РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Захурбеков Алишер

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии (PhD) — доктор по специальности 6D060100 —
Математика: 6D060101 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2024

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Шабозов Мирганд Шабозович**,
академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Каримов Олимджон Худойбердиевич,**
доктор физико-математических наук, заместитель директора по науке и образованию Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Туйчиев Анваржон Махмуджонович,
доктор философии (PhD) по специальности 6D060100-Математика: 6D060101 -Вещественный, комплексный и функциональный анализ, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова

Ведущая организация: Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

Защита состоится *19 февраля 2025 г. в 14:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2025 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 6D.КОА-011,
кандидат физико-математических наук **А.Б. Гафоров**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Работа посвящена некоторым вопросам приближения функции многих переменных суммами Фурье по различным ортогональным системам.

Известно, что скорость сходимости ряда Фурье зависит от структурных свойств функции и установление связи между структурными свойствами функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье было и остается одной из интересных задач математического анализа. Основополагающие работы в этом направлении были выполнены Д.Джексоном, С.Н.Бернштейном, Ш.Валле-Пуссеном. Дальнейшее развитие эти работы получили в исследованиях А.Зигмунда, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.Ф.Тимана, В.К.Дзядыка, Н.П.Корнейчука, В.М.Тихомирова, М.К.Потапова и др. В вопросах, связанных с оценкой скорости сходимости рядов Фурье на тех или иных классах функций, весьма удобной характеристикой оказалась величина, равная точной верхней грани уклонения частичных сумм ряда Фурье на рассматриваемых классах функций в той или иной метрике. Она была введена в 1935 году А.Н.Колмогоровым, который установил асимптотически точную оценку скорости сходимости тригонометрического ряда Фурье на классе r-раз дифференцируемых 2π-периодических функций в равномерной метрике. Впоследствии эта задача была обобщена в различных направлениях. Наиболее полные и интересные результаты здесь были получены в работах С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.В.Ефимова, С.А.Теляковского. Сама задача, суть которой состоит в отыскании точных равенств для верхней грани уклонений тригонометрическими или алгебраическими полиномами, порожденных данным линейным методом на заданном классе функций, называется задачей Колмогорова–Никольского.

В настоящее время большая часть вопросов, относящихся к проблемам оценок скорости сходимости одномерных рядов Фурье, достаточно хорошо изучена. Хотя и здесь остались и будут возникать в дальнейшем важные задачи, требующие своего решения. Что же касается многомерного случая, то здесь картина намного хуже в том смысле, что точные результаты получены в редких случаях.

Отыскание точного значения величины наилучшего приближения для скорости сходимости кратных рядов Фурье по специальным функциям на тех или иных классах функций многих переменных в различных функциональных пространствах с весом сводится к исследованию величины, равной точной верхней грани уклонения частичных сумм ряда Фурье на рассматриваемом классе. Так как, в отличие от одномерных рядов Фурье, здесь нет естественного способа построения частичных сумм, то мы сначала фиксируем некоторый класс функций, а затем построим частичные суммы кратного ряда Фурье так, чтобы величина наилучшего приближения была минимально возможной.

Ответить на эти вопросы можно только разобравшись в общих вопросах аппроксимации бесконечномерных функциональных компактов конечномерными. К настоящему времени имеется развитый аппарат теории поперечников бесконечномерных компактов и нахождению точных значений n-поперечников различных классов функций в различных линейных нормированных пространствах посвящено достаточно много работ, но точное значение поперечников классов функций многих переменных крайне мало. Этим объясняется актуальность выбранной тематики.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в решение экстремальных задач теории приближения функций двух переменных тригонометрическими и алгебраическими полиномами и вопросов нахождения точных констант в неравенствах Джексона–Стечкина внесли С.М.Никольский, А.Ф.Тиман, М.К.Потапов, Н.П.Корнейчук, В.К.Дзядык, А.И.Степанец, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов и многим другим.

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач для двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$, $Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$;

- найти наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье;
- найти точные значения различных поперечников в $L_2^{(r)}(Q)$.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближение функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- найдено наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье;
- найдены точные значения поперечников различных классов функций.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в других экстремальных задачах теории приближения функций многих переменных, как в конечных областях, так и во всей плоскости.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающего также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе "Научная новизна", получены лично автором.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанного в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о нахождении верхних граней наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- теоремы о наилучшем совместном приближении функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье.
- теоремы о точных значениях поперечников.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2024 гг.);
- республиканской научно-практической конференции “*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*” (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- международной конференции “*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*” (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции “*Современные проблемы математического анализа и теории функций*” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции “*Комплексный анализ и его приложения*” (Бохтар, 19 ноября 2022 г.);
- международной конференции “*Современные проблемы математики*” (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);
- международной научно-практической конференции “*Современные проблемы математики и её преподавания*” (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 12 научных работах, из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 6 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 52 наименований, занимает 102 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы, следствия или формулы в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Материал исследования составляют решения ряда экстремальных задач теории наилучших приближений кратных рядов Фурье по различным ортогональным системам функции. При получении основных результатов используются новейшие методы функционального анализа и методы решения экстремальных задач.

Результаты исследования. Приводим краткое изложение результатов глав диссертационной работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена анализу литературных источников по теме диссертационной работы и постановке нерешенных экстремальных задач по данной проблематике.

Во второй главе найдены точные оценки наилучших приближений функций “треугольными”, “гиперболическими”, “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам функций на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором обобщённого сдвига.

Обозначим через $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^l_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{R}$ с неотрицательным суммируемым на $G^l_{\boldsymbol{t}}$ весом $h(\boldsymbol{t})$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^l_t} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}\right)^{1/2},$$

$$\left(\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_k) \subset G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l, k \geq 1, l \in \mathbb{N}\right).$$

Мы будем предполагать, что весовая функция $h(\boldsymbol{t})$ и область $G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l$ таковы, что в пространстве $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ существует полная ортонормированная система функций.

Пусть далее

$$u_i(\boldsymbol{x}),\ i=0,1,2,\ldots;\ v_j(\boldsymbol{y}),\ j=0,1,2,\ldots;$$

– полные ортонормированные системы функций соответственно в пространствах $L_2(G^m_{\boldsymbol{x}}; p(\boldsymbol{x}))$ и $L_2(G^n_{\boldsymbol{y}}; q(\boldsymbol{y}))$ (существование таких систем мы заранее предполагаем).

Через $L_2 := L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ обозначим пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^{m+n}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \to \mathbb{R}$ с весом $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\right)^{1/2},$$

$$G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = G^m_{\boldsymbol{x}} \times G^n_{\boldsymbol{y}} :=$$

$$:= \Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in G^m_{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{y} \in G^n_{\boldsymbol{y}}; \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big\}.$$

Известно, что система функций

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots$$

будет полной ортонормированной системой [1] в пространстве L_2.

Пусть $f \in L_2$ и

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), \tag{1}$$

где

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

— её ряд Фурье,

$$S^{(1)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$S^{(2)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} c_{00}(f)u_0(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{y}), & N=1, \\ \sum\limits_{0<\bar{i}\cdot\bar{j}<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), & N=2,3,\ldots, \end{cases}$$

[1] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования, 2018, т.124, №4, с.17–29.

$$S_N^{(3)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

где $\overline{k} = \max(1,k)$, $k = 0,1,\ldots$ соответственно “треугольные”, “гиперболические”, “сферические” частичные суммы ряда Фурье (1).

Известно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2(f). \tag{2}$$

Через

$$E_N^{(k)}(f) = \inf_{P_N^{(k)}} \|f - P_N^{(k)}\| \quad (k = 1,2,3) \tag{3}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ полиномами вида

$$P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$P_N^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} u_{00}(f)u_0(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{y}), & N = 1,\\ \displaystyle\sum_{0<\overline{i}\cdot\overline{j}<N} u_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), & N = 2,3,\ldots, \end{cases}$$

$$P_N^{(3)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

где, как и выше, $\overline{k} = \max(1,k)$, $k = 0,1,\ldots$.

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};h) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta})h^{i+j},$$

где $h \in (0,1)$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta}) \in G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n$ и равенство здесь понимается в смысле сходимости в евклидовой топологии, то есть в топологии пространства

$$L_2\big((G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m) \times (G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n);\ p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{\eta})\big)$$

(последнее обозначение очевидно).

Известно[2], что в ряде частных случаев для

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\boldsymbol{x})u_n(\boldsymbol{y})h^n,$$

[2] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.

$$(0 < h < 1,\ G^1_{\boldsymbol{x}} = G^1_{\boldsymbol{y}} = (a,b) \subset \mathbb{R})$$

можно указать и явные выражения.

В пространстве $L_2 = L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ рассмотрим следующий оператор

$$\mathscr{F}_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{\xi\eta}}} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \int\limits_{G^m_{\boldsymbol{\xi}}}\int\limits_{G^n_{\boldsymbol{\eta}}} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}, \qquad (4)$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига. Указанный оператор обладает следующими простыми свойствами [3]:

1) $\mathscr{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{F}_h f + \mu\mathscr{F}_h g, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}, f, g \in L_2$;

2) $\|\mathscr{F}_h\| \le \|f\|$; 3) $\mathscr{F}_h(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})) = (1-h)^{i+j}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$;

4) $\|\mathscr{F}_h - f\| \to 0, h \to 0+$.

В первом параграфе второй главы найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных частичными суммами Фурье по произвольным ортогональным системам функций на некоторых классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым оператором обобщённого сдвига.

В ряде работ[4,5,] изучается вопрос нахождения точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по различным ортогональным системам функций одной переменной. Для функций многих переменных аналогичные вопросы менее изучены и в отличие от одномерного случая, для двойных рядов нет естественного способа построения частичных сумм, а потому вводят в рассмотрение различные методы приближения — “треугольные”, “гиперболические”, “сферические” и другие частичные суммы, которые позволяют найти точные оценки скорости сходимости наилучших приближений на соответствующих классах функций. При этом существенную роль играют операторы обобщенного сдвига и порожденый ими обобщенный модуль непрерывности, которым определяются классы функций.

[3]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$ // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.

[4]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$. –Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966–980.

[5]Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$.– Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.2001–2002.

Пользуясь оператором (4) в первом параграфе второй главы вводится в рассмотрение явный вид модуля непрерывности k-го ($k \in \mathbb{N}$) порядка

$$\Omega_k^2(f,\delta)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i+j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

и доказано общее утверждение для наилучшего приближения "треугольными" частичными суммами вида

$$S_N^{(1)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

Сформулируем основные результаты данного параграфа.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *Пусть* $k,N\in\mathbb{N}, 0<q\le\infty, 0<h<1, \varphi(t)\ge 0$ – *суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (5)$$

Существует функция $f_0\in L_2$, *для которой реализуется верхняя грань в* (5).

Из теоремы 2.1.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 2.1.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.1.1. *Положим* $\varphi(t):=\varphi_0(t)=N(1-t)^{N-1}, N\in\mathbb{N}, 0<h<1$. *Тогда из* (5) *следует экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^N\right]^{k+1/q}}. \qquad (6)$$

В частности, полагая в (6) $h=1/N, N\in\mathbb{N}, q=1/k, k\in\mathbb{N}$, *будем иметь*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{2^k}{\left(1-(1-1/N)^N\right)^{2k}}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E_N^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N}\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{\Big(1-(1-1/N)^N\Big)^{2k}}=\frac{2^k}{\Big(1-e^{-1}\Big)^{2k}},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

В работе Э.В.Селимханова[1] доказано, что при любых $k, N \in \mathbb{N}$ для произвольной функции $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^{(1)}(f)\le(N+1)^k\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}}\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k \tag{7}$$

и при каждом фиксированном $N \in \mathbb{N}$ константу в правой части (7) уменьшить нельзя. В следующем следствии вытекающем из теоремы 1.1.1, получен более общий результат, чем (7).

Следствие 2.1.2. *Если в условиях теоремы* 2.1.1 *полагать* $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) \equiv 1$, *то получаем*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k}=\left(h-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\Big(1-h\Big)^{N+1}\right)^{-k}. \tag{8}$$

Полагая в (8) $h = 1/(N+1)$, *получаем равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^k}=(N+1)^k\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^k}=\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

Переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, приходим к равенству

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k}=\sup_{N\in\mathbb{N}}\Big(1-\frac{1}{N+1}\Big)^{-k(N+1)}=e^k.$$

Во втором параграфе второй главы вычислены точные значения ряда известных n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых мажорантой функцией Φ.

Пользуясь результатами теоремы 2.1.1 и её следствий в третьем параграфе второй главы для класса $W_q(\Omega_k, \varphi, h)$ найдены точные значения всех рассматриваемых поперечников.

Четвёртый параграф второй главы посвящен вычислению верхних граней наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам. В данном параграфе мы продолжаем исследование по данной тематике и изучаем вопрос нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений “гиперболическими” частными суммами Фурье функций многих переменных по произвольным многомерным ортогональным системам.

Данный вопрос частично изучен в ряде работ В.А.Абилова и М.К.Керимова[6], В.А.Абилова, М.В.Абилова и М.К.Керимова[7], В.А.Абилова, Г.А.Айгунова[8], В.А.Абилова, Ф.В.Абилова, М.К.Керимова [9] а также в работах С.Б.Вакарчука и А.Швачко[10], М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева [11], М.О.Акобиршоева[12] и многих других.

[6]Абилов В.А., Керимов М.К.. Точные оценки скорости сходимости “гиперболических” частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т.52, №11, с.1052–1058.

[7]Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К..Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109–1117.

[8]Абилов В.А., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$.– Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.2001-2002.

[9]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$. –Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.

[10]Вакарчук С.Б., Швачко А. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точные значения поперечников классов функций.– Укр. матем. журнал, 2015, т.65, №9, с.1013-1027.

[11]Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2. Чебышевский сб., 2019, т.20, №2, с.348-365

[12]Акобиршоев М. О. Среднеквадратическое приближение “углом” в пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ с весом Чебышева-Эрмита. Изв. вузов. Матем., 2021, т.65, №9, с.3-12

Сначала вводится модуль непрерывности k-го порядка, имеющий вид:

$$\Omega_k^2(f,\delta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i\cdot j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

и доказана следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $k, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$, $h \in (0, 1/4)$, $0 < q \leq \infty$, $\varphi(t) \geq 0$ *– суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$, $h \in (0, 1/4)$ *функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{9}$$

При этом существует функция $f_1 \in L_2$, *для которой при каждом значении* $N = 4, 9, 16, \ldots$ *неравенство* (9) *обращается в равенство.*

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.1 *в случае* $\varphi(t) := \varphi_1(t) = 2\sqrt{N}(1-t)^{2\sqrt{N}-1}$, $N = 4, 9, 16, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi_1(t)dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/k}}{\left[1-(1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{k+1/q}}.$$

Следствие 2.4.2. *В условиях теоремы* 2.4.1 при $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) \equiv 1$, $N = 4, 9, 16, \ldots$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^{k}} = \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k}. \tag{10}$$

Из (10) для произвольной функции $f \in L_2$ получаем неравенство

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \leq \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k}\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^{k},$$

из которого в частности при $h = \left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}$ получаем результат, доказанный ранее Э.В.Селимхановым[1].

В пятом параграфе второй главы найдено наилучшее среднеквадратическое приближение функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам.

В этом случае модуль непрерывности k-го порядка имеет вид

$$\Omega_k^2(f,t)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c_{ij}^2(f).$$

Основным результатом пятого параграфа второй главы является

Теорема 2.5.2. *При любых $k, N \in \mathbb{N}$, $0 < q \le \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(t) \ge 0$ – суммируемая на $(0,h]$ функция имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{11}$$

Приводим некоторые утверждения, вытекающие из теоремы 2.5.2.

Следствие 2.5.2. *В условиях теоремы* 2.5.2 *при* $\mu(t) := \mu_0(t) = N^2(1-t)^{N^2-1}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k+1/q}}. \tag{12}$$

В частности при $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ из (12) *следует равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}} = \frac{2^k}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k}}. \tag{13}$$

Из (13), *в свою очередь, вытекает, что*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^{N^{-2}} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}} = \sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{\left[1-\left(1-1/N^2\right)^{N^2}\right]^{2k}} = 2^k\left(1-e^{-1}\right)^{-2k}. \tag{14}$$

Третья глава диссертации посвящена нахождению точных верхних граней наилучших приближений некоторых периодических классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве L_2. Также найдены точные константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина между наилучшими приближениями и обобщенным модулем непрерывности в L_2. Эти вопросы для функции одного переменного достаточно хорошо изучены[13]. Аналогичные вопросы для функции двух переменных менее изучены.

В первом параграфе третьей главы изучается вопрос нахождения точной оценки верхней грани наилучших приближений периодических классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$. Напомним, что $L_2 := L_2(Q), Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \to \mathbb{R}$ двух переменных, 2π-периодических по каждой из переменных с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f^2(x,y)dxdy \right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} c_{kl}(f)e^{i(kx+ly)}, \tag{15}$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что применением тождества Парсеваля из равенство (15) получаем

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|c_{k,l}(f)\right|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \rho_{k,l}^2(f),$$

где

$$\rho_{k,l}^2(f) = \left|c_{k,l}(f)\right|^2 + \left|c_{-k,l}(f)\right|^2 + \left|c_{k,-l}(f)\right|^2 + \left|c_{-k,-l}(f)\right|^2. \tag{16}$$

[13]Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве L_2. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т.56, №5, с.730–741.

Для произвольной $R \in \mathbb{N}$ через

$$S_R(f;x,y) = \sum_{0 \le k^2+l^2 < R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \tag{17}$$

обозначим "круговые" частичные суммы функции $f \in L_2$. Если через $\mathscr{P}_R, R \in \mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_R(x,y) = \sum_{0 \le k^2+l^2 < R^2} a_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно, что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ элементами $p_R \in \mathscr{P}_R$ реализует "круговая" частичная сумма (17). При этом

$$\mathscr{E}_R(f) := \inf\Big\{\|f - p_R\| : p_R \in \mathscr{P}_R\Big\} =$$

$$= \|f - S_R(f)\| = \left\{\sum_{k^2+l^2 \ge R^2} \rho_{k,l}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Пусть $\mathcal{D} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Определим $\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots$$

и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$, то есть $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Применив оператор $\mathcal{D}^r$, $r \in \mathbb{N}$ к ряду (15) в силу линейности этого оператора и легко проверяемое равенство

$$\mathcal{D}^r\big(e^{i(kx+ly)}\big) = (-1)^r (k^2+l^2)^r e^{i(kx+ly)},$$

запишем

$$\mathcal{D}^r f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) \mathcal{D}^r\big[e^{i(kx+ly)}\big] =$$

$$= (-1)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (k^2+l^2)^r c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)},$$

а отсюда в силу равенства Парсеваля и соотношения (16) запишем

$$\|\mathcal{D}^r f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 \big(k^2+l^2\big)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \big(k^2+l^2\big)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \tag{19}$$

Из формул (18) и (19) следует, что

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \ge R^2} \left(k^2+l^2\right)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{20}$$

Заметим, что при любом $s = 0, 1, \ldots, r;\ r \in \mathbb{Z}_+$ из (20) следует формула

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \ge R^2} \left(k^2+l^2\right)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{21}$$

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения

Теорема 3.1.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$, $R \in \mathbb{R}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{22}$$

Теорема 3.1.2. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r)}$ *при любых* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+, r \ge s$ *справедливо неравенство типа Колмогорова*

$$\mathscr{E}_R^2\big(\mathcal{D}^s f\big) \le \Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r} \cdot \Big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\Big)^{s/r}. \tag{23}$$

Неравенство точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Пусть теперь $W^{(r)}L_2$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\| \le 1$.

Теорема 3.1.3. *При всех* $r, s \in \mathbb{Z}_+,\quad r \ge s$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(f)\Big)^{1-s/r}} = 1. \tag{24}$$

Теорема 3.1.4. *Пусть* $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\Big(W^{(r)}L_2\Big) = \sup\Big\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) : f \in W^{(r)}L_2\Big\} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{25}$$

Во втором параграфе третьей главы приведены некоторые результаты, связанные с оптимизацией неравенства типа Джексона – Стечкина между величиной наилучшего “кругового” приближения функций $f \in L_2$ и усредненными значениями обобщенного модуля непрерывности, порожденного конкретным оператором обобщенного сдвига. Вводим в рассмотрение функцию[14]

$$T(x,u;y,v;h)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-u)}e^{il(y-v)}h^{k^2+l^2}, \tag{26}$$

где $h\in(0,1)$ и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q\times Q)$. Пользуясь функцией (26), определим оператор $\mathscr{F}_h: L_2\to L_2$ по следующей формуле

$$\mathscr{F}_h(f):=\mathscr{F}_hf(x,y)=\iint\limits_{(Q)}f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv, \tag{27}$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига. Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (27) обладает следующими свойствами:

1. $\mathscr{F}_h(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathscr{F}_h(f)+\mu\mathscr{F}_h(g),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad f,g\in L_2;$

2. $\|\mathscr{F}_h(f)\|\le\|f\|;$ 3. $\|\mathscr{F}_h(f)-f\|\to 0,\quad h\to 0+,$

4. $\mathscr{F}_h(e^{i(mx+ny)})=(1-h)^{n^2+m^2}\cdot e^{i(mx+ny)},\quad m,n\in\mathbb{Z}_+.$

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_hf=\mathscr{F}_hf-f=(\mathscr{F}_h-E)f,$$

$$\Delta_h^\nu f:=\Delta_h\big(\Delta_h^{\nu-1}f\big)=\big(\mathscr{F}_h-E\big)^\nu f=\sum_{j=0}^{\nu}(-1)^{\nu-j}\binom{\nu}{j}\mathscr{F}_h^j(f),$$

где $\mathscr{F}_h^0f=Ef=f,\quad \mathscr{F}_h^jf:=\mathscr{F}_h\big(\mathscr{F}_h^{j-1}f\big),\quad j=\overline{1,\nu};\quad \nu\in\mathbb{N}$; E – единичный оператор в пространстве L_2. Равенством

$$\Omega_\nu(f,t):=\sup\Big\{\|\Delta_h^\nu f\|:0<h\le t\Big\},\quad t\in(0,1) \tag{28}$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f\in L_2$.

Как и в предыдущих параграфах, находим явный вид модуля непрерывности

$$\Omega_\nu^2(f,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\big)^\nu\rho_{kl}^2(f). \tag{29}$$

Теорема 3.2.1. *При любых $\nu,R\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $h\in(0,1)$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^rf;h\big)}=\frac{1}{\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^\nu}. \tag{30}$$

[14] Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т. 58, №10, с. 1596–1603.

Следствие 3.2.1. *Полагая в условиях теоремы* 3.2.1, $h = 1/R^2$, $R \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f, 1/R^2\Big)}=\sup_{R\in\mathbb{N}}\left(1-\left(1-\frac{1}{R^2}\right)^{R^2}\right)^\nu=\Big(1-e^{-1}\Big)^\nu.$$

Всюду далее под весовой функцией $\mu(x)$ на отрезке $[0,1]$ понимаем неотрицательную суммируемую не эквивалентную нулю на этом же отрезке функцию.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $R,\nu\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le q\le\infty$, $h\in(0,1),\mu(x)$ — *весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{31}$$

Следствие 3.2.2. *В условиях теоремы* 3.2.2 *при* $\mu(t):=R^2(1-t)^{R^2-1}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\left\{\frac{\nu q+1}{\Big[1-(1-h)^{R^2}\Big]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h=1/R^2$ *и переходя к верхней грани по всем* $R\in\mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2}\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\frac{(\nu q+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{\nu+1/q}};$$

В третьем параграфе третьей главы найдено наилучшее совместное приближение функций $f\in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье.

В предыдущем параграфе найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2 := L_2(Q)$. Здесь полученные результаты обобщаются на случай совместного приближения функций и промежуточных частных производных "круговыми" суммами Фурье и их частными производными. Пользуясь равенством (21) и формулой

$$\Omega_\nu(D^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\Big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\Big)^\nu \big(k^2+l^2\big)^{2r}\rho_{kl}^2(f),$$

доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.3.1. *При любых $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in (0,1)$ имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big)} = \frac{1}{\big(1-(1-h)^{R^2}\big)^\nu}. \tag{32}$$

Теорема 3.3.2. *Пусть $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{33}$$

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.2 при $\mu(t) := R^2(1-t)^{R^2-1}$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} = \left\{\frac{\nu q+1}{\big[1-(1-h)^{R^2}\big]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ и переходя к верхней грани по всем $R \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(\nu q+1)^{1/q}}{\big(1-e^{-1}\big)^{\nu+1/q}}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, то имеем

$$\sup_{R\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-\nu)} \cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^{1/\nu}\big(\mathcal{D}^r f; t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^\nu} = \frac{2^\nu}{\big(1-e^{-1}\big)^{2\nu}}.$$

В теореме 3.1.2 доказано, что при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq \big(\mathscr{E}_R^2(f)\big)^{1-s/r} \cdot \big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\big)^{s/r}. \tag{34}$$

Отсюда вытекает, что помимо функций f и $\mathcal{D}^r f$ все промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ также принадлежат пространству L_2. Поэтому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором классе $\mathfrak{M}^r \subseteq Ł_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\left\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f); f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}. \tag{35}$$

Пусть $H \in (0,1)$, $1 \leq p < \infty$, $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, φ – весовая на $[0, H]$ функция. Через $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^H \Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r f; t\big)\mu(t)dt \leq 1.$$

Теорема 3.3.3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)\right) = R^{-2(r-s)}\left(\int\limits_0^H \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^\nu \mu(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{36}$$

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [1-А];
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [2-А, 3-А, 7-А,];
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [3-А, 10-А];
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$ [2-А, 4-А, 6-А, 7-А, 8-А];
- найдено наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье [5-А, 9-А, 11-А,12-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов учебных заведений по специальности "Математика" и "Прикладная математика" высших учебных заведений.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Захурбеков А. Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №5-6. – С. 275–282.

[2-А] Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №7-8. – С. 368–377.

[3-А] Захурбеков А. Верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 580–585.

[4-А] Захурбеков А. Приближение периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Известия Национальной Академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2022. – №4(189). – С. 17–25.

[5-А] Захурбеков А. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций двух переменных в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №3-4. – С. 156–161.

[6-А] Захурбеков А. О наилучших приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье [Текст] /М.Ш.Шабозов, А.Захурбеков // Известия Национальной Академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2024. – №3(189). – С. 19–39.

2. В других изданиях:

[7-А] Захурбеков А. Наилучшее приближение некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в

$L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Материалы республиканской научно-практической конференции "*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*", посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию образование кафедры информатики и вычислительной математики и "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук"(Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С. 32–35.

[8-А] Захурбеков А. О приближении периодических функций "круговыми" суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*"(Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 78–81.

[9-А] Захурбеков А. Наилучшие совместные приближения некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 68–71.

[10-А] Захурбеков А. О наилучшем приближении функций двух переменных по ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Комплексный анализ и его приложения*", посвященной "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования", 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова (Бохтар, 19 ноября 2022 г.). – С. 65–67.

[11-А] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции "*Современные проблемы математики*" (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С. 70–73.

[12-А] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Современные проблемы математики и её преподавания*" (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 39–41.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Заҳурбеков Алишер

МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛИИ НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯҲОИ БИСЁРТАҒЙИРЁБАНДА БО ЁРИИ СУММАҲОИ ФУРЙЕ АЗ РУИ СИСТЕМАҲОИ ОРТОГОНАЛИИ ИХТИЁРӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе — 2024

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Шабозов Мирганд Шабозович**, академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муқарризони расмӣ: **Каримов Олимҷон Худойбердиевич,** доктори илмҳои физикаю математика, ҷонишини директор оид ба илм ва таьлими Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Туйчиев Анваржон Маҳмуҷонович, доктори фалсафа (PhD) аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ, муаллими калони кафедраи алгебра ва геометрияи Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Ғафуров

Муассисаи пешбар Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Ҳимоя *19-уми феврали соли 2025 соати 14:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6Д.КОА–011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз руйи нишонии 734027, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш.Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «______» «__________________» соли 2025 аз руи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои
диссертатсионии 6D.КОА-011,
номзади илмҳои физикаю математика **Ғафоров А.Б.**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммият ва дараҷаи рушди мавзуи тадқиқот. Диссертатсия ба баъзе масъалаҳои наздиккунии функсияҳои якчандтағйирёбанда бо ёрии суммаҳои Фурйе аз руи системаҳои гуногуни ортогоналӣ бахшида шудааст.

Ошкор аст, ки суръати наздикшавии қатори Фурйе аз хосияти структурии функсия ва барқароркунии вобастагӣ байни хосиятҳои структурии функсия ва суръати наздикшавии қатори Фурйеи он яке аз масъалаҳои ҷолиби таҳлили математикӣ буд ва мемонад. Корҳои бунёдиро дар ин самт Д.Ҷексон, С.Н.Бернштейн ва Ш.Валле-Пуссен анҷом дода буданд. Инкишофи минбаъдаи ин корҳо дар тадқиқотҳои А.Зигмунд, С.М.Никольский, С.Б.Стечкин, А.Ф.Тиман, В.К.Дзядык, Н.П.Корнейчук, В.М.Тихомиров, М.К.Потапов ва дигарон ба даст оварда шудаанд. Дар масъалаҳое, ки ба баҳодиҳии суръати наздикшавии қаторҳои Фурйе дар ин ё он синфи функсияҳо вобастаанд, характеристикаи ниҳоят қулай ин бузургие мебошад, ки ба сарҳади аниқи болоии тамоили суммаҳои хусусии қатори Фурйе дар синфи функсияҳои дидабаромадашаванда дар ин ё он метрика баробар мешуд. Ин бузургӣ соли 1935 аз ҷониби А.Н.Колмогоров ворид карда шуд, ки мавсуф баҳои аниқи асимптотикии суръати наздикшавии қатори тригонометрии Фурйеро барои синфи функсияҳои 2π-даврии r-маротиба дифференсиронидашаванда дар метрикаи мунтазам муқаррар намуда буд. Дар оянда ин масъала дар самтҳои гуногун умумӣ карда шуд. Маълумоти пурра ва ҷолибтарин дар ин ҷо дар корҳои С.М.Николский, С.Б.Стечкин, А.В.Ефимова ва С.А.Теляковский ба даст омад. Худи масъала, ки моҳияти он дар ёфтани баробарии аниқ барои тамоили сарҳади болоии бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ё алгебравӣ, ки бо усули хаттӣ интихобшуда дар синфи функсияҳои додашуда ба вуҷуд омадаанд, бо номи масъалаи Колмогоров–Никольский маъруф аст.

Дар айни замон аксарияти масъалахое, ки ба проблемаҳои баходихии суръати наздикшавии қаторҳои якченакаи Фурье алокамананданд, хеле хуб омӯхта шудаанд. Аммо дар ин ҷо баъзе масъалаҳои муҳим боқӣ мондаанд ва дар оянда ҳам масъалаҳои муҳими дигаре, ки ҳалли худро талаб мекунанд, пайдо хоҳанд шуд. Дар ҳолати бисёрченака бошад, манзара дар ин ҷо дигархелтар аст, зеро ки натиҷаҳои аниқ танҳо дар ҳолатҳои кам ба даст омадаанд.

Ёфтани қимати аниқи бузургии наздиккунии беҳтарин барои суръати наздикшавии қаторҳои каратии Фурйе аз руи функсияҳои махсус дар он ё дигар синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда дар фазоҳои гуногуни функсионалӣ аз руи вазн ба тадқиқи бузургӣ, ки ба сарҳади аниқи болоии тамоили суммаҳои хусусии қатори Фурйе дар синфи дидабаромадашаванда баробар аст, оварда мерасонад. Азбаски, бар хилофи қаторҳои якченакаи Фурйе, дар ин ҷо усули соддаи тартиб додани суммаҳои хусусӣ вуҷуд надорад, бинобар ин ягон синфи функсияро қайд намуда, суммаҳои каратии қатори Фурйеро чунон тартиб медиҳем, ки бузургии наздиккунии беҳтарин ҳадди аққал хурдтарин бошад.

Ҷавоб додан ба ин саволҳо танҳо пас аз тадқиқи масъалаҳои умумии апроксиматсияи функсионалҳои бисёрченакаи компактӣ бо функсияҳои охирченака имконпазир аст. Айни ҳол аппарати инкишофёфтаи назарияи қутрҳои компактҳо ва ба ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳо дар фазоҳои хаттии нормиронидашудаи гуногун корҳои зиёде бахшида шудаанд, аммо қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда то ҳадде хеле кам аст. Муҳиммият ва дараҷаи рушди мавзуи интихобшуда дар ҳамин шарҳ дода мешавад.

Дараҷаи коркарда баромадани мавзӯи тадқиқот. Дар ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои дутағйирёбанда тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ва алгебравӣ ва масъалаҳои ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробариҳои Ҷексон–Стечкин саҳми назаррасро С.М.Никольский, А.Ф.Тиман, М.К.Потапов, Н.П.Корнейчук, В.К.Дзядык, А.И.Степанетс, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов ва дигарон гузоштаанд.

Мақсади тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз ҳалли масъалаҳои экстремалӣ барои қаторҳои дукаратаи Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ дар синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда, ки ба воситаи модули бефосилагӣ тавсиф дода мешаванд, иборат мебошад.

Масъалаҳои тадқиқот. Дар асоси мақсади гузоштапшуда, масъалаҳои зерин дида баромада мешаванд:

- ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои «секунҷавии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ;
- ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ;
- ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ;
- ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ ба воситаи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$, $Q := \{(x, y) : 0 \le x, y \le 2\pi\}$;
- ёфтани наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе;

- ёфтани қимати аниқи қутрҳои гуногун дар $L_2^{(r)}(Q)$.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин гирифта шудаанд:

- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои «секунҷавии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ ба воситаи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$ ёфта шудааст;
- наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе ёфта шудааст;
- қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳои гуногун ҳисоб карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалии тадқиқот. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошанд. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва усулҳои исботи онҳоро дар дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағирёбанда, чи дар соҳаи охирнок ва чи дар тамоми ҳамворӣ истифода бурдан мумкин аст.

Саҳми шахсии унвонҷӯи дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои тадқиқот ва интихоби усули исботро роҳбари илмӣ пешниҳод намудаст ва инчунин ёрии машваратӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар банди «Навигарии илмӣ» оварда шудааст, шахсан ба муаллифи кор тааллуқ доранд.

Мувофиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз руи ихтисоси 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ иҷро карда шуда, боби таҳлили математикии дар банди III-и фасли 3-уми шиносномаи ихтисоси илмӣ нишондодаро ташкил медиҳад.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳо оид ба ёфтани сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои «секунҷавии» Фурйе аз руи системаи ортогоналии ихтиёрӣ;

- теоремаҳо оид ба ёфтани сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболикии» Фурйе аз руи системаи ортогоналии ихтиёрӣ;
- теоремаҳо оид ба ёфтани сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи системаи ортогоналии ихтиёрӣ;
- теоремаҳо оид ба ёфтани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ ба воситаи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$;
- теоремаҳо оид ба наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе;
- теоремаҳо оид ба қимати қутрҳо.

Тасвиби натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, таҳти роҳбарии академики АМИТ, профессор М.Ш.Шабозов (Душанбе, солҳои 2019-2024);
- конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалии "Муаммоҳои муосири математикаи амалӣ ва аҳамияти он дар ташаккулёбии ҷаҳонбинии техникии ҷомеа" (Хуҷанд, 29-30 октябри соли 2021);
- конференсияи байналмилалии «Проблемаҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ» (Душанбе, 29-30 апрели соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Проблемаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо» (Душанбе, 24-25 июни соли 2022);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Анализи комплексӣ ва татбиқи он» (Бохтар, 19 ноябри соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Проблемаҳои муосири математикӣ» (Душанбе, 26-27 майи соли 2023 г.);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии «Муаммоҳои муосири математика ва таълими он» (Хуҷанд, 21-22 июни соли 2024).

Интишорот аз руи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои кори муаллиф аз руи мавзуи диссертатсия дар 12 кори илмӣ, ки аз онҳо 6 мақола дар нашрияҳои тақризшавандаи дар рӯйихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон мавҷуда ва 6 мақола дар маводҳои конференсияҳои байналминалӣ дарҷ гардидааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 44 номгӯй ва ҳамагӣ 102 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

МУҲТАВОИ АСОСИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мавод ва усулҳои тадқиқот. Маводи тадқиқот аз ҳалли масъалаҳои мухталифи экстремалии назарияи наздиккунии қаторҳои каратии Фурйе аз руи системаи функсияҳои ортогоналии гуногун иборат мебошад. Ҳангоми гирифтани натиҷаҳои асосӣ усулҳои навтарини таҳлили функсионалӣ ва усули ҳалли масъалаҳои экстремалӣ истифода бурда мешаванд.

Натиҷаҳои тадқиқот. Натиҷаҳои мухтасари бобҳои кори диссертатсиониро меорем.

Боби якуми кори диссертатсионӣ ба таҳлили сарчашмаи адабиётҳои ба мавзуи рисола тааллуқ дошта ва гузориши масъалаҳои экстремалии ҳалнашуда оид ба мавзуи мазкур бахшида шудааст.

Дар боби дуюм баҳои аниқи наздиккунии беҳтарин ба воситаи суммаҳои «секунҷавӣ», «гиперболӣ» ва «сферикӣ» - и Фурйе аз руи системаи функсияҳои ортогоналии ихтиёрӣ барои синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда, ки бо модули бефосилагии умумикардашуда характеризонида шуда, бо оператори муайяни ҷаҳиши умумикардашуда тавлид меёбанд.

Ба воситаи $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ — фазои бо квадрат суммиронидашавандаи функсияҳои $f : G^l_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{R}$ бо вазни суммиронидашавандаи ғайриманфии $h(\boldsymbol{t})$ дар $G^l_{\boldsymbol{t}}$ ва нормаи

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^l_{\boldsymbol{t}}} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}\right)^{1/2},$$

$$\Big(\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_k) \subset G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l, k \geq 1, l \in \mathbb{N}\Big)$$

ишорат мекунем.

Мо фарз мекунем, функсияи вазнии $h(\boldsymbol{t})$ ва соҳаи $G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l$ тавре мебошанд, ки дар фазои $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ системаи пурраи функсияҳои ортонормиронидашуда мавҷуд мебошад.

Бигузор минбаъд

$$u_i(\boldsymbol{x}),\ i=0,1,2,\ldots;\ v_j(\boldsymbol{y}),\ j=0,1,2,\ldots$$

– системаи пурраи функсияҳои ортонормиронидашуда дар фазоҳои $L_2(G^m_{\boldsymbol{x}};p(\boldsymbol{x}))$ ва $L_2(G^n_{\boldsymbol{y}};q(\boldsymbol{y}))$ бошад (мавҷуд будани ин гуна системаҳоро пешакӣ тахмин мекунем).

Ба воситаи $L_2 := L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}};p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ фазои функсияҳои бо квадрат суммиронидашавандаи $f : G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}} \to \mathbb{R}$, вазни $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})$ ва нормаи

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\right)^{1/2},$$

$$G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = G^m_{\boldsymbol{x}} \times G^n_{\boldsymbol{y}} :=$$

$$:= \Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x}\in G^m_{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{y}\in G^n_{\boldsymbol{y}}; \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m), \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\Big\}$$

– ро ишорат мекунем.

Ошкор аст, ки системаи функсияҳои

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots$$

системаи пурраи ортонормиронидашаванда дар фазои L_2 мебошад[1].

Бигузор $f\in L_2$ ва

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), \tag{1}$$

бошад, ки дар ин ҷо

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

— қатори Фурйеи он мебошад,

$$S^{(1)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$S^{(2)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} c_{00}(f)u_0(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{y}), & N=1,\\ \sum\limits_{0<\bar{i}\cdot\bar{j}<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), & N=2,3,\ldots, \end{cases}$$

[1] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования, 2018, т.124, №4, с.17–29.

$$S_N^{(3)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

ки дар ин ҷо $\overline{k} = \max(1,k)$, $k = 0,1,\ldots$ мувофиқан суммаҳои хусусии «секунҷавӣ», «гиперболӣ» ва «сферикӣ» – и қатори Фурйе (1) мебошанд.

Ошкор аст, ки

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2(f). \tag{2}$$

Бо символи

$$E_N^{(k)}(f) = \inf_{P_N^{(k)}} \|f - P_N^{(k)}\| \quad (k = 1,2,3) \tag{3}$$

наздиккунии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ аз руи бисёраъзогиҳои намуди

$$P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$P_N^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} u_{00}(f)u_0(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{y}), & N = 1, \\ \displaystyle\sum_{0<\overline{i}\cdot\overline{j}<N} u_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), & N = 2,3,\ldots, \end{cases}$$

$$P_N^{(3)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

ишорат мекунем, ки дар ин ҷо ба монанди гузоришҳои боло, $\overline{k} = \max(1,k)$, $k = 0,1,\ldots$ аст.

Акнун функсияи намуди

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};h) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta})h^{i+j}$$

– ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $h \in (0,1)$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta}) \in G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n$ буда, аломати баробарӣ ба маънои наздикшавӣ дар топологияи евклидӣ фаҳмида мешавад, яъне дар топологияи фазои

$$L_2\big((G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m) \times (G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n);\ p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{\eta})\big)$$

фаҳмида мешавад (ишораи охирон ошкор мебошад).

Маълум аст[2], ки дар як қатор ҳолатҳои хусусӣ барои

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};h)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\boldsymbol{x})u_n(\boldsymbol{y})h^n,$$

$$(0<h<1,\ G^1_{\boldsymbol{x}}=G^1_{\boldsymbol{y}}=(a,b)\subset\mathbb{R})$$

метавон шаклҳои аниқро низ нишон дод.

Дар фазои $L_2=L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}};p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ оператори зеринро дида мебароем:

$$\mathscr{F}_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{\xi\eta}}}p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}=$$

$$=\int\limits_{G^m_{\boldsymbol{\xi}}}\int\limits_{G^n_{\boldsymbol{\eta}}}p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta},\qquad(4)$$

ки онро оператори умумии кучиш меномем. Оператори мазкур дорои хосиятҳои соддаи зерин мебошад[3]:

1) $\mathscr{F}_h(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathscr{F}_h f+\mu\mathscr{F}_h g,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}, f,g\in L_2;$

2) $\|\mathscr{F}_h\|\le\|f\|$; 3) $\mathscr{F}_h(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}))=(1-h)^{i+j}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y});$

4) $\|\mathscr{F}_h-f\|\to 0, h\to 0+.$

Дар параграфи якуми боби дуюм сарҳади аниқи болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои хусусии Фурйе аз руи системаи функсияҳои ортогоналии ихтиёрӣ барои баъзе синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда, ки бо модули бефосилагии умумикардашуда тавсиф дода шуда, бо оператори умумикардашудаи кучиш тавлид меёбанд, ёфта шудаанд.

Дар як қатор корҳои[4,5] масъалаи ёфтани баҳоҳои аниқи наздикшавии қатори Фурйе аз руи системаи функсияҳои яктағйирёбандаи ортогоналӣ дида баромада мешавад. Барои функсияҳои бисёртағйирёбанда масъалаҳои айнан хеле кам омӯхта шудаанд ва бо фарқият аз ҳолати функсияҳои яктағйирёбанда барои қатори дучанда усули маъмули сохтани суммаҳои хусусӣ мавҷуд

[2]Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.

[3]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$ // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.

[4]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$. –Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966–980.

[5]Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$.– Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.2001–2002.

намебошад, бинобар ҳамин, методҳои наздиккунии гуногун ба монанди методи «секунҷавӣ», «гиперболӣ», «сферикӣ» ва дигар суммаҳои хусусиро дида мебароянд, ки онҳо ба ёфтани баҳои аниқи суръати наздиккунии беҳтарин дар синфи функсияҳои мувофиқ имкон медиҳанд. Аз ин сабаб роли асосиро операторҳои умумикардашудаи кучиш ва модули бефосилагии умумикардашудаи тавлидшуда, ки ба воситаи синфи функсияҳо муайян карда мешаванд, мебозанд.

Оператори (4) – ро истифода бурда, дар параграфи якуми боби дуюм намуди ошкори модули бефосилагии тартиби k-ум ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Omega_k^2(f,\delta)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i+j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

ворид карда мешавад ва барои наздиккунии беҳтарин аз руи суммаҳои хусусии «секунҷавӣ»

$$S_N^{(1)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j<N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

теорема исбот карда мешавад.

Натиҷаҳои асоси ин параграфро меорем.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.1.1. *Бигузор $k,N \in \mathbb{N}, 0<q\le\infty, 0<h<1, \varphi(t)\ge 0$ – функсияи дар порчаи $[0,h]$ суммиронидашавандаи ба функсияи нулӣ эквивалент набуда бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \quad (5)$$

Функсияи $f_0 \in L_2$ мавҷуд аст, ки сарҳади болоиро дар (5) доро мешавад.

Аз теоремаи 2.1.1 якқатор хосиятҳо мебароянд.

Натиҷаи 2.1.1. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи 2.1.1 ҷой дошта бошанд. Агар $\varphi(t) := \varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}, N\in\mathbb{N}, 0<h<1$ гузорем, он гоҳ аз (5) баробарии экстремалии*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^N\right]^{k+1/q}} \quad (6)$$

мебарояд. Дар ҳолати хусусӣ, дар (6) $h = 1/N, N \in \mathbb{N}, q = 1/k, k \in \mathbb{N}$ *гузошта, меёбем:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N}\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}}=\frac{2^k}{\Bigl(1-(1-1/N)^N\Bigr)^{2k}}.$$

Аз ин ҷо, барои сарҳади болоӣ аз руи $N \in \mathbb{N}$ *ҳосил мекунем:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N}\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{\Bigl(1-(1-1/N)^N\Bigr)^{2k}}=\frac{2^k}{\Bigl(1-e^{-1}\Bigr)^{2k}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Дар кори Э.В.Селимханов[1] исбот карда шудааст, ки ҳангоми $k, N \in \mathbb{N}$ будан, барои ихтиёри функсияи $f \in L_2$ нобаробарии

$$E^{(1)}_{n-1}(f)\le(N+1)^k\Bigl(1-\frac{1}{N+1}\Bigr)^{-k(N+1)}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}}\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k \qquad (7)$$

ҷой дорад ва барои ҳар як $N \in \mathbb{N}$-и қайдкардашуда доимии дар тарафи рости (7) мавҷудбуда хурд карда намешавад.

Дар натиҷаи дуюм, ки аз теоремаи 2.1.1 мебарояд, натиҷаи умумитар нисбат ба (7) мебарояд.

Натиҷаи 2.1.2. *Агар дар шарти теоремаи* 2.1.1 $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) \equiv 1$ *гузорем, он гоҳ ҳосил мекунем:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{h}\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^{k}}=\left(h-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\Bigl(1-h\Bigr)^{N+1}\right)^{-k}. \qquad (8)$$

Дар баробарии (8) *қимати* $h = 1/(N+1)$ *– ро гузошта, меёбем:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^k}=(N+1)^k\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}$$

Аз ин баробарӣ мебарояд, ки

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^k}=\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

Дар ин ҷо ба сарҳади болӣ аз руи ҳамаи $N\in\mathbb{N}$ гузашта, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)}\Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k}=\sup_{N\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}=e^k.$$

Дар параграфи дуюми боби дуюм қимати аниқи як қатор n-қутрҳои баъзе синфи функсияҳо ҳисоб карда шудааст, ки ба воситаи мажорантаи Φ дода мешаванд.

Натиҷаҳои теоремаи 2.1.1 ва хулосаҳои онро истифода бурда, дар параграфи сеюми боби дуюм барои синфи $W_q(\Omega_k,\varphi,h)$ қимати аниқи ҳамаи қутрҳои дидабаромадашуда ёфта шудааст.

Параграфи чоруми боби дуюм ба ҳисоб кардани сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ бахшида шудааст. Дар ин параграф мо тадқиқотро дар ин мавзуъ идома дода, масъалаи ёфтани баҳои аниқи наздиккунии беҳтарини миёнаквадратӣ ба воситаи суммаҳои хусусии «гиперболикии» Фурйеи функсияҳои бисёртағйирёбанда аз руи системаи ортогоналии ихтиёрии бисёрченака меомӯзем.

Масъалаи мазкур қисман дар як қатор корҳои илмии В.А.Абилов ва М.К.Керимов[6], В.А.Абилов, М.В.Абилов ва М.К.Керимов[7],

[6] Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости "гиперболических" частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т.52, №11, с.1052–1058.

[7] Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье

В.А.Абилов, Г.А.Айгунов[8], В.А.Абилов, Ф.В.Абилов, М.К.Керимов[9] ва инчунин дар корҳои С.Б.Вакарчук ва А.Швачко[10], М.Ш.Шабозов ва М.О.Акобиршоев[11], М.О.Акобиршоев[12] ва дигарон омӯхта шудааст.

Пеш аз ҳама модули бефосилагии тартиби k-уми намуди зерин дохил карда шуда,

$$\Omega_k^2(f,\delta)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i\cdot j}\right]^{2k}c_{ij}^2(f)$$

теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор $k,N\in\mathbb{N}$, $N\geq 4$, $h\in(0,1/4)$, $0<q\leq\infty$, $\varphi(t)\geq 0$ – функсияи суммиронидашавандаи дар порчаи $[0,h]$, $h\in(0,1/4)$ ба функсияи нулӣ эквивалент набуда бошад. Он гоҳ нобаробарии*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{n-1}^{(2)}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}}\leq\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q} \tag{9}$$

ҷой дорад. Чунин функсияи $f_1\in L_2$ мавҷуд аст, ки барояш барои ҳар як қимати $N=4,9,16,\ldots$ нобаробарии (9) ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Натиҷаи 2.4.1. *Барои шартҳои теоремаи 2.4.1 ҳангоми $\varphi(t):=\varphi_1(t)=2\sqrt{N}(1-t)^{2\sqrt{N}-1}$, $N=4,9,16,\ldots$ будан, баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^q(f,t)_2\varphi_1(t)dt\right)^{1/q}}=\frac{(kq+1)^{1/k}}{\left[1-(1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{k+1/q}}.$$

по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109–1117.

[8] Абилов В.А., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$.– Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.2001-2002.

[9] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$. –Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.

[10] Вакарчук С.Б., Швачко А. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точные значения поперечников классов функций.– Укр. матем. журнал, 2015, т.65, №9, с.1013-1027.

[11] Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2. Чебышевский сб., 2019, т.20, №2, с.348-365

[12] Акобиршоев М. О. Среднеквадратическое приближение “углом” в пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ с весом Чебышева-Эрмита. Изв. вузов. Матем., 2021, т.65, №9, с.3-12

Натиҷаи 2.4.2. *Барои шартҳои теоремаи 2.4.1 ҳангоми $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) \equiv 1$, $N = 4, 9, 16, \ldots$ будан, баробарии*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k} = \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \tag{10}$$

ҷой дорад. Аз (10) *барои ихтиёри функсияи* $f \in L_2$ *нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:*

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \le \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k.$$

Аз ин ҷо барои $h = \left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}$ *натиҷаи Э.В.Селимханов*[1]*, ки пештар исбот кардааст, мебарояд.*

Дар параграфи панҷуми боби 2 наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи ихтиёри системаи функсияҳои ортогоналӣ ёфта шудааст.

Дар ин ҳолат модули бефосилагии тартиби k-ум намуди зеринро дорад:

$$\Omega_k^2(f,t)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c_{ij}^2(f).$$

Натиҷаи асосии параграфи панҷуми боби дуюм теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 2.5.2. *Барои ҳаргуна қиматҳои* $k, N \in \mathbb{N}$, $0 < q \le \infty$, $h \in (0,1)$ *ва функсияи дар* $(0,h]$ *суммиронидашаванда* $\mu(t) \ge 0$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2 \mu(t) dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq} \mu(t) dt\right)^{-1/q}. \tag{11}$$

Баъзе тасдиқотҳоеро меорем, ки аз теоремаи 2.5.2 мебароянд.

Натиҷаи 2.5.2. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.5.2 барои* $\mu(t) := \mu_0(t) = N^2(1-t)^{N^2-1}$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(3)}_{N-1}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h\Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{1/q}}=\frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k+1/q}}. \tag{12}$$

Дар ҳолати хусусӣ ҳангоми $q=1/k$, $k\in\mathbb{N}$ *будан, аз* (12) *ҳосил мекунем*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(3)}_{N-1}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}}=\frac{2^k}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k}}. \tag{13}$$

Аз баробарии (13) *дар навбати худ, мебарояд, ки*

$$\begin{gathered}\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E^{(3)}_{N-1}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^{N^{-2}}\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}}=\\ =\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{\left[1-\left(1-1/N^2\right)^{N^2}\right]^{2k}}=2^k\left(1-e^{-1}\right)^{-2k}.\end{gathered} \tag{14}$$

Боби сеюми диссертатсия ба ёфтани сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои даврии дутағйирёбанда аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда дар фазои L_2 характеризонида мешаванд, бахшида шудааст. Инчунин доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин байни наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардашуда дар фазои L_2 ёфта шудаанд. Ин масъалаҳо барои функсияҳои яктағйирёбанда дар кори[13] хеле хуб омӯхта шудаанд. Барои функсияҳои дутағйирёбанда масълаҳои айнан қариб омӯхта нашудаанд.

Дар параграфи якуми боби сеюм масъалаи ёфтани баҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои даврии дутағйирёбанда аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$ омӯхта мешавад. Қайд мекунем, ки $L_2:=L_2(Q), Q:=\left\{0\leq x,y\leq 2\pi\right\}$ – фазои функсияҳои дутағйирёбандаи бо квадрат суммиронидашавандаи 2π-даврӣ аз руи ҳар як

[13] Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве L_2. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т.56, №5, с.730–741.

тағйирёбанда бо нормаи охирноки

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f^2(x,y)dxdy \right)^{1/2}$$

мебошад.

Бигузор функсияи $f \in L_2$ ҷудокунии формали ба қатори дученакаи комплексии Фурйе

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} c_{kl}(f)e^{i(kx+ly)} \tag{15}$$

– ро дошта бошад, ки дар ин ҷо коэффисиентҳои $c_{kl}(f)$ бо баробариҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Ошкор аст, ки бо истифодаи айнияти Парсевал аз баробарии (15) ҳосил мекунем:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|c_{k,l}(f)\right|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \rho_{k,l}^2(f),$$

ки дар ин ҷо

$$\rho_{k,l}^2(f) = \left|c_{k,l}(f)\right|^2 + \left|c_{-k,l}(f)\right|^2 + \left|c_{k,-l}(f)\right|^2 + \left|c_{-k,-l}(f)\right|^2. \tag{16}$$

Барои ихтиёри $R \in \mathbb{N}$ ба воситаи

$$S_R(f;x,y) = \sum_{0\le k^2+l^2<R^2} c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)} \tag{17}$$

суммаҳои хусусии «доиравии» функсияи $f \in L_2$ – ро ишорат мекунем.

Агар ба воситаи $\mathscr{P}_R, R \in \mathbb{N}$ маҷмуи бисёрузваҳои комплексии намуди

$$p_R(x,y) = \sum_{0\le k^2+l^2<R^2} a_{k,l}e^{i(kx+ly)}$$

– ро ишорат кунем, он гоҳ чи хеле ки бараъло маълум аст, наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ аз руи элементҳои $p_R \in \mathscr{P}_R$ – ро суммаи хусусии «доиравии» (17) доро мешавад. Дар ин ҳолат

$$\mathscr{E}_R(f) := \inf\left\{\|f - p_R\| : p_R \in \mathscr{P}_R\right\} =$$

$$= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2} \tag{18}$$

мебошад.

Бигузор $\mathcal{D} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператори дифференсиалии Лапласи тартиби дуюм бошад. Акнун $\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^0 := E$ муайян мекунем. Ба воситаи $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ синфи функсияҳои $f \in L_2$ – ро ишорат мекунем, ки ҳосилаҳои хусусии

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \cdots$$

мавҷуд буда, барояшон $\mathcal{D}^r f \in L_2$ аст, яъне $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Оператори $\mathcal{D}^r$, $r \in \mathbb{N}$ ба қатори (15) татбиқ намуда, дар асоси хаттӣ будани ин оператор ва баробарии ошкори

$$\mathcal{D}^r\left(e^{i(kx+ly)}\right) = (-1)^r (k^2 + l^2)^r e^{i(kx+ly)}$$

менависем

$$\mathcal{D}^r f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) \mathcal{D}^r \left[e^{i(kx+ly)}\right] =$$

$$= (-1)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (k^2 + l^2)^r c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Аз ин ҷо дар асоси баробарии Парсевал ва ифодаи (16) навишта метавонем:

$$\|\mathcal{D}^r f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 \left(k^2 + l^2\right)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(k^2 + l^2\right)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \tag{19}$$

Аз формулҳои (18) ва (19) мебарояд, ки

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left(k^2 + l^2\right)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{20}$$

Қайд мекунем, ки барои ҳаргуна $s = 0, 1, \ldots, r;\ r \in \mathbb{Z}_+$ аз (20) формулаи зерин мебарояд:

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left(k^2 + l^2\right)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Дар асоси гузоришҳои қабулкардашуда тасдиқотҳои зерин ҷой доранд:

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $R \in \mathbb{R}_+$. *Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{22}$$

Теоремаи 3.1.2. *Барои ихтиёри функсияи* $f \in L_2^{(r)}$ *ҳангоми* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *будан, нобаробарии аниқи намуди Колмогоров*

$$\mathscr{E}_R^2\big(\mathcal{D}^s f\big) \leq \Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r}\Big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\Big)^{s/r} \tag{23}$$

ҷой дорад. Нобаробарии (23) *бо он маъно аниқ аст, ки чунин функсияи* $f_0 \in L_2^{(r)}$ *– ро нишон додан мумкин аст, ки барояш ба баробарӣ мубаддал мегардад.*

Бигузор акнун $W^{(r)}L_2$ – синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ бошад, ки барояшон $\|\mathcal{D}^r f\| \leq 1$ мебошад.

Теоремаи 3.1.3. *Барои ҳамаи қиматҳои* $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(f)\Big)^{1-s/r}} = 1. \tag{24}$$

Теоремаи 3.1.4. *Бигузор* $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *бошанд. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\Big(W^{(r)}L_2\Big) = \sup\Big\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) : f \in W^{(r)}L_2\Big\} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{25}$$

Дар параграфи дуюми боби сеюм баъзе натиҷаҳое оварда шудаанд, ки ба оптимизатсияи нобаробарии намуди Ҷексон - Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарини «доиравии» функсияҳои $f \in L_2$ ва қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи бо оператори умумикардашудаи кучиш тавлидшуда вобаста мебошанд. Функсияи[14]

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)} e^{il(y-v)} h^{k^2+l^2} \tag{26}$$

дида мебароем, ки $h \in (0, 1)$ буда, наздикшавии қатори дучандаи тарафи рост ба маънои наздикшавӣ дар фазои $L_2(Q \times Q)$ фаҳмида мешавад. Функсияи

[14] Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т. 58, №10, с. 1596–1603.

(26)-ро истифода бурда, оператори $\mathscr{F}_h : L_2 \to L_2$ – ро аз руи формулаи

$$\mathscr{F}_h(f) := \mathscr{F}_h f(x,y) = \iint\limits_{(Q)} f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv \tag{27}$$

муайян мекунем, ки оператори умумикардашудаи ғеҷиш номида мешавад. Бо осони нишон додан мумкин аст, ки оператори (27) дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1. $\mathscr{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{F}_h(f) + \mu \mathscr{F}_h(g), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2;$
2. $\|\mathscr{F}_h(f)\| \le \|f\|;$ 3. $\|\mathscr{F}_h(f) - f\| \to 0, \quad h \to 0+,$
4. $\mathscr{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+.$

Фарқҳои тартиби якум ва тартиби олиро дар намуди зерин, ба монанди ҳолати классикӣ чунин муайян мекунем:

$$\Delta_h f = \mathscr{F}_h f - f = (\mathscr{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^\nu f := \Delta_h\big(\Delta_h^{\nu-1} f\big) = \big(\mathscr{F}_h - E\big)^\nu f = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{\nu-j} \binom{\nu}{j} \mathscr{F}_h^j(f),$$

ки дар ин ҷо $\mathscr{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathscr{F}_h^j f := \mathscr{F}_h\big(\mathscr{F}_h^{j-1} f\big), \quad j = \overline{1,\nu}; \quad \nu \in \mathbb{N}; E$ – оператори воҳидӣ дар фазои L_2 мебошад. Ба воситаи

$$\Omega_\nu(f,t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^\nu f\| : 0 < h \le t\Big\}, \quad t \in (0,1) \tag{28}$$

модули бефосилагии умумикардашудаи функсияҳои $f \in L_2$ ишорат мекунем.

Ба монанди параграфҳои аввал намуди ошкори модули бефсилагиро муайян менамоем:

$$\Omega_\nu^2(f,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \big(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\big)^\nu \rho_{kl}^2(f). \tag{29}$$

Теоремаи 3.2.1. *Барои ҳаргуна қиматҳои $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $h \in (0,1)$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big)} = \frac{1}{\Big(1 - (1-h)^{R^2}\Big)^\nu}. \tag{30}$$

Натиҷаи 3.2.1. *Дар шартҳои теоремаи* 3.2.1 *қиматҳои* $h = 1/R^2$, $R \in \mathbb{N}$ *гузошта, меёбем:*

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f, 1/R^2\Big)} = \sup_{R \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^{R^2}\right)^\nu = \Big(1 - e^{-1}\Big)^\nu.$$

Дар оянда ба сифати функсияи вазнии $\mu(x)$ дар порчаи $[0,1]$ функсияи ғайриманфии суммиронидашавандаеро мебинем, ки ба функсияи нулӣ дар ин порча эквивалент набошад.

Теоремаи 3.2.2. *Бигузор $R,\nu\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le q\le\infty$ ва $h\in(0,1)$, $\mu(x)$ — функсияи вазнӣ дар сегменти $[0,h]$ бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^rf;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (31)$$

Натиҷаи 3.2.2. *Барои шартҳои теоремаи 3.2.2 ҳангоми $\mu(t):=R^2(1-t)^{R^2-1}$ будан, баробарии*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^rf;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\left\{\frac{\nu q+1}{\Big[1-(1-h)^{R^2}\Big]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}.$$

ҷой дорад. Дар ҳолати хусусӣ, $h=1/R^2$ гузошта, ба сарҳади болоӣ аз руи ҳамаи $R\in\mathbb{N}$ гузашта, меёбем:

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)}\frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2}\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^rf;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\frac{(\nu q+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{\nu+1/q}}.$$

Дар параграфи сеюми боби сеюм наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f\in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе ёфта шудааст.

Дар параграфи боло сарҳади аниқи болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2:=L_2(Q)$ ёфта шудаанд. Дар ин ҷо натиҷаҳои ба даст овардашуда барои ҳолати наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои хусусии фосилавӣ аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе ва ҳосилаҳои хусусии онҳо умумӣ кунонида мешаванд. Баробарии (21) ва формулаи

$$\Omega_\nu(D^r f,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\Big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\Big)^\nu\big(k^2+l^2\big)^{2r}\rho_{kl}^2(f)$$

– ро истифода бурда, теоремаҳои зерин исбот карда мешаванд.

Теоремаи 3.3.1. *Барои ҳаргуна* $\nu,R\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ *ва* $h\in(0,1)$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin\mathscr{P}_{2r}}}\frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f;h\big)}=\frac{1}{\big(1-(1-h)^{R^2}\big)^\nu}. \tag{32}$$

Теоремаи 3.3.2. *Бигузор* $R,\nu\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $1\leq q<\infty$, $h\in(0,1)$ *ва* $\mu(x)$ *– функсияи вазнӣ дар порчаи* $[0,h]$ *бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin\mathscr{P}_{2r}}}\frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{33}$$

Натиҷаи 3.3.1. *Барои шартҳои теоремаи 3.3.2 ҳангоми* $\mu(t):=R^2(1-t)^{R^2-1}$ *будан, баробарии*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\left\{\frac{\nu q+1}{\Big[1-(1-h)^{R^2}\Big]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}$$

ҷой дорад. Дар ҳолати хусусӣ, $h=1/R^2$ *гузошта, аз руи ҳамаи қиматҳои* $R\in\mathbb{N}$ *ба сарҳади болоӣ мегузарем, он гоҳ ҳосил мекунем:*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2}\Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}}=\frac{(\nu q+1)^{1/q}}{\big(1-e^{-1}\big)^{\nu+1/q}}.$$

Агар дар баробарии ҳосилшуда $q=1/\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ *гузорем, он гоҳ*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2(r-s-\nu)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2}\Omega_\nu^{1/\nu}\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^\nu}=\frac{2^\nu}{\big(1-e^{-1}\big)^{2\nu}}$$

мешавад.

Дар теоремаи 3.1.2 исбот карда шудааст, ки барои ҳаргуна қиматҳои $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ ва ихтиёри функсияи $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq \left(\mathscr{E}_R^2(f)\right)^{1-s/r} \cdot \left(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\right)^{s/r}. \tag{34}$$

Аз ин ҷо мебароянд, ки дар баробари функсияи f ва $\mathcal{D}^r f$ ҳамаи ҳосилаҳои фосилавии $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ ҳам ба фазои L_2 тааллуқ доранд. Аз ин сабаб, омӯзиши рафтори бузургии $\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$ ё ин ки дар $\mathfrak{M}^r \subseteq Ł_2^{(r)}$ бешубҳа таваҷҷӯҳи зиёд дорад. Ҳамин тариқ, ёфтани қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(\mathfrak{M}^{(r)}\right) := \sup\left\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f); f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\} \tag{35}$$

талаб карда мешавад.

Бигузор $H \in (0,1)$, $1 \leq p < \infty,\ \nu, R \in \mathbb{N},\ \ r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва φ – функсияи вазнӣ дар $[0, H]$ бошад. Ба воситаи $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ ишорат мекунем, ки барояшон оператори $\mathcal{D}^r f$ шарти

$$\int_0^H \Omega_\nu^p\left(\mathcal{D}^r f; t\right)\mu(t)dt \leq 1$$

– ро қаноат мекунонад.

Теоремаи 3.3.3. *Баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)\right) = R^{-2(r-s)}\left(\int_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^\nu \mu(t)dt\right)^{-1/p}.$$

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ чунин мебошанд:

- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои «секунҷавии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудаанд [1-М];
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудаанд [2-М, 3-М, 7-М];
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудаанд [3-М, 10-М];
- сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ ба воситаи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$ ёфта шудаанд [2-М, 4-М, 6-М, 7-М, 8-М];
- наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе ёфта шудаанд [5-М, 9-М, 11-М, 12-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, усулҳо ва натиҷаҳои дар он овардашуда метавонанд барои ёфтани сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини полиномиалии синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда татбиқ карда шаванд. Бобҳои диссертатсияро дар алоҳидагӣ ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоии муассисаҳои таҳсилоти олӣ аз руи ихтисоси «Математика» ва «Математикаи амалӣ» истифода бурдан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Захурбеков А. Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №5-6. – С. 275–282.

[2-М] Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №7-8. – С. 368–377.

[3-М] Захурбеков А. Верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 580–585.

[4-М] Захурбеков А. Приближение периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Известия Национальной Академии наук Таджикистана. Отделение физ.-матем., хим., геол. и тех. наук. – 2022. – №4(189). – С. 17–25.

[5-М] Захурбеков А. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций двух переменных в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №3-4. – С. 156–161.

[6-М] Захурбеков А. О наилучших приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье [Текст] /М.Ш.Шабозов, А.Захурбеков // Известия Национальной Академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2024. – №3(189). – С. 19–39.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[7-М] Захурбеков А. Наилучшее приближение некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Материалы республиканской научно-практической конференции “*Современные проблемы прикладной мате-*

матики и их роль в формировании технического мировоззрения общества", посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию образование кафедры информатики и вычислительной математики и "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук"(Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С. 32–35.

[8-М] Захурбеков А. О приближении периодических функций "круговыми" суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*"(Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 78–81.

[9-М] Захурбеков А. Наилучшие совместные приближения некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 68–71.

[10-М] Захурбеков А. О наилучшем приближении функций двух переменных по ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Комплексный анализ и его приложения*", посвященной "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования", 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова (Бохтар, 19 ноября 2022 г.). – С. 65–67.

[11-М] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции "*Современные проблемы математики*" (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С. 70–73.

[12-М] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Современные проблемы математики и её преподавания*" (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 39–41.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Заҳурбеков Алишер дар мавзӯи «Масъалаҳои экстремалии наздиккунии функсияҳои бисёртағйирёбанда бо ёрии суммаҳои Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *системаи ортогоналӣ, суммаҳои "секунҷавӣ", суммаҳои "гиперболӣ", суммаҳои "сферикӣ", нобаробарии намуди Ҷексон-Стечкин, фарқиятҳои охирнок, модули бефосилагии умумикардашуда.*

Мақсади кор.Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз ҳалли масъалаҳои экстремалӣ барои қаторҳои дукаратаи Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ дар синфи функсияҳои бисёртағйирёбанда, ки ба воситаи модули бефосилагӣ тавсиф дода мешаванд, иборат мебошад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои навтарини таҳлили функсионалӣ ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалӣ истифода шудаанд.

Нововарии илмии таҳқиқот. Хамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ овардашуда, нав мебошанд. Натиҷахои бадастовардашуда чунинанд:

- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда ба воситаи суммаҳои «секунҷавии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаҳои «гиперболии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ ба воситаи суммаҳои «сферикии» Фурйе аз руи системаҳои ортогоналии ихтиёрӣ ёфта шудааст;
- сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбандаи даврӣ ба воситаи суммаҳои «доиравии» Фурйе дар фазои $L_2(Q)$ ёфта шудааст;
- наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои $f \in L_2^{(r)}(Q)$ ва ҳосилаҳои хусусии онҳо аз руи суммаҳои «доиравии» Фурйе ёфта шудааст;
- қимати аниқи қутрҳои синфи функсияҳои гуногун ҳисоб карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ дорои арзишҳои назариявӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ ва усулҳои исботи онҳоро дар дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои бисёртағирёбанда, чи дар соҳаи охирнок ва чи дар тамоми ҳамворӣ истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Захурбекова Алишера на тему «Экстремальные задачи приближения функций многих переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным системам», представленной на соискание учёной степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *ортогональная система, "треугольные" суммы, "гиперболические" суммы, "сферические" суммы, неравенства типа Джексона-Стечкина, конечные разности, обобщённый модуль непрерывности.*

Цель работы. Основная цель диссертационной работы является в решении экстремальных задач для двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности.

Методы исследования. В работе используются новейшие методы функционального анализа и методы решения экстремальных задач

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближение функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- найдено наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье;
- найдены точные значения поперечников различных классов функций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в других экстремальных задачах теории приближения функций многих переменных, как в конечных областях, так и во всей плоскости.

SUMMARY

of the dissertation Zahurbekov Alisher on the topic «Extreme problems of approximation of functions of many variables by Fourier sums over arbitrary orthogonal systems» submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) the degree of 6D060100 - Mathematics: 6D060101 - Real, complex and functional analysis

Key words: *orthogonal system, "triangular" sums, "hyperbolic" sums, "spherical" sums, Jackson-Stechkin inequality, finite difference, generalized module of continuity.*

The purpose of research. The main purpose of the thesis is to solve extremal problems for double Fourier series in arbitrary orthogonal systems on classes of functions of many variables characterized by a generalized modulus of continuity.

Research methods. The work uses the latest methods of functional analysis and methods for solving extremal problems

Scientific novelty. All results obtained in the dissertation work are new. The following main results were obtained:

- upper estimates for best mean square approximations of functions of several variables by "triangular" Fourier sums over arbitrary orthogonal systems were found ;
- upper estimates for best mean square approximations of functions by "hyperbolic" Fourier sums over arbitrary orthogonal systems were found ;
- upper estimates for best mean square approximations of functions $f \in L_2$ by "spherical" Fourier sums over arbitrary orthogonal systems were found;
- upper estimates for the best approximations of some classes of periodic functions of two variables by "circular" in the space $L_2(Q)$ were found;
- the best joint approximation of the functions $f \in L_2^{(r)}(Q)$ and their partial derivatives by "circular" Fourier sums was found;
- exact values of the diameters of various classes of functions were found .

Theoretical and practical value. The thesis is of theoretical nature. The results of the thesis and the methods of their proof can be applied to other extremal problems in the theory of approximation of functions of many variables, in bounded domains or in the entire plane.