РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Заргаров Джамшед Джангиевич

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д У Ш А Н Б Е — 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа
и теории функций Таджикского национального университета

Научный консультант: **Шабозов Мирганд Шабозович,**
академик Национальной Академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор

Научный руководитель: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,**
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Бохтарского государственного университета им. Н. Хусрава;

Палавонов Курбоназар Курбонбекович,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики и естественно-научных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции

Оппонирующая организация: Российско-Таджикский (славянский) университет

Защита состоится *6 января 2021 г. в 12:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-012 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенном по адресу: 734027, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-012,
доктор физико-математических наук **Одинаев Р.Н.**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория аппроксимации функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа и имеет важные приложения в прикладных областях математики. В этой теории особое место занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций.

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций изучались, например, в известных работах К.И.Бабенко, В.М.Тихомирова, J.T.Sheik, В.И.Белого, М.З.Двейрина и продолжились в работах Л.В.Тайкова[1,2], Ю.А.Фаркова[3], С.Б.Вакарчука[4], М.Ш.Шабозова[5–7] и многих других.

В этой работе, продолжая исследования указанных авторов, рассматривается более общая экстремальная задача: требуется найти верхние грани наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными. Эта задача в теории приближения функций мало изучена, а известные нам работы не содержат точных решений. В первой главе работы задача совместной аппроксимации аналитических в круге функций полиномами полностью решена.

Во второй главе решен ряд экстремальных задач, в том числе вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений на некоторых классах аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$ и найдены точные значения поперечников некоторых классов аналитических в круге функций.

---

[1] Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.

[2] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.

[3] Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук.. 1990. Т. 45, № 5. С. 197–198.

[4] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем.заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.

[5] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.

[6] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 447–449.

[7] Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из $H_p^r,\ 1 \le p \le 2$ // ДАН России. 2003. Т. 394, № 4. С. 399–401.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Данное дисертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Приближения аналитических функций в единичном круге».

Цели и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующим:

- найти точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$;
- найти новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка от граничных значений в пространстве Харди;
- найти точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников определённых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы теории аппроксимации и методы решения экстремальных задач теории аналитических функций, а именно метод Н.П.Корнейчука оценка сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$;

- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего совместного среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые с весом значения модулей непрерывности r-го порядка граничных значений функций в пространстве Харди;
- вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников некоторых классов аналитических функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных значениях верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений функций и их последовательных производных;
- теоремы о точных неравенствах между величиной наилучшего совместного среднеквадратического приближения аналитических функций и интегралами, содержащими модули непрерывности r-го порядка;
- теоремы о точных значениях различных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладивались и обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений в ХоГУ (Хорог, 2010-2020 гг.);

- семинарах кафедры математического анализа и теории функций и кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения» (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции «Теория приближений и её применения» (Днепр, Украина, 16-19 сентября 2020 г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 11 печатных работах [1-А — 11-А], из них 4 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 7 статей в сборниках трудов конференций и других изданиях. Из совместной с научным руководителем Г.А.Юсуповым работы [4-А, 11-А], соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 53 наименований, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации, состоящая из пяти параграфов, посвящена нахождению точных значений наилучшего совместного приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Харди $\mathscr{H}_2$. В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего определения и обозначения, а в остальных параграфах излагаются результаты работы автора. Приведем содержание этой главы.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ и $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, соответственно, множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Через $\mathbb{C}$ обозначим множество всех комплексных чисел вида $c := a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Будем говорить, что аналитическая в единичном круге $U := \{z : \ |z| < 1\}$ функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1,\ 0 \le t \le 2\pi \tag{1}$$

принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_p$ $(1 \le p \le \infty)$, если

$$\|\Phi\|_p := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_p} = \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty. \tag{2}$$

При этом угловое граничное значение $\Phi(z)$ обозначим

$$\Phi(t) := \Phi(e^{it}) = \lim_{\rho \to 1-0} \Phi(\rho e^{it}).$$

Известно[8], что функция $\Phi(t)$ всегда существует, а потому конечность нормы (2) означает, что

$$\|\Phi\|_p = \lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{it})|^p \, dt \right\}^{1/p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

При $p = \infty$ будем предполагать, что функция $\Phi(z)$ аналитична в замкнутом круге $U^* := \{z : |z| \le 1\}$ вплоть до границы, а в точках окружности $\Gamma := \{z : |z| = 1\}$ является непрерывной, причем для нормы $\mathscr{H}_\infty$ получаем равенство

$$\|\Phi\|_\infty := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_\infty} = \max\{|\Phi(z)| : \ |z| \le 1\} = \max\left\{|\Phi(e^{it})| : \ 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

[8] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950. 350.

Для функции $\Phi(z)$, определённой равенством (1), понятие производной имеет разный смысл. Всюду далее равенством

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \frac{\partial^{(m)}\Phi(\rho e^{it})}{\partial t^m}, \quad \Big(m \in \mathbb{Z}_+,\ \Phi_a^{(0)}(z) \equiv \Phi(z)\Big)$$

определим производную m-го порядка аналитическую в U функцию $\Phi(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ $(0 \le \rho \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi)$, полагая при этом, что

$$\Phi_a'(z) := \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\rho e^{it}) = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \Phi'(z)\, zi,$$

а последовательные производные определяются рекуррентно, по формуле

$$\Phi_a^{(m)}(z) := \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}_z', \quad m \in \mathbb{N},\ m \ge 2,$$

причём при всех $m \in \mathbb{N},\ m \ge 2,$

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}_z' = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)\rho^k e^{ikt}.$$

Через $\Phi_a^{(m)}(t)$ обозначим граничные значения производных $\Phi_a^{(m)}(z)$ равенством

$$\Phi_a^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)(e^{it})^k.$$

Аналогичным образом обычную производную m-го порядка функции $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$ определим равенством

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{\partial^{(m)}\Phi(z)}{\partial z^m} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)c_k(\Phi)z^{k-m}, \tag{3}$$

а угловое граничное значение производной (3) обозначим символом $\Phi^{(m)}(t)$. Ради краткости, в дальнейшем введем обозначения

$$\alpha_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad m \in \mathbb{N},\ n \ge m. \tag{4}$$

Таким образом, в силу обозначения (4) формула (3) кратко запишется в виде

$$\Phi^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(\Phi) z^{k-m},$$

а граничное значение $\Phi^{(m)}(t)$ определяется формулой

$$\Phi^{(m)}(t)=\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{k,m}c_k(\Phi)e^{i(k-m)t}.$$

Символом $\mathscr{H}_p^{(m)}(m\in\mathbb{Z}_+,\mathscr{H}_p^{(0)}=\mathscr{H}_p, 1\le p\le\infty)$ обозначим множество функций $\Phi(z)\in\mathscr{A}(U)$, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_p,\ 1\le p\le\infty$, производная m-го порядка $\Phi^{(m)}(z)$ которых принадлежит также $\mathscr{H}_p$:

$$\mathscr{H}_p^{(m)}:=\left\{\Phi(z)\in\mathscr{H}_p:\|\Phi^{(m)}\|_{\mathscr{H}_p}<\infty\right\},\ \ 1\le p\le\infty.$$

Аналогичным образом полагаем

$$\mathscr{H}_{p,a}^{(m)}:=\left\{\Phi(z)\in\mathscr{H}_p:\ \|\Phi_a^{(m)}\|_{\mathscr{H}_p}<\infty\right\},\ \ 1\le p\le\infty.$$

Рассмотрим экстремальную задачу наилучшего совместного приближения аналитических в единичном круге $U:=\{z:|z|<1\}$ функций в банаховом пространстве Харди $\mathscr{H}_p,\ (1\le p\le\infty)$: требуется найти верхние грани наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их сопутствующими производными.

Подпространство комплексных алгебраических многочленов вида

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,\ \ a_k\in\mathbb{C},\ |a_n|\ne0,$$

степени n обозначим символом $\mathscr{P}_n$.

Задача наилучшего приближения функции $\Phi(z)\in\mathscr{H}_p,\ 1\le p\le\infty$ элементами $p_n\in\mathscr{P}_n$ в метрике пространства $\mathscr{H}_p$ ставится следующим образом: требуется найти точное значение величины

$$E_n(\Phi)_{\mathscr{H}_p}:=\inf_{p_n\in\mathscr{P}_n}\left\{\|\Phi-p_n\|_{\mathscr{H}_p}\right\}=\inf_{p_n\in\mathscr{P}_n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Phi(e^{it})-p_n(e^{it})\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Хорошо известно, что наравне с функцией $\Phi(z)\in\mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\Phi_a(z)\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$ последовательные производные $\Phi^{(s)}(z)$ $(\Phi_a^{(s)}(z))$ $(s=0,1,2,...,m)$ также принадлежат пространству $\mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$, а потому особый интерес представляет отыскание точных значений величин

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:=\inf\left\{\left\|\Phi^{(s)}-p_n^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2}:\ p_n\in\mathscr{P}_n\right\},\tag{5}$$

$$E_n(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{\left\|\Phi_a^{(s)} - p_{n,a}^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} :\ p_n \in \mathscr{P}_n\right\}. \tag{6}$$

Для величин (5) и (6) имеют место следующие утверждения

Лемма 1.1.1. *Пусть* $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$. *Тогда при любых* $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \in [0, m]$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\|\Phi_a^{(s)} - T_{n-1}(\Phi_a^{(s)})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}|c_k(\Phi)|^2\right\}^{1/2},$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\|\Phi^{(s)} - T_{n-s-1}(\Phi^{(s)})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2|c_k(\Phi)|^2\right\}^{1/2}.$$

Лемма 1.1.2. *Для произвольной функции* $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ *при любых* $n, m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ n > m \geq s$ *имеют место неравенства*

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \leq n^{-(m-s)} E_{n-1}(\Phi_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}, \tag{7}$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}. \tag{8}$$

Существует функция $G \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, *для которой неравенства* (7) *и* (8) *обращаются в равенства.*

Лемма 1.1.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq s$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}} \frac{E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-1}(\Phi_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{1}{n^{m-s}},$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}.$$

Все вышеприведённые леммы 1.1.1 — 1.1.3 справедливы не только при $p = 2$, но и при всех $1 \leq p \leq 2$. Отметим также, что неравенства (7) и (8) при $s = 0$, ранее были доказаны Л.В.Тайковым[1].

В дальнейшем характеристику гладкости произвольной функции $\Phi \subset \mathscr{A}(U)$, принадлежащей $\mathscr{H}_p^{(m)}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности r-го порядка её граничных значений $\Phi(t)$ в норме лебегова пространства $L_2[0, 2\pi],\ 1 \leq p \leq \infty$,

$$\omega_r(\Phi, t)_p := \sup\left\{\Big\|\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\, C_r^l \Phi(\cdot + (r-l)\tau)\Big\|_{L_p} : |\tau| \leq t\right\}$$

при $t \to 0$, либо зададим скорость убывания к нулю некоторой усредненной величины, содержащей $\omega_r(\Phi,t)_p$, ограниченной сверху заданной мажорантной функцией $\Psi(t)$.

Во втором параграфе первой главы, излагаются некоторые точные неравенства типа Л.В.Тайкова[2], содержащие величины $E_{n-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}$, $(s=\overline{0,m})$ — наилучшее приближение функции $\Phi^{(s)}\subset\mathscr{A}(U)$, принадлежащее $\mathscr{H}_2$, и усреднённое значение модуля непрерывности первого порядка от m-ых производных $\Phi^{(m)}(t)$ и $\Phi_a^{(m)}(t)$.

Одним из основных результатов второго параграфа первой главы является следующее утверждение.

Теорема 1.2.2. *При любых $n,m\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{Z}_+, n>m\geq s$ справедливы соотношения*

$$\frac{1}{(n-m)t}\leq\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}}\leq\left(\frac{1}{\Big((n-m)t\Big)^2}+\frac{1}{2}\right)^{1/2},$$

$$0<(n-m)t\leq\pi,$$

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{n-m}{2\Big((n-m)h-\sin(n-m)h\Big)}\right\}^{1/2},$$

$$0<(n-m)h\leq\pi/2.$$

Теорема 1.2.2 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука[9], полученного для множества $L_2^{(m)}[0,2\pi]$ на случай $\mathscr{H}_2^{(m)}(U)$.

В нижеследующей теореме вычисляется точная верхняя грань экстремальной аппроксимационной характеристики, в которой модуль непрерывности содержится не только в подынтегральном выражении, но также и вне интеграла.

Теорема 1.2.4. *Для любых $n\in\mathbb{N}, m,s\in\mathbb{Z}_+, n>m\geq s$ и $0<h\leq\pi/(n-m)$ справедливо равенство*

[9] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 11–19.

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}+(n-m)^2\int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(n-m)t}.$$

Теорема 1.2.6 *При любых* $n\in\mathbb{N},\ m,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>m\geq s$ *и* $0<h\leq\pi/(n-m)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\left(\alpha_{n,m}^2/\alpha_{n,s}^2\right)E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt} = \frac{n-m}{2\Big[(n-m)h-Si((n-m)h)\Big]}.$$

В третьем параграфе первой главы доказаны теоремы для модулей непрерывности r-го порядка. Приводим основные результаты этого параграфа.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n,r\in\mathbb{N},\ m,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>m\geq s$ *и* $0<(n-m)h\leq\pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{h^r\left(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\right)E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} = \left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}.$$

Теорема 1.3.2 в качестве частного случая $(s=0)$ включает в себя результат В.В.Шалаева[10], доказанный для множества функций $L_2^{(m)}$.

В третьем параграфе доказана следующая общая

Теорема 1.3.4 *Для любых* $n,r\in\mathbb{N},\ m,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>m\geq s$ *и любого числа* $h\in\mathbb{R}_+$, *для которого* $0<h\leq\pi/(n-m)$, *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\Big((n-m)h-Si((n-m)h)\Big)}\right\}^{r/2}. \tag{9}$$

[10] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 1. С. 125–129.

В частности, из (9) *при* $h=\pi/(n-m)$ *получаем*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)\,E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/(n-m)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)\,dt\right\}^{r/2}}=\left\{\frac{n-m}{2\Big(\pi-Si(\pi)\Big)}\right\}^{r/2}, \qquad (10)$$

где $Si(u):=\int\limits_0^u\frac{\sin t}{t}\,dt$ *— интегральный синус.*

Заметим, что из равенства (10), в силу того, что модулем непрерывности r-го порядка $\omega_r(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}$ при всех $t\in(0,\pi/(n-m)]$ является возрастающая функция, получаем обобщённое неравенство Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\le\frac{1}{\alpha_{n,s}}E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}\le\frac{1}{\alpha_{n,m}}E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{2\Big(\pi-Si(\pi)\Big)}\right\}^{r/2}\omega_r\Big(\Phi^{(m)},\pi/(n-m)\Big)_{\mathscr{H}_2}. \qquad (11)$$

Будет ли константа $\Big\{2(\pi-Si(\pi))\Big\}^{-r/2}$ наилучшей при всех $n,m,r\in\mathbb{N}$ в неравенстве Джексона–Стечкина, нам доказать не удалось, но тем не менее указанная константа является наименьшей в оценке сверху для $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$, что облегчает возможность применения неравенства (11) в задачах численного анализа.

В четвертом параграфе первой главы рассматривается ряд экстремальных задач, посвященных наилучшему среднеквадратическому приближению функций $\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, скорость стремления к нулю которых характеризуется модулями непрерывности производной $\Phi_{2,a}^{(m)}(t)$.

Теоремы, доказанные нами в предыдущих параграфах, в пятом параграфе обеспечивают возможность решать следующую экстремальную задачу: *если* $\mathfrak{M}^{(m)}\subset\mathscr{H}_2^{(m)}$ *(или* $\mathfrak{M}_a^{(m)}\subset\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$*) – некоторое множество функций* $\big\{\Phi(z)\big\}$, *то требуется найти точное значение величин*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(m)}):=\mathscr{E}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(m)},\mathscr{T}_{n-1})_{\mathscr{H}_2}=\sup\Big\{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:\ \Phi\in\mathfrak{M}^{(m)}\Big\}, \qquad (12)$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}_a^{(m)}):=\mathscr{E}^{(s)}(\mathfrak{M}_a^{(m)},\mathscr{T}_{n-1})_{\mathscr{H}_2}=\sup\Big\{E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:\ \Phi\in\mathfrak{M}_a^{(m)}\Big\}. \qquad (13)$$

Напомним, что величины (12) и (13) означают соответственно величины наилучшего совместного среднеквадратического приближения множества $\mathfrak{M}^{(m)}$ и $\mathfrak{M}_a^{(m)}$ подпространством тригонометрических полиномов $\mathscr{T}_{n-1}$.

Непрерывную возрастающую на полупрямой $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функцию $\Psi(t)$ такую, что $\Psi(0) = 0$, назовем мажорантной функции, или просто мажорантой. Множество всех мажорант обозначим символом $\mathfrak{N}$. Через $\mathfrak{N}_k,\ k \in \mathbb{N}$ обозначим множество мажорант $\Psi \in \mathfrak{N}$, для которых выполняются условия

I. $\dfrac{\Psi(\tau_1)}{\tau_1^k} < \dfrac{\Psi(\tau_2)}{\tau_2^k}$, если $0 < \tau_1 < \tau_2 < \pi$; **II**. $\lim\limits_{\tau \to 0+} \dfrac{\Psi(\tau)}{\tau^k} = 0$.

Для произвольных натуральных m, r и $0 < h \leq 2\pi$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_r^{(m)}(h) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} :\ \int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt \leq 1 \right\},$$

$$W_r^{(m)}(\Psi) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} :\ \left(\int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt \right)^{r/2} \leq \Psi(h) \right\},$$

где мажоранта $\Psi \in \mathfrak{N}_2$. Аналогичным образом определены классы функций $\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$.

Теорема 1.5.1. *При всех* $r, n, m \in \mathbb{N},\ n > m, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ *и любых* $h > 0$, *для которых* $0 < (n-m)h \leq \pi$, *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\Big(W_r^{(m)}(h)\Big)_{\mathscr{H}_2} := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2},$$

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\Big(W_r^{(m)}(\Psi)\Big)_{\mathscr{H}_2} := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2} \Psi(h).$$

Из теоремы 1.5.1 вытекает следующее

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы* 1.5.1 *при* $h = \pi/(n-m),\ n > m$, $n, m \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$, *и* $n > m \geq s$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\left(W_r^{(m)}\left(\frac{\pi}{n-m} \right) \right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}},$$

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\left(W_r^{(m)}(\Psi)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right).$$

Аналогичные результаты доказаны для множества $\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$.

Вторая глава диссертации, состоящая из двух параграфов, посвящена нахождению точных значений n-поперечников некоторых классов функций, вытекающих естественным образом из утверждения вышеуказанных теорем.

При любых $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ и заданной мажоранте Ψ_1 определим класс функций $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, удовлетворяющих условию

$$\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} : \int_0^h \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt \leq \Psi_1(h),\ \forall h > 0 \right\}.$$

Напомним нужные далее предварительные определения.

Пусть $S := \Big\{\varphi : \|\varphi\|_{\mathscr{H}_2} \leq 1\Big\}$ — единичный шар в $\mathscr{H}_2$; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathscr{H}_2$; $\Lambda_n \subset \mathscr{H}_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset \mathscr{H}_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : \mathscr{H}_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $\mathscr{H}_2$ в Λ_n; $\mathscr{L}^\perp : \mathscr{H}_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования $\mathscr{H}_2$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(Q, \mathscr{H}_2) = \sup\Big\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\} : \Lambda_{n+1} \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d^n(Q, \mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\sup\{\|\Phi\| : \Phi \in Q \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\delta_n(Q, \mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\{\|\Phi - \mathscr{L}\Phi\| : \Phi \in Q\} : \mathscr{L}\mathscr{H}_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d_n(Q, \mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\sup\{\inf\{\|\Phi - g\| : g \in \Lambda_n\} : \Phi \in Q\} : \Lambda_n \in \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\Pi_n(Q, \mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\{\|\Phi - \mathscr{L}^\perp f\| : \Phi \in Q\} : \mathscr{L}^\perp\mathscr{H}_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \in \mathscr{H}_2\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, линейным, колмогоровским и проекционным n-поперечниками. Так как $\mathscr{H}_2$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками имеет место соотношения[11]:

$$b_n(Q, \mathscr{H}_2) \leq d^n(Q, \mathscr{H}_2) \leq d_n(Q, \mathscr{H}_2) = \delta_n(Q, \mathscr{H}_2) = \Pi(Q, \mathscr{H}_2).$$

[11]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. // 1985. 252 p.

Отметим, что вычислению точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$, $1 \le p \le \infty$, посвящено достаточно много работ, из которых отметим работы В.М.Тихомирова[12], Л.В.Тайкова[1,2], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова[13], М.З.Двейрина[14], Ю.А.Фаркова[3], S.D.Fisher, M.I.Stesin[15], A.Pinkus[11], С.Б.Вакарчука[4,16,17], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова[18], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[19], К.Ю.Осипенко и М.И.Стесина[20] и многие другие.

Приводим основные результаты второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$ и для значений числа $h > 0$ выполнено условие $0 < (n-m)h \le \pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}(h), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(W_r^{(m)}(h)\right)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1, при $h = \pi/(n-m)$, имеет место равенство*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}\left(\frac{\pi}{n-m}\right), \mathscr{H}_2\right) = \left\{\frac{n-m}{\sqrt{\pi^2-4}}\right\}^r \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}.$$

[12]Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № №3(93). С. 81–120.

[13]Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций// Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.

[14]Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге// Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев: Наукова думка. 1975. Вып. 6. С.41-54

[15]Fisher S.D., Stesin M.I. The n-widths of the unit ball of H^q // Journ. Approx. Theory.. 1991. V. 67, № 3. P. 347–356.

[16]Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2// Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42, № 7. С. 873-881.

[17]Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций// Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.

[18]Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$// ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466-469.

[19]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций// ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747-749.

[20]Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 4. С. 95–104.

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта* $\Psi \in \mathscr{H}_2$ *для всех* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi(h)}{\Psi(\pi/(n-m))} \geq \frac{1}{\pi^2-4}\times$$

$$\times\begin{cases}((n-m)h)^2 - 2\Big(1-\cos(n-m)h\Big), & \textit{если}\;\; 0 < (n-m)h \leq \pi, \\ \pi^2 - 4 + (nh-\pi)^2, & \textit{если}\;\; (n-m)h > \pi.\end{cases} \tag{14}$$

Тогда для любых чисел $r, n \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}(\Psi), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(W_r^{(m)}(\Psi)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников, перечисленных ранее. Множество мажорант, удовлетворяющих условию* (14), *не пусто.*

В 1910 г. А.Лебегом[21] введено понятие модуля непрерывности $\omega(f,t)_C$ для непрерывных на $[0, 2\pi]$ функций, то есть $f \in C[0, 2\pi]$. Им же впервые были получены оценки стремления к нулю коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ при $n \to \infty$ в терминах модуля непрерывности. Для изучаемых в этом параграфе классов функций данный вопрос также представляет определённый интерес. Так, например, из теоремы 2.2.2 в качестве следствия получаем

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.2.2. *Тогда для любых чисел* $r, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ *имеет место равенство*

$$\sup\Big\{|c_n(\Phi)| : \;\Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)\Big\} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2},$$

где $c_n(\Phi)$ *— коэффициенты Тейлора функции* Φ.

Теорема 2.2.4. *Пусть мажоранта* $\Psi_1(t)$ *при любых* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/2(n-m))} \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi-2}\begin{cases}(n-m)t - \sin(n-m)t, & \textit{если}\;\; 0 < (n-m)t \leq \pi, \\ 2(n-m)t - \pi, & \textit{если}\;\; (n-m)t > \pi.\end{cases}$$

[21] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrigua approchree des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France.. 1910. V. 38, P. 184–210.

Тогда для любых чисел $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства

$$\gamma_n\left(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\right) = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{\pi-2}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Пользуясь утверждением теоремы 2.2.4, в качестве следствия получаем

Теорема 2.2.5. *Если выполнены все условия теоремы* 2.2.4, *то при всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ имеет место следующее равенство*

$$\sup\left\{|c_n(\Phi)| : \ \Phi \in \mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{\pi-2}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2}.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка от граничных значений;
- вычислены значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников определённых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации для аналитических функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из Перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Заргаров Дж.Дж. Точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №10. – С.785-789.

[2-А] Заргаров Дж.Дж. О точных значениях n-поперечников классов аналитических в круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2012. – №2(147). – С.16-21.

[3-А] Заргаров Дж.Дж. Значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.113-115.

[4-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближение аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров // ДАН РТ. – 2020. – Т.63. – №5-6. – С.294-300.

В других изданиях:

[5-А] Заргаров Дж.Дж. Наилучшие приближения аналитических функций и значения поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывностями в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Вестник Хорогского государственного университета. – Естественные науки. – 2012. – Серия 1. – №9. – С.9-16.

[6-А] Заргаров Дж.Дж. О значении поперечников классов аналитических функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). – С.55-56.

[7-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.). – С.60-62.

[8-А] Заргаров Дж.Дж. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров, Ф.Д. Давлатбеков // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» Худжанд: Изд-во «Меъроҷ». 2014. – С.46-48.

[9-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.). – С.22-24.

[10-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем полиномиальном приближении функций $f \in H_p$, структурные свойства которых определяются обобщенными модулями непрерывности m-го порядка [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения» (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.72-74.

[11-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди [Текст] / Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Теория приближений и её применения» (Днепр, Украина, 16-19 сентября 2020 г.) – С.75-76.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Заргаров Ҷамшед Ҷангиевич

НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯКҶОЯИ ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКӢ ВА ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛӢ ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Д У Ш А Н Б Е — 2020

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Мушовири илмӣ: **Шабозов Мирганд Шабозович,**
академики Академияи миллии илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор

Роҳбари илмӣ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,**
доктори илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муққаризони расмӣ: **Сафаров Ҷумабой,**
доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав;

Палавонов Қурбоназар Қурбонбекович,
номзади илмҳои физикаю математика, омӯзгори калони кафедраи математикаи олӣ ва фанҳои илмҳои табии Донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон

Муассисаи тақриздиҳанда: Донишгоҳи (славянии) Россия ва Тоҷикистон

Ҳимоя *6-уми январи соли 2021 соати 12:00* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6Д.КОА–012 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математика аз рӯйи нишонии 734027, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш.Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи маркази Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ё тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «________________» соли 2020 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои
диссертатсионии 6D.KOA-012,
доктори илмҳои физикаю математика **Одинаев Р.Н.**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммият ва дараҷаи рушди мавзӯи тадқиқот. Назарияи наздиккунии функсияҳо яке аз соҳаҳои инкишофёфтаи таҳлили математикӣ буда, дар соҳаҳои математикаи амалӣ татбиқҳои муҳими худро дорад. Дар ин назария, масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ дар давраи воҳидӣ тавассути полиномҳои комплексӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ ҷои махсусро ишғол мекунанд.

Масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ дар бисёр мақолаҳои илмӣ, аз ҷумла, дар корҳои маъруфи К.И.Бабенко, В.М.Тихомиров, J.T.Sheik, В.И.Белий, М.З.Двейрин омӯхта шуда, дар мақолаҳои намоёни Л.В. Тайков[1–2], Ю.А.Фарков[3], С.Б.Вакарчук[4], М.Ш.Шабозов[5–7] ва дигарон тақвият бахшида шуданд.

Дар рисолаи пешниҳодшуда, тадқиқотҳои муаллифони дар боло номбаршуда идома дода шуда, масъалаи умумии экстремалӣ тадқиқ карда мешавад: талаб карда мешавад, ки сарҳади аниқи болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини функсия ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути полиномҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо ёфта шавад. Ин масъала дар назарияи наздиккунии функсияҳо хеле кам омӯхта шудааст ва корҳои илмиии доир ба ин мавзӯъ навишташуда, ки ба мо маълуманд, ҳалли аниқ надоранд. Дар боби якуми рисолаи диссертатсионӣ масъалаи аппраксиматсияи якҷояи функсияҳои аналитикӣ дар давра тавассути бисёрузваҳо пурра ҳал карда шудааст.

Дар боби дуюми рисола, як қатор масъалаҳои экстремалӣ ҳал карда шудаанд, аз ҷумла қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷоя барои баъзе синфҳои функсияҳои дар давра аналитикӣ ҳисоб карда шудаанд, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_2$ тааллуқ доранд ва қиматҳои аниқи қутрҳои баъзе синфи

[1]Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.

[2]Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–295.

[3]Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук.. 1990. Т. 45, № 5. С. 197–198.

[4]Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем.заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.

[5]Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.

[6]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 447–449.

[7]Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из $H_p^r,\ 1 \le p \le 2$ // ДАН России. 2003. Т. 394, № 4. С. 399–401.

функсияҳои дар давра аналитикӣ ёфта шудаанд.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи «Наздиккунии функсияҳои аналитикӣ дар доираи воҳидӣ» иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ иборат аст аз:

- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсия ва ҳосилаҳои пайдарпаи он аз рӯи бисёрузваҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо барои баъзе синфи функсияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ ёфта шавад, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_2$ тааллуқ доранд;
- нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби r аз қимати сарҳадиро дар бар мегиранд, дар фазои Харди ёфта шаванд;
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфондӣ, хаттӣ ва проексионии синфи функсияҳои муайян, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд, ҳисоб карда шавад.

Методҳои асосии тадқиқот. Дар рисолаи диссертатсионӣ усулҳои нави муосир — усулҳои назарияи аппраксиматсия ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи функсияҳои аналитикӣ, бахусус усули Н.П.Корнейчук баҳои болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо аз рӯи зерфазоҳои бисёрузваи ченакашон қайдкардашуда ва усули баҳои поёнии маҷмӯи қутрҳо дар фазоҳои гуногуни нормиронидашуда, ки аз тарафи В.М.Тихомиров пешниҳод карда шудааст, истифода бурда мешаванд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпай аз рӯи бисёрузваҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо барои баъзе синфи функсияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_2$ тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудаанд;

- нобаробариҳои нав байни бузургии наздиккунии якҷояи миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ ва интегралҳое, ки қимати бо вазн миёнакардашудаи модули бефосилагии тартиби r-ум аз қимати сарҳадии функсияро дар бар мегиранд, дар фазои Харди ёфта шудааст;
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфондӣ, хаттӣ ва проексионии баъзе синфи функсияҳои аналитикӣ, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд, ҳисоб карда шудааст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳои асосӣ оид ба қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии якҷояи полиномиалии беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпаи онҳо;
- теоремаҳо оид ба нобаробариҳо байни наздиккунии якҷояи миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои аналитикӣ ва интегралҳое, ки модули бефосилагии тартиби r-умро дар бар мегиранд;
- теоремаҳо оид ба қиматҳои гуногуни n-қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ дорои ҳам арзишҳои назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошанд. Усулҳо ва натиҷаҳое, ки дар рисолаи диссертатсионӣ оварда шудаанд, метавонанд дар ҳалли масъалаҳои дигари экстремалӣ истифода бурда шаванд. Бобҳои рисолаи диссертатсионӣ дар алоҳидагӣ мундариҷаи курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, ташкил медиҳад.

Саҳми шахсии муаллиф. Муҳтавои рисола ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро бо асарҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ борҳо дар:

- семинарҳои кафедраҳои таҳлили математикӣ ва таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии ДДХ (Хоруғ, солҳои 2010-2020);
- семинарҳои кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо ва кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи

миллии Тоҷикистон тахти роҳбарии академики АИ ҶТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2020);

- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Проблемаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо» (Душанбе, 29-30 июни соли 2012);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Проблемаҳои муосири назарияи функсияҳо ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (Душанбе, 17-18 июни соли 2013);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Проблемаҳои муосири математика ва таълими он» (Хуҷанд, 28-29 июни соли 2014);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (Душанбе, 27-28 апрели соли 2015);
- хонишҳои тобистонаи Мактаб-Конференсияи математикии С.Б. Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Душанбе, 15-25 августи соли 2016);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявии «Таҳлили математикӣ ва татбиқи он» (Душанбе, 10-11 июни соли 2019);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии «Назарияи наздиккунӣ ва татбиқи он» (Днепр, Украина, 16-19 сентябри соли 2020)

муҳокима ва мавриди баррасӣ қарор гирифта шудаанд.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 11 мақола дарҷ гардидаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст [1-М — 11-М]. Аз 11 кори илмӣ 4 мақола ба нашрияҳои тақризшавандаи рӯихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон мансуб буда, 7-тояш дар нашрияҳои дигар чоп шудаанд. Аз натиҷаҳои бо ҳамроҳии Г.А. Юсупов чопшуда [4-М, 11-М], ба ҳаммуаллиф фақат гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 53 номгӯй ва ҳамагӣ 75 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Боби якуми диссертатсия, ки аз панҷ параграф иборат аст, ба ёфтани қимати аниқи наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ бо ёрии бисёраъзогиҳои алгебравии комплексӣ дар фазои Харди $\mathscr{H}_2$ бахшида шудааст. Дар параграфи якум маълумотҳои умумӣ, таърифҳо ва ишораҳое, ки дар оянда заруранд ва дар параграфҳои дигар натиҷаҳои муаллиф оварда шудаанд. Мӯҳтавои боби якумро меоварем.

Бигузор $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}, \mathbb{R}_+ := (0,+\infty)$ ва $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$ мувофиқан маҷмӯи ададҳои натуралӣ, маҷмӯи ададҳои бутуни ғайриманфӣ, маҷмӯи ададҳои мусбат ва маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ бошанд. Бо $\mathbb{C}$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои комплексии намуди $c := a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$ – ро ишорат мекунем.

Мегӯянд, ки функсияи дар давраи воҳидии $U := \{z:\ |z|<1\}$ аналитикии

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0\le\rho<1,\ 0\le t\le 2\pi \tag{1}$$

ба фазои Харди $\mathscr{H}_p$ $(1\le p\le\infty)$ тааллуқ дорад, агар

$$\|\Phi\|_p := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_p} = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(\rho e^{it})|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty \tag{2}$$

бошад. Дар ин ҳолат қимати сарҳадии кунҷии $\Phi(z)$ – ро бо

$$\Phi(t) := \Phi(e^{it}) = \lim_{\rho\to 1-0}\Phi(\rho e^{it})$$

ишорат мекунем.

Ошкор аст[8], ки функсияи $\Phi(t)$ ҳама вақт мавҷуд аст ва бинобар ҳамин нормаи охирноки (2) бо он маъно аст, ки

$$\|\Phi\|_p = \lim_{\rho\to 1-0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(\rho e^{it})|^p\,dt\right\}^{1/p} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} < \infty$$

аст. Ҳангоми $p=\infty$ будан фарз мекунем, ки функсияи $\Phi(z)$ дар давраи сарбастаи $U^* := \{z:\ |z|\le 1\}$ то сарҳади соҳа аналитикӣ аст ва дар нуқтаҳои давраи $\Gamma := \{z:\ |z|=1\}$ бефосила мебошад, ки барои нормаи $\mathscr{H}_\infty$ баробарии

$$\|\Phi\|_\infty := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_\infty} = \max\{|\Phi(z)|:\ |z|\le 1\} = \max\left\{|\Phi(e^{it})|:\ 0\le t\le 2\pi\right\}$$

[8] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950. 350.

– ро ҳосил мекунем.

Барои функсияи $\Phi(z)$, ки бо ёрии баробарии (1) дода шудааст, мафҳуми ҳосила маъноҳои гуногун дорад. Ба воситаи баробарии

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \frac{\partial^{(m)}\Phi(\rho e^{it})}{\partial t^m}, \quad \Big(m \in \mathbb{Z}_+,\ \Phi_a^{(0)}(z) \equiv \Phi(z)\Big)$$

ҳосилаи тартиби m-уми функсияи $\Phi(z)$ дар давраи U аналитикӣ аз рӯи аргументи t-и тағйирёбандаи комплексии $z = \rho e^{it}$ $(0 \le \rho \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi)$ муайян мекунем. Дар ин ҳолат

$$\Phi'_a(z) := \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\rho e^{it}) = \frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \Phi'(z)\, zi$$

мегузорем ва ҳосилаҳои пайдарпай, рекуррентӣ аз рӯи формулаи

$$\Phi_a^{(m)}(z) := \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}'_z, \quad m \in \mathbb{N},\ m \ge 2$$

муайян мекунем, ки барои ҳамаи қиматҳои $m \in \mathbb{N},\ m \ge 2$

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}'_z = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)\rho^k e^{ikt}$$

мебошад.

Бо $\Phi_a^{(m)}(t)$ қимати сарҳадии ҳосилаҳои $\Phi_a^{(m)}(z)$ – ро ба воситаи баробарии

$$\Phi_a^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)(e^{it})^k$$

ишорат мекунем.

Айнан ҳамин тавр, ҳосилаи муқаррарии тартиби m-и функсияи $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$ – ро бо ёрии баробарии

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{\partial^{(m)}\Phi(z)}{\partial z^m} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)c_k(\Phi)z^{k-m} \tag{3}$$

муайян мекунем ва қимати сарҳадии кунҷии ҳосилаи (3) – ро бо символи $\Phi^{(m)}(t)$ ишорат мекунем. Барои мухтасарӣ, дар оянда гузориши

$$\alpha_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad m \in \mathbb{N},\ n \ge m \tag{4}$$

– ро дохил мекунем.

Ҳамин тариқ, мувофиқи гузориши (4) формулаи (3) – ро мухтасаран дар намуди зерин менависем

$$\Phi^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(\Phi) z^{k-m}$$

ва қимати сарҳадии $\Phi^{(m)}(t)$ бошад аз рӯи формулаи зерин

$$\Phi^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(\Phi) e^{i(k-m)t}$$

муайян мекунем.

Бо символи $\mathscr{H}_p^{(m)}(m \in \mathbb{Z}_+, \mathscr{H}_p^{(0)} = \mathscr{H}_p, 1 \le p \le \infty)$ маҷмӯи ҳамаи функсияҳои $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$ тааллluқ дошта, ҳосилаи тартиби m-ум $\Phi^{(m)}(z)$ низ ба фазои $\mathscr{H}_p$ тааллуқ дорад, ишорат мекунем, яъне

$$\mathscr{H}_p^{(m)} := \left\{ \Phi(z) \in \mathscr{H}_p : \|\Phi^{(m)}\|_{\mathscr{H}_p} < \infty \right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Айнан ҳамин тавр

$$\mathscr{H}_{p,a}^{(m)} := \left\{ \Phi(z) \in \mathscr{H}_p : \ \|\Phi_a^{(m)}\|_{\mathscr{H}_p} < \infty \right\}, \quad 1 \le p \le \infty$$

мегузорем.

Масъалаи экстремалии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳои дар давраи воҳидии $U := \{z : |z| < 1\}$ аналитикӣ дар фазои банахии Харди $\mathscr{H}_p$, $(1 \le p \le \infty)$ – ро дида мебароем: талаб карда мешавад, ки сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсия ва ҳосилаҳои пайдарпайи он бо ёрии бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо ёфта шавад.

Зерфазои бисёраъзогиҳои алгебравии комплексии дараҷаи n-уми намуди

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \ |a_n| \ne 0$$

– ро бо символи $\mathscr{P}_n$ ишорат мекунем.

Масъалаи наздиккунии беҳтарини функсияи $\Phi(z) \in \mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$ бо ёрии элементҳои $p_n \in \mathscr{P}_n$ дар метрикаи фазои $\mathscr{H}_p$ чунин гузошта мешавад: талаб карда мешавад, ки қимати аниқи бузургии

$$E_n(\Phi)_{\mathscr{H}_p} := \inf_{p_n \in \mathscr{P}_n} \left\{ \|\Phi - p_n\|_{\mathscr{H}_p} \right\} = \inf_{p_n \in \mathscr{P}_n} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Phi(e^{it}) - p_n(e^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p}$$

ёфта шавад.

Ошкор аст, ки дар баробари функсияи $\Phi(z) \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\Phi_a(z) \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$ ҳосилаҳои пайдарпайи $\Phi^{(s)}(z)$ $(\Phi_a^{(s)}(z))$ $(s = 0, 1, 2, ..., m)$ низ ба фазои $\mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$ тааллуқ доранд ва бинобар ин ҷустуҷӯи қимати аниқи бузургиҳои

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{\left\|\Phi^{(s)} - p_n^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} :\ p_n \in \mathscr{P}_n\right\}, \tag{5}$$

$$E_n(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{\left\|\Phi_a^{(s)} - p_{n,a}^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} :\ p_n \in \mathscr{P}_n\right\}. \tag{6}$$

таваҷҷӯҳи махсус дорад.

Барои бузургиҳои (5) ва (6) тасдиқотҳои зерин ҷой доранд.

Леммаи 1.1.1. *Бигузор* $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$ *бошад. Он гоҳ барои ҳаргуна* $s \in \mathbb{Z}_+,\ s \in [0, m]$ *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\|\Phi_a^{(s)} - T_{n-1}(\Phi_a^{(s)})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}|c_k(\Phi)|^2\right\}^{1/2},$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\|\Phi^{(s)} - T_{n-s-1}(\Phi^{(s)})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2|c_k(\Phi)|^2\right\}^{1/2}.$$

Леммаи 1.1.2. *Барои ихтиёри функсияи* $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ *ва ҳаргуна* $n, m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ n > m \geq s$ *нобаробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \leq n^{-(m-s)} E_{n-1}(\Phi_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}, \tag{7}$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}. \tag{8}$$

Чунин функсияи $G \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ *мавҷуд аст, ки барояш нобаробариҳои (7) ва (8) ба аломати баробарӣ мубаддал мегарданд.*

Леммаи 1.1.3. *Бигузор* $n, m \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq s$ *бошанд. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}} \frac{E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-1}(\Phi_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{1}{n^{m-s}},$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}.$$

Леммаҳои 1.1.1 — 1.1.3-и дар боло овардашуда на фақат барои қимати $p = 2$ ҷой доранд, балки барои ҳамаи қиматҳои $1 \leq p \leq 2$ низ дуруст мебошанд. Инчунин қайд мекунем, ки нобаробариҳои (7) ва (8) ҳангоми $s = 0$ будан, пештар аз тарафи Л.В.Тайков[1] исбот шуда буданд.

Дар оянда, суфтагии ихтиёрӣ функсияи $\Phi \subset \mathscr{A}(U)$, ки ба $\mathscr{H}_p^{(m)}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ тааллуқ дорад, бо суръати ба нол майлкунии модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби r-ум аз қиматҳои сарҳадии $\Phi(t)$ дар нормаи фазои лебегии $L_2[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\omega_r(\Phi, t)_p := \sup\left\{\Big\|\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\, C_r^l\Phi(\cdot + (r-l)\tau)\Big\|_{L_p} : |\tau| \leq t\right\}$$

ҳангоми $t \to 0$ тавсиф медиҳем ё ки ҳангоми $t \to 0$ суръати ба нол майлкунии бузургии модули бефосилагии миёнакардашуда $\omega_r(\Phi, t)_p$ – ро, ки аз боло бо мажоранти функсияи $\Psi(t)$ маҳдуд аст, ишорат мекунем.

Дар параграфи дуюми боби якум баъзе нобаробариҳои аниқи намуди Л.В.Тайков[2] – ро дида мебароем, ки бузургии $E_{n-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}$, $(s = \overline{0, m})$ — наздиккунии беҳтарини функсияи $\Phi^{(s)} \subset \mathscr{A}(U)$, ки ба фазои $\mathscr{H}_2$ таалуқ дорад ва қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби якуми аз ҳосилаҳои тартиби m-уми функсияҳои $\Phi^{(m)}(t)$ ва $\Phi_a^{(m)}(t)$ – ро дарбар мегирад.

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби якум теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 1.2.2. *Барои ҳар гуна $n, m \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq s$ муносибатҳои зерин ҷой доранд:*

$$\frac{1}{(n-m)t} \leq \sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \leq \left(\frac{1}{\Big((n-m)t\Big)^2} + \frac{1}{2}\right)^{1/2},$$

$$0 < (n-m)t \leq \pi,$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h \omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n-m}{2\Big((n-m)h - \sin(n-m)h\Big)}\right\}^{1/2},$$

$$0 < (n-m)h \leq \pi/2.$$

Теоремаи 1.2.2 натиҷаи умумикардашудаи яке аз натиҷаҳои С.Б.Вакарчук[9] барои маҷмӯи $L_2^{(m)}[0,2\pi]$ дар ҳолати $\mathscr{H}_2^{(m)}(U)$ мебошад.

Дар теоремаи дар поён овардашуда сарҳади саҳеҳи болоии характеристикаи аппраксиматсионии экстремалӣ, ки дар он модули бефосилагӣ на фақат дар тахти аломати интеграл, балки берун аз он ҳам аст, ҳисоб карда шудааст.

Теоремаи 1.2.4. *Барои ҳаргуна $n \in \mathbb{N}, m, s \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq s$ ва $0 < h \leq \pi/(n-m)$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} + (n-m)^2 \int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(n-m)t}.$$

Теоремаи 1.2.6 *Барои ҳаргуна $n \in \mathbb{N},\ m, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > m \geq s$ ва $0 < h \leq \pi/(n-m)$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\left(\alpha_{n,m}^2/\alpha_{n,s}^2\right) E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right) dt} = \frac{n-m}{2\Big[(n-m)h - Si((n-m)h)\Big]}.$$

Дар параграфи сеюми боби якум теоремаҳо барои модули бефосилагии тартиби r-ум исбот карда шудаанд. Натиҷаҳои асосии ин параграфро меорем.

Теоремаи 1.3.2. *Бигузор $n, r \in \mathbb{N},\ m, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > m \geq s$ ва $0 < (n-m)h \leq \pi$ бошанд. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{h^r\left(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\right) E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{r/2}} = \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}.$$

Теоремаи 1.3.2 дар ҳолати хусусӣ ($s = 0$) натиҷаи В.В.Шалаев[10] – ро дарбар мегирад, ки барои маҷмӯи функсияҳо аз $L_2^{(m)}$ исбот карда шудааст.

[9]Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 11–19.

[10]Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 1. С. 125–129.

Дар параграфи сеюм теоремаи умумии зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 1.3.4 *Барои ҳаргуна $n, r \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$ ва адади ихтиёри $h \in \mathbb{R}_+$, ки барояш $0 < h \leq \pi/(n-m)$ аст, баробарии*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\, E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right)\, dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\Big((n-m)h - Si((n-m)h)\Big)}\right\}^{r/2} \tag{9}$$

ҷой дорад. Дар ҳолати хусусӣ, аз (9) ҳангоми $h = \pi/(n-m)$ ҳосил мекунем:

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)\, E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/(n-m)} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right)\, dt\right\}^{r/2}} = \left\{\frac{n-m}{2\Big(\pi - Si(\pi)\Big)}\right\}^{r/2}, \tag{10}$$

ки дар ин ҷо $Si(u) := \int\limits_0^u \frac{\sin t}{t}\, dt$ *– синуси интегралӣ мебошад.*

Қайд мекунем, ки аз баробарии (10) дар асоси функсияи афзуншаванда будани модули бефосилагии тартиби r-ум $\omega_r(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}$ барои ҳамаи қиматҳои $t \in (0, \pi/(n-m)]$ нобаробарии умумикардашудаи Ҷексон–Стечкинро ҳосил мекунем

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,s}} E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{\frac{n-m}{2\Big(\pi - Si(\pi)\Big)}\right\}^{r/2} \omega_r\big(\Phi^{(m)}, \pi/(n-m)\big)_{\mathscr{H}_2}. \tag{11}$$

Беҳтарин будани доимии $\Big\{2(\pi - Si(\pi))\Big\}^{-r/2}$ барои ҳамаи қиматҳои $n, m, r \in \mathbb{N}$ дар нобаробарии Ҷексон–Стечкин исбот карда нашуд, лекин барои баҳои болоии $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$ хурдтарин мебошад, ки ин имконияти истифодаи нобаробарии (11)-ро дар масъалаҳои таҳлили ададӣ осон мегардонад.

Дар параграфи чоруми боби якум як қатор масъалаҳои экстремалӣ, ки ба наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияи $\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ бахшида шудаанд, суръати ба нол майлкуниашон бо модули бефосилагии аз ҳосилаи $\Phi_{2,a}^{(m)}(t)$ дида баромада мешавад.

Теоремаҳои дар параграфҳои гузашта исботшуда, имконият медиҳанд, ки дар параграфи панҷум масъалаи экстремалии зеринро ҳал намоем: *агар* $\mathfrak{M}^{(m)} \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$ *(ё* $\mathfrak{M}_a^{(m)} \subset \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$*) ягон маҷмӯи функсияҳои* $\left\{\Phi(z)\right\}$ *бошад, он гоҳ ёфтани қимати аниқи бузургиҳои зерин талаб карда мешавад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(m)}) := \mathscr{E}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(m)}, \mathscr{T}_{n-1})_{\mathscr{H}_2} = \sup\left\{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:\ \Phi \in \mathfrak{M}^{(m)}\right\}, \qquad (12)$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}_a^{(m)}) := \mathscr{E}^{(s)}(\mathfrak{M}_a^{(m)}, \mathscr{T}_{n-1})_{\mathscr{H}_2} = \sup\left\{E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:\ \Phi \in \mathfrak{M}_a^{(m)}\right\}. \qquad (13)$$

Хотирасон мекунем, ки бузургиҳои (12) ва (13) мувофиқан бузургиҳои наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии якҷояи маҷмӯҳои $\mathfrak{M}^{(m)}$ ва $\mathfrak{M}_a^{(m)}$ бо ёрии зерфазои бисёраъзогиҳои тригонометрии $\mathscr{T}_{n-1}$ – ро ифода менамоянд.

Функсияи дар нимтири $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ бефосила ва афзуншавандаи $\Psi(t)$, ки барояш $\Psi(0) = 0$ аст, функсияи мажорантӣ ё худ мажоранта меномем. Маҷмӯи ҳамаи мажорантҳоро ба воситаи $\mathfrak{N}$ ишорат мекунем. Бо ёрии $\mathfrak{N}_k,\ k \in N$ маҷмӯи мажорантҳо $\Psi \in \mathfrak{N}$ ишорат мекунем, ки барояшон шартҳои зерин иҷро мегарданд:

$$\textbf{I}.\ \frac{\Psi(\tau_1)}{\tau_1^k} < \frac{\Psi(\tau_2)}{\tau_2^k},\ \text{агар}\ \ 0 < \tau_1 < \tau_2 < \pi; \qquad \textbf{II}.\ \lim_{\tau \to 0+} \frac{\Psi(\tau)}{\tau^k} = 0.$$

Барои ихтиёри ададҳои натуралии m, r ва $0 < h \leq 2\pi$ синфи функсияҳои зеринро дохил мекунем:

$$W_r^{(m)}(h) := \left\{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}:\ \int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\,dt \leq 1\right\},$$

$$W_r^{(m)}(\Psi) := \left\{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}:\ \left(\int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)^{r/2} \leq \Psi(h)\right\},$$

ки дар ин ҷо мажорантаи $\Psi \in \mathfrak{N}_2$ аст. Ба монанди ҳамин, синфи функсияҳои $\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ муайян карда мешаванд.

Теоремаи 1.5.1. *Барои ҳаргуна* $r, n, m \in \mathbb{N},\ n > m, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ *ва ихтиёри* $h > 0$, *ки барояш* $0 < (n-m)h \leq \pi$ *аст, баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\Big(W_r^{(m)}(h)\Big)_{\mathscr{H}_2} := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} h^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2},$$

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\Big(W_r^{(m)}(\Psi)\Big)_{\mathscr{H}_2} := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} h^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \Psi(h).$$

Аз теоремаи 1.5.1 натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷаи 1.5.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 1.5.1 *барои қиматҳои* $h = \pi/(n-m),\ n > m,\ n, m \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s,$ *ва* $n > m \geq s$ *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\left(W_r^{(m)}\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}},$$

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\left(W_r^{(m)}(\Psi)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right).$$

Натиҷаҳои ба ҳамин монанд барои маҷмӯи $\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ исбот карда шудаанд.

Боби дуюми диссертатсия, ки аз ду параграф иборат аст, ба ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои баъзе синфи функсияҳо, ки аз тасдиқотҳои теоремаҳои дар боло нишондодашуда бармеоянд, бахшида шудаст.

Барои ҳаргуна $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ ва мажорантаи додашудаи Ψ_1 синфи функсияҳои $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ – ро муайян мекунем, ки шарти зеринро қаноат мекунонанд:

$$\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1) := \left\{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} :\ \int_0^h \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt \leq \Psi_1(h),\ \forall h > 0\right\}.$$

Таърифҳои дар оянда ба мо лозим бударо меорем.

Бигузор $S := \Big\{\varphi : \|\varphi\|_{\mathscr{H}_2} \leq 1\Big\}$ — курраи воҳидӣ дар $\mathscr{H}_2$ бошад; Q — зермаҷмӯи барҷастаи марказӣ-симметрӣ аз $\mathscr{H}_2$ бошад; $\Lambda_n \subset \mathscr{H}_2$ — зерфазои n-ченака; $\Lambda^n \subset \mathscr{H}_2$ — зерфазои ҳамченакаи n; $\mathscr{L} : \mathscr{H}_2 \to \Lambda_n$ — оператори бефосилаи хаттӣ, ки элементҳои фазои $\mathscr{H}_2$ – ро ба Λ_n инъикос мекунад; $\mathscr{L}^{\perp}:\mathscr{H}_2\to\Lambda_n$ — оператори хаттии бефосилаи инъикоскунанда $\mathscr{H}_2$ ба зерфазои Λ_n бошад. Бузургиҳои

$$b_n(Q,\mathscr{H}_2)=\sup\Big\{\sup\{\varepsilon>0:\varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset Q\}:\Lambda_{n+1}\subset\mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d^n(Q,\mathscr{H}_2)=\inf\Big\{\sup\{\|\Phi\|:\ \Phi\in Q\cap\Lambda^n\}:\Lambda^n\subset\mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\delta_n(Q,\mathscr{H}_2)=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\{\|\Phi-\mathscr{L}\Phi\|:\Phi\in Q\}:\mathscr{L}\mathscr{H}_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset\mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d_n(Q,\mathscr{H}_2)=\inf\Big\{\sup\{\inf\{\|\Phi-g\|:g\in\Lambda_n\}:\Phi\in Q\}:\Lambda_n\in\mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\Pi_n(Q,\mathscr{H}_2)=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\{\|\Phi-\mathscr{L}^{\perp}f\|:\Phi\in Q\}:\mathscr{L}^{\perp}\mathscr{H}_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\in\mathscr{H}_2\Big\}$$

мувофиқан n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, хаттӣ, гелфандӣ ва проексионӣ номида мешаванд. Азбаски $\mathscr{H}_2$ фазои гильбертӣ мебошад, он гоҳ дар байни n-қутрҳои дар боло овардашуда муносибатҳо[11]-и зерин ҷой доранд:

$$b_n(Q,\mathscr{H}_2)\le d^n(Q,\mathscr{H}_2)\le d_n(Q,\mathscr{H}_2)=\delta_n(Q,\mathscr{H}_2)=\Pi(Q,\mathscr{H}_2).$$

Қайд мекунем, ки ба ҳисобкунии қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни синфи функсияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_p$, $1\le p\le\infty$, тааллуқ доранд, як қатор корҳои илмӣ, аз ҷумла В.М.Тихомиров[12], Л.В.Тайков[1,2], Н.Айнуллоев ва Л.В.Тайков[13], М.З.Двейрин[14], Ю.А.Фарков[3], S.D.Fisher, M.I.Stesin[15], A.Pinkus[11], С.Б.Вакарчук[4,16,17], М.Ш.Шабозов ва О.Ш.Шабозов[18], М.Ш.Шабозов ва Г.А.Юсупов[19], К.Ю.Осипенко ва М.И.Стесин[20] ва ғайраҳо бахшида шудаанд.

---

[11] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. // 1985. 252 p.

[12] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № №3(93). С. 81–120.

[13] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.

[14] Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге// Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев: Наукова думка. 1975. Вып. 6. С.41-54

[15] Fisher S.D., Stesin M.I. The n-widths of the unit ball of H^q // Journ. Approx. Theory.. 1991. V. 67, № 3. P. 347–356.

[16] Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2// Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42, № 7. С. 873-881.

[17] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций// Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.

[18] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$// ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466-469.

[19] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций// ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747-749.

[20] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 4. С. 95–104.

Натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби дуюмро меорем.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор $r, n, m \in \mathbb{N}$ ва барои қимати адади $h > 0$ шарти $0 < (n-m)h \leq \pi$ иҷро гардад. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}(h), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(W_r^{(m)}(h)\right)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}},$$

ки дар ин ҷо $\gamma_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Аз теоремаи 2.2.1 чунин натиҷа мебарояд.

Натиҷаи 2.2.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи* 2.2.1, *барои $h = \pi/(n-m)$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}\left(\frac{\pi}{n-m}\right), \mathscr{H}_2\right) = \left\{\frac{n-m}{\sqrt{\pi^2-4}}\right\}^r \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}.$$

Теоремаи 2.2.2. *Бигузор мажорантаи $\Psi \in \mathscr{H}_2$ барои ҳаргуна $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Psi(h)}{\Psi(\pi/(n-m))} \geq \frac{1}{\pi^2-4}\times$$

$$\times\begin{cases} ((n-m)h)^2 - 2\Big(1-\cos(n-m)h\Big), & \text{агар } \ 0 < (n-m)h \leq \pi, \\ \pi^2 - 4 + (nh-\pi)^2, & \text{агар } \ (n-m)h > \pi. \end{cases} \tag{14}$$

Он гоҳ барои ҳаргуна ададҳои $r, n \in \mathbb{N}$ ва $m \in \mathbb{Z}_+$ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}(\Psi), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(W_r^{(m)}(\Psi)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2},$$

ки дар ин ҷо $\gamma_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад. Маҷмӯи мажорантҳо, ки шарти (14) *– ро қаноат мекунанд, гайрихолӣ мебошанд.*

Дар соли 1910 А.Лебег[21] мафҳуми модули бефосилагӣ $\omega(f,t)_C$ – ро барои функсияҳои дар $[0, 2\pi]$ бефосила, яъне барои $f \in C[0, 2\pi]$ дохил намуда буд. Инчунин бори аввал аз тарафи ӯ баҳои ба нол майл кардани коэффисиентҳои

[21]Lebesgue H. Sur la representation trigonometrigua approchree des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France.. 1910. V. 38, P. 184–210.

Фуре $a_n(f)$ ва $b_n(f)$ ҳангоми $n \to \infty$ дар мафҳуми модули бефосилагӣ дода шуда буд. Барои синфи функсияҳои дар ин параграф омӯхташаванда чунин савол низ диққати махсусро ҷалб мекунад. Масалан, аз теоремаи 2.2.2 ба сифати натиҷа теоремаи зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 2.2.3. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи* 2.2.2 *ҷой дошта бошанд. Он гоҳ барои ҳаргуна ададҳои $r, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ баробарии*

$$\sup\Big\{|c_n(\Phi)|:\ \Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)\Big\} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2}$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо $c_n(\Phi)$ — коэффисиенти Тейлори функсияи Φ мебошад.

Теоремаи 2.2.4. *Бигузор мажорантаи $\Psi_1(t)$ барои ҳаргуна ададҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/2(n-m))} \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi-2}\begin{cases}(n-m)t - \sin(n-m)t, & \text{агар}\ \ 0 < (n-m)t \leq \pi,\\ 2(n-m)t - \pi, & \text{агар}\ \ (n-m)t > \pi.\end{cases}$$

Он гоҳ барои ҳаргуна ададҳои $r \in \mathbb{Z}_+$ баробариҳои

$$\gamma_n\left(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\right) = E_{n-1}\left(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\right) = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{\pi-2}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2}$$

ҷой доранд, ки дар ин ҷо $\gamma_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Тасдиқоти теоремаи 2.2.4 – ро истифода бурда, ба сифати натиҷа теоремаи зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 2.2.5. *Агар ҳамаи шартҳои теоремаи* 2.2.4 *иҷро гарданд, он гоҳ барои ҳаргуна ададҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup\Big\{|c_n(\Phi)|:\ \Phi \in \mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)\Big\} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{\pi-2}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2}.$$

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо бо ёрии бисёрузваҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо барои баъзе синфи функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудааст;

- нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ ва интегралҳое, ки қимати миёнаи модули бефосилагии тартиби r-ум аз қимати сарҳадиро дар бар мегиранд, ёфта шудаанд;

- қимати n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфондӣ, хаттӣ ва проексионии синфи функсияҳои муайяншуда, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода шудаанд, ҳисоб карда шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда, ҳам арзиши назариявӣ ва ҳам амалӣ доранд. Усулҳо ва натиҷаҳои дар он овардашуда метавонанд барои ҳалли дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ барои функсияҳои аналитикии бисёртағйирёбанда истифода шаванд. Бобҳои рисола метавонанд алоҳида мазмуни курсҳои махсусро барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, ташкил диҳанд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-M] Заргаров Дж.Дж. Точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №10. – С.785-789.

[2-M] Заргаров Дж.Дж. О точных значениях n-поперечников классов аналитических в круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2012. – №2(147). – С.16-21.

[3-M] Заргаров Дж.Дж. Значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.113-115.

[4-M] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближение аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров // ДАН РТ. – 2020. – Т.63. – №5-6. – С.294-300.

Дар дигар нашрияҳо:

[5-M] Заргаров Дж.Дж. Наилучшие приближения аналитических функций и значения поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывностями в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Вестник Хорогского государственного университета. – Естественные науки. – 2012. – Серия 1. – №9. – С.9-16.

[6-M] Заргаров Дж.Дж. О значении поперечников классов аналитических функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). – С.55-56.

[7-М] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.). – С.60-62.

[8-М] Заргаров Дж.Дж. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров, Ф.Д. Давлатбеков // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» Худжанд: Изд-во «Меъроҷ». 2014. – С.46-48.

[9-М] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.). – С.22-24.

[10-М] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем полиномиальном приближении функций $f \in H_p$, структурные свойства которых определяются обобщенными модулями непрерывности m-го порядка [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения» (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.72-74.

[11-М] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди [Текст] / Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции «Теория приближений и её применения» (Днепр, Украина, 16-19 сентября 2020 г.) – С.75-76.

АННОТАТСИЯ
ба диссертатсияи Заргаров Ҷамшед Ҷангиевич дар мавзӯи «Наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳои аналитикӣ ва ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалӣ дар фазои Харди» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *функсияи аналитикӣ, фазои Харди, модули бефосилагии тартиби r-ум, қиматҳои сарҳадӣ, наздиккунии беҳтарин, нобаробарии Ҷексон – Стечкин, n-қутрҳо.*

Мақсади кор. Ҳадафи тадқиқот аз ёфтани қиматҳои дақиқи ҳудуди болоии беҳтарини наздикшавии функсия ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути полиномҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо дар баъзе синфҳои функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_2$ тааллуқ доранд, инчунин ҳисоб кардани қиматҳои аниқи қутрҳои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд, иборат мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Дар дисертатсия усулҳои муосири назарияи аппраксиматсия ва усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии соҳаи функсияҳои аналитикӣ, бахусус усули Н.П.Корнейчук, баҳодиҳӣ аз боло наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо бо ёрии зерфазои бисёраъзогиҳо бо ченаки фиксиронидашуда ва усули аз тарафи В.М.Тихомиров коркардашуда баҳодиҳии аз поёни маҷмӯи қутрҳо дар фазоҳои гуногуни нормиронидашуда истифода бурда шудаанд.

Навигариҳои илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия овардашуда нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин ҳосил карда шудаанд:

- қиматҳои аниқи ҳудуди саҳеҳи болоии наздиккунии якҷояи беҳтарини функсияҳои аналитикӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо бо ёрии бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо дар баъзе синфи функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди $\mathscr{H}_2$ тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудаанд;
- нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ ва интегралҳои қимати модули бефосилагии тартиби r-уми қиматҳои сарҳадиро дарбаргиранда дар фазои Харди ёфта шудаанд;
- қиматҳои аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гельфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфи муайяни функсияҳо, ки бо ёрии модули бефосилагии тартиби олӣ дода шудаанд, ҳисоб карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия бадастовардашуда ҳам аҳамияти назариявӣ ва ҳам аҳамияти амалӣ доранд. Усулҳо ва натиҷаҳои дар он овардашуда барои ҳалли дигар масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи аппраксиматсия васеъ татбиқ карда мешаванд. Бобҳои диссертатсия дар алоҳидагӣ ҳамчун мундариҷаи курсҳои махсус барои донишҷӯён ва аспирантони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, истифода бурда мешаванд.

АННОТАЦИЯ
диссертации Заргарова Джамшеда Джангиевича на тему «Наилучшее совместное приближение аналитических функций и решения некоторых экстремальных задач в пространстве Харди», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *аналитическая функция, пространства Харди, модуль непрерывности r-го порядка, граничные значения, наилучшее приближение, неравенства Джексона–Стечкина, n-поперечники.*

Цель работы. Целью исследования является нахождения точных значений верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$, а также вычисление точных значений поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Методы исследования. В работе используются современные методы теории аппроксимации, а именно метод Н.П.Корнейчука оценка сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие результаты:

- вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего совместного среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые с весом значения модулей непрерывности r-го порядка граничных значений функций;
- вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников некоторых классах аналитических функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты работы могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

SUMMARY

of the dissertation of Zargarov Jamshed Jangievich about «Best joint approximation of analytical functions and solutions to some extreme problems in Hardy space», submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex, and functional analysis

Key words: *analytic function, Hardy space, modulus of continuity of r-th order, boundary values, best approximation, Jecson-Stechkin eniquality, n-widths.*

Work objectivs. The aim of the study is to find the exact values of the upper bounds of the best joint approximations of the function and its successive derivatives by polynomials and their corresponding derivatives on some classes of analytic functions in the unit disc belonging to the Hardy space $\mathscr{H}_2$, and also to calculate the exact values of the widths of the classes of functions defined by the moduli of continuity of higher order.

Research methods. The dissertation uses modern methods of the theory of approximation and methods for solving extremal problems of the theory of analytic functions, namely, the method of N.P. Korneichuk, an upper bound for the best approximations of classes of functions by a subspace of polynomials of a fixed dimension and a lower bound developed by V.M. Tikhomirov for the widths of sets in various normed spaces.

Scientific novelty. All the results obtained in the dissertation work are new. The following results were obtained:

- the exact values of the upper bounds of the best joint approximations of functions and its successive derivatives by polynomials and their corresponding derivatives on some classes of analytic functions in the unit disc belonging to the Hardy space $\mathscr{H}_2$ are calculated;
- new exact inequalities were found between the values of the best joint mean-square approximation of analytic functions in the unit disk and integrals containing the values of the r-th order moduli of continuity averaged with weight of the boundary values of the functions;
- exact values of Bernstein, Kolmogorov, Gelfand, linear and projection n-widths of some classes of analytic functions defined by moduli of continuity of higher order are calculated.

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation work have both theoretical and applied significance. The methods and results presented in it can be used to solve other extremal problems of approximation theory. The chapters of the dissertation separately can compose the content of special courses for undergraduate and graduate students of higher educational institutions studying in the specialty of «mathematics».

Сдано в набор 25.11.2020. Подписано в печать 26.11.2020.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура литературная.
Формат 60x84 $_{1/16}$. Услов. печ. л.1,3.
Тираж 100 экз. Заказ № 758.

Отпечатано в типографии РТСУ,
734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе,
ул. Мирзо Турсун-заде, 30

Ба чопхона 25.11.2020. супорида шуд. Ба чопаш 26.11.2020.
имзо шуд. Андозаи 60x84 $_{1/16}$. Ҷузъи чопӣ 1,2.
Адади нашр 100. Китоб дар чопхонаи
«ДСРТ» нашр шудааст. 734025,
ш. Душанбе