РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.968.2 На правах рукописи

Валиев Наджиб Гуломамадович

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПОЛЮСА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Джангибеков Гулходжа**
доктор физико-математических наук профессор,

Официальные оппоненты: **Исхоков Сулаймон Абунасрович**
доктор физико-математических наук,
член корреспондент АН РТ.,
заместитель директора по научной работе Института математики АН РТ имени А. Джураева

Усманов Нурулло
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики Финансово-экономического университета Таджикистана

Оппонирующая организация: Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава

Защита состоится *25 сентября 2019 г. в 10:00 часов* на заседании диссертационного совета 6D КОА-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор **Джангибеков Г.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работы является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлина-Кальдерона-Зигмунда

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta}-\overline{z})\Big)^2} \tag{1}$$

(Михлин С.Г., [1] Calderon A., Zygmund A.,[2] Calderon A., Zygmund A.,[3] Zygmund A.,[4] Steine M.,[5]) где D – ограниченная область комплексной плоскости, граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Г, не пересекающихся между собой. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Интегральные уравнения с операторами S_q, где $q=0$, встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (Векуа И.Н.[6]), теории квазиконформных отображений (Альфорс Л.[7],Шиффер М. [8]), теории дифференциальных уравнений с частными производными
(Боярский Б. [9], Джураев А.Д. [10],[11],[12]. Монахов В.Н [13]) и другие.

Впервые такие уравнения рассматривал Векуа И.Н. [14] методом сжима-

[1]Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.

[2]Calderon A., Zygmund A.On the existense of certain singular integrals // Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3]Calderon A., Zygmund A. On singular integrals //American j.math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4]Zygmund A. On singular integrals // Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5]Steine M. Note on singular integral // Proc. Amer. Math. Soc.-1957. -8, №2. p. 250-254

[6]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7]Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[8]Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международной математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9]Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: 1960.

[10]Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11]Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12]Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[13]Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

[14]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

ющих отображений. Джураев А.Д. [15] исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. Комяк И.И. [16],[17],[18] и Василевский Н.Н. [19],[20], [21] применили при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Дудучавой Р.[22] L_p - теория, где $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Джангибекова Г. [23],[24],[25], Бойматова К.Х. и Джангибекова Г. [26] и других.

Во всех вышеуказанных работах сингулярный интеграл S_q был исследован когда $q = 0$. Что касается случая $q \neq 0$, то впервые оператор S_q был

---

[15] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[16] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[17] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[18] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /Комяк И.И.//ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[19] Василевский Н.Л. Об алгебры, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.-1041-1044 с.

[20] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[21] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[22] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76, 199- 214.

[23] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[24] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем., 1992, №9, с. 25-37.

[25] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[26] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

введен в работе Манджавидзе Г.Ф., [27] а Джангибековым Г. и Мамадкаримовой М. [28] было показано что при $q < 1$ оператор обратим.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с характеристиками, зависящими от полюса, и с непрерывными коэффициентами.

Цель работы. Цель диссертационной работы – исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с непрерывными коэффициентами и с характеристиками, зависящими от полюса.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. получены необходимые и достаточные условия нётеровости а также формула для подсчёта индекса для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом и с характеристиками, зависящими от полюса ;

2. получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора для некоторых четырёхкомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

3. получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса, для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

4. найдены левые и правые регуляризаторы некоторых сингулярных операторов нового типа на расширенной плоскости.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты, носят теоретический характер. Они могут

[27] Манджавидзе Г.Ф. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения / Г.Ф. Манджавидзе // -Тбилиси, -1979. с. 1165-1186,

[28] Джангибеков Г., Мамадкаримова М. Об одной формуле обращения / Джангибеков Г., М. Мамадкаримова // Вестник Хорогского гос. университета, 1999. серия 1, №1

послужить фундаментом для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Практическая значимость работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Метод исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных а также метода факторизации матриц-функций.

Апробации результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции, посвященной 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвященной 75-летию доктора физико - математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 29-30октября 2015г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. Ломоносова М.В., 2016 г.);
- международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Михайлова Л.Г. (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- республиканской научной конференции, посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[10]. Из них статьи [1]-[4], опубликовано в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а работы [5]-[10] в прочих изданиях.

Работы [1]-[3] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, список литературы из 61 наименований и заключения, занимает 76 страниц машинописного текста и набрана на $\LaTeX$. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул, которые имеют двойную нумерацию, в где первая цифра совпадает с номером раздела, вторая указывает на номер теоремы, леммы или формулы в данном подразделе.

Содержание диссертации.

Диссертация состоит из пяти разделов.

Раздел 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделе 2 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующий интегральный оператор:

$$A = a(z)I + b(z)S_q K, \tag{2}$$

где $a(z),\ b(z), q(z)$ -непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| < 1$ при всех $z \in \overline{D}$. Черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что если записать оператор S_q в виде

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{u(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

где характеристика $u(z,\theta)$ $(\theta = arg(\zeta - z))$ оператора S_q

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2i\theta}}{(1 + q(z)e^{-2i\theta})^2}$$

является ограниченной функцией, зависящей от полюса z и удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} u(z,\theta) d\theta = 0,\ \forall z \in \overline{D}$.

Оператору A из (2) ставится в соответствие следующая матрица-функция:

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} \\ \\ \overline{b(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}.$$

Показывается, что имеет место

Лемма 1. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{4}$$

Доказывается, что справедлива следующая

Теорема 1. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \quad \textit{и} \quad a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{6}$$

При этом, если выполнено (5), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (6) его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma} a(\tau).$$

В разделе 3 настоящей работы изучается четырёхкомпонентный интегральный оператор с характеристиками, зависящими от полюса вида

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_q + d(z)\overline{S}_q K, \tag{7}$$

где коэффициенты $a(z), b(z), c(z), d(z)$, – непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| \le q_0 < 1$ при всех $z \in \overline{D}$. Поскольку символ оператора S_q равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1 - q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}, \; (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \; 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & b(z) + d(z)\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ & \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ & \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

Доказывается, что имеет место

Лемма 2. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{8}$$

$$|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c.$$

Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, \; 0 < \beta < 2)$ операторы $T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, \;\; T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K$. Из леммы следует, что при выполнении условия (8) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причем

$$A = T_1^{-1}A_1, \quad A_1 = \Delta_1(z)I + \lambda(z)S_q + \overline{\mu(z)}KS_q.$$

В случае (9) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$A = T_2^{-1}A_2, \quad A_2 = \mu(z)I - \lambda(z)K - \Delta_2(z)KS_q.$$

Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. Из результатов

Бойматова К.Х. и Джангибекова Г. [26] следует, что для нётеровости оператора A необходимо выполнение условия (8) или условия (9).

Теорема 2. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \, \forall z \in \overline{D}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} |\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > \\ > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}; \;\; \mu(t) \neq 0, \, \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{11}$$

При этом, если выполнено (10), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (11) его индекс равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(\tau).$$

В разделе 4 в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$: изучается следующий сингулярный интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)S_{mq}K, \tag{12}$$

где

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{m}{2\pi i^m} \iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^m |\zeta - z|^{m-2} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big(|\zeta - z|^m - (-i)^m q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})^m\Big)^2}, \tag{13}$$

черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$, m нечётное число и $m > 0$. Оператор A будет нётеровым тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_m q \\ \overline{b(z)}KS_{mq}K & \overline{a(z)}I \end{pmatrix}.$$

[26] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

Поскольку символ оператора S_{mn} равен $(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|})^{mn}$ и символ оператора $\overline{S}_{mn}$ равен $-(\frac{\sigma}{|\sigma|})^{mn}$ $\quad (0 < |\sigma| < \infty,\ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2)$, то соответственно символами операторов S_{mq} и $\overline{S}_{mq}$ будут

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = \frac{\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1 - q(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = -\frac{\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1 + \overline{q(z)}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

тогда, согласно работы Дудучава Р.В., свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}} \\ -\overline{b(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},$$

где $\ z \in \overline{D} \ \ 0 < |\sigma| < \infty, \ \ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

Лемма 3. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ $(detG_z(\sigma \neq 0))$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)|^2(1 - |q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{14}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{15}$$

Имеет место следующее

Теорема 3. *Для того чтобы оператор A был неётеровым в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2(1 - |q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{17}$$

При выполнении этих условий индекс оператора A равен

$$\varkappa = -mInd_{\Gamma}a(\tau).$$

Замечание. *Требование $|q(z)| < 1$ в теореме 3. можно ослабить до $|q(z)| \neq 1$. Действительно, если $|q(z)| > 1$, то достаточно заметить, что имеет место равенство $(S_{mq}f)(z) = (-1)^m q_1^2 \overline{(}S_{mq_1}f)(z)$, где $q_1 = -\frac{1}{(-i)^m q}$.*

Далее в этом разделе изучается следующий четырёхкомпонентный интегральный оператор с нечётными характеристиками, зависящими от полюса:

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K, \tag{18}$$

где $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, причём $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $\forall z \in \overline{D}$. $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$. Поскольку символ оператора S_{mq} равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1 - q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}, \ (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \ 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, согласно [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & b(z) - d(z)\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}.$$

Имеет место

Лемма 4. Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ, $(detG_z(\sigma) \neq 0)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D} \tag{19}$$

$$|\Delta_2(z) + \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{20}$$

причём (19) и (20) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c + b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} + \overline{b}c,$$

$$\Delta_1(z)\Delta_2(z) \equiv |\lambda|^2 - |\mu|^2$$

.

Доказывается, что справедлива следующая:

Теорема 4. *Для нётеровости оператора $\mathcal{A}$ в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} |\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > \\ > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D};\ \mu_1(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{22}$$

При этом, если выполнено (21), то оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный, а при выполнении (22) его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = mInd_\Gamma \mu_1(\tau).$$

В разделе 5 изучается вопрос построения регуляризатора оператора A и нахождение обратного оператора A^{-1}. Мы здесь ограничимся случаем, когда оператор A рассматривается на плоскости E. Имеет место следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 5. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ имеет место равенство*

$$(S^E_q \overline{S}^E_q f)(z) = \frac{1}{1 - |q(z)|^2}((If)(z)) + q(z)(S^E_q f)(z) + \overline{q(z)}(\overline{S}^E_q f)(z)) + T, \tag{23}$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Лемма 6. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ оператор*

$$M = I + qS^E_q + \overline{q}\overline{S}^E_q, \tag{24}$$

имеет левый и правый регуляризатор

$$R = \frac{1}{1-|q|^2}(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E), \tag{25}$$

а в случае $q = const$, оператор R будет левым и правым обратным для исходного оператора M.

Лемма 7. *Если $a(z), b(z)$ непрерывные на расширенной плоскости E функции и если выполнено условие $|a(z)| + |b(z)| < 1$, при $\forall z \in E$, тогда оператор*

$$N = I + aS^E + b\overline{S}^E, \tag{26}$$

имеет в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ левый и правый регуляризатор

$$R = \frac{1}{1+qr}(I - r\overline{S}^E_r)(I - qS^E_q), \tag{27}$$

а в случае постоянных a и b оператор R будет левым и правым обратным для исходного оператора N, где функции $q(z)$ и $r(z)$ однозначно находятся из равенств $a = \frac{q}{1+qr}$, $b = \frac{r}{1+qr}$, $|q(z)| < 1$, $|r(z)| < 1$ при $\forall z \in E$.

Теперь рассмотрим оператор A из (2) на плоскости E и запишем её в виде

$$A = I - \lambda S^E_q K, \qquad \lambda(z) = \frac{b(z)}{a(z)}. \tag{28}$$

Нами было показано, что при условии $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|$, $\forall z \in E$ оператор A в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ обратим. Имеет место

Теорема 5. *Пусть выполнено условие $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|$, $\forall z \in E$. Тогда оператор A из (28) в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ имеет правый и левый регуляризатор вида*

$$R = \nu(I + \overline{\mu}\overline{S}^E_\mu)(I + \mu S^E_\mu)(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E)(I + \lambda S^E_q K), \tag{29}$$

где $\nu = \frac{1+|q|^2-|\lambda|^2}{1+|\mu|^2}$, $|\mu(z)| < 1$ и функция μ находится единственным образом из равенства $\frac{\mu}{1+|\mu|^2} = \frac{q}{1+|q|^2-|\lambda|^2}$. В случае, когда $\lambda(z) \equiv const$. оператор из (28) будет левым и правым обратным для оператора A из (29).

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК ТР:

1. Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2013. Т.56, №1. с.10-17.
2. Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2014. Т.57, №7. с.556-562.
3. Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2017, №1-5, с.138-140.
4. Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечҷтными характеристиками, зависящими от полюса / Валиев Н.Г. //Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2019, №2, с.212-221.

Работы в других изданиях:

5. Валиев Н.Г. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //Материалы международной научной конференции,"Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений"(Душанбе, 17-18 июня 2013 г.) с.39-41.
6. Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еҷ преподавания посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, г. 2(150).) с.150-152.
7. Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 29-30 октября 2015г.) с.167-170.

8. Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса[Текст]/ Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еёприложений"(Душанбе, 3-4 июня 2016г.) с.12-14.

9. Валиев Н.Г. Двумерные сингулярные интегральные операторы с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций"(Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) с.50-52.

10. Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса / Валиев Н.Г., Ёгибеков Б.Ш. //Материалы республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложения"(Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) с.40-44.

ШАРҲИ МУХТАСАР
ба диссертатсияи Валиев Наҷиб Гуломамадович дар мавзӯи «Баъзе операторҳои сингулярии интегралии дученака бо характеристикаҳои аз қутб вобаста» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01. – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Муҳиммияти мавзӯъ. Объекти асосии тадқиқотии диссертатсияи мазкур дар фазои функсияҳои вазндори лебегии $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ оператори дученакаи сингулярии интегралии Михлин-Калдерона-Зигмунд

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2}$$

мебошад, ки ин ҷо D – соҳаи маҳдуди фазои комплексӣ буда, сарҳади Г-и он, ки аз миқдори охирноки хатҳои каҷи оддии Ляпуновӣ тартиб ёфта, байни ҳам буриданашавандаанд. Интеграл ба маънои қимати асоссии Кошӣ фаҳмида мешавад.

Муодилаҳои интегралӣ бо операторҳои S_q, ҳангоми $q = 0$ будан, дар бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои умумикардашудаи аналитикӣ. (Векуа И.Н.), назарияи инъикосҳои квазиконформӣ (Альфорс Л., Шиффер М.), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Боярский Б., Джураев А.Д., Монахов В.Н.) ва дар бисёр масъалаҳои дигар, вомехӯранд

Бори аввал чунин муодилаҳоро Векуа И.Н. бо татбиқи усули инъикосҳои фишурдашаванда, дида баромада буд. Ҷураев А.Д. дар фазои $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ муодилаҳои дученакаи сингулярии интегралиро бо ёрии редуктивикунонӣ ба масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналатикии умумикардашуда тадқиқ намуда буд. Комяк И.И. ва Василевский Н.Н. ҳангоми омӯзиши муодилаҳои дученака дар фазои $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ усулҳои назарияи алгебраи банахиро истифода намуданд.

Дудучава Р. L_p – назарияеро ҳангоми $1 < p < \infty$ будан, пешниҳод кард, ки имконият медод, то тадқиқи нётеровии муодилаҳои бисёрченакаи сингулярии интегралӣ дар бисёршаклаҳо, ки операторҳои S_m ва комбинатсияҳои гуногуни онҳоро дар бар мегиранд, ба факторизатсиякунонии матритса-функсияҳои ратсионалии мувофиқ, саҳехтараш ба ёфтани индексҳои хусусии онҳо оварда шавад. Ба замми ин масъалаи барқароркунии критерияи нётеровии муодилаи сингулярии интегралии дученака худ ҷолиби таваҷӯҳ мебошад. Барои синфи васеи муодилаҳои интегралӣ ин масъала дар корҳои Ҷангибеков Г., Бойматов К.Х. ва Ҷангибеков Г. ва ғайраҳо, мавриди омӯзиш қарор гирифта буданд.

Дар тамоми корҳои иҷрошуда интеграли сингулярии S_q дар ҳолати $q = 0$ тадқиқ карда шуда буд. Дар ҳолати $q \neq 0$ бошад, оператори S_q аввалин маротиба дар кори Манҷавидзе Г.Ф. пешниҳод карда шуда буд. Дар мақолаи Ҷангибеков Г. ва Мамадкаримова М. бошад, нишон дода шуд, ки ин оператор ҳангоми $q < 1$ будан, оператори баръакс дорад.

Кори диссертатсионии мазкур бошад ба тадқики хосиятҳои нётеровии операторҳои сингуляри интегралии дученака дар соҳаи маҳдуд бо коэффисиентҳои бефосила ва бо характеристикаи аз қутб вобаста бахшида шудааст.

Мақсади тадқиқот. Мақсади кори диссертатсионии мазкур тадқиқ намудани масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои операторҳои сингулярии интегралии дученака дар соҳаи маҳдуд бо характеристикаи аз қутб вобаста ва бо коэффисиентҳои бефосила, мебошад.

Навоварии илмии тадқиқотӣ. Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя пешниҳод шудаанд, нав буда, аз инҳо иборат мебошанд:

1. шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ёфта шуда, формулаи ҳисоб намудани индекс барои як синфи операторҳои сингулярии интегралии дученакаи характеристикааш аз қутб вобаста дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, ҳосил карда шудааст;

2. шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани баъзе синфҳои чоркомпонентаи операторҳои сингулярии интегралии дученакаи характеристикааш аз қутб вобаста дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, ҳосил карда шуда, инчунин формулаи ҳисобкунии индекси онҳо дода шудааст;

3. барои баъзе синфҳои операторҳои сингулярии интегралии дученакаи дорои характеристикаи тоқи аз қутб вобаста, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисобкунии индекс дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, оварда шудааст;

4. барои баъзе операорҳои намуди нав дар ҳамвории васеъкардашуда, регуляризаторҳои чап ва рост ёфта шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳое, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд, ҳамчун бунёдгари асосӣ дар оянда барои тадқиқотҳои назариявӣ дар назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, хизмат расонанд.

Арзиши амалии кори илмӣ бо муҳимияти амалӣ доштани муодилаҳои сингулярии интегралӣ дар масъалаҳои механика ва дигар соҳаҳои физика, муайян карда мешавад.

Усули тадқиқот. Усуле, ки дар диссертатсия барои тадқиқот истифода шудааст, дар элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои тағйирёандаҳояшон комплексӣ ва инчунин усули факторизатсиякунонии матритса-функсияҳо, асоснок карда шудааст.

RESUME

of the dissertation of Valiev Najib Gulomamadovich on the theme "Some two-dimensional singular integral operators with characteristics depending on the pole,"submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 – real, complex and functional analysis.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, operator index, operator Noetherianness.

Relevance of the research theme. The main object of this dissertation is the two-dimensional singular integral Mikhlin-Calderon-Zygmund operator acting in Lebesgue function space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$,

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2}$$

Where D is a bounded region of the complex plane, the boundary of which consists of a finite number of simple closed Lyapunov curves Γ that do not intersect each other. The integral is understood in the sense of the main Cauchy value.

Integral equations with operators S_q when $q = 0$ occur in many problems of the theory of generalized analytic of functions (Vekua I.N.) theories of quasiconformal mappings (Alfors L., Schiffer M.), theories partial differential equations (Boyarsky B., Juraev A.D., Monakhov V.N.) and others.

For the first time such equations considered Vekua I.N. by the method of compressing mappings. A.D. Juraev investigated two-dimensional singular integral equations in the spaces $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ using the reduction to boundary value problems for general analytic functions. Komyak I.I. and Vasilevsky N.N. applied when studying two-dimensional equations in spaces $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ methods of the theory of Banach algebras.

Developed by Duducha R.V. L_p - theory, where $1 < p < \infty$, multidimensional singular integral equations on varieties with a margin yes opportunity to reduce research properties of the equations containing the operators S_m and their various combinations, to factoring the corresponding rational matrix functions, more precisely, to finding their partial indices. It is of interest to establish the criterion of Notherian considered two-dimensional singular integral equation in form of explicit conditions on its coefficients. For a wide class the integral of the singular equations is done in the works Jangibekov G., Boymatov K.Kh. and Jangibekov G. and others.

In all the above papers, the singular integral S_q was investigated when $q = 0$. what For the case of $q \neq 0$,, the operator S_q was first introduced in Manjavidze G.F. and in the work of Jangibekov G., Mamadkarimova M.

This dissertation is devoted to the study of the Notherian properties of two-dimensional singular integral operators on a bounded domain with characteristic dependent on poles and with continuous coefficients.

The purpose of the work. The aim of the dissertation is to study the question of the solvability of certain classes of two-dimensional singular integral operators on a bounded domain with pole-dependent characteristics and with continuous coefficients.

Scientific novelty. The results for the defense are new and are as follows:

1. found the effective necessary and sufficient conditions for Notherianess and obtained a formula for calculating the index for a class of two-dimensional singular integral operators with characteristics that depend on a pole over a bounded region in weighted Lebesgue spaces;

2. obtained necessary and sufficient conditions for Notherianess, and also given formulas for calculating the operator index for some fourcomponent classes of two-dimensional singular integral operators with characteristics depending on a pole over a bounded region in weight Lebesgue spaces;

3. obtained the necessary and sufficient conditions for the Notherianess

and formula for the computation of the index, for some classes of two-dimensional singular integral operators with none total characteristics, depending on the pole over a bounded region in weight weighted spaces;

4. found the left and right regularises of some singular new type operators on the extended plane;

Theoretical and practical significance of the work. The results obtained in the thesis are of a theoretical nature. They can serve as a foundation for further theoretical studies in the theory of boundary value problems for partial differential equations.

The practical value of the work is determined by the applied significance of singular integral equations in solving applied problems. ґproblems of mechanics and other branches of physics.

Research Method. The method used in the thesis is based on the elements of functional analysis and the theory of complex functions variables as well as the method of factorization of matrix functions.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.968.2

Бо ҳуқуқи дастнавис

Валиев Наҷиб Гуломамадович

БАЪЗЕ ОПЕРАТОРҲОИ СИНГУЛЯРИИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКА БО ХАРАКТЕРИСТКАҲОИ АЗ ҚУТБ ВОБАСТА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси
01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Ҷангибеков Гулхоҷа**
доктори илмҳои физикаю математика, профессор

Муқарризони расмӣ: **Исҳоқов Сулаймон Абунасрович**
доктори илмҳои физикаю математика ,
аъзо-корреспонденти АИ ҶТ.,
ҷонишини директор оиди корҳои илмӣ
дар Институти математикаи бо номи
Ҷураев А.

Усманов Нурулло
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи математикаи олӣ,
Донишгоҳи молия ва иқтисоди
Тоҷикистон

Муассисаи тақриздиҳанда: Донишгоҳи давлатии
Бохтар ба номи Н. Хусрав

Ҳимоя *25-уми сентябри соли 2019 соати 10:00* дар Шӯрои диссертатсионии 6D КОА-012 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, дар факултети механикаю математика аз рӯи нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат "___" ____________ 2019 фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор **Ҷангибеков Г.**

Тавсифи умумиии диссертатсия

Муҳиммияти мавзӯъ. Объекти асосии тадқиқотии диссертатсияи мазкур дар фазои функсияҳои вазндори лебегии $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$, оператори дученакаи сингулярӣ интегралии Михлин-Калдерона-Зигмунд

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2} \tag{1}$$

(Михлин С.Г., [1] Calderon A., Zygmund A.,[2] Calderon A., Zygmund A.,[3] Zygmund A.,[4] Steine M.,[5]) мебошад, ки ин ҷо D – соҳаи маҳдуди фазои комплексӣ буда, сарҳади Г-и он, ки аз миқдори охирноки хатҳои каҷи оддии Ляпуновӣ тартиб ёфта, байни ҳам буриданашавандаанд. Интеграл ба маънои қимати асоссии Кошӣ фаҳмида мешавад.

Муодилаҳои интегралӣ бо операторҳои S_q, ҳангоми $q = 0$ будан, дар бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои умумикардашудаи аналитикӣ, (Векуа И.Н.[6]), назарияи инъикосҳои квазиконформӣ (Альфорс Л.[7], Шиффер М. [8]), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.Боярский [9], Ҷураев А.Д. [10],[11],[12] Монахов В.Н. [13]) ва дар бисёр масъалаҳои дигар, вомехӯранд

Бори аввал чунин муодилаҳоро бо тадбиқи усули инъикосҳои фишур-

---

[1] Михлин С.Г.Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.

[2] Calderon A., Zygmund A.On the existense of certain singular integrals // Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3] Calderon A., Zygmund A. On singular integrals //American j.math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4] Zygmund A. On singular integrals // Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5] Steine M. Note on singular integral // Proc. Amer. Math. Soc.-1957. -8, №2. p. 250-254

[6] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[8] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международной математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: 1960.

[10] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[13] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

дашаванда И.Н.Векуа [14] дида баромада буд. Ҷураев А.Д. [15] дар фазои $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ муодилаҳои дученакаи сингулярии интегралиро бо ёрии редуктивикунонӣ ба масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои аналатикии умумикардашуда тадқиқ намуда буд. Комяк И.И. [16],[17],[18] ва Василевский Н.Н. [19],[20], [21] ҳангоми омӯзиши муодилаҳои дученака дар фазои $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ усулҳои назарияи алгебраи банахиро истифода намуданд.

Дудучава Р. [22] L_p – назарияеро ҳангоми $1 < p < \infty$ будан, коркарда баромад, ки имконият медод, то тадқиқи нётеровии муодилаҳои бисёрченакаи сингулярии интегралӣ дар бисёршаклаҳо, ки операторҳои S_m ва комбинатсияҳои гуногуни онҳоро дар бар мегиранд, ба факторизатсиякунонии матритса-функсияҳои ратсионалии мувофиқ, саҳеҳтараш ба ёфтани индексҳои хусусии онҳо оварда шавад. Ба замми ин масъалаи барқароркунии критерияи нётеровии муодилаи сингулярии интегралии дученака худ ҷолиби таваҷӯҳ мебошад. Барои синфи васеи муодилаҳои интегралӣ ин масъала дар корҳои Ҷангибеков Г. [23],[24],[25], Бойматов К.Х. ва Ҷангибеков Г. [26] ва ғайраҳо, мавриди омӯзиш қарор гирифта буданд.

[14] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[15] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[16] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[17] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[18] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /Комяк И.И. //ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[19] Василевский Н.Л. Об алгебры, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.-1041-1044 с.

[20] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[21] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[22] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76, 199- 214.

[23] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[24] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем., 1992, №9, с. 25-37.

[25] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[26] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

Дар тамоми корҳои иҷрошуда интеграли сингулярии S_q дар ҳолати $q = 0$ тадқиқ карда шуда буд. Оператори S_q дар ҳолати $q \neq 0$ бошад, аввалин маротиба дар кори Манҷавидзе Г.Ф. [27] ҳосил карда шуда буд. Дар мақолаи Ҷангибеков Г., Мамадкаримова М. [28] бошад, нишон дода шуд, ки ин оператор ҳангоми $q < 1$ будан, оператори баръакс дорад.

Кори диссертатсионии мазкур бошад ба тадқики хосиятҳои нётеровии операторҳои сингулярии интегралии дученака дар соҳаи маҳдуд бо характеристикаи аз қутб вобаста ва бо коэффисиентҳои бефосила бахшида шудааст.

Мақсади тадқиқот. Мақсади кори диссертатсионии мазкур тадқиқ намудани масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои операторҳои сингулярии интегралии дученака дар соҳаи маҳдуд бо характеристикаи аз қутб вобаста ва бо коэффисиентҳои бефосила, мебошад.

Навоварии илмии тадқиқотӣ. Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя пешниҳод шудаанд, нав буда, аз инҳо иборат мебошанд:

1. шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ёфта шуда, формулаи ҳисоб намудани индекс барои як синфи операторҳои сингулярии интегралии дученакаи характеристикааш аз қутб вобаста дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, ҳосил карда шудааст;

2. шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани баъзе синфҳои чоркомпонентаи операторҳои сингулярии интегралии дученакаи характеристикааш аз қутб вобаста дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, ҳосил карда шуда, инчунин формулаи ҳисобкунии индекси онҳо дода шудааст;

3. барои баъзе синфҳои операторҳои сингулярии интегралии дученакаи дорои характеристикаи тоқи аз қутб вобаста, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисобкунии индекс дар соҳаи маҳдуди фазои лебегии вазндор, оварда шудааст;

4. барои баъзе операторҳои намуди нав дар ҳамвории васеъкардашуда, регуляризаторҳои чап ва рост ёфта шудаанд.

[27] Манджавидзе Г.Ф. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения / Манджавидзе Г.Ф. // -Тбилиси, -1979. с. 1165-1186,

[28] Джангибеков Г., Мамадкаримова М. Об одной формуле обращения / Джангибеков Г., Мамадкаримова М. // Вестник Хорогского гос. университета, 1999. серия 1, №1

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳое, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд, ҳамчун бунёдгари асосӣ дар оянда барои тадқиқотҳои назариявӣ дар назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, хизмат расонанд.

Арзиши амалии кори илмӣ бо муҳимияти амалӣ доштани муодилаҳои сингулярӣ интегралӣ дар масъалаҳои механика ва дигар соҳаҳои физика, муайян карда мешавад.

Усулҳои тадқиқот. Усуле, ки дар диссертатсия барои тадқиқот истифода шудааст, дар элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои тағйирёбандаҳояшон комплексӣ ва инчунин усули факторизатсия-кунонии матритса-функсияҳо, асоснок карда шудааст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия аз тарафи муаллиф дар семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баррасӣ ва муҳокима карда шудаанд. Инчунин натиҷаҳои диссертатсия бо баромад дар конференсияҳои зерин, пешниҳод шуда буданд:

- конференсияи байналмилалии илмӣ, бахшида ба 85-солагии академики АИ ҶТ Михайлов Л.Г. (Душанбе, 17-18 июни соли 2013);
- конференсияи байналмилалии илмӣ, бахшида ба 20-солагии Конститутсияи (Сарқонуни) ҶТ (Хуҷанд, 28-29 июни соли 2014);
- конференсияи байналмилалии илмӣ, бахшида ба 75-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Собиров Т.С. (Душанбе, 29-30 октябри соли 2015);
- конференсияи байналмилалии илмӣ, «Масъалаҳои муосири математика ва тадбиқи онҳо» (Душанбе, Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи Ломоносов М.В., соли 2016);
- конференсияи байналмилалии илмӣ, бахшида ба 90-солагии академики АИ ҶТ, дорандаи лаурети давлатӣ ба номи Абӯали ибни Сино Михайлов Л.Г. (Душанбе, 27-28 феврали соли 2018);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ, бахшида ба 80-солагии математики маъруфи тоҷик, профессор Бекназар Имомназаров (Душанбе, 10-11 июни соли 2019).

Саҳми шахсии муаллиф. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар корҳои [1]-[10] нашр шудаанд. Аз онҳо мақолаҳои [1]-[4], дар мақолаҳои тақризшавандае, ки ба рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти ҶТ ва КОА-и ФР дохил мешаванд ва корҳои [5]-[10] дар шакли фишурдаҳо дар осори конфренсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ аз чоп баромаданд.

Корҳои [1]-[3] ба ҳаммуаллифии роҳбари илмӣ нашр шуданд, ки ба ӯ масъалагӯзорӣ ва роҳнамои умумӣ, ба дсссертант бошад, исботи натиҷаҳои асосӣ тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми кор. Диссертатсия аз муқаддима, панҷ кисмат, рӯйхати адабиётҳои истифодашуда, ки 61-тоанд ва хулоса иборат буда, 76 саҳифаи матни чопиро ташкил медиҳад, ки дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудаанд. Барои осонии кор дар диссертатсия теорема, лемма ва формулаҳо чунин рақамгузорӣ карда шудаанд: рақами якум ба рақами қисм ва дуюмаш бошад ба рақами теорма, лемма ё формула дар зерқисмати додашуда мувофиқ меоянд.

Мазмуни мухтасари диссертатсия.

Диссертатсия аз панҷ қисмат иборат аст. Қисмати 1 хусусияти ёрирасонӣ дорад. Дар он тамоми фазоҳои функсияҳои дар кор истифода шаванда, ва тамоми мафҳумҳои асосӣ ва фактҳои назарияи нётеровии операторҳо дар фазои банахӣ оварда шудаанд.

Дар қисмати 2 дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D)=\{f(z):|z|^{\beta-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D),||f||_{L^p_{\beta-2/p}}=||F||_{L^p}\},$$

оператори интегралии зерин дида баромада мешавад:

$$A=a(z)I+b(z)S_qK, \tag{2}$$

ки инҷо $a(z),\ b(z),q(z)$ – функсияҳои қимати комплексидоштаи дар $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$ бефосила буда, ба замми ин $|q(z)|<1$ барои ҳамаи $z\in\overline{D}$ мебошад, хатча дар болои функсия маънои онро дорад, ки гузариш ба қиматҳои ҳамроҳшудаи комплексӣ иҷро шудааст, интеграли дученака бошад, ба маънои қимати асосии Кошӣ фаҳмида мешавад. Қайд мекунем, ки оператори S_q- ро дар намуди

$$(S_qf)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{u(z,\theta)}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,$$

навишта метавонем, ки ин ҷо характеристикаи $u(z,\theta)$ $(\theta = arg(\zeta - z))$ оператораи S_q

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2i\theta}}{(1+q(z)e^{-2i\theta})^2}$$

функсияи маҳдуд буда, аз қутби z вобаста ва шарти зеринро қаноат мекунад.

$$\int\limits_0^{2\pi} u(z,\theta)d\theta = 0, \ \forall z \in \overline{D}.$$

Ба оператори A аз (2) матритса-функсияи зерин мувофиқ гузошта мешавад:

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} \\ \overline{b(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}.$$

Нишон дода мешавад, ки чунин тасдиқот ҷой дорад

Леммаи 1. *Матритсаи $G_z(\sigma)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ ва σ фақат ва фақат ҳамон вақт ғайриинқирозӣ аст, яъне $detG_z(\sigma) \neq 0$, агар яке аз ду нобаробариҳо иҷро шаванд*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1-|q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1+|q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{4}$$

Исбот карда, мешавад, ки теоремаи зерин ҷой дорад

Теоремаи 1. Барои нётеровӣ будани оператори A дар фазои лебегии $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2)$ зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шаванд

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1-|q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1+|q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{6}$$

Ба замми ин, агар шарти (5) иҷро шавад, пас оператори A оператори баръакси маҳдуд дорад, агар шарти (6) иҷро шавад, пас индекси он ба

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}a(\tau).$$

баробар аст

Дар қисмати 3-и кори мазкур оператори интегралии чоркомпонентаи бо характеристикаи аз қутб вобаста омӯхта мешавад, ки чунин намуд дорад

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_q + d(z)\overline{S}_qK, \tag{7}$$

ки дар ин ҷо коэффисиентҳои $a(z), b(z), c(z), d(z)$, *– функсияҳои қимати комплексӣ доштаи дар* $\overline{D} = D \cup \Gamma$ *бефосила мебошанд ва инчунин* $|q(z)| \leq q_0 < 1$ *барои ҳамаи* $z \in \overline{D}$. *Азбаски символи оператори* S_q *баробари*

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1 - q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}, \; (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \, 0 < |\sigma| < \infty),$$

аст, пас хосиятҳои оператори A *аз рӯи хосиятҳои матритсаи зер муайян карда мешаванд*

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & b(z) + d(z)\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

исбот карда мешавад, ки

Леммаи 2. Матритсаи $G_z(\sigma)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ ва σ фақат ва фақат ҳамон вақт ғайриинқирозӣ аст, (яъне $detG_z(\sigma) \neq 0$) агар яке аз ду нобаробариҳои зерин иҷро шаванд

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{8}$$

$$|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{9}$$

ки ин ҷо

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c.$$

Дар $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ *операторҳои маҳдуди зеринро дида мебароем* $T_1=\overline{a(z)}I-b(z)K,\ T_2=\overline{d(z)}I-c(z)K$. *Аз лемма мебарояд, ки ҳангоми иҷрошавии шарти (8) оператори* T_1 *оператори барѓакси бефосила дорад, яѓне*

$$A=T_1^{-1}A_1,\quad A_1=\Delta_1(z)I+\lambda(z)S_q+\overline{\mu(z)}KS_q.$$

Дар ҳолати (9) оператори T_2 *оператори барѓакси бефосилаи*

$$A=T_2^{-1}A_2,\quad A_2=\mu(z)I-\lambda(z)K-\Delta_2(z)KS_q-$$

ро дорад. Ҳамин тавр, тадқиқи нётеровӣ ва индекси оператори A *ба тадқиқи операторҳои мувофиқи* A_1 *ва* A_2 *оварда мешавад. Аз натиҷаҳои Бойматов К.Х. ва Ҷангибеков Г.* [26] *мебарояд, ки барои нётеровӣ будани* A *иҷрошавии (8) ё (9) зарур аст.*

Теоремаи 2. Барои нётеровӣ будани оператори A дар фазои лебегии $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ зарур ва кофӣ аст, яке аз шартҳои зерин иҷро шаванд

$$|\Delta_1(z)|>|\lambda(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu(z)|,\ \forall z\in\overline{D}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_2(z)-\Delta_1(z)|q(z)|^2-2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))|>\\ >|\lambda(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu(z)|,\forall z\in\overline{D};\ \mu(t)\neq 0,\ \forall t\in\Gamma.\end{gathered} \tag{11}$$

Ба замми ин, агар (10) иҷро шавад, пас оператори A оператори баръакси маҳдуд дорад, бо иҷрошавии (11) индекси он $\varkappa$ баробари

$$\varkappa=2Ind_\Gamma\mu(\tau).$$

аст.

Дар қисмати 4 дар фазои $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ *оператори сингулярии интегралии зерин омӯхта мешавад:*

$$A=a(z)I+b(z)S_{mq}K, \tag{12}$$

ки ин ҷо

$$(S_{mq}f)(z)=\frac{m}{2\pi i^m}\iint\limits_D\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^m|\zeta-z|^{m-2}f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(|\zeta-z|^m-(-i)^mq(z)(\overline{\zeta}-\overline{z})^m\Big)^2}, \tag{13}$$

[26] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.8, с. 171-172.

хатча дар болои функсия маънои ба қимати ҳамрошудаи комплексӣ гузаштанро дорад, интеграли дученака бошад ба маънои қимати асосии Кошӣ фаҳмида мешавад, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ инчунин $m > 0-$ адади тоқ мебошад.

Оператори A фақат ва фақат ҳамон вақт нётеровӣ мешавад, агар нётеровӣ матритсаи оператории

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_m q \\ \\ \overline{b(z)}KS_{mq}K & \overline{a(z)}I \end{pmatrix}.$$

бошад. Азбаски символи оператори S_{mn} баробари $(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|})^{mn}$ ва символи оператори $\overline{S}_{mn}$ баробари $-(\frac{\sigma}{|\sigma|})^{mn}$ $(0 < |\sigma| < \infty,\ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2)$ аст, пас мувофикан символҳои операторҳои S_{mq} ва $\overline{S}_{mq}$ инҳоянд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = \frac{\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1 - q(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = -\frac{\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1 + \overline{q(z)}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

Аз ин ҷо, дар асоси назарияи операторҳо, хосиятҳои оператори A аз рӯи хосиятҳои чунин матритса муайян карда мешавад

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}} \\ \\ -\overline{b(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z \in \overline{D}.$$

Леммаи 3. *Матритсаи $G_z(\sigma)$ фақат ва фақат дар ҳамон вақт барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ и σ ғайриинқирозӣ аст, $(detG_z(\sigma \neq 0))$ ки агар яке аз нобаробариҳо иҷро шаванд*

$$|a(z)|^2(1 - |q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{14}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{15}$$

Чунин тасдиқот ҷой дорад

Теоремаи 3. *Барои он, ки оператори А дар фазои лебегии $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки*

$$|a(z)|^2(1 - |q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{17}$$

ҳангоми иҷрошавии ин шартҳо индекси оператори А баробари

$$\varkappa = -mInd_{\Gamma}a(\tau).$$

аст

Қайд. *Талаботи $|q(z)| < 1$-ро дар теоремаи 0.3. то $|q(z)| \neq 1$. паст кардан мумкин аст. Дар ҳақиқат, агар $|q(z)| > 1$, пас кифоя аст, қайд намоем, ки чунин баробарӣ ҷой дорад $(S_{mq}f)(z) = (-1)^m q_1^2(\overline{S}_{mq_1}f)(z)$, ки ин ҷо $q_1 = -\frac{1}{(-i)^m q}$.*

Дар давоми ин қисмат оператори чоркомпонентаи интегралӣ бо характеристикаҳои тоқи аз қутб вобастаи зерин омӯхта мешавад

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K, \tag{18}$$

ки ин ҷо $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ – функсияҳои қиматашон комплексии дар $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ бефосила буда, ба замми ин $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $\forall z \in \overline{D}$, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$.

Аазбаски символи оператори S_{mq} ба

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1 - q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} \ \ (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2,\ 0 < |\sigma| < \infty),$$

баробар аст, пас дар асоси корҳои Дудучава Р. хосиятҳои оператори A-ро хосиятҳои матритсаи зерин муайян мекунад:

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|})^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & b(z) - d(z)\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}.$$

Леммаи зерин ҷой дорад

Леммаи 4. Матритсаи $G_z(\sigma)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ ва σ $(detG_z(\sigma) \neq 0)$ фақат ва фақат дар ҳамон вақт ғайриинқирозӣ аст, агар яке аз нобаробариҳои зрин иҷро гарданд:

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D} \tag{19}$$

$$|\Delta_2(z) + \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{20}$$

ба замми ин (19) ва (20) дар як вақт баро ягон қимати $z \in \overline{D}$ иҷро шуда наметавонанд, ки ин ҷо

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c + b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} + \overline{b}c,$$
$$\Delta_1(z)\Delta_2(z) \equiv |\lambda|^2 - |\mu|^2$$

.

Исбот карда мешавад:

Теоремаи 4. *Барои нётеровӣ будани оператори $\mathcal{A}$ дар фазои лебегии $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шавад:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{21}$$

$$|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| >$$
$$> |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D};\ \mu_1(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma. \tag{22}$$

Агар шарти (21) иҷро шавад, пас оператори $\mathcal{A}$ оператори баръакси маҳдуд дорад, вале ҳангоми иҷрошавии шарти (22) индекси он $\varkappa$ ба

$$\varkappa = mInd_\Gamma \mu_1(\tau).$$

баробар аст

Дар қисмати 5 масъалаи сохтани регуляризаторҳои оператори A ва ёфтани оператори барьакси A^{-1} дида баромада мешавад. Мо дар ин ҷо бо ҳолате маҳдуд мешавем, ки оператори A дар ҳамвории E дида баромада мешавад. Чунин тасдиқотҳои ёрирасони зерин ҷой доранд

Леммаи 5. *Агар $q(z)$ дар ҳамвории васеъ кардашудаи E функсияи бефосила бошад ва $|q(z)| \leq q_0 < 1$, пас дар фазои $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ баробарии зерин ҷой дорад*

$$(S^E_q \overline{S}^E_q f)(z) = \frac{1}{1 - |q(z)|^2}((If)(z)) + q(z)(S^E_q f)(z) + \overline{q(z)}(\overline{S}^E_q f)(z)) + T, \tag{23}$$

ки ин ҷо T – оператори пурра бефосила мебошад.

Леммаи 6. *Агар $q(z)$ дар ҳамвории васеъ кардашудаи E функсияи бефосила бошад ва $|q(z)| \leq q_0 < 1$, пас дар фазои $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ оператори*

$$M = I + qS^E_q + \overline{q}\overline{S}^E_q, \tag{24}$$

дорои регуляризатори чап ва рост аст

$$R = \frac{1}{1-|q|^2}(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E), \tag{25}$$

ва дар ҳолати $q = const$, оператори R оператори баръакси чапу рост барои оператори додашудаи M мебошад

Леммаи 7. *Агар $a(z), b(z)$ функсияҳои бефосила дар ҳамвории E бошанд ва агар шарти $|a(z)| + |b(z)| < 1$ ҳангоми $\forall z \in E$, иҷро шавад, пас оператори*

$$N = I + aS^E + b\overline{S}^E, \tag{26}$$

дар фазои $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ регуляризатори чап ва рости зерро дорад.

$$R = \frac{1}{1+qr}(I - r\overline{S}^E_r)(I - qS^E_q), \tag{27}$$

ва дар ҳолати доимиҳои a ва b оператори R дорои оператори баръакси чап ва рост барои оператори додашудаи N мебошад, ки ин ҷо функсияҳои $q(z)$ ва $r(z)$ якҷимата аз баробариҳои

$$a = \frac{q}{1+qr},\ b = \frac{r}{1+qr}, |q(z)| < 1, \quad |r(z)| < 1, \quad \forall z \in E$$

ёфта мешаванд.

Акнун оператори A-ро аз (2)дар ҳамвории E дида мебароем ва онро дар намудии

$$A = I - \lambda S^E_q K, \qquad \lambda(z) = \frac{b(z)}{a(z)}. \tag{28}$$

менависем.

Мо нишон дода будем, ки ҳангоми иҷроиши шарти $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|, \forall z \in E$ оператори A дар фазои $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ дорои оператори баръакс аст.

Чунин тасдиқот ҷой дорад.

Теоремаи 5. *Бигузор шарти* $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|, \forall z \in E.$ *иҷро шавад, пас оператори* A *аз (28) дар фазои* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ *регуляризатори рост ва чапи намуди*

$$R = \nu(I + \overline{\mu}\overline{S}^E_\mu)(I + \mu S^E_\mu)(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E)(I + \lambda S^E_q K), \qquad (29)$$

-ро дорад, ки ин ҷо $\nu = \frac{1+|q|^2-|\lambda|^2}{1+|\mu|^2}$, $|\mu(z)| < 1$ *ва функсияи* μ *аз баробарии* $\frac{\mu}{1+|\mu|^2} = \frac{q}{1+|q|^2-|\lambda|^2}$ *бо ягона тарз ёфта мешавад. Дар ҳолате, ки* $\lambda(z) \equiv const.$ *аст, пас оператори (28) оператори баръакси рост ва чап барои оператори* A *аз (29) мебошад*

Интишороти муаллиф оид ба мавзӯи диссертатсия

Дар нашрияҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти ҶТ:

1. Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2013. Т.56, №1. с.10-17.
2. Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2014. Т.57, №7. с.556-562.
3. Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2017, №1-5, с.138-140.
4. Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечҷтными характеристиками, зависящими от полюса / Валиев Н.Г. //Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2019, №2, с.212-221.

Дар дигар нашрияҳо:

5. Валиев Н.Г. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //Материалы международной научной конференции,"Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений"(Душанбе, 17-18 июня 2013 г.) с.39-41.
6. Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еҷ преподавания посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, г. 2(150).) с.150-152.
7. Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 29-30 октября 2015г.) с.167-170.

8. Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса[Текст]/ Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еёприложений"(Душанбе, 3-4 июня 2016г.) с.12-14.
9. Валиев Н.Г. Двумерные сингулярные интегральные операторы с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций"(Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) с.50-52.
10. Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса / Валиев Н.Г., Ёгибеков Б.Ш. //Материалы республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложения"(Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) с.40-44.

РЕЗЮМЕ
диссертации Валиева Наджиба Гуломамадовича на тему "Некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы с характеристиками, зависящими от полюса" представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, символ оператора, индекс оператора, нётеровость оператора.

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работой является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлина-Кальдерона-Зигмунда

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2}$$

где D – ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Интегральные уравнения с операторами S_q, где $q = 0$ встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (Векуа И.Н.), теории квазиконформных отображений (Альфорс Л., Шиффер М.), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Боярский Б., Джураев А.Д., Монахов В.Н.) и других.

Впервые такие уравнения рассматривал Векуа И.Н. методом сжимающих отображений. Джураев А.Д. исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. Комяком И.И. и Василевским Н.Н. были применены при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Дудучавой Р. L_p - теория, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем, где $1 < p < \infty$, даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее- к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Джангибекова Г., Бойматова К.Х. и Джангибекова Г. и других.

Во всех вышеуказанных работах сингулярный интеграл S_q был исследован, если $q = 0$. Что касается случая $q \neq 0$, то впервые оператор S_q был введён в работе Манджавидзе Г.Ф. а Джангибековым Г. и Мамадкаримовой М. было показано, что оператор при $q < 1$ обратим.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с непрерывными коэффициентами и с характеристиками, зависящими от полюса.

Цель работы. Цель диссертационной работы – исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с непрерывными коэффициентами и с характеристиками, зависящими от полюса.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также формула для подсчёта индекса для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

2. получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора для некоторых четырёхкомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

3. получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса, для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

4. найдены левые и правые регуляризаторы некоторых сингулярных операторов нового типа на расширенной плоскости;

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить фундаментом для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Практическая значимость работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Метод исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также метода факторизации матриц-функций.

RESUME

of the dissertation of Valiev Najib Gulomamadovich on the theme "Some two-dimensional singular integral operators with characteristics depending on the pole,"submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 – real, complex and functional analysis.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, operator index, operator Noetherianness.

Relevance of the research theme. The main object of this dissertation is the two-dimensional singular integral Mikhlin-Calderon-Zygmund operator acting in Lebesgue function space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$,

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2}.$$

Where D is a bounded region of the complex plane, the boundary of which consists of a finite number of simple closed Lyapunov curves Γ that do not intersect each other. The integral is understood in the sense of the main Cauchy value.

Integral equations with operators S_q when $q = 0$ occur in many problems of the theory of generalized analytic of functions (Vekua I.N.) theories of quasiconformal mappings (Alfors L., Schiffer M.), theories partial differential equations (Boyarsky B., Juraev A.D., Monakhov V.N.) and others.

For the first time such equations considered Vekua I.N. by the method of compressing mappings. A.D. Juraev investigated two-dimensional singular integral equations in the spaces $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ using the reduction to boundary value problems for general analytic functions. Komyak I.I. and Vasilevsky N.N. applied when studying two-dimensional equations in spaces $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ methods of the theory of Banach algebras.

Developed by Duducha R.V. L_p - theory, where $1 < p < \infty$, multidimensional singular integral equations on varieties with a margin yes opportunity to reduce research properties of the equations containing the operators S_m and their various combinations, to factoring the corresponding rational matrix functions, more precisely, to finding their partial indices. It is of interest to establish the criterion of Notherian considered two-dimensional singular integral equation in form of explicit conditions on its coefficients. For a wide class the integral of the singular equations is done in the works Jangibekov G., Boymatov K.Kh. and Jangibekov G. and others.

In all the above papers, the singular integral S_q was investigated when $q = 0$. what For the case of $q \neq 0$,, the operator S_q was first introduced in Manjavidze G.F. and in the work of Jangibekov G., Mamadkarimova M.

This dissertation is devoted to the study of the Notherian properties of two-dimensional singular integral operators on a bounded domain with characteristic dependent on poles and with continuous coefficients.

The purpose of the work. The aim of the dissertation is to study the question of the solvability of certain classes of two-dimensional singular integral operators on a bounded domain with pole-dependent characteristics and with continuous coefficients.

Scientific novelty. The results for the defense are new and are as follows:

1. found the effective necessary and sufficient conditions for Notherianess and obtained a formula for calculating the index for a class of two-dimensional singular integral operators with characteristics that depend on a pole over a bounded region in weighted Lebesgue spaces;

2. obtained necessary and sufficient conditions for Notherianess, and also given formulas for calculating the operator index for some fourcomponent classes of two-dimensional singular integral operators with characteristics depending on a pole over a bounded region in weight Lebesgue spaces;

3. obtained the necessary and sufficient conditions for the Notherianess and formula for the computation of the index, for some classes of two-dimensional singular integral operators with none total characteristics, depending on the pole over a bounded region in weight weighted spaces;

4. found the left and right regularises of some singular new type operators on the extended plane;

Theoretical and practical significance of the work. The results obtained in the thesis are of a theoretical nature. They can serve as a foundation for further theoretical studies in the theory of boundary value problems for partial differential equations.

The practical value of the work is determined by the applied significance of singular integral equations in solving applied problems. ŕproblems of mechanics and other branches of physics.

Research Method. The method used in the thesis is based on the elements of functional analysis and the theory of complex functions variables as well as the method of factorization of matrix functions.