,l,\mu,\nu \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ выполняется неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\cdot(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\cdot(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\left(f^{(k,0)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}, \quad (25)$$

*которое обращается в равенство для функции $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}(U^2)$.*

Приводим некоторые приложения теоремы 2.3.1. Пусть $W_2^{(k,l)}(k,l \in \mathbb{N})$ — класс функций $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ для которых $\left\|f^{(k,l)}\right\|_2 \leq 1$.

**Лемма 2.3.3.** *Пусть числа* $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют неравенства* $m \geq k \geq 1, n \geq l \geq 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{m,k}} \cdot \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.$$

Утверждение леммы 2.3.3 в сочетании с результатом теоремы 2.3.1 позволяет решать следующую экстремальную задачу: требуется найти величину

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\},$$

где $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1$. Имеет место следующая

**Теорема 2.3.2.** *Пусть* $m, n, k, l, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют ограничениям* $m > k \geq \mu \geq 1$, $n > l \geq \nu \geq 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}} \cdot \frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.$$

# Заключение

**Основные научные результаты диссертационной работы**

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- решена задача о нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;
- найдены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения обобщенными полиномами функций двух переменных с усредненными модулями непрерывности высших порядков частных производных с весовыми функциями в $L_2(Q)$. Вычислены колмогоровские и линейные квазипоперечники некоторых классов функций;
- найдено точное неравенство типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и дано его приложение к экстремальным задачам в пространстве Бергмана, а также к экстремальным задачам совместного приближения функций и ее производных обобщенными полиномами.

**Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты диссертационной работы можно применять в экстремальных задачах теории приближения многомерных функций суперпозициями функций меньшего числа переменных, как в действительной, так и в комплексной областях.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:**


[1-A] Сайнаков В.Д. Значение квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук – 2018. – №2(171). – С. 7-16.

[2-A] Сайнаков В.Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных [Текст] / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т.24. – № 4. – С. 270-282.

[3-A] Сайнаков В.Д. Неравенства типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных [Текст] / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т.61. – № 7-8. – С. 615–619.

[4-A] Сайнаков В.Д. Среднеквадратическое приближение функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами [Текст] / В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2018. – № 4(173). – С. 37-43.

[5-A] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении в среднем обобщенными полиномами функций двух переменных [Текст] В.Д.Сайнаков // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т. 63. №5-6. – С. 300-308.


**В других изданиях:**


[6-A] Сайнаков В.Д. Квазипоперечники некоторых функциональных классов функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и ее приложений*", посвященной 70-летию со дня рождения академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С. 46-49.

[7-A] Сайнаков В.Д. Неравенство типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных [Текст] / В.Д.Сайнаков //

Материалы научно-теоретической конференции „*Современные проблемы алгебры и теории чисел*", посвященной 90-летию со дня рождения профессора Бабаева Г.А. (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.). – С. 93-94.

[8-А] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, Сайнаков В.Д. // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Джанигибекова Г. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 54-58.

[9-А] Сайнаков В.Д. Приближении в среднем обобщёнными полиномами функций двух переменных [Текст] / В.Д.Сайнаков // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 252-258.

[10-А] Сайнаков В.Д. Наилучшее приближение „углом" в пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевяшена 100-річчю з дня народження М.П.Карнейчука (Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020 г.). С. 32.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

**Сайнаков Восиф Додхудоевич**

# БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛИИ НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯҲОИ ДУ ТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ ПОЛИНОМҲОИ УМУМИКАРДАШУДА

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

**Душанбе — 2021**

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

**Роҳбари илмӣ:** **Шабозов Мирганд Шабозович,** академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор

**Муқарризони расмӣ:** **Юсуфзода Гулзорхон Амиршо,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, ректори Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М. Назаршоев

**Саидусайнов Муқим Саидусайнович,** номзади илмҳои физикаю математика, муаллими математикаи Донишгоҳи Осиёи Марказӣ

**Муассисаи тақриздиҳанда:** Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ

Ҳимоя *21-уми апрели соли 2021 соати 11:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-012 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «_______________» соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

**Котиби илмии Шӯрои**
**диссертатсионии 6D.КОА-012,**
**доктори илмҳои физикаю математика** **Р.Н. Одинаев**

# Тавсифи умумии кор

**Муҳиммияти мавзӯъ.** Дар байни масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои ду тағйирёбанда, муҳимтаринаш масъалаи ҳисобкунии сарҳадҳои болоии наздиккунии синфи функсияҳо бо агрегатҳои хаттӣ, ки аз шумораи охирноки функсияҳои якченака иборатанд, ба шумор меравад. Дар бисёр ҳолатҳо, аз рӯи қоида ба сифати чунин агрегат полиномҳои умумикардашуда (ба истилоҳ квазиполиномҳо, ё ин ки „кунҷҳо”), ки аз ҳосили зарби полиномҳои якченакаи тригонометрӣ ё ин ки алгебравӣ пайдо шудаанд, истифода мебаранд. Чунин гузориши масъалаи наздиккунии функсияҳои ду тағйирёбанда хеле актуалӣ мебошад, чунки имкон медиҳад, ки ҳал намудани масъалаҳои экстремалии дученака, ки пештар бо усулҳои дигар ҳал намешуданд, ҳал шаванд.

Масъалаи наздиккунии функсияҳои ду тағйирёбанда бо суперпозитсияи функсияҳои як тағйирёбанда дар корҳои илмии Н.П.Корнейчук, С.В.Переверзов, А.В.Вайндинер, М.К.Потапов, В.Ю.Брудний, В.Н.Темляков, С.Б.Вакарчук[1,2], М.Ш.Шабозов ва М.О.Акобиршоев[3,4,5] ва дигарон тадқиқ карда шуда буд.

**Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ.** Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи „Назарияи наздиккунии функсияҳо” иҷро карда шудааст.

**Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот.** Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин байни бузур-

[1]Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. – 1991. – 3 – С. 14-25.

[2]Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інститут математики НАН. України. – 2014. – Т.11. – №3. – С. 35-46.

[3]Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. – 2005. – Т.404. – №4. – С.460–464.

[4]Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журн. – 2009. – Т.61. – №6. – С. 855-864.

[5]Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables // Analysis Mathematica. – 2009. – V.35. – №1. – P. 61-72.

гии наздиккунии беҳтарини фуксияҳои ду тағйирёбанда тавассути полиномҳои умумикардашудаи тригонометрӣ ва модули бефосилагии ҳосилаи хусусии тартиби олии функсияҳои нишондодашуда;

- ҳисобкунии қимати аниқи квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттӣ барои синфи функсияҳои даврии дутағйирёбанда, ки бо қиматҳои миёнакардашудаи модули бефосилагии ҳосилаи хусусӣ дар фазои $L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ дода шудаанд;
- ёфтани нобаробарии аниқи намуди Колмогоров борои функсияҳои ду тағйирёбандаи комплексӣ, ки дар бидавра аналитикӣ мебошанд ва ба фазои Бергман тааллуқ доранд ва татбиқи онҳо ба масъалаи экстремалии наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои хусусии пай дар пайи онҳо.

**Методҳои асосии тадқиқот.** Дар диссертатсия усулҳои умумии таҳлили функсионалӣ, усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағйирёбанда ва инчунин усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои бисёрченакаи мӯҳтавои вариатсионӣ дошта, истифода бурда шудаанд.

**Навгониҳои илмии тадқиқот.** Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини фуксияҳои дутағйирёбанда тавассути полиномҳои умумикардашудаи тригонометрӣ ва модули бефосилагии ҳосилаи хусусии тартиби олии функсияҳо ҳал шудааст;
- нобаробариҳои нави аниқ, ки наздиккунии беҳтарини полиномҳои умумикардашудаи функсияҳои дутағирёбандаро бо модули бефосилагии миёнакардашудаи ҳосилаи хусуси тартиби олии бо функсияҳои вазндор дар $L_2(Q)$ пайваст мекунад, ёфта шудаанд. Инчунини дигар квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;
- нобаробарии аниқи намуди Колмогоров барои функсияҳои аналитикӣ дар бидавра ёфта шудааст ва татбиқи он ба масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои полиномҳои умумикардашудаи онҳо пешниҳод гардидааст.

**Муқаррароти диссертатсия барои дифоъ:**

- теоремаҳои асосӣ оиди баҳодиҳии аниқи наздиккунии функсияҳои дутағйирёбанда тавассути полиномҳои умумикардашуда;
- теорема оиди доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексон – Стечкин байни бузургиҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳои ду тағйирёбанда бо полиномҳои умумикардашудаи тригонометрӣ ва модули бефосилагии тартиби олӣ ҳосилаҳои хусусии функсияҳо;
- теорема оиди нобаробариҳои аниқи намуди Колмогоров барои функсияҳои аналитикӣ дар бидавра ва татбиқи он ба масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳои дутағйирёбандаи комплексӣ.

**Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ.** Рисолаи диссертатсионӣ хусусияти назариявӣ дорад. Натиҷаҳои кори диссертатсияро барои масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёрченака тавассути суперпозитсияи функсияҳои миқдори камтари тағйирёбандаҳо, ҳам барои соҳахои ҳақиқӣ ва ҳам барои комлексӣ истифода бурдан мумкин аст.

**Саҳми шахсии муаллиф.** Мӯҳтавои диссертатсия ва натиҷаҳои асосии барои дифоъ пешниҳодшуда, саҳми шахсии муаллифро дар корҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

**Тасвиби кор.** Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ борҳо дар:

- семинари кафедраи „Таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ"-и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АМИ Тоҷикистон, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2020);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он" (Душанбе, 14-15 марти соли 2018);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Масъалаҳои муосири алгебра ва назарияи ададҳо" (Душанбе, 14-15 декабри соли 2018);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои сингулярӣ" (Душанбе, 30-31 январи соли 2020);
- конференсияи илмии амалии ҷумҳуриявӣ „Масъалаҳои муосири назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ" (Душанбе, 26 сентябри соли 2020);

- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Назарияи наздиккунӣ ва татбиқи он” (Днепро, Украина, 16-19 сентябри соли 2020),

муҳокима ва мавриди баррасӣ пешниҳод шуда буданд.

**Интишорот.** Натиҷаҳои таҳқиқоти муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 10 кори илмӣ ба табъ расидаанд. Аз онҳо 5 мақола дар нашрияҳое, ки ба рӯйхати ҷории Комиссияи олии аттестатсионии (КОА) Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Россия дохиланд, мебошанд ва 5 мақола дар маводҳои конференсияҳои байналмилалӣ чоп шудаанд.

**Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия.** Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат буда, 44 номгӯй ва ҳамагӣ 70 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, он дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

## Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Рисолаи диссертатсионӣ аз муқаддима оғоз мешавад. Дар он аҳамияти мавзӯи диссертатсия, ҳадафи кор ва тасдиқи натиҷаҳои бадастомада нишон дода мешавад.

Дар боби якуми рисола як қатор масъалаҳои наздиккунии миёнаквадратии функсияҳои даврии дифференсиронидашудаи тағйирёбандаи $f(x,y)$ бо „кунҷҳои тригонометрӣ”-и умумикардашуда баён шудаанд.

Дар параграфи аввал маълумоти пешакӣ ва баъзе далелҳо, инчунин тасдиқотҳои ҷудогона оварда шудаанд.

Бо аломатҳои $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}$ ва $\mathbb{R}$ минбаъд дар ҳама ҷо мутаносибан маҷмӯи ададҳои натуралӣ, бутуни ғайриманфӣ, ададҳои бутун ва ҳақиқӣ ишора карда мешаванд. Ба воситаи $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ фазои гилбертии функсияҳои даврии ду тағйирёбандаи $f(x,y)$ бо квадрат интегронидашаванда дар соҳаи $Q$ бо нормаи охирноки зерин ишора мекунем:

$$\|f\|_{L_2} := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Бо аломати $C^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$ маҷмӯи функсияҳои даврии $f(x,y)$, ки дар квадрати $Q$ ҳосилаҳои хусусии бефосила доранд, менависем:

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu \partial y^\mu}, \ \ \mu \leq r, \nu \leq s, \ \mu,\nu,r,s \in \mathbb{N}$$

ва бо $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$ маҷмӯи функсияҳои $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$-ро ишора мекунем, ки ҳосилаҳои хусусии онҳо мавҷуданд, $f^{(r,\nu)}(x,y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0,s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x,y)$, $\mu = \overline{0,r-1}$, $s \in \mathbb{N}$, қисман бефосилаанд ва $f^{(r,s)}(x,y) \in L_2(Q)$ мебошад, ишора мекунем, яъне норма $\left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2} < \infty$ мебошад. Фарз мекунем, ки функсияи $f \in L_2(Q)$ ба қатори дукарати Фурйеи намуди комплексӣ паҳн шудааст:

$$f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}, \tag{1}$$

ки дар ин ҷо

$$c_{k,l}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y) e^{-i(kx+ly)} dxdy$$

– коэффитсиентҳои қатори Фурйеи (1) мебошад.

Агар $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ бошад, онгоҳ ошкор аст, ки

$$\left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} k^{2r} l^{2s} |\rho_{k,l}(f)|^2, \tag{2}$$

ки дар ин ҷо

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{-k,-l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,l}(f)|^2. \tag{3}$$

Баъдан масъалаи ёфтани қиматҳои аниқи бузургиҳои наздикунии беҳтарини функсияҳои даврии дутағйирёбанда бо „кунҷҳо”-и тригонометрӣ бо истифода аз корҳои[1–5] дида мебароем.

Бигузор $(X, \|\cdot\|_X)$ ва $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ду фазои нормиронидашудаи хаттии функсияи яктағйирёбанда бошанд ва

$$U_m := span\left\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)\right\},$$

$$V_n := span\,\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

андозаи охирноки онҳо, яне $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$ бошад. Ифодаи намуди

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} u_k(x)\psi_k(y) + \sum_{l=0}^{n} v_l(y)\varphi_l(x),$$

ки дар ин ҷо $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^{n}$ ва $\{\psi_k(y)\}_{k=0}^{m}$ – маҷмуи функсияҳои ихтиёрӣ, мутаносибан аз фазои $X$ ва $Y$-ро полиномҳои умумикардашуда меномем, ки аз зерфазои фазои $U_m$ ва $V_n$ хосил шудаанд. Ин полиномҳои умумикардашаи зерфазои $Z$-ро ташкил медиҳанд, ки ба воситаи

$$G_{m,n} = G(U_m, V_n) := U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X$$

ифода мекунем, ки дар он амали "$\otimes$" ва "$\oplus$" мутаносибан амали ҳосили зарби декартӣ ва суммаи ростаи маҷмӯҳо фаҳмида мешаванд. Формулаи наздиккунии беҳтаринро бо баробарии зерин ишора мекунем

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z := \mathscr{E}(f; G_{m,n}))_Z = \inf\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n})\} \tag{4}$$

ва агар $\mathfrak{M}$ – ягон хел синфи функсияи ба зерфазои $Z$ тааллуқ дошта бошад, онгоҳ

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z &:= \sup\{\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z :\ f \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \sup\{\mathscr{E}(f, G(U_m, V_n))_Z :\ f \in \mathfrak{M}\}\end{aligned} \tag{5}$$

мешавад. Бузургии (4) наздиккунии беҳтарини элементи $f \in \mathfrak{M}$ ба воситаи маҷмӯи $G_{m,n}$, ва бузургии (5) – тамоили маҷмӯи $\mathfrak{M}$ аз $G_{m,n}$ дар фазои нормиронидашуаи $(Z, \|\cdot\|_Z)$-ро тавсиф мекунад. Барои маҷмӯи маркази симметрии $\mathfrak{M} \subset Z$, бузургии

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) := \inf\{\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M}; G_{m,n})_Z :\ U_m \subset X,\ V_n \subset Y\} \tag{6}$$

-ро, квазиқутри колмогоровии маҷмӯи $\mathfrak{M}$ меноманд.[3–5]

Бигузор $\Lambda$ – оператори хаттие бошад, ки аз рӯи функсияи $f \in \mathfrak{M}$ амал мекунад, ғайр аз ин образи $\Lambda(\mathfrak{M}) := \{\Lambda(f) :\ f \in \mathfrak{M}\}$ ба маҷмӯи $G_{m,n}$ тааллуқ дорад. Бигузор

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z := \sup\{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\},$$

$$e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \inf\{e(\mathfrak{M},\Lambda)_Z : \Lambda(\mathfrak{M}) \subset G_{m,n}\}$$

бошад. Мувофиқи корҳои [3–5,6,7], бузургии

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) := \inf\{e(\mathfrak{M}; G_{m,n})_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\} \tag{7}$$

квазиқутри хаттии колмогоровии маҷмӯи $\mathfrak{M}$ дар фазои $Z$ номида мешавад. Бевосита аз таърифҳои боло бармеояд, ки нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z \geq \mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z, \tag{8}$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z). \tag{9}$$

Ҳангоми ҳисобкунии бузургиҳои (6)-(9) минбаъд дар ҳама ҷо фарз мекунем, ки $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – фазои бо квадрат интегронидашавандаи функсияҳои даврии $f$ дар порчаи $[0, 2\pi]$ ва $Z := L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ мебошад.

Бигузор акнун $U^*_{2m+1} \subset L_2[0, 2\pi]$, $V^*_{2n+1} \subset L_2[0, 2\pi]$ – ду ченакҳои охирноки зерфазои полиномҳои тригонометрӣ мутаносибан бо тартиби $2m + 1$ аз рӯи тағйирёбандаи $x$ ва $2n + 1$ аз рӯи тағйирёбандаи $y$ бошад:

$$U^*_{2m+1} := span\left\{e^{ikx}\right\}_{k=-m}^{m}, \; V^*_{2n+1} := span\left\{e^{ily}\right\}_{l=-n}^{n}.$$

Маълум аст, ки ҳар як элементи $g_{m,n}(x, y) \in G^*_{2m+1,2n+1} := G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$ дар шакли зерин навишта мешавад

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|k|\leq m} \psi_k(y)e^{ikx} + \sum_{|l|\leq n} \varphi_l(x)e^{ily}, \tag{10}$$

ки дар он пайдарпаии $\{\psi_k(y)\}_{k=-m}^{m} \subset L_2[0, 2\pi], \{\varphi_l(x)\}_{l=-n}^{n} \subset L_2[0, 2\pi]$ – маҷмӯи ихтиёрии функсияҳо мебошанд. Функсияи намуди (10) квазиполином ё ин ки „кунҷ"- и тригонометрӣ номида мешавад. Фарз мекунем, ки $\mathbb{Z} = L_2(Q)$ бошад. Маълум аст, ки маҷмӯи $G^*_{2m+1,2n+1} \subset L_2(Q)$ аст. Барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2(Q)$ ба воситаи баробарии

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)} := \mathscr{E}(f; G^*_{2m+1,2n+1}) = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_{L_2(Q)} : g_{m,n} \in G^*_{2m+1,2n+1}\right\}$$

[6] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. – 1996. – Т.48. – №3. – С. 301-308.

[7] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение „углом" в метрике $L_2$ и значение квазипоперечников некоторых классов функций. // Укр. матем. журнал. – 2020. – Т.72, – №6. – С.852-864.

бузургии наздиккунии беҳтарини функсияи $f$-ро аз рӯи элементҳои маҷмӯи $G^*_{2m+1,2n+1}$ ишора мекунем.

Барои функсияи $f \in L_2(Q)$, ки ба қатори дукаратаи Фурйеи (1) паҳн шудааст, квазиполиноми Фурйеи тартиби $(m,n), m,n \in \mathbb{N}$, ифодаи зеринро

$$\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y) = \left(\sum_{|k|\le m}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{|l|\le n} - \sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n}\right) c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}$$

меноманд.

**Леммаи 1.1.1.** *Дар байни полиномҳои умумикардашудаи намуди* (10)*, ки ба маҷмӯи* $G^*_{2m-1,2n-1} := G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})$ *мансубанд, наздикунии беҳтарини функсияи* $f \in L_2(Q)$ *– ро ба квазиполиноми Фурйеи тартиб* $(m-1,n-1)$ *медиҳад. Дар ин ҳолат формулаи зерин*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \inf\left\{\|f-g_{m-1,n-1}\|^2_{L_2(Q)} : g_{m-1,n-1} \in G^*_{2m-1,2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - \mathscr{F}_{m-1,n-1}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n}|c_{k,l}(f)|^2 \qquad (11)$$

*ҷой дорад.*

**Кайди 1.1.1.** Бо назардошти ишораҳои (3), формулаи (11)-ро дар шакли зерин

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n}|c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f) \qquad (12)$$

менависем, ки барои татбиқ кардан қуллайтар аст. Дар ҳолати хусусӣ аз формулаи (11) бо назардошти формулаи (12) бармеояд, ки агар $F(x,y) = \varphi(x)g(y)$ бошад, онгоҳ

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(F)_{L_2(Q)} = \mathscr{E}^2(F; G^*_{2m-1,2n-1})_{L_2(Q)} =$$

$$= \mathscr{E}^2(\varphi; U^*_{2m-1})_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathscr{E}^2(g; V^*_{2n-1})_{L_2[0,2\pi]} = \mathscr{E}^2_{2m-1}(\varphi)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathscr{E}^2_{2n-1}(g)_{L_2[0,2\pi]},$$

ки дар ин ҷо

$$\mathscr{E}_{2\nu-1}(\psi)_{L_2[0,2\pi]} := \inf\left\{\|\psi - T_{\nu-1}(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_{\nu-1} \subset G_{2\nu-1}\right\}.$$

Леммаи зерини асосӣ ҷой дорад.

**Леммаи 1.1.2.** *Барои дилхоҳ функсияи* $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ *нобаробарии аниқи зерин*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq m^{-r}n^{-s}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}$$

*ҷой дорад. Аниқ будани нобаробарӣ маънои онро дорад, ки он барои функсияи*

$$f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

*ба баробарӣ мубаддал мешавад.*

Аз ин лемма бевосита натиҷаи зеринро ҳосил мекунем.

**Натиҷаи 1.1.1.** *Баробарии экстремалии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} = \sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}(f;G^*_{2m-1,2n-1})_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}\left(f^{(r,s)};G^*_{2m-1,2n-1}\right)_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}.$$

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 1.1.1.** *Бигзор* $\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$ $(0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s)$ *бошад. Онгоҳ баробарии зерин*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}} \tag{13}$$

*дуруст аст. Функсияи* $f_0 \in L_2^{(r,s)}(Q)$ *мавҷуд аст, ки барои он аломати баробарӣ дар формулаи* (13) *дастрас аст.*

Дар параграфи дуюми боби якум, масъалаи экстремалии ёфтани ҳудуди аниқи болоӣ барои бузургии наздиккунии беҳтарини худи функсия ва ҳосилаҳои олии хусусии он дар синфи $W^{(r,s)}L_2(Q)$ ҳал карда шудааст.

Ба воситаи $W^{(r,s)}L_2(Q)$ маҷмӯи фукнксияҳои $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$-ро ишора мекунем, ки барояшон бо вуҷуди $r,s \in \mathbb{Z}_+$ будан, нобаробиии $\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \leq 1$ иҷро мешавад.

Натиҷаҳои асосии ин параграф чунин мебошанд.

**Теоремаи 1.2.2.** *Барои ҳамагуна* $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s$ *баробарии экстремалии зерин ҷой дорад*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}.$$

Дар параграфи сеюм теоремаҳои асосӣ оиди наздиккунии „кунчӣ” баён карда шудааст. Бо ин мақсад мо пешакӣ намуди ошкори модули бефосилагиро дар фазои $L_2(Q)$ менависем.

Барои функсияи $f(x,y) \in L_2(Q)$ модули бефосилагии тартиби $p \in \mathbb{N}$-ро нисбат ба тағйирёбандаи $x$ ва тартиби $q \in \mathbb{N}$-ро нисбат ба тағйирёбандаи $y$ бо баробарии

$$\omega_{p,q}(f;t,\tau)_2 := \sup\left\{\|\Delta_{u,v}^{p,q} f(x,y)\|_{L_2(Q)} : \ |u| \le t, \ |v| \le \tau\right\} \tag{14}$$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо

$$\Delta_{u,v}^{p,q} f(x,y) = \sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\mu+\nu}\binom{p}{\mu}\binom{q}{\nu} f(x+\mu u, y+\nu v)$$

– фарқияти охирноки тартиби $p$-ум бо қадами $u$ нисбат ба тағйирёбандаи $x$ ва тартиби $q$-ум бо қадами $v$ нисбат ба тағйирёбандаи $y$-и функсияи $f(x,y) \in L_2(Q)$ мебошад.

Яке аз натиҷаҳои асосии ин параграф леммаи зерин мебошад.

**Леммаи 1.3.1.** *Барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2(Q)$ функсияи* (14) *намуди зерин дорад*

$$\omega_{p,q}^2(f;t,\tau)_2 :=$$
$$:= 2^{p+q}\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^q : \ |u| \le t, \ |v| \le \tau\right\}.$$

Минбаъд дар ҳама ҷо ҳангоми $p = q$ будан, ба ҷойи $\omega_{p,p}(f;t,\tau)$ мо $\omega_p(f;t,\tau)_{L_2(Q)}$ менависем. Дар муносибатҳои тавсифи умумӣ, ҳангоми ҳисобкунии ҳудуди болоӣ аз рӯи ҳамаи функсияҳои $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ фарз карда мешавад, ки $f(x,y) \neq const$.

Дар асоси ишораҳои қабулшуда теоремаи зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 1.3.1.** *Барои дилхоҳ ададҳои $m,n,p \in \mathbb{N}$ ва ҳаргуна ададҳои $r,s \in \mathbb{Z}_+$, ки нобаробарии $0 < mt \le \pi, 0 < n\tau \le \pi$ қонеъ мекунанд, таносуби зерин*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\cdot \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt \sin n\tau dt d\tau\right)^p} = \frac{1}{16^p} \tag{15}$$

*дуруст аст. Функсияи* $g_1(x,y)\in L_2^{(r,s)}$ *мавҷуд аст, ки барои он сарҳадҳои саҳеҳи дар тарафи рости* (15) *буда қабул карда мешавад ва ба тарафи рости* (15) *баробар мешавад.*

Қайд мекунем, ки теоремаи 1.3.1 натиҷаи маъмули умумикардашуда В.В.Шалаев[8] оиди нобаробарии аниқ мебошад, ки бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои дифференсиронидашудаи даврии яктағйирёбандаи $f\in L_2^{(r)}$-ро бо интеграле, ки қимати миёнакардашудаи модули бефосилагии тартиби олӣ $\omega_m^{1/m}\left(f^{(r)},t\right)_2$ бо вазни $\sin nt$ дорад алоқаманд мекунад, барои ҳолатҳое, ки наздиккунии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашудаи даврии дутағйирёбандаи $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ аз рӯи „кунҷ"-ҳои тригонометрӣ бо интеграле, ки қимати миёнакардашудаи модули бефосилагии тартиби олии $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_2$ бо вазни $\sin mt\sin n\tau$ дорад, ифода мекунад.

Аз теореми 1.3.1 ҳамчун натиҷа ҳосил мекунем.

**Теоремаи 1.3.2.** *Барои ҳамаи* $m,n,p\in\mathbb{N}$ *ва* $r,s\in\mathbb{Z}_+$ *ва ҳаргуна функсияи* $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ *нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}\leq\frac{1}{2^pm^rn^s}\cdot\omega_p\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)_2 \tag{16}$$

*дуруст аст.*

Қайд мекунем, ки агар функсияи $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_2$ барои ҳаргуна $p\in\mathbb{N}$ ва $(t,\tau)\in[\pi/m,\pi/n]$ шарти зеринро каноат кунад

$$\begin{gathered}2\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2\geq\\ \geq\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_2+\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m}-t,\frac{\pi}{n}-\tau\right)_2,\end{gathered} \tag{17}$$

он гоҳ нобаробарии (16)-ро дақиқтар муайян кардан мумкин аст. Дар ин ҳолат теоремаи зерин ҷой дорад.

**Теоремаи 1.3.3.** *Дар маҷмӯи функсияи* $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$, *ки барои он функсияи* $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_2$ *шарти* (17)*-ро қонеъ мекунад, нобаробарии аниқи намуди Ҷексон-Стечкин*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}\leq\frac{1}{2^pm^rn^s}\cdot\omega_p\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2$$

[8] Шалаев В.В. О поперечниках в $L_2$ классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125-129.

*дуруст аст. Функсияи $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ вуҷуд дорад, ки барояш нобаробарӣ ба баробарӣ табдил меёбад.*

Аз теоремаи 1.3.3 чунин натиҷа бармеояд.

**Натиҷаи 1.3.4.** *Мувофиқи фарзияи теореми 1.3.3, барои ҳамаи $m, n, p \in \mathbb{N}$ ва $r, s \in \mathbb{Z}_+$ баробарии зерин ҷой дорад*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}.$$

Бо истифода аз натиҷаи хулосаи 1.3.4, теоремаи зерин исбот карда мешавад.

**Теоремаи 1.3.4.** *Тибқи фарзияи натиҷаи 1.3.4 барои ҳамаи $m, n, p \in \mathbb{N}$ ва $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s)$ баробарии зерин ҷой дорад*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}.$$

Дар параграфи чорум, қиматҳои аниқи квазиқутрҳои баъзе синфи функсияҳои даврӣ ҳисоб карда мешаванд.

Бигузор $\Psi_l(t)$, $l = 1, 2$; $0 \le t < \infty$ – функсияҳои бефосила, камнашаванда бошанд, ки дар нуқтаи $t = 0$ ба нол майл кунанд. Барои $p \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \le u, v \le 2\pi$ дар маҷмӯи $L_2^{(r,s)}(Q)$ синфи функсияҳои зеринро

$$W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2) := \Biggl\{ f \in L_2^{(r,s)}(Q) :$$

$$\frac{\pi}{2u} \cdot \frac{\pi}{2v} \int_0^u \int_0^v \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2 \sin\frac{\pi}{u}t \sin\frac{\pi}{v}\tau dt d\tau \le \Psi_1^2(u)\Psi_2^2(v) \Biggr\}$$

муайян мекунем. Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$(1 - \cos q\theta)_* := \{1 - \cos q\theta, \text{ если } q\theta \le \pi; \ 2, \text{ агар } q\theta > \pi\}.$$

Бо чунин ишоракуниҳо теоремаи зерин дуруст аст.

**Теоремаи 1.4.1.** *Бигузор функсияҳои $\Psi_l(t), (l = 1, 2)$ шарти*

$$\Psi_l^2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos\theta)_* \sin\frac{\theta}{\mu} d\theta \le 2\mu\Psi_l^2(u), \quad l = 1, 2$$

*-ро барои ҳар як $\mu > 0$ ва ҳаргуна $\tau \in (0, 2\pi]$ қонеъ кунанд. Онгоҳ барои ҳамагуна $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ баробарии зерин*

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) = d'_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 =$$

$$= e_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 = \frac{1}{2^p m^r n^s}\Psi_1^p\left(\frac{\pi}{m}\right)\Psi_2^p\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

*дуруст аст.*

Дар боби дуюми рисола, нобаробарии аниқи намуди Колмогоров барои наздиккуниҳои беҳтарини функсияҳои дутағйирёбандаи комплексии аналитикӣ дар бидавра $U^2 = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ бо квазиполиномҳои умумикардашуда ё ин ки „кунҷҳо"-е, ки аз ҳосили тензори полиномҳои комплексии алгебравии яктағирёбанда иборатанд ва ба фазои $B_2(U^2)$ мансубанд, ёфт шудаанд.

Дар монографияи[9] натиҷаҳои тадқиқот оид ба нобаробариҳои (нобаробариҳои намуди Колмогоров) барои ҳосилаҳои пайдарпайи мобайнии функсияҳо бо сохахои гуногуни муайянкунии ҳам классикӣ ва ҳам натиҷаҳои ба наздикӣ бадастомада пешниҳод ва мураттаб гардидаанд. Дар айни ҳол диққати асосӣ ба нобаробарии аниқи ин намуд дода мешавад. Дар кори В.В.Арестов[10] тадқиқоти мукаммали нобаробарии намуди Колмогоров оварда шудааст, ки дар он доимиҳои беҳтарин ба даст оварда шудаанд ва робитаи онҳо бо масъалаи Стечкин оид ба наздиккунии беҳтарини операторҳои гуногун дар синфи функсияхои гуногун таҳлил карда мешаванд. Бояд қайд кард, ки тақрибан ҳамаи натиҷаҳои[9,10] барои функсияҳои ҳақиқӣ ба даст оварда шудаанд. Табиист, ки ба даст овардани нобаробарии намуди Колмогоров барои функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ таваҷӯҳи зиёд пайдо мекунад. Барои функсияи яктағйирёбандаи комплексӣ, баъзе натиҷаҳо дар корҳои Р.Р.Акопяна ва М.С.Саидусайнов[11], С.Б.Вакарчук ва

[9]Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

[10]Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, – № 6. – С. 89–124.

[11]Акопян Р.Р., Саидусайнов М.С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге // ИМ и М УрО РАН. – 2017. – Т.23, № 3. – С. 22–32.

М.Б.Вакарчук[12], М.Ш.Шабозов ва М.С.Саидусайнов[13], М.С.Саидусайнов[14] ба даст омадаанд. Дар мавриди функсияҳои якчандтағирёбанда, натиҷаҳои охирнок камтар ба даст оварда шуданд[12,15].

Дар ин боб мо нобаробарии Колмогоровро барои наздиккунии беҳтарини функсияҳои дутағйирёбандаи комплексии $f$, ки дар бидавра аналитикӣ мебошанд, аз рӯи квазиполиномҳо (ё „кунҷҳо"), исбот карда шудааст ва татбиқи онро ба масъалаи экстремалии дарёфти сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини худи функсия ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути квазиполиномҳо нишон дода шудаанд.

Бигузор $\mathbf{z} := (\xi, \zeta) = (re^{it}, \rho e^{i\tau})$, ки дар ин ҷо $0 \leq r, \rho < \infty,\ 0 \leq t, \tau \leq 2\pi$ — нуқтаи дученакаи зерфазои комплексӣ $\mathbb{C}^2$ ва $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ — бидавраи воҳидӣ дар $\mathbb{C}^2$ мебошад. Синфи ҳамаи функсияҳои аналитикии $f(z) := f(\xi, \zeta)$ дар бидавра $U^2$ ба воситаи $\mathcal{A}(U^2)$ ишора карда мешавад. Барои функсияи ихтиёрии $f \in \mathcal{A}(U^2)$ фарз мекунем, ки

$$M_2(f; r, \rho) := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}, \rho e^{i\tau}) \right|^2 dt d\tau \right\}^{1/2},$$

бошад, ки дар ин ҷо $0 \leq r, \rho < 1$ аст. Бо ишораи $B_2(U^2)$ фазои Бергманро ифода мекунем, ки аз функсияҳои $f \in \mathcal{A}(U^2)$ иборат буда, дорои нормаи охирнок аст:

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 r\rho M_2^2(f; r, \rho) dr d\rho \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Барои функсияи ихтиёрии $f \in \mathcal{A}(U^2)$, ки ба зерфазои $B_2(U^2)$ тааллуқ дорад, дар асоси паҳнкунӣ ба қатори дукаратаи Тейлор ба $U^2$ чунин навишта

[12]Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух переменных и их приложения к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. – 2011. – Т.63. – № 22. – С. 1579–1601.

[13]Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН Республики Таджикистан. – 2007. – Т.50, – № 1. – С. 14–19.

[14]Саидусайнов М.С. Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. – Труды Международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа, 2016. – С. 217–223.

[15]Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций // Вiснiк Днiпропетровского унiверситету. Серия: Математика. – 2013. – Т.18. – №6/1. – С. 61–66.

мешавад

$$f(\xi,\zeta)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q, \tag{19}$$

ки дар ин ҷо $c_{pq}(f)$ – коэффисиентҳои Тейлори функсияи $f$ буда, аз рӯи формулаи (18) ва баробарии Парсевал муносибати зеринро менависем

$$\|f\|_2=\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}\right\}^{1/2}.$$

Ба воситаи $B_2^{(k,l)}(U^2)$, ки дар ин ҷо $k,l\in\mathbb{N}$ мебошад, синфи функсияҳои $f(\xi,\zeta)\in\mathcal{A}(U^2)$-ро бо ҳосилаҳои омехтаи $f^{(k,l)}$ нисбат ба тағйирёбандаи $\xi,\zeta$ ва ҳосилаҳои махсуси $f^{(k,0)}$ и $f^{(0,l)}$ муттаносибан нисбат ба $\xi$ ва $\zeta$ ба фазои $B_2(U^2)$ тааллуқ дорад, ишора мекунем, яъне $B_2^{(k,l)}(U^2)\subset B_2(U^2)$. Барои ададҳои натуралии $p\geq k,\ q\geq l$, ададҳои $\alpha_{p,k}$ ва $\alpha_{q,l}$-ро бо баробариҳои зерин

$$\alpha_{p,k}=p(p-1)\cdots(p-k+1),\quad \alpha_{q,l}=q(q-1)\cdots(q-l+1)$$

муайян мекунем.

Дар мақолаи С.Б.Вакарчук ва М.Б.Вакарчук[15] оиди баъзе ҳолатҳои маҳдудияти муққарарӣ дошта нисбат ба коэффисиентҳои Тейлори $c_{p,q}(f)$ ичрошаванда барои функсияи $f\in B_2^{(k,l)}(U^2)$ намуди зерини нобаробарии аниқи Колмогоровӣ исбот карда шудааст:

$$\left\|f^{(k-\mu,l-\nu)}\right\|_2\leq\frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(\mu+1)^{1/2}}\cdot\frac{\alpha_{l,l-\nu}(l+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{l,l}^{1-\nu/l}(\nu+1)^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\|f\|_2^{\mu\nu/(kl)}\cdot\left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l}\cdot\left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k}\cdot\left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

чунин функсияи $f_0\in B_2^{(k,l)}(U^2)$ мавҷуд аст, ки барояш ин нобаробарӣ ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Мақсади мо исбот кардани як намуди нобаробарӣ ба монанди нобаробарии Колмогоров барои наздиккунии беҳтарини муштарак ба воситаи „кунҷ” мебошад.

Бигузор $(\mathbb{Z}_1,\|\cdot\|_{\mathbb{Z}_1})$ ва $(\mathbb{Z}_2,\|\cdot\|_{\mathbb{Z}_2})$ — ду фазои нормиронидашудаи хаттии аналитикӣ дар давраи воҳидии функсияи як тағйирёбандаи комлексӣ бошанд, ва $\mathfrak{M}_m \subset \mathbb{Z}_1$ ва $\mathfrak{N}_n \subset \mathbb{Z}_2$ – муттаносибан ченаки ниҳоии зерфазо бо базиси $\{a_p(\xi)\}_{p=0}^m$ ва $\{b_q(\zeta)\}_{q=0}^n$ бошанд. Фарз мекунем, ки

$$\widehat{G}_{m,n} := G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) := \mathbb{Z}_2 \otimes \mathfrak{M}_m \oplus \mathbb{Z}_1 \otimes \mathfrak{N}_n \tag{20}$$

бошад, ки дар ин ҷо $\otimes$ ва $\oplus$ муттаносибан амалҳои ҳосили тензор ва суммаи ростаи маҷмӯҳоро ифода мекунанд. Маълум аст, ки ҳар як элементи маҷмӯҳои (20)-ро дар чунин шакл пешниҳод кардан мумкин аст

$$g_{m,n}(\xi, \zeta) := \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta) a_p(\xi) + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi) b_q(\zeta), \tag{21}$$

ки дар ин ҷо пайдарпайии функсияҳои $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^m \subset \mathbb{Z}_2$ ва $\{\psi_l(\xi)\}_{l=0}^n \subset \mathbb{Z}_1$ — маҷмӯҳои ихтиёрии функсияҳо аз фазои нишондодашуда мебошанд. Функсияи намуди (21) квазиполиноми умумикардашуда ё ин ки „кунҷ” номида мешавад. Бигузор акнун $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ — фазои нормиронидашудаи хаттии аналитикӣ дар бидавраи воҳидии $U^2 := \{(\xi, \zeta) : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ функсияи $f(\mathbf{z}) := f(\xi, \zeta)$ ду тағйирёбандаи комплексӣ $\widehat{G}_{m,n} \subset \mathbb{Z}$ бошад. Барои функсияи ихтиёрии $f \in \mathbb{Z}$ баробарии

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{\mathbb{Z}} := \mathscr{E}\left(f, \widehat{G}_{m,n}\right)_{\mathbb{Z}} = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\| : g_{m,n} \in \widehat{G}_{m,n}\right\} \tag{22}$$

бузургии наздиккунии беҳтарини функсияи $f$ маҷмӯи элементҳои формулаи (20) ё ин ки наздиккунии беҳтарини функсияи $f$-ро бо „кунҷ” муайян мекунем. Мо ҳолатҳои $\mathbb{Z} := B_2(U^2)$, $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = B_2(U), \mathfrak{M}_m := \mathcal{P}_m, \mathfrak{N}_n := \mathcal{P}_n$-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $\mathcal{P}_m$ ва $\mathcal{P}_n$ — муттаносибан маҷмӯи полиномҳои алгебравии комлексии яктағйирёбандаи дараҷаашон $m$ ва $n$ бошанд.

Дар ин ҳолат

$$\widehat{G}_{m,n} := \left\{g_{m,n}(\xi, \zeta) : g_{m,n}(\xi, \zeta) = \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi)\zeta^p : \ \varphi_p, \psi_q \in B_2\right\}. \tag{23}$$

Маҷмӯи (23) зерфазои квазиполиномҳо номида мешавад. Барои функсияи аналитикии $f \in \mathcal{A}(U^2)$ бо паҳнкуни ба қатори Тейлор (19) ифодаи зеринро квазиполиноми Тейлори тартиби $(m, n), m, n \in \mathbb{N}$ меноманд

$$T_{m,n}(f; \xi, \zeta) := \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q - \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \tag{24}$$

Аён аст, ки $T_{m,n}(f) \in G(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n)$.

Леммаи зерин натиҷаи асосии параграфи дуюм мебошад.

**Леммаи 2.2.1.** *Дар байни ҳамаи полиномҳои умумикардашудаи намуди зерини*

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{m-1} \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n-1} \psi_q(\xi)\zeta^q,$$

*ба маҷмӯи $\widehat{G}_{m-1,n-1}$ тааллуқ дошта, наздиккунии беҳтарини функсияи $f \in B_2(U^2)$ квазиполиноми Тейлори $T_{m-1,n-1}(f)$-и тартиби $(m-1, n-1)$-ум медиҳад. Дар ин ҳолат*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \|f - T_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}.$$

Бо истифода аз леммаи асосии 2.2.1, дар параграфи сеюм теоремаи асосиро исбот мекунем.

**Теоремаи 2.3.1.** *Бигузор $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1,\ m,n,l,\mu,\nu \in \mathbb{N}$ бошад. Онгоҳ барои ҳаргуна функцияи $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ нобаробарии зерин иҷро мешавад*

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\cdot(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\cdot(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\left(f^{(k,0)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}, \qquad (25)$$

*ки барои функсияи $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ ба баробарӣ мубаддал мешавад.*

Баъзе иловаҳои теоремаи 2.3.1-ро пешниҳод менамоем. Бигузор $W_2^{(k,l)}(k,l \in \mathbb{N})$ — синфи функсияи $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ бошад, ки барояшон $\left\|f^{(k,l)}\right\|_2 \leq 1$ мебошад.

**Леммаи 2.3.3.** *Бигузор ададҳои* $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ *нобаробариҳои шарти* $m \geq k \geq 1, n \geq l \geq 1$*-ро қаноат кунонанд. Онгоҳ баробариҳои зерин дурустанд*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{m,k}} \cdot \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.$$

Тасдиқоти леммаи 2.3.3 дар якҷоягӣ бо натиҷаи теоремаи 2.3.1 ба мо имконияти ҳал намудани масъалаи экастремалии зеринро медиҳад: ёфтани бузургии зерин

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\}$$

талаб карда мешавад, ки дар ин ҷо $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1$.

**Теоремаи 2.3.2.** *Бигузор* $m, n, k, l, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ *маҳдудиятҳои* $m > k \geq \mu \geq 1$, $n > l \geq \nu \geq 1$*-ро қонеъ гардонад. Онгоҳ баробарии зерин дуруст аст.*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}} \cdot \frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.$$

# Хулоса

## Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- масъалаи ёфтани доимии аниқи нобаробарии Ҷексон-Стечкин байни қимати наздиккунии беҳтарини функсияҳои дутағйирёбанда, тавассути полиномҳои умумикардашудаи тригонометрӣ ва модулҳои бефосилагии тартибӣ олии ҳосилаҳои махсуси функсияҳо ҳал карда шудаанд;
- нобаробарии нави аниқ, ки наздиккунии беҳтарини полиномҳои умумикардашудаи функсияҳои дутағйирёбанда бо модули миёнакардашудаи бефосилагии тартиби олии ҳосилаҳои хусусӣ бо функсияҳои вазндори $L_2(Q)$-ро пайваст мекунанд, ёфта шудаанд. Квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;
- нобаробарии аниқи намуди Колмогоров барои функсияҳои аналитикӣ дар бидавра ёфта шудаанд ва татбиқи он ба масъалаҳои экстремалии фазои Бергман ва инчунин ба масъалаҳои наздикшавии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои он тавассути полиномҳои умумикардашуда дода шудаанд;

## Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои кори рисоларо дар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёрченака, тавассути суперпозитсияҳои функсияҳои миқдори камтари тағйирёбандаҳо, хам дар сохаҳои ҳақиқӣ ва ҳам дар соҳаҳои комплексӣ татбиқ кардан мумкин аст.

## ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

**Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия нашр шудаанд:**


[1-М] Сайнаков В.Д. Значение квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2018. – №2(171). – С. 7-16.

[2-М] Сайнаков В.Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных [Текст] / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т.24. – № 4. – С. 270-282.

[3-М] Сайнаков В.Д. Неравенства типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных [Текст] / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т.61. – № 7-8. – С. 615-619.

[4-М] Сайнаков В.Д. Среднеквадратическое приближение функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами [Текст] / В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2018. – № 4(173). – С. 37-43.

[5-М] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении в среднем обобщенными полиномами функций двух переменных [Текст] В.Д.Сайнаков // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т. 63, №5–6. – С. 300-308.


**Дар дигар нашрияҳо:**


[6-М] Сайнаков В.Д. Квазипоперечники некоторых функциональных классов функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков

// Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и ее приложений*", посвященной 70-летию со дня рождения академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С. 46-49.

[7-М] Сайнаков В.Д. Неравенство типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных [Текст] / В.Д.Сайнаков // Материалы научно-теоретической конференции „*Современные проблемы алгебры и теории чисел*", посвященной 90-летию со дня рождения профессора Бабаева Г.А. (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.). – С. 93-94.

[8-М] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций двух переменных в $L_2$ [Текст] / М.О.Акобиршоев, Сайнаков В.Д. // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Джанигибекова Г. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 54-58.

[9-М] Сайнаков В.Д. Приближении в среднем обобщёнными полиномами функций двух переменных [Текст] / В.Д.Сайнаков // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 252-258.

[10-М] Сайнаков В.Д. Наилучшее приближение „углом" в пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита [Текст] / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевяшена 100-річчю з дня народження М.П.Карнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). С. 32.

## АННОТАТСИЯ

**ба диссертатсияи Сайнаков Восиф Додхудоевич дар мавзӯи «Баъзе масъалаҳои экстремалии наздиккунии функсияҳои дутағйирёбанда ба воситаи полиномҳои умумикардашуда» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ**

**Вожаҳои калидӣ:** *наздиккунии функсияҳои дутағйирёбанда, сарҳади болоӣ, бисёраъзогии умумикардашуда, квазиқутр, модули бефосилагӣ, нобаробарии намуди Колмогоров.*

**Мақсади кор.** Мақсади тадқиқот аз ҳали масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои дутағйирёбанда ба воситаи бисёраъзогиҳои умумикардашуда дар соҳаҳои ҳақиқӣ ва комплексӣ иборат аст.

**Усулҳои тадқиқот.** Дар кори пешниҳодшуда усулҳои муосири назарияи наздиккунӣ, бахусус усули Н.П. Корнейчуки баҳодиҳии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо аз боло ба воситаи зерфазои бисёраъзогиҳои ченакашон фиксиронидашуда ва усули В.М. Тихомирови баҳодиҳӣ аз поёни қутрҳо дар фазоҳои гуногуни нормирондашуда, истифода бурда шудааст.

**Навигариҳои илмӣ.** Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия овардашуда нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин ҳосил карда шудаанд:

- масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон-Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини фуксияҳои дутаъгирёбанда тавассути полиномҳои умумикардашудаи тригонометрӣ ва модули бефосилагии ҳосилаи хусусии тартиби олии функсияҳо ҳал шудааст;
- нобаробариҳои нави аниқ, ки наздиккунии беҳтарини полиномҳои умумикардашудаи функсияҳои дутағйирёбандаро бо модули бефосилагии миёнакардашудаи ҳосилаи хусуси тартиби олӣ бо функсияи вазнӣ дар $L_2(Q)$ пайваст мекунад, ёфта шудаанд. Инчунини дигар квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудаанд;
- нобаробарии аниқи намуди Колмогоров барои функсияҳои аналитикӣ дар бидавра ёфта шудааст ва татбиқи он ба масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои полиномҳои умумикардашудаи онҳо пешниҳод гардидааст.

**Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ.** Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ ва амалӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро барои ҳолати функсияҳои дутағйирёбандаи комплексӣ, ки дар бидавра аналитикӣ мебошанд ва ёфтани қимати аниқи квазиқутрҳои колмогоровӣ ва хаттии баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбанда аз рӯи нормаи ҳосилаи омехтаи маҳдуди комплексӣ дар фазои вазндори Бергман истифода бурдан мумкин аст.

# АННОТАЦИЯ
## диссертации Сайнакова Восифа Додхудоевича на тему «Некоторые экстремальные задачи приближения функций двух переменных обобщенными полиномами», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Ключевые слова:** *приближения функций двух переменных, верхняя грань, обобщённый полином, квазипоперечник, модуль непрерывности, неравенства типа Колмогорова.*

**Цель работы.** Целью исследования является решение экстремальных задач теории приближении функций двух переменных обобщенными полиномами как в действительной, так и в комплексной областях.

**Методы исследования.** В работе используются современные методы теории аппроксимации, а именно метод Н.П.Корнейчука оценка сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

**Научная новизна.** Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- решена задача о нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;
- найдены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения обобщенными полиномами функций двух переменных с усредненными модулями непрерывности высших порядков частных производных с весовыми функциями в $L_2(Q)$. Вычислены колмогоровские и линейные квазипоперечники некоторых классов функций;
- найдено точное неравенство типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и дано его приложение к экстремальным задачам совместного приближения функций и их производных обобщенными полиномами.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно использовать в случае функций двух комплексных переменных аналитических в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций комплексных переменных с ограниченными по норме смешанных производных в весовом пространстве Бергмана.

## SUMMARY

**of the dissertation Sainakov Vosif Dodkhudoevich on the topic «Some extremal problems of approximation of functions of two variables by generalized polynomials» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis**

**Key words:** *approximation of functions of two variables, upper bound, generalized polynomial, quasi-diameter, modulus of continuity, Kolmogorov-type inequalities.*

**Work objectives.** The aim of the study is to solve extremal problems of the theory of approximation of functions of two variables by generalized polynomials in both real and complex domains.

**Research methods.** The paper uses modern methods of approximation theory, namely, N.P.Korneichuk's method, an upper bound for the best approximations of classes of functions by a subspace of polynomials of fixed dimension and a lower bound for the widths of sets in various normed spaces developed by V.M.Tikhomirov.

**Scientific novelty.** All the results obtained in the thesis are new. The following main results were obtained:

- solved the problem of finding the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality between the value of the best approximation of functions of two variables by generalized trigonometric polynomials and moduli of continuity of higher orders of partial derivatives of functions;
- new sharp inequalities are found connecting the best approximations by generalized polynomials of functions of two variables with averaged moduli of continuity of higher orders of partial derivatives with weight functions in $L_2(Q)$. Kolmogorov and linear quasi-diameters of some classes of functions are calculated;
- an exact Kolmogorov-type inequality is found for functions analytic in the bidisk and its application to extremal problems of the joint approximation of functions and their derivatives by generalized polynomials is given.

**Theoretical and practical value.** The work is both theoretical and practical. The results of the thesis can be used in the case of functions of two complex variables that are analytic in a bicircle and in finding the exact values of Kolmogorov and linear quasi-diameters of some classes of functions of complex variables with norm-bounded mixed derivatives in a weighted Bergman space.