РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК-517.968.2 На правах рукописи

Эшонкулов Алишер Алигулович

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СДВИГОМ

(Повторная защита)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 3

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Джангибеков Гулходжа**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой**
доктор физико-математических наук,
профессор Бохтарского государсвенного университета имени Н.Хусрава

Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и информатики Технологического университета Таджикистана

Оппонирующая организация: Таджикский государственный педагогический университет им.С.Айни

Защита состоится *24 мая 2023 г. в 15:30 часов* на заседании Диссертационного совета 6D. КОА-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан "____" ____________ 2023 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор  **Нуров И.Дж.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Известно, что двумерные сингулярные интегральные уравнения по ограниченной области с операторами типа Михлина – Кальдерона – Зигмунда

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \tag{1}$$

где D – ограниченная область комплексной плоскости, играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций (И.Н.Векуа[1]), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс[2], М.Шиффер[3]), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.Боярского[4], А.Д.Джураев[5,6,7], В.Н.Монахова[8]). Разработанная Р.В.Дудучавой[9] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_n и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее – к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса уравнений с операторами ви-

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[3] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. 1962, с. 193 – 218.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960.

[5] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, с. 1251 – 1254.

[6] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, Тбилиси, 1972 с.104 – 118.

[7] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[8] Монахов В.Н.) Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

[9] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76, 199- 214.

да (1) в работах И.И.Комяка[10,11,12], А.Джураева[7], Н.Н.Василевского[13,14,15], Г.Джангибекова[16,17,18], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова[19] установлены эффективные необходимые и достататочные условия нетеровости и получены формулы для подсчета индекса.

Что касается двумерных сингулярных уравнений со сдвигом, то их изучение началось сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении выполнены Г. Джангибековым[20,21,22]. Указанный автор методом банаховых алгебр исследовал некоторые классы двумерных сингулярных интегральных уравнений, левая часть которых наряду с операторами сингулярного интегрирования S_n, содержит операторы с поли-кернфункциями Бергмана B_n, а также операторы сдвига $(Wf)(z) = f(z)$ и комплексного сопряжения $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$. Р.В.Дудучава, А.И.Сагинашвили и Е.М.Шаргородский[23,24] изучили вопрос нетеровости четырехкомпонентно-

[10] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074 – 1077.

[11] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488 – 491.

[12] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк//ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307 – 1310

[13] Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР. 1983.т.271, №5. 1041 – 1044 с.

[14] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2, с. 12 – 21.

[15] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем. 1986, №3, с. 33 – 38.

[16] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах //Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[17] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. Матем., 1992, №9, с. 25 – 37.

[18] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415 – 417.

[19] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т. 43, вып.8, с. 171 – 172.

[20] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // Математические заметки, 1991, т. 49, в. 4, с. 150 – 152,

[21] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом,// ДАН РТ 1991, т. 34, №4, с. 399 – 403.

[22] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом,//ДАН РТ 1991, т. 34, №9, с.545 – 550.

[23] Дудучава Р.В.,Сагинашвили А.И.,Шаргородский Е.М. О двумерных сингулярных операторах со сдвигом,// Труды Тбилисского Математического института им. А.Размадзе, 1995, т. 103, с. 3 – 13.

[24] Duduchava R., Saginashvili A., Shargorodsky E. On two-dimensional singular integral operators with conformal Carleman shift.// Jornal Operator Theory, 1997, v. 37, pp. 263 –279.

го оператора A с операторами S и W методом сведения к системе интегральных уравнений без сдвига, а также полученные результаты распространили для операторов с карлемановским сдвигом порядка n. В работе В.А.Мозела[25] изучена алгебра поли-кернооператоров Бергмана с карлемановским сдвигом порядка n.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств новых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом и с непрерывными коэффициентами.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области со сдвигом с непрерывными коэффициентами.

[25]Мозель В.А. Банахова алгебра, порожденная конечным числом поликернооператоров Бергмана, непрерывными коэффициентами и конечными группами циклов.// Укр.мат. журн., 2010, т. 62, №9, с. 1247 – 1255.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одной системы двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс;

- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;

- в лебеговых пространствах изучены свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденные сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформном сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса;

- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций", посвященной 90 – летию академика АН РТ, лауреата Государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27 – 28 февраля 2018 г.);
- международной научной конференции "Математический анализ и его приложения", посвященной 80 – летию профессора Б.Имомназарова (Душанбе, 10 – 11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Филиал Московского государственного университета в г.Душанбе им. М.В.Ломоносова, Душанбе, 2019 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами", посвященной 70 – летию доктора физико-математических наук, профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.)
- международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", посвященной 70 – летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г.);

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а 5 статей в материалах международных конференций.

Работы [1] –[3] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на пять параграфов, и составляет 82 страницы машинописного текста. Список цитированной литературы состоит из 59 наименований. Работа набрана на LaTeX и в ней для удобства применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации. Затем приведено описание результатов диссертации.

§ 1 **главы 1** носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В § 2 в пространстве n – мерных вектор-функций

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D),$$

компоненты которых $f_k(z), k = 1, 2, \dots, n$ принадлежат пространству

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f_k(z) : |z|^{\beta-2/p} f_k(z) = F_k(z) \in L^p(D),\ ||f_k||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F_k||_{L^p}\},$$

$1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$ рассматривается следующий оператор

$$A = aI + bW + \sum_{m=1}^{N} (c_m I + d_m W) S_{2m} + T, \tag{2}$$

где S_{2m} обозначает двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка $2m$:

$$(S_{2m} f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

$m-$ натуральное число, ds_ζ - элемент плоской меры Лебега; D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова $\Gamma; \overline{D} = D \bigcup \Gamma$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, T – вполне непрерывный оператор, N – натуральное число, $a(z), b(z), c_m(z), d_m(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n, $W : L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ – оператор карлемановского сдвига:

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ – однолистное конформное отображение области D на себя со свойством $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) = z_0$. Отметим, что действие матрицы на вектор в (2) понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор и сходимость в пространстве вектор-функций означает покоординатную сходимость. Некоторые классы уравнений со сдвигом, содержащих операторы S_{2m}, исследованы в работах [20–25]. В частности, в [23] изучен оператор A в скалярном случае, когда $N = 1$.

Исследование оператора A осуществляется с помощью локального метода Симоненко[26] , посредством перехода от исходного оператора со сдвигом A, к оператору без сдвига $\mathfrak{M}$.

Доказывается, что имеет место

Лемма 1.1. *Пусть* $f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$. *Тогда оператор*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^m W S_{2m} - S_{2m} W$$

вполне непрерывен в $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$.

Наряду с оператором A из (2) рассматривается следующий сопутствующий ему оператор

$$\mathcal{A} = aI - bW + \sum_{m=1}^{N}(c_m I - d_m W)S_{2m} + T. \tag{3}$$

Лемма 1.2. *Если один из двух операторов* A *и* $\mathcal{A}$ *нётеров в пространстве* $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, *то и второй оператор является нётеровым.*

Введем теперь следующие пространства $2n$ - мерных векторов:

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f^1(z), f^2(z)) :\ f^1(z), f^2(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), f(\alpha(z)) :\ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), -f(\alpha(z)) :\ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\}.$$

Лемма 1.3. *Пространство* $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ *распадается в прямую сумму подпространств* $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ *и* $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \oplus L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D).$$

[26]Симоненко И.Б.. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений //Изв. АН СССР. сер. матем., 1965, т. 29, №3, №4, с. 567 – 580, 757 – 782.

Далее в пространстве $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D), (0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{M}$, соответствующий оператору A из (2):

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{a} I + \sum_{m=1}^{N} \mathfrak{d}_m S_{2m} + T, \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{a}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{d}_m(z) = \begin{pmatrix} c_m(z) & d_m(z)(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \\ d_m(\alpha(z)) & c_m(\alpha(z))(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \end{pmatrix},$$

Лемма 1.4. *Подпространства $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ инвариантны относительно оператора $\mathfrak{M}$. Сужение $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}}$ оператора $\mathfrak{M}$ на подпространство $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ эквивалентно в смысле нетеровости оператору A, а сужение $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}}$ оператора $\mathfrak{M}$ на подпространство $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ эквивалентно в смысле нётеровости сопутствующему оператору $\mathcal{A}$.*

Символом $\mathscr{G}_A(z, \sigma)$ оператора A вида (2) назовём блочную матрицу-функцию определенную по формуле

$$\mathscr{G}_A(z, \sigma) =$$

$$\begin{pmatrix} a(z) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m c_m(z) & b(z) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m d_m(z) \\ b(\alpha(z)) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m d_m(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m c_m(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

где $z \in \overline{D}, \ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$.

Теорема 1.1. *Для нётеровости оператора A из (2) в пространствах $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(0 < \beta < 2, \ 1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*

$$1) \det \mathscr{G}_A(z, \sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \overline{D}, \ |\sigma| = 1,$$
$$2) \det \mathscr{G}_A(z, \sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \Gamma, \ |\sigma| < 1.$$

При этом индекс оператора равен нулю.

Замечание. *Из критерии нетеровости операторов вида (2) в пространстве $L^2(D)$, автоматически следует их нетеровость в пространствах Бесова-Трибеля-Лизоркина $B^s_{p,q}(D), F^s_{p,q}(D)$.*

В § **2.1. главы 2** в лебеговом пространстве $L^p(D)(1<p<\infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными интегральными операторами с нечетной характеристикой, вида

$$\mathcal{A}=aI+bS_{-n}K+cB_n+d\overline{B}_n+eB_nK+q\overline{B}_nK+T, \tag{5}$$

где a,b,c,d,e,q – непрерывные в $\overline{D}$ функции, T – вполне непрерывный оператор,

$$(S_{-n}f)(z)=\frac{|n|}{2\pi i^{|n|}}\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{e^{-in\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta\equiv(S_{-1}^n f)(z),$$

$\theta=\arg(\zeta-z)$, $|n|=2m+1$, $(Kf)(z)=\overline{f(z)}$, $\overline{B}_n=KB_nK$, B_n – поликерн оператор Бергмана

$$(B_nf)(z)=\iint\limits_D B_n(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta, \tag{6}$$

где ядро оператора $B_n(z,\overline{\zeta})$ в случае единичного круга с центром в начале координат, определяется по формуле[27]

$$B_n(z,\overline{\zeta})=\frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC^k_{\frac{n}{2}}C^k_{\frac{n}{2}+k-1}\left|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}\right|^{2(k-1)},\quad \alpha=\arg(1-z\overline{\zeta}); \tag{7}$$

Доказывается, что имеют место следующие леммы:

Лемма 2.1. *Пусть $a(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Тогда операторы $S_{-n}a-aS_{-n}$, B_na-aB_n вполне непрерывны в $L^p(D), 1<p<\infty$.*

Лемма 2.2. *Пусть $f(z)\in L^p(D), 1<p<\infty$. Тогда операторы $S_{-n}\overline{B}_n$, $B_nS_{-n}, B_n\overline{B}_n$, $\overline{B}_nS_{-n}B_n, B_n^2-B_n$ являются вполне непрерывными в $L^p(D)$ операторами.*

Лемма 2.3. *Интегральные операторы B_n, $S_{-n}B_n$, $\overline{B}_nS_{-n}$, $S_{-n}B_nS_n$ при $n=2m+1$ не являются вполне непрерывными операторами в пространстве $L^p(D)$, $1<p<\infty$, причем их ядра теряют непрерывность лишь при совпадении обеих переменных на границе Γ.*

В § **2.2. главы 2** рассматривается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная всеми действующими в пространстве $L^p(D)(1<p<\infty)$ операторами, вида $\mathcal{A}$ из равенства (5), где все коэффициенты непрерывны в $\overline{D}$ функции,

[27] Джангибеков Г., Савлатов Ф. О поли-кернфункциях ограниченной области и их связь с сингулярными интегральными операторами //Вестник филиала МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 2018, №1, с. 11 – 40.

$T \in \mathfrak{J}$, а через $\mathfrak{J}$ обозначен идеал, содержащийся в $\mathcal{R}$, вполне непрерывных операторов. В силу того, что $\mathcal{R}$ одновременно содержит операторы $\overline{B}_n, \overline{B}_n K, B_n, B_n K$ и $S_{-n}K$, алгебра $\mathcal{R}$ не исчерпывается одними только операторами, вида $\mathcal{A}$. Это связано с тем, что в алгебру $\mathcal{R}$ входят, например, операторы $S_{-n}B$ и $\overline{B}_n S$, которые в силу леммы 2.3. не являются вполне непрерывными в $L^p(D)$. Поэтому при описании алгебры $\mathcal{R}$ возникает необходимость в изучении операторов более сложной природы, а именно, операторов вида

$$\begin{gathered}\mathcal{M} = aI+bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + \lambda S_{-n}B_nK+ \\ +\mu\overline{B}_nS_{-n}K + \nu S_{-n}B_nS_n + \gamma S_{-n}B_n + \delta B_nS_n + T,\end{gathered} \tag{8}$$

где все коэффициенты – непрерывные в $\overline{D}$ функции.

Отметим, что при $b \equiv d \equiv q \equiv 0$, оператор $\mathcal{A}$ из (5) ранее был изучен в работе Г. Джангибекова[28]

Л е м м а 2.4. *Оператор $\mathcal{M}$, заданный формулой (8), является элементом алгебры $\mathcal{R}$; и обратно, всякий оператор из алгебры $\mathcal{R}$ представим в виде (8).*

Каждому оператору $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix},\ \text{где}\ \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z \in \overline{D},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t)+c(t) & e(t) & \delta(t) \\ \overline{q(t)} & \overline{a(t)} + \overline{d(t)} & \overline{-b(t)} + \overline{\mu(t)} \\ \gamma(t) & a(t)+\lambda(t) & a(t)+\nu(t) \end{pmatrix},\ t \in \Gamma,$$

Л е м м а 2.5. *Символ $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ оператора $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}$.*

Т е о р е м а 2.1 *Для того, чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым оператором в пространстве $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0 \ \text{при}\ z \in \overline{D},\ \det D(t) \neq 0\ \text{при}\ t \in \Gamma. \tag{9}$$

При выполнении этих условий, индекс оператора равен

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi}[\arg\det D(t)]\Big|_{\Gamma}.$$

[28]Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области //Доклады РАН, 2002, т 383, №1, с. 7 – 9.

В § **2.3**. **главы 2** в векторном лебеговом пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными операторами с нечетными характеристиками со сдвигом, вида

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_l(z)B_{2l+1} + T, \quad m \geq 0 - \text{целое}, \qquad (10)$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c_l(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы-функции порядка ν, T – вполне непрерывный оператор,

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta$$

$\theta = \arg(\zeta - z)$, B_n – поликерн-оператор Бергмана из (6), (7), оператор W – является оператором антиконформного сдвига, то есть

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ антиконформное отображение области $\overline{D}$ на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) = z_0$.

Отметим, что некоторые классы уравнений со сдвигом, содержащих операторы S_n, изучены в работах [20 – 25]. Все указанные работы касаются случая, когда оператор S_n имеет четную характеристику. Операторы со сдвигом и с нечетной характеристикой ранее не были исследованы.

Лемма 2.6. *Пусть $f(z) \in L^{\nu,p}(D)(1 < p < \infty)$. Если $\alpha(z)$ является антиконформным отображением области D на себя, удовлетворяющим условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$, тогда операторы*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} WS_{2m+1} - S_{-(2m+1)}W$$

и

$$WB_{2l+1} - B_{-(2l+1)}W, \quad B_{-(2l+1)}WS_m, \ WS_mB_{-(2l+1)} \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

вполне непрерывны в $L^{\nu,p}(D)$.

Теперь каждому оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа блочную квадратную матрицу-функцию

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}, \quad t \in \Gamma,$$

где

$$c(t)=\begin{pmatrix} a(t)+\sum_{l=1}^{m}c_l(t) & 0 & 0\dots & 0\\ c_1(t) & a(t)+\sum_{l=2}^{m}c_l(t) & 0\dots & 0\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\\ c_1(t) & c_2(t) & \dots & a(t)+c_m(t)\end{pmatrix},\ t\in\Gamma.$$

Таким образом, матрица-функция $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D}\times\Gamma$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех символов операторов из $\mathcal{R}$. Непосредственной проверкой устанавливается, что имеют место равенства

$$\sigma_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(z,t)=\sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t)+\sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),\ \sigma_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(z,t)=\sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t)\cdot\sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),$$

то есть сопоставление оператору $\mathcal{A}\in\mathcal{R}$ его символа $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$. При этом ядром гомоморфизма является множество вполне непрерывных операторов в $L^p(D)$. Наконец, если $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ – невырожденная матрица-символ, то непосредственным построением устанавливается, что матрица $\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(z,t)$ является символом некоторого оператора из $\mathcal{R}$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы сингулярный интегральный оператор $\mathcal{A}$ с антиконформным сдвигом Карлемана $\alpha(z)$ из (10) был нетеровым в пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1<p<\infty)$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\det\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)\equiv\begin{vmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0\\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0\\ 0 & 0 & c(t)\end{vmatrix}\neq 0,\ \forall z\in\overline{D},$$

$$\prod_{j=1}^{m}\det\Big(a(t)+\sum_{k=j}^{m}c_k(t)\Big)\neq 0,\ \forall t\in\Gamma.$$

При выполнении этих условий, индекс оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{m}Ind_{\Gamma}\det\Big(a(t)+\sum_{k=j}^{m}c_k(t)\Big).$$

З а м е ч а н и е. Полученные результаты сохраняются в лебеговом пространстве $L^{\nu,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$.

Глава 3 посвящена исследованию одномерного сингулярного интегрального уравнения Коши, вида

$$(Af)(t) =$$

$$= a(t)f(t)+b(t)\overline{f(t)}+\frac{c(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{d(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}d\overline{\tau}+(Tf)(t) = g(t) \quad (11)$$

в банаховых пространствах $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, где $a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$ – заданные непрерывные на Γ функции, Γ – простая замкнутая кривая Ляпунова.

Уравнение (11) впервые рассмотрен Л.Г.Михайловым[29,30], в связи с изучением некоторых краевых задач для обобщенных аналитических функции. Указанный автор, в предположении, что коэффициенты уравнения (11) удовлетворяют условию Гельдера, сводит изучение уравнения (11) в пространствах $H_\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Коши.

Лемма 3.1. *Если функция $b(t)$ непрерывна на Γ, то оператор*

$$V = S_\Gamma b - bS_\Gamma$$

вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

В векторном пространстве

$$L_p^2(\Gamma) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_p^2(\Gamma)\},$$

введем оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(t)I + c(t)S_\Gamma & b(t)I + d(t)\overline{S}_\Gamma \\ \overline{b(t)}I + \overline{d(t)}S_\Gamma & \overline{a(t)}I + \overline{c(t)}\overline{S}_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Рассмотрим множество $\mathcal{R}$ всех операторов вида (11), действующих в векторном пространстве $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Устанавливается, что множество сингулярных операторов $\mathcal{R}$ представляет собой алгебру в $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$.

[29]Михайлов Л.Г. Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей //Изв. высших учебный заведений. Математика. 1960, №5, с. 99 – 109.

[30]Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами //–Душанбе, 1963, с. 183.

Каждому оператору вида (11) из алгебры $\mathcal{R}$, приведем в соответствие в качестве символа следующую матрицу-функцию

$$\Phi_U(t,\Theta) = \lambda(t) + \mu(t)\Theta, \tag{13}$$

где

$$\Theta = signy = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \text{y>0}, \\ -1, & \text{если} \quad \text{y<0}, \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -d(t) \\ \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \end{pmatrix},$$

Лемма 3.2. *Нетеровость оператора* $A : L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$ *из (11), эквивалентна нетеровости оператора* $U : L_p^2(\Gamma) \longrightarrow L_p^2(\Gamma)$.

Теорема 3.1. *Для нетеровости оператора* A *из* (11) *в пространствах* $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\det \Phi_U(t,\Theta) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$, *то есть*

$$\Delta(t) \equiv \big(a(t) - c(t)\big)\big(\overline{a(t)} + \overline{c(t)}\big) - \big(b(t) + d(t)\big)\big(\overline{b(t)} - \overline{d(t)}\big) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \tag{14}$$

При выполнении условия (14), *индекс оператора* A *равен*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \Delta(t).$$

В § **3.1. главы 3** результаты теоремы 3.1. обобщены для системы сингулярных интегральных уравнений Коши типа (11), где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ – заданные $n \times n$ мерные матрицы-функции с непрерывными на Γ элементами, $g(t)$ – заданная функция из пространства $L_p^2(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

В § **3.2. главы 3** полученные выше результаты для сингулярных интегральных уравнений (11) применены к общей задаче сопряжения для аналитических функций.

Пусть Γ замкнутая кривая Ляпунова, делящая плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-.

Постановка задачи сопряжения. *Найти две функции* $\Phi^+(z)$ *– аналитическую в области* D^+, *и* $\Phi^-(z)$ *– аналитическую в области* D^- *представимые в виде интеграла типа Коши, такие, что почти всюду их граничные значения* $\Phi^+(t)$ *и* $\Phi^-(t)$ *на* Γ *существуют и удовлетворяют условию*

$$a(t)\Phi^+(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} = c(t)\Phi^-(t) + d(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad \Phi^-(\infty) = 0, \tag{15}$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ *– заданные в* Γ *непрерывные функции.*

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (15), *коэффициенты* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ *являются на* Γ *непрерывными функциями. Тогда, для нетеровости задачи (15), в классе функций представимых в виде интеграла типа Коши* $\Phi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \tag{16}$$

При этом, индекс задачи равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\Big(\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)}\Big).$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для одной системы двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом, найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс [1-А, 2-А];
- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом, получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора [1-А, 2-А, 3-А];
- в лебеговых пространствах изучены свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденные сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформным сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса [2-А, 3-А, 4-А];
- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса [2-А, 3-А, 4-А];
- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций [2-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты можно применить к изучению различных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в ограниченной области.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из Перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// ДАН РТ, 2018, т.61, №1, с. 19 – 26.

[2-А] Эшонкулов А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] /Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Вестник ТНУ, 2020, Серия естественных наук, №3, с. 46 – 52.

[3-А] Эшонкулов А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А. // Доклады НАНТ, 2020, т.63, №11-12, с. 697 – 707.

[4-А] Эшонкулов А.А. Об одной алгебре двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой со сдвигом [Текст] / Эшонкулов А.А. // Известия НАНТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2021, №4, с. 7 – 13.

В других изданиях:

[5-А] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 90-летию акад. АН РТ Л.Г.Михайлова, "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций" (Душанбе, 27 – 28 февраля 2018 г.) – С.68 – 71.

[6-А] Эшонкулов А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Б.Имомназарова, "Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10 – 11 июня 2019 г.) – С.63 – 66.

[7-А] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Филиал Московского государственного университета в г.Душанбе им. М.В.Ломоносова, Душанбе, 2019 г.)

[8-A] Эшонкулов А.А. О разрешимости некоторых сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора Г.Джангибекова, "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.) – С. 115 – 117.

[9-A] Эшонкулов А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х.Бойматова, "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г). – С. 106 – 112.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК-517.968.2

Бо ҳуқуқи дастхат

Эшонқулов Алишер Алигулович

ОИДИ ҲАЛШАВАНДАГИИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ ДУЧЕНАКА БО ҒЕҶИШ

(Ҳимояи такрорӣ)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 - таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 3

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Ҷангибеков Гулхоҷа**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муқарризони расмӣ: **Сафаров Ҷумабой**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Акобиршоев Муҳиддин Отамшоевич
номзади илмҳои физикаю математика,
дотсенти кафедраи математикаи олӣ ва информатикаи Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Ҳимояи диссертатсия *24 май соли 2023 соати 15:30* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D КОА-011 дар факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонии: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 216 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат "___" ___________ соли 2023 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида фиристонда шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор **Нуров И.Ҷ.**

Тавсифи умумии диссертатсия

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқшаванда. Маълум аст, ки муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд бо операторҳои намуди Михлин – Кальдерон – Зигмунд

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \qquad (1)$$

ки D – соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ мебошад, дар ҳалли бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои аналитикии умумишуда (И.Н.Векуа[1]), назарияи инъикоси квазиконформӣ (Л.Альфорс[2], М.Шиффер[3]), назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.В.Боярский[4], А.Д. Джураев[5,6,7], В.Н.Монахов[8]) аҳамияти муҳим доранд. Р.В.Дудучава[9] $L_p(1 < p < \infty)$ - назарияи муодилаҳои интегралии сингулярии бисёрченака барои бисёршаклаҳои сарҳаддоштаро кор карда баромад, ки он имконият медиҳад тадқиқи нётеровӣ будани муодилаҳое, ки операторҳои S_n ва комбинатсияҳои гуногуни онҳоро дар бар мегиранд, ба ёфтани факторизатсияи матриса-функсияҳои ратсионалии мувофиқи онҳо, аниқтараш ба ҳисоб намудани индекси онҳо, оварда шаванд. Дар айни замон масъалаи ёфтани критерияи нетеровӣ будани муодилаҳои интегралии сингулярии дученака тавассути шартҳои ошкор нисбати коэффисиентҳо ҷолиб мебошад. Барои синфи васеи чунин муодилаҳо бо операторҳои намуди (1) дар мақолаҳои ил-

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[3] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. 1962, с. 193 – 218.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960.

[5] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, с. 1251 – 1254.

[6] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа // т. 2, Тбилиси, 1972 с.104 – 118.

[7] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415 с.

[8] Монахов В.Н.) Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск. Наука. 1977, 424 с.

[9] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory, 1984, v. 11, pp. 41-76, 199- 214.

мии И.И. Комяк[10,11,12], Н.Л. Василевский[13,14,15], Г.Ҷангибеков[16,17,18], К.Х. Бойматов ва Г. Ҷангибеков[19] шартҳои эффективии зарурӣ ва кифоягии нётеревӣ будан ва инчунин формула барои ҳисоб намудани индекси операторҳо ҳосил карда шудааст.

Тадқиқи муодилаҳои сингулярии дученака бо ғеҷиш бошад, аз давраҳои наздик, яъне нимаи дуюми асри гузашта шурӯъ гардид.

Аввалин тадқиқот дар ин самт аз корҳои илмии Г. Ҷангибеков[20,21,22] оғоз гардид. Муаллифи зикршуда дар ин самт бо усули алгебраи банахӣ, баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаеро тадқиқ намуд, ки тарафи чапи ин муодилаҳо бо операторҳои интегралии сингулярии S_n, ва операторҳои намуди (поли-кернфунксия) Бергман B_n, инчунин операторҳои ғеҷишдори $(Wf)(z) = f(z)$ ва оператори ҳамроҳшудаи $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ иборат мебошад. Дудучава Р.В., Сагинашвили А.И. ва Е.М.Шаргородский[23,24] масъалаи нётервии оператори чоркампонентаи A

[10] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074 – 1077.

[11] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488 – 491.

[12] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк//ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307 – 1310

[13] Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР. 1983.т.271, №5. 1041 – 1044 с.

[14] Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2, с. 12 – 21.

[15] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II.// Изв. ВУЗов Матем. 1986, №3, с. 33 – 38.

[16] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91 – 93.

[17] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами //Изв. ВУЗов. Матем., 1992, №9, с. 25 – 37.

[18] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415 – 417.

[19] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т. 43, вып.8, с. 171 – 172.

[20] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // Математические заметки, 1991, т. 49, в. 4, с. 150 – 152,

[21] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом,// ДАН РТ 1991, т. 34, №4, с. 399 – 403.

[22] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом,//ДАН РТ 1991, т. 34, №9, с.545 – 550.

[23] Дудучава Р.В.,Сагинашвили А.И.,Шаргородский Е.М. О двумерных сингулярных операторах со сдвигом,// Труды Тбилисского Математического института им. А.Размадзе, 1995, т. 103, с. 3 – 13.

[24] Duduchava R., Saginashvili A., Shargorodsky E. On two-dimensional singular integral operators

бо операторҳои S ва W-ро бо усули гузариш ба системаи муодилаҳои интегралии бе ғеҷиш омӯхтаанд ва натиҷахои ҳосилшударо барои операторҳо бо ғеҷиши карлеманӣ татбиқ намудаанд. Дар корҳои илмии В.А.Мозель[25] низ алгебраи поли-кернооператорҳои Бергман бо ғеҷиши карлемании тартиби n омӯхта шудааст.

Кори диссертатсионии мазкур бошад, ба татқиқи хосиятҳои нётеровии синфҳои нави операторҳои дученакаи интегралии сингулярӣ бо ғеҷиш ва бо коэффисиентҳои бефосила дар соҳаи маҳдуд бахшида шудааст.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқи масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд бо ғеҷиш, ва бо коэффисиентҳои бефосила мебошад.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимояи такрорӣ пешниҳод мешаванд, нав буда, аз инҳо иборатанд:

- барои системаи операторҳои интегралии сингулярии дученакаи соҳаи маҳдуди ғеҷишдори карлеманӣ ва фазои лебегии вазндор, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои баъзе синфи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ будан ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси оператор ҳосил карда шудааст;

- дар фазои лебегӣ хосиятҳои алгебраи $\mathcal{R}$, ки аз операторҳои сингулярӣ бо характеристикаҳои тоқ ва ғеҷишҳои антиконформӣ ҳосил шудааст, омӯхта шудаанд, инчунин барои онҳо шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- теоремаи ҳалшавандагии як синфи операторҳои интегралии сингулярии якченакаи намуди Кошӣ исбот карда шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- ҳалли як масъалаи умумишудаи хаттии ҳамроҳшуда барои функсияҳои аналитикӣ ҳисоб карда шудааст;

---

with conformal Carleman shift.// Jornal Operator Theory, 1997, v. 37, pp. 263 –279.

[25] Мозель В.А. Банахова алгебра, порожденная конечным числом поликерноператоров Бергмана, непрерывными коэффициентами и конечными группами циклов.// Укр.мат. журн., 2010, т. 62, №9, с. 1247 – 1255.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда характери назариявӣ доранд. Онҳо асосан дар тадқиқотҳои оянда назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода шуда метавонанд.

Арзишҳои амалии кор дар он мебошад, ки аҳамияти амалии муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва истифодаи онҳо дар ҳалли бисёри масъалаҳои механикӣ ва дигар самтҳои физика ба манфиат мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои дар диссертатсия истифодашуда ба воситаи элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои таъғирёбандаашон комплексӣ ва истифодаи усулҳои алгебра, инчунин факторизатсияи матриса – функсияҳо асос ёфтаанд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосӣ дар семинарҳои илмӣ-методии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки таҳти роҳбарии профессор Г. Ҷангибеков баргузор мегардад, гузориш ва баррасӣ гардидаанд. Натиҷаҳои диссертатсия дар гузоришҳои конференсияҳои зерин баррасӣ гардидаанд:

- конференсияи илмӣ байналмилалии "Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ барои масъалаҳои канории назарияи функсияҳо" бахшида ба 90-солагии академики АИ ҶТ Л.Г.Михайлов, дорандаи лауреати мукофоти Давлатӣ ба номи Абӯалӣ ибни Сино (Душанбе, 17-18 феврали соли 2018);

- конференсияи илмӣ байналмилалии "Проблемаҳои муосири математика ва татбиқи он" бахшида ба 80-солагии профессор Б.Имомназаров (Душанбе, 17-18 январи соли 2019);

- конференсияи илмӣ байналмилалии "Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ" бахшида ба 70-солагии профессор Г.Ҷангибеков (Душанбе, 30-31 январи соли 2020);

- конференсияи илмӣ байналмилалии "Проблемаҳои муосири математика ва татбиқи он" (Душанбе, Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе, соли 2019);

- конференсияи илмӣ байналмилалии "Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ" бахшида ба 70-солагии профессор К.Х.Бойматов (Душанбе, 25-26 декабри соли 2020);

Интишорот ва саҳми шахсии муаллиф. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсионӣ дар 9 мақола дарҷ гардидаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст [1-М – 9-М]. Аз 9 кори илмӣ 4 мақола ба нашрияҳои тақризшавандаи рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и ФР мансуб буда, 5-тояш дар маҷмӯаҳои маводи конференсияҳои байналхалқӣ чоп шудаанд.

Мақолаҳои [1] –[3] бо ҳаммуаллифӣ бо роҳбари илмӣ чоп шудааст, ки ба роҳбар гузориши масъала мансуб буда, ба диссертант исботи натиҷаҳои асосӣ таалуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 59 номгӯийро дар бар гирифта ва 82 саҳифаи дар LATEX ҳуруфчинӣ шуда, иборат мебошад. Барои осонӣ дар дессертатсия ду рақамгузории пайдарпаи ададии теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ва формулаҳо мавриди истифода қарор дода шудааст, ки рақами якум мансуб ба боб буда, рақами дуюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ва формулаҳо мувофиқат мекунанд.

Мӯҳтавои мухтасари кор

Дар муқаддима маълумоти мухтасар оиди натиҷаҳое, ки ба мавзӯи рисолаи диссертатсионӣ рабт доранд оварда шуда, натиҷахои асосии диссертатсия баён гардидааст.

Параграфи 1 - и **боби 1** характери ёрирасонӣ дошта, дар он фазоҳои функсионалии истифодашуда, мафҳумҳо ва фактҳои асосии назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахӣ оварда шудаанд.

Дар § 2 дар фазои n – ченакаи вектор-функсияҳои

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D),$$

ки компонентҳои он $f_k(z), k = 1, 2, \dots, n$ ба фазои лебегии ваздори

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f_k(z) : |z|^{\beta-2/p} f_k(z) = F_k(z) \in L^p(D),\ ||f_k||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F_k||_{L^p}\},$$

$1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$ таалуқ доранд, оператори

$$A = aI + bW + \sum_{m=1}^{N}(c_m I + d_m W)S_{2m} + T, \qquad (2)$$

дида баромада мешавад, ки дар ин ҷо S_{2m} оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи экспоненсиалии ҷуфти тартиби $2m$:

$$(S_{2m}f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

буда, $m-$ адади натуралӣ, ds_ζ - ченаки масоҳати Лебег; D – соҳаи якалоқаноки комплексии бо хати каҷи сарбастаи Ляпунова Г; маҳдуд гардидаст $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$,, интеграл ба маънои қимати асосии Коши фаҳмида мешавад, T – оператори пурра бефосила, N – адади натуралӣ, $a(z), b(z)$, $c_m(z), d_m(z)$ матриса – функсияҳои квадратии тартиби n дар $\overline{D}$ бефосила, $W : L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ – оператори ғеҷишдори карлеманӣ:

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

ки дар инҷо $\alpha(z)$ – иникоси конформии яккиматаи соҳаи D ба худаш бо хосиятҳои $\alpha(\alpha(z)) = z$ барои $\forall z \in \overline{D}$ ва $\exists z_0 \in \overline{D}$, ки $\alpha(z_0) \neq z_0$ аст. Қайд менамоем, ки амали матриса ба вектор дар муодилаи операторнии (2) ҳамчун зарби скалярии сатри матриса ба вектор фаҳмида мешавад ва наздикшавӣ дар фазои вектор-функсия наздикшавӣ аз рӯи координатаҳоро ифода менамояд. Якчанд синфи муодилаҳои ғеҷишдор, ки оператори S_{2m},-ро дар бар мегиранд, дар корҳои [20–25], инчунин дар кори [23] ҳолати хусусии оператори A дар ҳолати скалярӣ будани коэффисиентҳояш, ҳангоми $N = 1$ тадқиқ шудаанд.

Тадқиқи оператори A бо ёрии усули локалии И.Б.Симоненка[26], гузаронида шуда, аз оператори ғеҷишдори A, ба оператори беғеҷиши $\mathfrak{M}$ оварда мешавад.

Исбот карда мешавад, ки леммаҳои зерин ҷой доранд:

Лемма 1.1. *Агар* $f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D), \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ *бошад, пас оператори*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^m W S_{2m} - S_{2m} W$$

дар соҳаи $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ пурра бефосила аст.

[26]Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений //Изв. АН СССР. сер. матем., 1965, т. 29, №3, №4, с. 567 – 580, 757 – 782.

Дар қатори оператори A аз (2) оператори ҳамсафари он дар намуди

$$\mathcal{A} = aI - bW + \sum_{m=1}^{N} (c_m I - d_m W) S_{2m} + T \tag{3}$$

-ро дида мебароем.

Лемма 1.2. *Агар яке аз ду операторҳои A ё $\mathcal{A}$ дар фазои $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, нётеровӣ бошанд, пас оператори дигар низ нётеровӣ мебошад.*

Фазои векторҳои $2n$ - ченакаи зеринро дохил мекунем:

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f^1(z), f^2(z)) :\ f^1(z), f^2(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), f(\alpha(z)) :\ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), -f(\alpha(z)) :\ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\}.$$

Лемма 1.3. *Фазои $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ ба суммаи ду зерфазоҳо $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ ва $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$:*

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \oplus L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D).$$

ҷудо карда мешавад.

Пас дар ин фазо, яъне дар $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D), (0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$ оператори $\mathfrak{M}$ – ро дида мебароем, ки ба оператори A аз (2) мувофиқ гузошта шудааст:

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{a} I + \sum_{m=1}^{N} \mathfrak{d}_m S_{2m} + T, \tag{4}$$

дар ин ҷо

$$\mathfrak{a}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{d}_m(z) = \begin{pmatrix} c_m(z) & d_m(z)(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \\ d_m(\alpha(z)) & c_m(\alpha(z))(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.4. *Зерфазои $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ ва $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ нисбати оператори $\mathfrak{M}$ инвариантӣ мебошанд. Фишурдашавии $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}}$ оператори $\mathfrak{M}$ дар зерфазои $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ ба маънои нётеровии оператори A, эквивалент аст ва фишурдашавии $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}}$ оператори $\mathfrak{M}$ дар зерфазои*

$L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ *бошад ба маънои нётеровии оператори ҳамсафари* $\mathcal{A}$ эквивалент аст.

Символи $\mathscr{G}_A(z,\sigma)$ оператори A намуди (2) матриса-функсияи квадратӣ номида мешавад ва аз рӯи формулаи

$$\mathscr{G}_A(z,\sigma) =$$

$$\begin{pmatrix} a(z)+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m c_m(z) & b(z)+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m d_m(z) \\ b(\alpha(z))+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m d_m(\alpha(z)) & a(\alpha(z))+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m c_m(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

муайян карда шуда, дар ин ҷо $z\in\overline{D},\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2\neq 0$ мебошад.

Теоремаи 1.1. *Барои он ки оператори A аз (2) дар фазои $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$* $(0<\beta<2,\ 1<p<\infty)$ *нётервӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$1)\ \det\mathscr{G}_A(z,\sigma)\neq 0 \quad \textit{при } z\in\overline{D},\ |\sigma|=1,$$
$$2)\ \det\mathscr{G}_A(z,\sigma)\neq 0 \quad \textit{при } z\in\Gamma,\ |\sigma|<1.$$

Ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо индекси оператор ба сифр баробар аст.

Қайд. *Аз таърифи нётервӣ будани оператори намуди (2) дар фазои $L^2(D)$, нётервӣ будани онҳо дар фазоҳои Бесова-Трибеля-Лизоркина* $B^s_{p,q}(D), F^s_{p,q}(D)$ низ мебароянд.

Дар § **2.1**. - и **боби 2** фазои лебегии $L^p(D)(1<p<\infty)$ алгебари $\mathcal{R}$, омӯхта мешавад, ки аз операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқи намуди

$$\mathcal{A}=aI+bS_{-n}K+cB_n+d\overline{B}_n+eB_nK+q\overline{B}_nK+T, \tag{5}$$

ки дар ин ҷо a,b,c,d,e,q – коэффисиентҳо ҳамчун функсияҳои бефосила дар $\overline{D}$, T – оператори пурра бефосила,

$$(S_{-n}f)(z)=\frac{|n|}{2\pi i^{|n|}}\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{e^{-in\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta\equiv(S^n_{-1}f)(z),$$

$\theta=\arg(\zeta-z),\ |n|=2m+1,\ (Kf)(z)=\overline{f(z)}, \overline{B}_n=KB_nK,\ B_n$ – поликерн оператори Бергман, намуди

$$(B_nf)(z)=\iint\limits_{D}B_n(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta, \tag{6}$$

буда, ядрои оператори $B_n(z,\overline{\zeta})$ дар ҳолати давраи воҳидии бо марказаш дар ибтидои координата аз рӯи формулаи[27]

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC^k_{\frac{n}{2}}C^k_{\frac{n}{2}+k-1}\left|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}\right|^{2(k-1)}, \quad \alpha=\arg(1-z\overline{\zeta}); \tag{7}$$

ҳосил шудааст. Исбот карда мешавад, ки леммаҳои зерин ҷой доранд:

Лемма 2.1. *Бигузор $a(z)$ дар соҳаи D бефосила бошад. Пас операторҳои $S_{-n}a - aS_{-n}$, $B_na - aB_n$ низ дар соҳаи $L^p(D), 1 < p < \infty$, пурра бефосила мебошанд.*

Лемма 2.2. *Бигузор $f(z) \in L^p(D), 1 < p < \infty$ бошад. Пас операторҳои $S_{-n}\overline{B}_n$, $B_nS_{-n}, B_n\overline{B}_n$, $\overline{B}_nS_{-n}B_n, B_n^2 - B_n$ дар соҳаи $L^p(D)$ операторaҳои пурра бефосила мебошанд.*

Лемма 2.3. *Оператори интегралии B_n, $S_{-n}B_n$, $\overline{B}_nS_{-n}$, $S_{-n}B_nS_n$ ҳангоми $n = 2m+1$ дар соҳаи $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, операторҳои пурра бефосила нестанд, бар замми ин ядрои онҳо ҳангоми мувофиқ омадани ҳар ду тағйирёбанда дар сарҳади Γ, бефосилагиро аз даст медиҳанд.*

Дар § **2.2.** - и **боби 2** алгебари $\mathcal{R}$, дида баромада мешавад, ки аз тамоми операторҳои намуди $\mathcal{A}$ аз (5) дар фазои $L^p(D)(1 < p < \infty)$ амалкунанда ҳосил шудааст. Дар ин ҷо ҳамаи коэффисиентҳо дар $\overline{D}$ функсияҳои бефосила $T \in \mathfrak{J}$ ва бо $\mathfrak{J}$ идеали операторҳои пурра бефосилаи дар $\mathcal{R}$, ҷой дошта, ифода карда шудааст. Пас алгебраи $\mathcal{R}$ фақат бо оператоҳои намуди $\mathcal{A}$ тамом намешавад ва операторҳои $\overline{B}_n, \overline{B}_nK, B_n, B_nK$ ва $S_{-n}K$-ро дар бар мегирад. Ин ба он далолат медиҳад, ки ба алгебари $\mathcal{R}$ масалан операторҳои $S_{-n}B$ и $\overline{B}_nS$ дохил мешаванд ва дар асоси лемаи 2.3 дар соҳаи $L^p(D)$, пурра бефосила нестанд. Бинобар ин навишти алгебраи $\mathcal{R}$-и мураккаб заруряти омӯзиши баъзе операторҳои намуди

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + \lambda S_{-n}B_nK + \\ + \mu\overline{B}_nS_{-n}K + \nu S_{-n}B_nS_n + \gamma S_{-n}B_n + \delta B_nS_n + T,\end{aligned} \tag{8}$$

ба вуҷуд меояд, ки ҳамаи коэффисиентҳо дар соҳаи D ҳамчун функсияи бефосила мебошанд.

Қайд мекунем, ки ҳангоми $b \equiv d \equiv q \equiv 0$ оператори $\mathcal{A}$ аз (5) дар

[27] Джангибеков Г., Савлатов Ф. О поли-кернфункциях ограниченной области и их связь с сингулярными интегральными операторами //Вестник филиала МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 2018, №1, с. 11 – 40.

корҳои роҳбари илмиам Г. Ҷангибеков[28] омӯхта шудааст.

Л е м м а 2.4. *Оператори $\mathcal{M}$, ки дар формулаи (8) дода шудааст, элементи алгебраи $\mathcal{R}$; ҳисобида мешавад ва баръакс ҳар як оператор аз алгебари $\mathcal{R}$ дар намуди муодилаи (8) навиштан мумкин аст.*

Ба ҳар як оператори $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ ба сифати символ матрисаи намуди зерро мувофиқ мегузорем:

$$\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t)+c(t) & e(t) & \delta(t) \\ \overline{q(t)} & \overline{a(t)} + \overline{d(t)} & -\overline{b(t)} + \overline{\mu(t)} \\ \gamma(t) & a(t)+\lambda(t) & a(t)+\nu(t) \end{pmatrix}, \; t \in \Gamma.$$

Л е м м а 2.5. *Символи $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ оператори $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$ айниятан баробари сифр аст, фақат ва фақат дар он мавриде, ки агар $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}$ бошад.*

Т е о р е м аи 2.1 *Барои он ки ихтиёрӣ оператори $\mathcal{M}$ аз алгебраи $\mathcal{R}$ дар фазои $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, оператори нётервӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерини*

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0 \text{ при } z \in \overline{D}, \; \det D(t) \neq 0 \text{ при } t \in \Gamma, \tag{9}$$

иҷро гарданд.

Ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо индекси оператори ба

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi}[\arg\det D(t)]\Big|_{\Gamma},$$

баробар мешавад.

Дар § **2.3**. - и **боби 2** фазои векторӣи лебегии $L^{\nu,p}(\mathbf{D})$ $(1 < p < \infty)$ алгебраи $\mathcal{R}$, дида баромада мешавад, ки аз оператори сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ ва ғеҷишдори

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_l(z)B_{2l+1} + T, \quad m \geq 0 - \text{бутун}, \tag{10}$$

ҳосил мешавад, ки дар ин ҷо $a(z)$, $b(z)$, $c_l(z)$ матриса-функсияҳои квадратии тартиби ν дар $\overline{D}$ бефосила, T – оператори пурра бефосила,

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta$$

[28] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области //Доклады РАН, 2002, т 383, №1, с. 7 – 9.

$\theta = \arg(\zeta - z)$, B_n – поликерн-оператори Бергман аз (6), (7) W–оператори ғеҷишдори антиконформӣ яъне

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

ки ин ҷо $\alpha(z)$ иникоси антиконформии соҳаи $\overline{D}$ ба худаш, ки шартҳои Карлеман $\alpha(\alpha(z)) = z$ барои $\forall z \in \overline{D}$ ва $\exists z_0 \in \overline{D}$, ки $\alpha(z_0) \neq z_0$-ро қаноат мекунонад.

Зикр менамоем, ки якчанд синфи муодилаҳои ғеҷишдори дарбаргирандаи операторҳои S_n, дар корҳои муаллифон [20 – 25] омӯхта шудааст. Ҳамаи ин тадқиқотҳо барои операторҳои намуди S_n, ки характеристикаи ҷуфт доранд, дида баромада шуда, исбот карда шудааст. Бояд қайд намуд, ки операторҳои ғеҷишдор бо характеристикаҳои тоқ аз ин пеш омӯхта нашудаанд.

Лемма 2.6. *Бигузор $f(z) \in L^{\nu,p}(D)(1 < p < \infty)$ бошад. Агар $\alpha(z)$ иникоси антиконформии соҳаи D ба худаш бошад, шарти карлемании $\alpha(\alpha(z)) = z$ -ро барои $\forall z \in \overline{D}$ қаноат кунад, пас операторҳои*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} W S_{2m+1} - S_{-(2m+1)} W$$

ва

$$W B_{2l+1} - B_{-(2l+1)} W, \quad B_{-(2l+1)} W S_m, \ W S_m B_{-(2l+1)} \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

дар соҳаи $L^{\nu,p}(D)$, пурра бефосила мебошанд.

Акнун ба ҳар як оператори $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ ба сифати символ матриса-функсияи квадратӣ блокиро мувофиқ мегузорем:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D},$$

ки дар ин ҷо

$$c(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=1}^{m} c_l(t) & 0 & 0\ldots & 0 \\ c_1(t) & a(t) + \sum_{l=2}^{m} c_l(t) & 0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_1(t) & c_2(t) & \ldots & a(t) + c_m(t) \end{pmatrix}, \ t \in \Gamma.$$

Ҳамин тариқ, матриса-функсияи $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ дар соҳаи $\overline{D} \times \Gamma$, бефосила мебошад. Бо $\mathcal{M}$ маҷмӯи ҳамаи символҳои операторҳои $\mathcal{R}$-ро ишорат мекунем. Ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки баробариҳои зерини

$$\sigma_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) + \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t), \ \sigma_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) \cdot \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),$$

ҷой доранд. Яъне мувофиқгузорӣ барои оператори $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ символи он $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ гомоморфизми алгебраи $\mathcal{R}$ ва $\mathcal{M}$ мешавад. Ба замми ин ядрои гомоморфизми маҷмӯи операторҳои пурра бефосила дар $L^p(D)$, мебошад. Билохир, агар $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ матриса-символи ғайританазулӣ бошад, пас муайян кардан мумкин аст, ки матрисаи $\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(z,t)$ символи ягон оператор аз $\mathcal{R}$ мебошад.

Теоремаи 2.2. *Барои он, ки оператори интегралии сингулярии $\mathcal{A}$ бо гечиши карлеманиии антиконформии $\alpha(z)$ аз (10) дар соҳаи $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$, нётервӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро гарданд:*

$$\det \sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \equiv \begin{vmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall z \in \overline{D},$$

$$\prod_{j=1}^{m} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big) \neq 0, \ \forall t \in \Gamma.$$

Ҳангоми иҷро гардидани ин шартҳо индекси оператори $\mathcal{A}$ аз рӯи формулаи зерин

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} Ind_{\Gamma} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big),$$

ҳисоб карда мешавад.

Қайд. Натиҷаи бадастомада дар фазои лебегии $L^{\nu,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, ҳифз карда мешавад.

Боби 3 барои омӯхтани муодилаҳои интегралии сингулярии якченакаи Кошии намуди

$$(Af)(t) =$$

$$= a(t)f(t) + b(t)\overline{f(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t) \quad (11)$$

дар фазои банахии $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, ки дар ин ҷо $a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$ – функсияҳои додашудаи дар Γ бефосила, Γ– хати каҷи сарбаста мебошад, бахшида шудааст.

Муодилаи (11)-ро бори аввал академик Л.Г.Михайлов[29][30], барои омӯхтани баъзе масъалаҳои канорӣ барои функсияҳои умумишудаи аналитикӣ мавриди омӯзиш қарор додааст. Номбурда бо талаби он, ки коэффисиентҳои муодилаи (11) шарти Гёлдерро қаноат мекунанд, омӯхтани онро дар фазои Гёлдер, яъне $H_\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$, ба системаи муодилаҳои интегралии Кошӣ овардааст.

Леммаи 3.1. *Агар функсияи $b(t)$ дар Γ, бефосила бошад, он гоҳ оператори*

$$V = S_\Gamma b - bS_\Gamma$$

дар $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, пурра бефосила мебошад.

Дар фазои вектории

$$L_p^2(\Gamma) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_p^2(\Gamma)\},$$

оператори зеринро

$$U = \begin{pmatrix} a(t)I + c(t)S_\Gamma & b(t)I + d(t)\overline{S}_\Gamma \\ \overline{b(t)}I + \overline{d(t)}S_\Gamma & \overline{a(t)}I + \overline{c(t)}\overline{S}_\Gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

дида мебароем. Маҷмӯи ҳамаи операторҳои намуди (11) доштаро, ки дар фазои вектории лебегии $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, амал мекунанд, дида мебароем ва онро бо $\mathcal{R}$ ишора мекунем. Нишон медиҳем, ки маҷмӯи $\mathcal{R}$ дар фазои $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, алгебраро ташкил медиҳад.

Акнун ба оператори намуди (11) аз алгебраи $\mathcal{R}$ ба сифати матриса-функсияи

$$\Phi_U(t, \Theta) = \lambda(t) + \mu(t)\Theta, \tag{13}$$

ки дар ин ҷо

$$\Theta = signy = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \text{y}>0, \\ -1, & \text{если} \quad \text{y}<0, \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -d(t) \\ \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \end{pmatrix},$$

мувофиқ мегузорем.

---

[29]Михайлов Л.Г. Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей //Изв. высших учебный заведений. Математика. 1960, №5, с. 99 – 109.

[30]Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами //–Душанбе, 1963, с. 183.

Леммаи 3.2. *Нётервӣ будани оператори* $A : L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$ *аз (11) баробарқувва аст ба нётервӣ будани оператори* $U : L_p^2(\Gamma) \longrightarrow L_p^2(\Gamma)$.

Теоремаи 3.1. *Барои дар фазои* $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ *нётервӣ будани оператори* A *аз* (11) *зарур ва кифоя аст, ки шарти* $\det \Phi_U(t, \Theta) \neq 0 \ \forall t \in \Gamma$, *яъне*

$$\Delta(t) \equiv \big(a(t)-c(t)\big)\big(\overline{a(t)}+\overline{c(t)}\big)-\big(b(t)+d(t)\big)\big(\overline{b(t)}-\overline{d(t)}\big)\neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \quad (14)$$

иҷро гардад. Бо иҷро шудани шарти (14), *индекси оператори* A *ба воситаи формулаи*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \Delta(t).$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар § 3.1. - и **боби 3** натиҷаи теоремаи 3.1. барои системаи муодилаҳои интегралии сингулярӣ Кошии намуди (11) умумӣ карда шудааст, ки дар ин ҷо $a(t), b(t), c(t), d(t)$ –матриса-функсиҳои додашуда ба андозаи $n \times n$ мебошанд ва элементҳояш дар Γ бефосилаанд. Функсияи $g(t)$ – функсияи додашуда аз фазои $L_p^2(\Gamma)(1 < p < \infty)$ мебошад.

Дар § 3.2. боби 3 барои муодилаи интегралии сингулярии намуди (11) натиҷаҳо ҳосил карда шудааст, ки ба масъалаи умумии васлкунӣ барои функсияҳои аналитикӣ тадбиқ мешаванд.

Бигузор Γ хати каҷи сарбастаи Ляпунов бошад, ки дар ҳамвории комплексӣ ягон соҳаи маҳдуди дохилии D^+ ва берунаи D^- -ро иҳота мекунад.

Гузориши масъалаи васлкунӣ. *Функсияҳои* $\Phi^+(z)$ *ва* $\Phi^-(z)$ *ёфт шаванд, ки мувофиқан дар соҳаҳои* D^+ *ва* D^- *налитикӣ бошанд ва тавассути интеграли Кошӣ тасвир шаванд, агар онҳо қариб дар ҳама ҷо дар* Γ *қиматҳои сарҳадии* $\Phi^+(t)$ *ва* $\Phi^-(t)$ *дошта бошанд ва шарти васлшавии*

$$a(t)\Phi^+(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} = c(t)\Phi^-(t) + d(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad \Phi^-(\infty) = 0, - \quad (15)$$

қаноат кунанд, ки $a(t), b(t), c(t), d(t)$ *– функсияҳои дар* Γ *додашудаи бефосилаанд.*

Теоремаи 3.2. *Бигузор дар масъалаи* (15) *коэффисиентҳои он* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ *функсияҳои дар* Γ *бефосила бошанд. Он гоҳ барои нётеровӣ будани масъала дар синфи функсияҳое, ки тасвири интегралии намуди Кошӣ доранд ва* $\Phi^\pm(t) \in L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, *зарур ва кифоя аст, ки шарти*

$$\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \quad (16)$$

иҷро шавад. Ҳангоми иҷро шудани ин шарт индекси масъала ба

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\Big(\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)}\Big).$$

баробар аст.

Хулоса

Натиҷаҳои илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- барои системаи операторҳои интегралии сингулярии дученакаи соҳаи маҳдуди ғеҷишдори карлеманӣ ва фазои лебегии вазндор, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст [1-М, 2-М];

- барои баъзе синфи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ будан ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси оператор ҳосил карда шудааст [1-М, 2-М, 3-М];

- дар фазои лебегӣ хосиятҳои алгебраи $\mathcal{R}$, ки аз операторҳои сингулярӣ бо характеристикаҳои тоқ ва ғеҷишҳои антиконформӣ ҳосил шудааст, омӯхта шудаанд, инчунин барои онҳо шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст [2-М, 3-М, 4-М];

- теоремаи ҳалшавандагии як синфи операторҳои интегралии сингулярии якченакаи намуди Кошӣ исбот карда шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст [2-М, 3-М, 4-М];

- ҳалли як масъалаи умумишудаи хаттии ҳамроҳшуда барои функсияҳои аналитикӣ ҳисоб карда шудааст [2-М];

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда характери назариявӣ доранд. Онҳо асосан дар тадқиқотҳои ояндаи назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода шуда метавонанд.

Арзишҳои амалии кор дар он мебошад, ки аҳамияти амалии муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва истифодаи онҳо дар ҳалли бисёри масъалаҳои механикӣ ва дигар самтҳои физика ба манфиат мебошад.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Дар нашрияҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон:

[1-M] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// ДАН РТ, 2018, т.61, №1, с. 19 – 26.

[2-M] Эшонкулов А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] /Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Вестник ТНУ, 2020, Серия естественных наук, №3, с. 46 – 52.

[3-M] Эшонкулов А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А. // Доклады НАНТ, 2020, т.63, №11-12, с. 697 – 707.

[4-M] Эшонкулов А.А. Об одной алгебре двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой со сдвигом [Текст] / Эшонкулов А.А. // Известия НАНТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2021, №4, с. 7 – 13.

Дар дигар нашрияҳо:

[5-M] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярном интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции посвящённой 90-летию акад. АН РТ Л.Г.Михайлова, "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции" (Душанбе, 27 – 28 февраля 2018 г.) – С.68 – 71.

[6-M] Эшонкулов А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции посвящённой 80-летию профессора Б.Имомназарова, "Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10 – 11 июня 2019 г.) – С.63 – 66.

[7-M] Эшонкулов А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярном интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Филиал Московского государственного университета в г.Душанбе им. М.В.Ломоносова, Душанбе,

2019 г.)

[8-М] Эшонкулов А.А. О разрешимости некоторых сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора Г.Джангибекова, "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.) – С. 115 – 117.

[9-М] Эшонкулов А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х.Бойматова, "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г).–С.106- 112.

Шарҳи мухтасари диссертатсияи Эшонқулов Алишер Алигулович дар мавзӯи "Оиди ҳалшавандагии баъзе синфҳои операторҳои интегралии сингулярии дученака бо ғеҷиш,"ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст.

Вожаҳои калидӣ: интеграли сингулярии дученака, символи оператор, индекси оператор, нётеровӣ будани оператор.

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқшаванда. Маълум аст, ки муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд бо операторҳои намуди Михлин – Кальдерон – Зигмунд

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \tag{17}$$

ки ин ҷо D – соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ мебошад, дар ҳалли бисёр масъалаҳои назарияи функсияҳои аналитикии умумишуда (И.Н.Векуа) назарияи иникоси квазиконформӣ (Л.Альфорс) назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ (Б.В.Боярский, А.Д.Джураев, В.Н.Монахов) аҳамияти муҳим доранд. Р.В.Дудучава L_p - назарияеро кор карда баромад, ки $1 < p < \infty$, имконият медод, то тадқиқи нётеровии муодилаҳои бисёрченакаи сингулярии интегралӣ дар бисёр ҳолатҳо операторҳои S_n ва комбинатсияҳоии гуногуне ки ба факторизатсиякунонии матриса-функсияҳои ратсионалӣ мувофиқ гузошта шудаанд ва ӯо аниқтараш барои ёфтани индексҳои хусусии онҳо оварда мешаванд. Ба замми ин масъалаи барқароркунии критеряи нётеровии муодилаи сингулярии интегралии дученака бо шартҳои ошкор барои коэффисиентҳо ҷолиб мебошад.

Барои синфи васеътари чунин муодила бо операторҳои намуди (1) дар бисёр мақолаҳои илмӣ ва корҳои И.И. Комяк, А.Д.Ҷураев, Н.Л. Василевский истифода шудаанд. Дар корҳои Г.Ҷангибеков, К.Х. Бойматов ва Г. Ҷангибеков шартҳои эффективии зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани он, инчунин формула барои ҳисоб намудани индекс ёфта шудааст. Тадқиқи муодилаҳои сингулярии дученака бо ғеҷиш бошад, аз давраҳои наздик, яъне нимаи дуюми асри гузашта шурӯъ гардид.

Аввалин тадқиқот дар ин самт аз корҳои илмии Г. Ҷангибеков оғоз гардид. Муаллифи зикршуда дар ин самт бо усули алгебраи банахӣ, баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаеро тадқиқ намуд, ки тарафи чапи ин муодилаҳо аз операторҳои интегралии сингулярии S_n, ва операторҳои намуди (поли-кернфункксия) Бергман B_n, инчунин операторҳои ғеҷишдори $(Wf)(z) = f(z)$ ва оператори ҳамроҳшудаи $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ иборат мебошанд. Дудучава Р.В., Сагинашвили А.И. ва Е.М.Шаргородский масъалаи нётервӣи оператори чоркампонентаи A бо операторҳои S ва W-ро бо усули гузариш ба системаи муодилаҳои интегралии бе ғеҷиш омӯхтаанд ва натиҷахои ҳосилшударо барои операторҳо бо ғеҷиши карлеманӣ татбиқ намудаанд. Дар корҳои илмии В.А.Мозель низ алгебраи поли-кернооператорҳои Бергман бо ғеҷиши карлемании тартиби n омӯхта шудааст.

Кори диссертатсионии мазкур бошад, ба тадқиқи хосиятҳои нӯотеровии синфҳои нави операторҳои дученакаи интегралии сингулярӣ бо ғеҷиш ва бо коэффисиентҳои бефосила дар соҳаи маҳдуд бахшида шудааст.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои дар диссертатсия истифодашуда ба воситаи элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои таъғирёбандаашон комплексӣ ва истифодаи усулҳои алгебра, инчунин факторизатсияи матриса – функсияҳо асос ёфтаанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқи масъалаи ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои интегралии сингулярии дученака дар соҳаи маҳдуд бо ғеҷиш, ва бо коэффисиентҳои бефосила мебошад.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешавад, нав буда, аз инҳо иборатанд:

- барои системаи операторҳои интегралии сингулярии дученакаи соҳаи маҳдуди ғеҷишдори карлеманӣ ва фазои лебегии вазндор, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- барои баъзе синфи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи тоқ дар соҳаи маҳдуд ва фазои лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётервӣ будан ёфт шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси оператор ҳосил карда шудааст;

- дар фазои лебегӣ хосиятҳои алгебраи $\mathcal{R}$, ки аз операторҳои сингулярӣ бо характеристикаҳои тоқ ва ғеҷишҳои антиконформӣ ҳосил шудааст, омӯхта шудаанд, инчунин барои онҳо шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;

- теоремаи ҳалшавандагии як синфи операторҳои интегралии сингулярии якченакаи намуди Кошӣ исбот карда шуда, формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст;
- ҳалли як масъалаи умумишудаи хаттии ҳамроҳшуда барои функсияҳои аналитикӣ ҳисоб карда шудааст;

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилшуда характери назариявӣ доранд. Онҳо асосан дар тадқиқотҳои оянадаи назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода шуда метавонанд.

Арзишҳои амалии кор дар он мебошад, ки аҳамияти амалии муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва истифодаи онҳо дар ҳалли бисёри масъалаҳои механикӣ ва дигар самтҳои физика ба манфиат мебошад.

РЕЗЮМЕ

диссертации Эшонкулова Алишера Алигуловича на тему "О разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов со сдвигом,"представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: двумерные сингулярный интеграл, символ оператора, индекс оператора, нётеровость оператора.

Актуальность темы исследования. Известно, что двумерные сингулярные интегральные уравнения по ограниченной области с операторами типа Михлина – Кальдерона – Зигмунда

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \tag{18}$$

где D – ограниченная область комплексной плоскости, играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций (И.Н.Векуа) теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс, М.Шиффер) теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.Боярский, А.Д.Джураев, В.Н.Монахов). Разработанная Р.В.Дудучавой L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_n и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее – к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса уравнений с операторами вида (1) в работах И.И.Комяка, А.Джураева, Н.Н.Василевского, Г.Джангибекова, К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова установлены эффективные необходимые и достататочные условия нетеровости и получены формулы для подсчета индекса.

Что касается двумерных сингулярных уравнений со сдвигом, то их изучение началось сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении выполнены Г. Джангибековым. Указанный автор методом банаховых алгебр исследовал некоторые классы двумерных сингулярных интегральных уравнений, левая часть которых наряду с операторами сингулярного интегрирования S_n, содержит операторы с поли-кернфункциями Бергмана B_n, а также операторы сдвига $(Wf)(z) = f(\overline{z})$ и комплексного сопряжения $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$. Р.В.Дудучава, А.И.Сагинашвили и Е.М.Шаргородский изучили вопрос нетеровости четырехкомпонентного оператора A с операторами S и W методом сведения к системе интегральных уравнений без сдвига, а также полученные результаты распространили для операторов с карлемановским сдвигом порядка n. В работе В.А.Мозела изучена алгебра поли-кернооператоров Бергмана с карлемановским сдвигом порядка n.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств новых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом и с непрерывными коэффициентами.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области со сдвигом с непрерывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одной систем двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс;

- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;

- в лебеговых пространствах изучена свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформном сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса;

- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

RESUME
of the dissertation of Eshonqulov Alisher Aligulovich on the theme "About solvability some classes singular integral operators with a shift,"submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01-real, complex and functional analysis.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, operator index, operator Noetherianness.

Relevance of the research theme. The main object of this dissertation is the two-dimensional singular integral Mikhlin-Zygmund operator acting in Lebesgue function space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$,

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{19}$$

Where D is a bounded region of the complex plane, the boundary of which consists of a finite number of simple closed Lyapunov curves Γ that do not intersecteach other, $m \neq 0$ - is a integer.

The Integral equations with such operators are encountered in many problems of the theory of generalized analytic functions (I.N. Vekua), the theory of quasiconformal mappings (L. Alfors, M. Schiffer), the theory of partial differential equations (B.V. Boyarsky, A.D. Djuraev, B.N. Monks) and others. For the first time such equations were considered by I.N. Vekua method of compressing mappings. A. D.Juraev investigated two dimensional singular integral equations in $L_p(D), 2 < p < \infty$ spaces using the reduction to boundary value problems for generalized analytic functions. I.I. Komiak and N.L. Vasilevsky applied the methods of the theory of Banach algebras when studying two-dimensional equations in $L^p(D), 1 < p < \infty$ spaces.

The developed R.V.Duduchavaya L_p, - theory, $1 < p < \infty$,, multidimensional singular integral equations on manifolds with boundary makes it possible to reduce the study of Noetherianproperties of equations containing the S_m operators and their various combinations to the factorization of the corresponding rational matrix functions, or rather, to find them private indices. In this case, it is of interest to establish the Noetherian criterion of the considered two-dimensional singular integral equation in the form of explicit conditions on its coefficients. For a wide class of integral equations, this was done in the works of G. Jangibekov, K.Kh. Boymatov and G. Jangibekov. In all the above works, cases were considered when the singular integral of the S_m had a characteristic of even order. As for the case of the odd X, in this direction only one work of G. Jangibekov was performed.

This dissertation work is devoted to the study of Noetherian properties of two-dimensional integral operators in a bounded domain with an odd characteristic with continuous as well as discontinuous coefficients.

Research methods. The method used in the dissertation is based on the elements of functional analysis and the theory of functions of complex variables, as well as the method of factorization of matrix functions.

Objective. The purpose of dissertation is to study the question of the solvability of certain classes of two dimensional singular integral equations in a bounded domain with odd characteristics with continuous as well as with discontinuous coefficients.

Scientific novelty. The results for the defense are new and are as follows:

- for one system of two-dimensional singular integral operators over a bounded domain with Karleman's shift in weight Lebesgue spaces, effective necessary and sufficient conditions for Noetherianness were found and a formula for calculating the index was obtained;

- for some classes of two-dimensional singular integral operators with odd characteristic over a bounded domain in weight spaces with necessary weights, sufficient and sufficient Noetherian conditions were obtained, and formulas were given for calculating the index;

- in the Lebesgue space with weight are learnt the properties of the algebra R generated by singular operators with odd characteristics and anticonformal shift, for which were obtained necessary and sufficient conditions for Noetherness and a formula for calculating the index;

- a solvability theorem was proved for a class of one-dimensional singular integral operators Cauchy and a formula for calculating the index was obtained;

- solved one general linear conjugation problem for analytic functions.

The theoretical and practical significance of the work. The results can serve as the basis for further theoretical studies in the theory of boundary value problems for partial differential equations.