РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.53.517.945

На правах рукописи

НАЗАРОВ ДЖАМШЕД ЮСУФОВИЧ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Душанбе – 2023

Работа выполнена на кафедре высшей математики Таджикского национального университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	**Сатторов Абдуманон Сатторович** доктор физико-математических наук, профессор кафедры “Высшая математика” Таджикского национального университета
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Шамсудинова Ф.М. -** доктора физико-математических наук, профессора кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета им. Н. Хусрава; **Зиёмидинов Б.М. -** к.ф.м.н, зав. кафедры «Математики и современных естествознания» Таджикского государственный университет права бизнеса и политики
ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Таджикский государственный финансово-экономический университет

Защита диссертации состоится *«21» июня 2023 г. в 14:00 часов* на заседании диссертационного совета 6D.KOA – 011 на механико – математическом факультете Таджикского национального университета, по адресу 734027, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «___» ____________2023г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор **Нуров И.Дж.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и стапень разработанности темы исследования. Теория уравнения с частными производными является одним из важнейших разделов математики, прежде всего благодаря своими приложениями в математику, физику, а также многих других областей науки. Так как дифференциальные уравнения с частными производными, которые имеют широкое применения в области физики, биологии, химии, экономики и многих других науках поэтому в XVII-XX веков интенсивно развивался.

Теория вырождающихся дифференциальных уравнений, возникшая в первой половине XX века и развивающаяся особенно интенсивно, начиная с 50-х годов прошлого века является одной из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Ф.Трикоми[1].

Новый этап в развитии уравнения смешанного типа начался с появлений работы Ф.И.Френкель[2]. В этой работе было показано, что задача истечения сверхзвуковой струны из сосуда с плоскими стенами сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина. Следующим этапом развития вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка является работа М.В.Келдыша[3], в которой впервые были указаны случаи, когда при решении задачи Дирихле для уравнений с характеристическими линиями вырождения часть границы в эллиптической части следует освободить от граничного условия.

Исследование уравнений смешанного типа и с сингулярными коэффициентами важно в связи с ее многочисленными приложениями в газовой динамике, гидродинамике, теории упругости и.т.д.

В Ф.Трикоми[1] отмечено, что изучение движения идеальной жидкости, от сжимаемости которой нельзя отвлечься, приводит к уравнению в частных производных второго порядка оказывающемуся уравнением эллиптического типа в дозвуковой области и гиперболического типа в сверхзвуковой. Изучение двухмерных околозвуковых явлений приводит к изучению уравнения смешанного типа. Ф.И. Франкель[2] обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И.Н. Векуа[4] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечного малых изгибающих поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

А.В. Бицадзе[5] получил существенно новые результаты значительной теоретической важности для модельного уравнения смешанного типа.

[1]Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных [текст] / Трикоми Ф. // М.: ИЛ. -1957. -С.443.

[2]Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [текст] / Франкль Ф.И. // -М.: наука. -1973. -С.600.

[3]Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе динамике [текст] / Келдыш М.В. // - ДАН СССР 1951. -Т. 77. -№2. -С.181-183.

[4]Векуа И.Н. О метаграмонических функциях [текст] / Векуа И.Н. // –Труды Тбилисского матем. ин-та 1943. -Т.12. -С. 105-174.

[5]Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа [текст] / Бицадзе А.В. // –М.: ВИНИТИ АН СССР 1959. -С. 164.

Постановке и исследованию новых задач для уравнений смешанного типа и с сингулярными коэффициентами посвящены в работы К.И. Бабенко[6], В.Н. Врагова[7], Е.И. Моисеева[8], А.М. Нахушева[9], М.С. Салохиддинова[10], М.М. Смирнова[11], Л.Г. Михайлова[12], Н. Раджабова[13], В.И. Жегалова[14], А.С. Сатторова[15] и др.

Дальнейшее развитие теории вырождающегося дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами получено в работах Советских математиков: М.М.Смирнова[16], Л.Г.Михайлова[18], Раджабова[13] Н.Р., Е.И.Моисеева[17] и др.

Исследованию вырождающихся дифференциальных уравнений посвящено большое число работ советских и зарубежных авторов.

Настоящая диссертационая работа посвящена изучению вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода. В работе получены интегральные представления решений данного класса дифференциального уравнения в зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнения. В дальнейшем полученные интегральные представления применяются для решения задач типа Коши в характеристической области. Далее полученные результаты для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка обобщаются для исследования вырождающихся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода. Следует отметить, что выше названные результаты для этого класса уравнений получены в плоскости и в пространстве.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры высшей математики Таджикского национального университета на 2016-2020г. по теме «Исследование вырождающихся дифференциальных уравнений»

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационный работы заключается в следующем:

- Получение интегральных представлений решения модельных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка в характеристической области с одной и с двумя линиями вырождения на плоскости;

[6]Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа. –Успехи матем. наук, 1953, т.8, №2, с. 160.

[7]Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. –изд. НГУ, 1983, с. 84

[8]Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнения смешанного типа. –ДАН СССР, 1978, т.242, с.48-51.

[9]Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. –Диф. Уравнения, 1969, т.5, №1, с.44-59.

[10]Салохитдинов М.С., Толипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения. Диф. уравнения, 1972, т.8, №1, с.134-142.

[11]Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985, с.302.

[12]Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. –Из-во АН Тадж. ССР, Душанбе, 1963.

[13]Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными линиями или сингулярными поверхностями. Душанбе, 1980, ч.I, с.126; 1981, ч.II,-170, с., 1982, ч.III, -170 с., 1985, ч.IV, 1985, с.148.

[14]Жегалов В.И. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Изв. Вузов, математика 1960, №4, с. 73-78.

[15]Сатторов А.С. Решение задачи Трикоми для одного смешанно-сингулярного уравнения. Докл. АН. Тадж. ССР, 1990, т.33. №2, с.194-198.

[16]Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболический уравнения. –М.: наука, 1966, с.292

[17]Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №1. С.93-103.

[18]Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1.-Душанбе: Дониш, 1966, 47с

- Получение интегральных представлений решения для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода в пространстве;
- Получение интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Получение интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений четвертого порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Постановка и исследование задач типов Коши в случае, когда общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные функции;
- Постановка и исследование задач типов Коши в случае, когда общее решение уравнения четвертого порядка содержит четыре произвольные функции на плоскости;
- Постановка и исследование задач типов Коши в случае, когда общее решение уравнения четвертого порядка содержит четыре произвольные функции в пространстве;
- Постановка и исследование задач типов Коши в случае, когда общее решение вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца содержит две и четыре произвольные функции в пространстве.

Основные методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы получения интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений. В работе также используется метод интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений через решение обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанных в работах М.М Смирнова. Н.Раджабова и А.С.Сатторова.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Получено интегральное представление решений дифференциальных уравнений второго порядка с одной линией вырождения в гиперболической части области;
- Полученные интегральные представления решения дифференциальных уравнений второго порядка первого рода с одной линией вырождения применяются для решения задач типов Коши в гиперболической части области;
- Получено интегральное представление решения дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения в характеристический области;
- Полученные интегральные представления решения дифференциальных уравнений второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения применяются для решения задачи типа Коши в характеристический области;
- Получено интегральное представление решения дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с двумя линиями вырождения в гиперболический части области;
- Получено интегральное представление решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Полученные интегральные представления решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядка первого рода вида Гельмгольца применяются для решения задачи типа Коши на плоскости и в пространстве.

Положения выносимые на защиту:

- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка первого рода для различных значений коэффициентов уравнений;
- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений четвертого порядка первого рода через произвольные функции в характеристической области;
- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Решение задач типов Коши для выше названных вырождающихся дифференциальных уравнений с применением полученных интегральных представлений решения в гиперболической части области.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Результаты могут быть использованы для изучения многомерных вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков с многими гиперплоскостями вырождения. Полученные результаты в дальнейшим могут быть использованы для решения задачи Трикоми в смешанной области.

Достоверность диссертационных результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выводами и строгими математическими доказательствами, опирающимися на методы дифференциальных уравнений с частными производными. Для проверки достоверности результатов в каждой главе приведен ряд примеров.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, являются вкладом автора в опубликованных работах. Постановка задач и руководство выполненных работ принадлежит руководителю диссертанта. В основном все результаты диссертационной работы получены диссертантом.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах отдела дифференциальных уравнения научно-исследовательского института ТНУ под руководством д.ф.м.н., профессора Сатторова А.С. (Душанбе, 2010-2015г)
- семинарах кафедры высшей математики ТНУ (Душанбе, 2016-2020г)
- республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и студентов, посвященной «18-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан» и «Году памяти Имама Аъзама» (Душанбе-2010);
- республиканской научной конференции «Современные проблемы естественных и социально-гуманитарных наук», посвященной 10-летию Научно- исследовательского института. (Душанбе-2014);
- республиканской научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания», посвященной памяти профессора Муртазоева Д. М. (Душанбе-2014);
- республиканской научной конференции «Неклассические дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета (Душанбе-2015);
- республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (Душанбе-2016);

- международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию д.ф.м.н., профессора Юнуси М.К. (Душанбе, 27-28 декабри 2018г)
- международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (Душанбе-2018);

Публикации. Основные результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 18 работах [1-А – 18-А], в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце автореферета. Из 18 работ 8 опубликовано в журналах, входящих в список журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 10 в материалах международных и республиканских научных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, списка литературы, состоящего из 80 наименований. Общий объём диссертации -103 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий-на порядковый номер теорем или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Приведем краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

В первой главе диссертации рассматриваются некоторые вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода.

В первом параграфе первой главы исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями следующего вида

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{6\beta-1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

где $\alpha, \beta -$ постоянные числа.

Через D^- – обозначим область, ограниченную отрезком AB оси OX и характеристиками $AC:\ x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=0,\quad BC:\ x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$ уравнения (1) выходящими соответственно из точек $A(0;0), B(1;0)$ пересекающимися в точке $C\left[\frac{1}{2};-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Рассмотрим уравнения (1) в области D^-.

Введём следующий интегральный оператор

$$P_{\alpha,\beta}\varphi_j \equiv \int_0^1 d\sigma\int_0^1 \frac{\psi_j\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{\alpha}[\tau(1-\tau)]^{\beta}},$$

$\psi_j\,(j=1,2,3)$ -произвольные функции.

Регулярным решением уравнения (1) в области D^- будем называть функцию $u(x;y)$, непрерывную в $\overline{D^-}$ - имеющую непрерывные частные производные первого и второго порядков в D^- и удовлетворяющее уравнения (1).

В зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнения получены различные интегральные представления. В случае, когда $2\alpha \ge 1$ и $-1<2\beta<0$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1.3. *Пусть $2\alpha \ge 1$ и $-1<2\beta<0$. То регулярное решение уравнения (1) в области D^- представим в виде*

$$u(x;y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1-\frac{2}{3}A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1'\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\psi_2, \tag{2}$$

где A_α, $A_{1-\beta}$, $A_{1-\beta}$ - постоянные числа, ψ_1,ψ_2 - произвольные функции, $\psi_1\in C^3(D^-)$ и $\psi_2\in C^2(D^-)$.

На основе полученных интегральных представлений ставятся и решаются задачи типа Коши.

Задача $K_{1.1.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1) при $2\alpha\ge 1$ и $-1<2\beta<0$ в области D^-, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}U(x;y)=g_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial y}=g_2(x), \tag{$K_{1.1.2}$}$$

где $g_1(x), g_2(x)$- заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.1.2}$. В равенстве (2), применяя начальные условия $(K_{1.1.2})$, имеем

$$(1+2\beta)A_\alpha\int_0^1\frac{\tilde\psi_1[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau=\tilde g_1(x),\quad A_\alpha\int_0^1\frac{\tilde\psi_2[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau=\tilde g_2(x), \tag{3}$$

здесь $A_{1+\beta}=\dfrac{1}{B(1+\beta;1+\beta)}$ и $A_{1-\beta}=\dfrac{1}{B(1-\beta;1-\beta)}$.

Обращая равенство (3), находим:

$$\tilde\psi_1(x)=\tilde F_1(x),\quad \tilde\psi_2(x)=\tilde F_2(x), \tag{4}$$

$$\tilde F_1(x)=\frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{(1+2\beta)2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde\psi_1(s)\right]\frac{ds}{(x^2-s^2)^\lambda},$$

$$\tilde F_2(x)=\frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde\psi_1(s)\right]\frac{ds}{(x^2-s^2)^\lambda}.$$

Теорема 1.1.9. *Если $\tilde\psi_1\in C^{3+k}$ и $\tilde\psi_2\in C^{2+k}$, тогда регулярное решение уравнения (1) при $2\alpha\ge 1$, $-1<2\beta<0$, удовлетворяющее начальным условиям $(K_{1.1.2})$ в области D^- даётся равенством (2), где $\tilde\psi_1,\tilde\psi_2$ определяются из равенства (4).*

Аналогичным образом исследуются остальные случаи, когда $0<2\alpha<1$, $0<2\beta<1$; $2\beta\ge 1$, $-1<2\alpha<0$; $0<2\alpha<1$, $-1<2\beta<0$. В некоторых из этих случаев ставится и решается задача типа Коши.

Пусть D-конечная область плоскости xoy. Часть области D, в которых $y>0$ и $y<0$ соответственно обозначим через D^+ и D^-. Во втором параграфе первой главы исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение первого рода с двумя линиями вырождения следующего вида

$$L_\beta u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{6\beta-1}{2}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad (5)$$

где $\beta-$ постоянное число.

Уравнения (5) рассмотрим в области D^-.

Введём следующий интегральный оператор

$$P_\beta \varphi_j \equiv \int_0^1 \frac{\psi_j\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^\beta},$$

$\psi_j\,(j=1,2,3)$-произвольные функции.

В зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнения получены различные интегральные представления. В случае, когда $0<2\beta<1$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.2.2. *Пусть $0<2\beta<1$. Тогда регулярное решение уравнения (5) в области D^- при представимо в виде*

$$\mathrm{u(x,y)} = \mathrm{A}_\beta P_{1-\beta}\psi_1 + \mathrm{A}_{1-\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_\beta \psi_2, \qquad (6)$$

где A_β, $\mathrm{A}_{1-\beta}$ - постоянные числа, $\psi_1, \psi_2 -$ произвольные функции из класса $C^2(D^-)$.

Задача $K_{1.2.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (5) в области D^- при $0<2\beta<1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} \mathrm{u}(x,y) = g_1(x), \quad \lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(2\beta-1)}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = g_2(x), \quad (K_{1.2.2})$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$-заданные функции, $\beta-$постоянное число.

Теорема 1.2.5. *Пусть $0<2\beta<1$. Тогда решение задачи $K_{1.2.2}$ в области D^- даётся формулой*

$$\begin{aligned}\mathrm{u(x,y)} = {} & \frac{1}{B(\beta,\beta)}\int_0^1 \frac{g_1\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\beta}} + \\ & + \frac{3}{2(1-2\beta)}\cdot\frac{(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}}{B(1-\beta,1-\beta)}\int_0^1 \frac{g_2\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^\beta},\end{aligned} \qquad (7)$$

$B(\beta,\beta)$, $B(1-\beta,1-\beta)$ *- функция Эйлера второго рода, и* $g_1(x), g_2(x) \in C^2(D^-)\cap C(\overline{D^-})$.

В тексте диссертации в случае, когда $2\beta \ge 1$ и $-1<2\beta<0$ получено интегральное представление решений и для этих случаев ставятся и решаются задачи типа Коши.

В третьем параграфе первой главы исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка первого рода следующего вида

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (8)$$

где $\alpha,\beta-$ вещественные числа.

Пусть $D-$конечная область, в первом квадранте ограниченная гладкой кривой Γ с концами в точках $O(0;0)$ и $A(1;0)$ а в четвертом квадранте ограничено характеристиками уравнения (8).

Части области D, в которой $x>0, \quad y>0$ соответственно обозначим через $D^+ -$эллиптической части и при $x>0, \quad y<0$ обозначим через $D^- -$гиперболической части.

Введем следующий интегральный оператор

$$P_{\alpha,\beta}\psi_i \equiv A_{\alpha,}B_\beta\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{\psi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^\alpha[\tau(1-\tau)]^\beta}, \quad (i=1,2,3,4.),$$

где $A_\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}$, $\mathrm{B}(\alpha,\alpha)$-функция Эйлера второго рода.

Регулярным решением уравнения (8) в области D^- будем называть функцию $u(x;y)$, имеющую непрерывные частные производные первого и второго порядка в D^- и непрерывную в $\overline{D}^-$.

Для уравнения (8), даются интегральные представления решений через произвольную функцию, которые в свою очередь применяются для решения задачи типа Коши в характеристической области D^-.

Теорема 1.3.6. *Пусть $2\alpha\geq 1$ и $-1<2\beta<0$. Тогда регулярное решение уравнения (8) в области D^- представим в следующем виде*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{A}_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\phi_1-\mathrm{A}_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+\mathrm{A}_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{1-\alpha,\beta}\phi_2, \qquad (9)$$

где A_α, $\mathrm{A}_{1+\beta}$, $\mathrm{A}_{1-\beta}$ - постоянные числа, , ϕ_1,ϕ_2 - произвольные функции одного аргумента соответственно из классов $C^3(D^-)$ и $C^2(D^-)$.

Задача $K_{1.3.3}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (8) при $2\alpha\geq 1$ и $-1<2\beta<0$ в области D^-, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}\mathrm{u}(x,y)=\tilde{g}_1(x), \quad \lim_{y\to -0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \qquad (K_{1.3.3})$$

где $\tilde{g}_1(x),\tilde{g}_2(x)$ - заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.3.3}$. В равенстве (9), применяя начальные условия ($K_{1.3.3}$), имеем

$$(1+2\beta)\int_0^1\frac{\tilde{\phi}_1\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=\tilde{g}_1(x), \quad \int_0^1\frac{\tilde{\phi}_2\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=\tilde{g}_2(x), \qquad (10)$$

здесь $A_{1+\beta}=\dfrac{1}{B(1+\beta;1+\beta)}$ и $A_{1-\beta}=\dfrac{1}{B(1-\beta;1-\beta)}$.

Обращая равенство (10), находим:

$$\tilde{\phi}_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\tilde{F}_1(x),\quad \tilde{\phi}_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\tilde{F}_2(x), \tag{11}$$

где $\tilde{F}_1(x)=\dfrac{1}{1+2\beta}F_1(x)$ и $\tilde{F}_2(x)=F_2(x)$, $g_1(x), g_2(x)$ заменяются соответственно на $\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x)$.

Теорема 1.3.12. *Пусть $\tilde{g}_1 \in C^{3+k}$ и $\tilde{g}_2 \in C^{2+k}$. Тогда регулярное решение уравнения (8) при $2\alpha \geq 1$ и $-1<2\beta<0$, удовлетворяющее начальным условиям $(K_{1.3.3})$, даётся равенством (10), где $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ определяются из равенства (11).*

Аналогичным образом для уравнения (8) в зависимиости от принимаемых значений коэффициентов уравнения найдено интегральные представление решений в явном виде. В некоторых случаях найденные интегральные представления используются для решения задачи типа Коши в характеристической области D^-.

В четвертом параграфе первой главы обобщаются некоторые ранее полученные результаты в плоском случае.

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} + \frac{m}{2(m+1)y}U_y = 0, \tag{12}$$

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} - \frac{a}{y}U_y = 0,\ (y<0) \tag{13}$$

где m и a -постоянные числа.

Пусть D^- область, ограниченная интервалом $(0;1)$ оси Ox и характеристиками $x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $x+\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$, входящими соответственно из точек $O(0;0)$, $A(1;0)$ и пересекающимися в точке $C\left(\dfrac{1}{2};-\left(\dfrac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

Регулярным решением уравнения (12) или (13) в области D^- будем называть функцию $U(x,y)$ непрерывную в замкнутой области $\bar{D}^-$ имеющую непрерывные производные до второго порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнению (12) или (13).

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.4.3. *Пусть $0<\beta<1$, $a<1$. Тогда регулярное решение уравнения (13) в области D^- представим в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} + B_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \tag{14}$$

где φ *и* ψ *-произвольные функции одного аргумента,* $A_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+2a}{2(m+2)};\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$,

$B_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)};\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$, $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, $\boldsymbol{B}$ *-функция Эйлера второго рода.*

Задача $K_{1.4..2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (13) в области D^- удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}U(x,y)=\tilde{g}_1(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial U}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \qquad (K_{1.4.2})$$

где $\tilde{g}_1(x)$ и $\tilde{g}_2(x)-$заданные функции на $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.4..2}$**.** Аналогично решению задачи $K_{1.3.3}$, в равенстве (14) используя условия $K_{1.4.2}$, получим:

$$\varphi_2(x)=\tilde{g}_1(x),\quad \psi_2(x)=\tilde{g}_2(x), \qquad (15)$$

Подставляя из равенства (15) значения $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ в (14), получим явное решение задачи $K_{1.4.2}$.

Аналогичным образом для уравнения (12) в зависимиости от принимаемых значений коэффициентов уравнения найдено интегральные представление решений в явном виде. В некоторых случаях найденные интегральные представления применяются для решения задачи типа Коши.

В пятом параграфе первой главы исследуется вырождающиеся дифференциальных уравнений первого рода в пространстве.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующие вырождающиеся дифференциальных уравнений первого рода:

$$(-y)^m\Delta u-U_{yy}-\frac{a}{y}U_y=0, \qquad (16)$$

где m и a -постоянные числа, $y<0$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ -оператор Лапласа.

Пусть $D^-\in R^3$-конечная область, ограниченная плоскостью $y=0$ и при $y<0$ характеристической поверхносью конуса S уравнения (16).

Регулярным решением уравнения (16) в области D^- будем называть функцию $u(x_1,x_2,y)$ непрерывную в области $\overline{D}^-$ имеющую непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнение (16).

Аналогичным образом как §1.4. для уравнения (16) найдено интегральное представление решений в явном виде. В некоторых случаях ставится и решается задача типа Коши в характеристической области D^-.

Введём следующий интегральный оператор:

$$T_\beta\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^\beta}d\tau, \qquad (i=1,2)$$

Теорема 1.5.4. *Пусть* $0<\beta<1$. *Тогда регулярное решение уравнения (16) в области* D^- *представим в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau, \qquad (17)$$

где $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+2a}{2(m+2)},\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, $\tilde{A}_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)},\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$, B *-функция Эйлера второго рода,* ψ_1,ψ_2 *-произвольные функции одного аргумента и* m *-постоянное число.*

Задача $K_{1.5.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (16) в области D^- при $a<1,\ 0<\beta<1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=g_1(x_1,x_2), \qquad \lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial u}{\partial y}=g_2(x_1,x_2), \qquad (K_{1.5.2})$$

где $g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)$- заданные непрерывные функции в части плоскости $y=0$.

Решение задачи $K_{1.5.2}$**.** С учетом условий $(K_{1.5.2})$ из равенства (17) находим:

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=g_1(x_1,x_2),$$
$$\lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial u}{\partial y}=\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=(a-1)g_2(x_1,x_2). \qquad (18)$$

С учетом условий (18) решение задачи $K_{1.5.2}$ найдено в явном виде

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{g_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{g_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau. \qquad (19)$$

Легко можно проверить, что равенство (19) удовлетворяет начальному условию $K_{1.5.2}$ и уравнению (16).

Аналогичным образом, как предыдущих параграфах для уравнения (16) найдено интегральное представление решения для различных значений коэффициентов уравнения.

В шестом параграфе первой главы изучается вырождающееся дифференциальных уравнений первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0, \quad (y<0) \qquad (20)$$

где $m>0$ и a - постоянные числа.

Пусть D^--область, ограниченная интервалом (0;1) оси OX и характеристиками $\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ \sqrt{2}x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1,$ уравнения (20) входящими соответственно из точек $O(0;0)$, $A(1;0)$ и пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

Регулярными решением уравнения (20) в области D^- будем называть функцию $u(x,y)$ непрерывную в замкнутой области $\overline{D^-}$, имеющую непрерывные производные до второго порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнения (20).

Теорема 1.6.3. *Регулярное решение уравнения (20) в области D^- при $-1<\beta<0,\ 2a<1,\quad \varphi''-\varphi=0,\ \psi''-\psi=0$ представим в виде*

$$u(x,y)=A_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}+$$
$$+(1+2\beta)\int_0^1\frac{\psi_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$
$$-\frac{2\lambda}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1\frac{\psi'_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2t)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}},\qquad(21)$$

где ψ,ψ_1- произвольные функции одного аргумента, $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)}$,

$A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}, B_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{3m+4a+4}{2(m+2)},\frac{3m+4a+4}{2(m+2)}\right)}$, $\mathrm{B}-$функции Эйлера.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующие вырождающиеся дифференциального уравнения первого рода вида Гельмгольца

$$(-y)^m\Delta u\ -u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0,\qquad(22)$$

где m и a - постоянные числа, $y<0,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$ оператор Лапласа.

Пусть $D^-\in R^3$ - конечная область, ограниченная частью плоскости $y=0$ и при $y<0$ характеристической поверхностью конуса S уравнения (22).

Регулярным решением уравнения (22) в области D^- будем называть функцию $u(x_1,x_2,y)$ непрерывную в замкнутой области $\overline{D^-}$, имеющую непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнения (22).

Теорема 1.6.5. *Пусть $0<\beta<1,\ 2a<1,\ \varphi_1''-\varphi_1=0$ и $\varphi_2''-\varphi_2=0$. Тогда регулярное решение уравнения (22) в области D^- представим в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\qquad(23)$$

где $\beta = \frac{m+4a}{2(m+2)}$, $A_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)}, \frac{m+4a}{2(m+2)}\right)}$, $\tilde{A}_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)}, \frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $\mathrm{B}-$функция Эйлера второго рода, φ_1, φ_2 — произвольные функции одного аргумента и m-постоянное число.

Задача $K_{1.6.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (22) в области D^- при $2a<1,\ 0<\beta<1,$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y) = g_1[\lambda(x_1,x_2)],\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y} = g_2[\lambda(x_1,x_2)], \qquad (K_{1.6.2})$$

где $g_1[\lambda(x_1,x_2)], g_2[\lambda(x_1,x_2)]$ заданные непрерывные функции в части плоскости $y=0$.

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y) = \varphi_1[\lambda(x_1+x_2)] = g_1[\lambda(x_1,x_2)],$$
$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2[\lambda(x_1+x_2)] = (2a-1)g_2[\lambda(x_1,x_2)], \qquad (24)$$

с учётом равенств (24) решения задачи $K_{1.6.2}$ найдено в явном виде

$$u(x_1,x_2,y) = A_{m,a}\int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}} +$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1 \frac{g_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}, \qquad (25)$$

Легко можно проверить, что равенство (25) удовлетворяет уравнению (22) и условия задачи $(K_{1.6.2})$ в области D^-.

Аналогичным образом как выше для уравнения (22) в зависимости от принимаемых значений β найдены различные интегральные представления решений.

Вторая глава настоящей диссертация посвящена исследованию некоторых вырождающихся дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода.

В первом параграфе второй главы исследуется вырождающееся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода.

Пусть $\mathrm{D}-$конечная область плоскости xoy. Часть области D, в которых $y>0$ и $y<0$ соответственно обозначим через D^+ и D^-.

В области D^- рассмотрим уравнение следующего вида

$$\Pi_a\left[\frac{(-xy)^{-\frac{4+3\nu-3\alpha}{2}}}{x^3+y^3}\Pi_\nu U\right] = 0, \qquad (26)$$

где $\Pi_\nu U \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{6\nu-1}{2}\left(\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $a,\nu-$вещественные числа.

Введём следующий интегральный оператор

$$\mathrm{P}_\alpha\varphi_j = \int_0^1 \frac{\varphi_j\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}},\quad (j=1,2,3,4),,$$

где φ_j-произвольные функции.

Теорема 2.1.1. *Если* $\Pi_\nu U_\nu = 0$ *и* $\Pi_\alpha U_\alpha = 0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *при* $a > \nu$ *представимо в виде*

$$U(x,y) = U_\nu(x,y) + (-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)} U_a(x,y), \tag{2.1.2}$$

где U_ν, U_a *– решение уравнения второго порядка.*

Теорема 2.1.4. *Пусть* $0 < 2\nu < 1,\ 0 < 2a < 1$ *и* $a > \nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (26) в области* D^- *представима в следующем виде*

$$\begin{aligned} U(x,y) = A_\nu P_{1-\nu}\varphi_1 + A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)} P_\nu \varphi_2 + \\ + A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)} P_{1-\alpha}\psi_1 + A_{1-a}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\nu)} P_\alpha \psi_2, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ *-произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Задача $K_{2.1.3}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (26) в области D^- при $0 < 2\nu < 1$, $0 < 2a < 1$ и $a > \nu$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y \to -0} u(x,y) = f_1(x), \quad \lim_{y \to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}\right] = g_1(x),$$

$$\lim_{y \to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(a+\nu-1)}(-y)^{\frac{6a-1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} = g_2(x),$$

$$\lim_{y \to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(2\nu-1)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6a-1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\} = f_2(x), \tag{$K_{2.1.3}$}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x), g_1(x)$, $g_2(x)$-заданные непрерывные функции на интервале $0 < x < 1$.

Теорема 2.1.10. *Пусть* $0 < 2\nu < 1,\ 0 < 2a < 1$ *и* $a > \nu$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.3}$ *в области* D^- *представляется следующей формулой*

$$\begin{aligned} U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{B}(\nu,\nu)} \int_0^1 \frac{f_1\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right] d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\nu}} + \\ + \frac{8(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}}{27(1-2\nu)\mathrm{B}(1-\nu,1-\nu)(a-\nu)(1-a-\nu)} \int_0^1 \frac{f_2\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right] d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\nu}} + \\ + \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{3(\nu-\alpha)(\mathrm{B}(a,a)} \int_0^1 \frac{g_1\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right] d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}} + \\ + \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(1-a-\nu)}}{9\mathrm{B}(1-\alpha;1-\alpha)(1-a-\nu)(1-2\alpha)} \int_0^1 \frac{g_2\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right] d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{a}}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ *- заданные функции из класса* $C^2(D^-)$ *на интервале* $0 < x < 1$ *и* ν, α *- постоянные числа.*

Аналогичном образом, как в первой главе, для уравнения (26) найдены интегральные представления решений в явном виде. В некоторых случаях ставится и решается задача типа Коши в характеристической области D^-.

Во втором параграфе второй главы исследуется вырождающееся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с разными коэффициентами.

Пусть $\mathrm{D}-$конечная область в первом квадранте, ограниченная гладкой кривой Γ с концами в точках $\mathrm{O}(0,0)$, $A(1,0)$ и в четвёртом квадранте ограничена характеристическими линиями уравнения. Часть области D, в которой $x>0,\ y>0$, обозначим через D^{+}- эллиптическая часть, и при $x>0,\ y<0$ обозначим через D^{-}- гиперболическую часть.

В области D^{-} рассмотрим уравнение следующего вида

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q(x,y)L_{\mu,\nu}U\right]=0, \qquad (30)$$

где $L_{\mu,\nu}U\equiv y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{6\mu-1}{2}\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{6\nu-1}{2}\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

$$Q(x,y)=x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}(-y)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}\Big/(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha+\mu-1)y^3,$$

$\alpha,\beta,\mu,\nu-$вещественные числа.

Введём следующий интегральный оператор

$$T_{\alpha,\beta}\varphi_i=A_\alpha A_\beta\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{\varphi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^\alpha[\tau(1-\tau)]^\beta},$$

где φ_i $(i=1,2,3,4)$ - произвольные функции, $A_\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}$, $A_\beta=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\beta,\beta)}$, B - функции Эйлера второго рода.

Теорема 2.2.1. *Если $L_{\mu;\nu}U_{\mu;\nu}=0$ и $L_{a;\beta}U_{a;\beta}=0$. Тогда регулярное решение уравнения (30) в области D^{-} при $a>\nu$ представим в виде*

$$U(x,y)=U_{\mu;\nu}(x,y)+x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}U_{a;\beta}(x,y), \qquad (31)$$

где $U_{\mu;\nu},U_{a;\beta}-$ решение уравнения второго порядка.

Теорема 2.2.6. *Пусть $2\mu\ge1,\ 0<2\nu<1,\ 2\alpha\ge1,\ 2\beta\ge1$ и $a>\mu$. Тогда регулярное решение уравнения (30) в области D^{-} представим в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu},_{1-\nu}\varphi_1+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu},_{\nu}\varphi_2+$$
$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (32)$$

где $\varphi_1,\varphi_2.\psi_1-$ произвольные функции одного аргумента из класса $C^2(D^{-})$ и $A_\mu,\mathrm{A}_{1\text{-}\nu},A_{\nu,}A_a,A_\beta$ - постоянные числа.

Задача $K_{2.2.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (30), при $2\mu\ge1,\ \ 0<2\nu<1,\ 2\alpha\ge1,\ 2\beta\ge1,\alpha>\mu$ и $\alpha>\mu,\ \nu+\beta>1,$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}U(x,y)=f_1(x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(x),$$
$$\lim_{y\to-0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{5+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right]=f_3(x), \qquad (k_{2.2.2}),$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ $-$ заданные функции на $0<x<1$.

Аналогичным образом как выше для уравнения (30) в зависимости от принимаемых значений α,β,μ,ν найдены различные интегральные представления решений в явном виде. Некоторые полученные интегральные представления используются для решения задачи типа Коши в характеристической области D^{-}.

В третьем параграфе второй главы исследуется задача типа Рикье для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными лилиями. В данном параграфе сначала даются интегральные представления решения уравнения второго порядка с двумя сингулярными линиями, затем используя связь решения уравнения четвертого порядка с уравнением второго порядка, находятся интегральные представления решений уравнения четвертого порядка. Найденные интегральные представления решения применяются для решения задачи типа Рикье на плоскости.

В четвертом параграфе второй главы исследуется вырождающееся дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости.

Пусть D – конечная область плоскости xoy. Часть области D в которых $y>0$ и $y<0$ соответственно обозначим через D^{+} и D^{-}.

В области D^{-} рассмотрим уравнение следующего вида

$$\Pi_b^{\lambda}\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^{\lambda}U(x;y)\right]=0, \tag{33}$$

где $\Pi_a^{\lambda}U \equiv (-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\dfrac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$, $\quad \Pi_b^{\lambda}U \equiv (-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\dfrac{2b}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$

$a,b,$– вещественные числа.

Регулярным решением уравнения (33) в области D^{-} будем называть функцию $U(x,y)$ непрерывного в $\overline{\mathrm{D}^{-}}$, имеющую непрерывные производные четвёртого порядка в D^{-} и удовлетворяющее уравнения (33).

Введём следующий интегральный оператор

$$\mathrm{P}_{\beta}^{\lambda}\varphi_j=\int_0^1\frac{\varphi_j\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{\beta}},\quad (j=1,2,3,4),$$

где φ_j – произвольные функции.

Теорема 2.4.1. *Если* $\Pi_a^{\lambda}U_{\alpha}=0,\ \Pi_b^{\lambda}U_b=0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^{-} *при* $b>a$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=U_{\alpha}(x,y)+(-y)^{b-a}U_b(x,y), \tag{34}$$

где U_{α},U_b – *решение уравнения второго порядка.*

Теорема 2.4.4. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 0<2\beta<1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0,$ $\psi_1''-\psi_1=0,\ \psi_2''-\psi_2=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (33) в области* D^{-} *представим в виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1+\\&+C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2,\end{aligned} \tag{35}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\ \psi_1,\psi_2$ – *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2\left(D^{-}\right)$ *и*

$$B_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)},\quad C_{m,b}=\frac{1}{B\left(\frac{m+4-4b}{2(m+2)},\frac{m+4-4b}{2(m+2)}\right)}.$$

В тексте диссертации для уравнения (33) найдены различные интегральные представления. И в некоторых случаях ставится и решается задача типа Коши.

В пятом параграфе второй главы исследуется вырождающееся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода вида Гельмгольца в пространстве.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующие вырождающиеся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода вида Гельмгольца

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x_1;x_1;y)\right]=0, \tag{36}$$

где $\Pi_a^\lambda U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$ и $\Pi_b^\lambda U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2b}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$

$a,b,-$ вещественные числа, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$ оператор Лапласа.

Пусть $D^-\in R^3$ - конечная область, ограниченная частью плоскости $y=0$ и при $y<0$ характеристической поверхностью конуса S уравнения (36).

Регулярным решением уравнения (36) в области D^- будем называть функцию $u(x_1,x_2,y)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}^-$, имеющую непрерывные частные производные четвертого порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнения (36).

Введём следующий интегральный оператор

$$\mathrm{P}_\beta^\lambda\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^\beta},\ (i=1,2,3,4),$$

где φ_j- произвольные функции.

Теорема 2.5.1. *Если* $\Pi_a^\lambda U_\alpha=0$ *и* $\Pi_b^\lambda U_b=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (36) в области* D^- *при* $b>a$ *представим в виде*

$$U(x,y)=U_a(x,y)+(-y)^{b-a}U_b(x,y), \tag{37}$$

где U_α,U_b- *решение уравнения второго порядка.*

Доказательство. В равенстве (37) применяем оператор Π_a^λ :

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda U_\alpha+\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right],$$

по условию теоремы, $\Pi_a^\lambda U_a=0$ следовательно, получим

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right], \tag{38}$$

В правой части равенства (38) применяем оператор Π_a^λ и получим

$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left((-y)^m\Delta u-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u\right)\left[(-y)^{b-a}U_b\right]=$$

$$(-y)^m\Delta\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{2a}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$

$$=(-y)^m(-y)^{b-a}\Delta U_b-\left[(b-a)(b-a-1)(-y)^{b-a-2}U_b-2(b-a)(-y)^{b-a-1}U'_b\right]-$$
$$-(-y)^{b-a}U''_b-\frac{2a}{y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1}U_b+(-y)^{b-a}U'_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$

$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=(-y)^{b-a}\left((-y)^m\Delta U_b-U''_b-\frac{2b}{y}U'_b-\lambda^2(-y)^mU_b\right)+$$
$$+\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b$$

По условию теоремы 2.5.1 первое слагаемое равно нулю.

Теперь $\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b$, (39)

Обе части равенства (39) делим на $(-y)^{b-a-2}$ и имеем

$$(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)=(a-b)(b+a-1)U_b$$

В последнем равенстве, применяя оператор L_b^λ с учётом условий теоремы, получим

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^\lambda U_b=0$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 2\beta\ge 1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0$, $\varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi_1''-\psi_1=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (36) в области* D^- *представим в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1,\qquad(40)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1-$ *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и* $B_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$.

Задача $K_{2.5.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (36) в области D^- при $0<2\alpha<1$, $2\beta\ge 1$ и $b<\frac{m}{2}+2-a$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)=f_1(\lambda x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(\lambda x),$$
$$\lim_{y\to-0}\left\{(-y)^{2-a-b}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_1(\lambda x),\qquad (K_{2.5.2})$$

где $f_1(\lambda x)$, $f_2(\lambda x)$, $g_1(\lambda x)$ -заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$, a,b - постоянные числа.

Решение задача $K_{2.5.2}$**.** Для решения данной задачи используем интегральное представление (40).

Теорема 2.5.9. *Пусть* $0 < 2\alpha < 1,\ 2\beta \geq 1$ *и* $b < \frac{m}{2} + 2 - a$. *Тогда решение задачи* $K_{2.5.2}$ *в области* D^{-} *даётся формулой*

$$U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)} \int_0^1 \frac{f_1\left[\lambda\left(x_1 + x_2 - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{(a-b)\mathrm{B}(1-\alpha,1-\alpha)}(-y)^{1-2a} \int_0^1 \frac{f_2\left[\lambda\left(x_1 + x_2 - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{(b-a)(b+a-1)\mathrm{B}(\beta,\beta)}(-y)^{b-a} \int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(x_1 + x_1 - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \tag{41}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ *-заданные функции из класса* $C^2\left(D^{-}\right)$, $\alpha = \frac{m+4a}{2(m+2)},\ \beta = \frac{m+4b}{2(m+2)},\ a,b,m$ *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (41) удовлетворяет уравнению (36) и начальным условиям $K_{2.4.2}$.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Получено интегральное представление решений дифференциальных уравнений второго порядка с одной линией вырождения в гиперболической части области [2-А];
2. Полученны интегральные представления решения дифференциальных уравнений второго порядка первого рода с одной линией вырождения и решения задач типов Коши в гиперболической части области [16-А];
3. Получены интегральные представления решения дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения и решения задач типов Коши в характеристический области [1-А];
4. Получено интегральное представление решения дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с двумя линиями вырождения в гиперболический части области [6-А; 7-А];
5. Получено интегральное представление решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве [8 – А];
6. Получены интегральные представления решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца и задач типов Коши на плоскости и в пространстве [8 – А];

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории вырождающихся дифференциального уравнения и уравнения смешанного типа. А также для дальнейшего исследования более общего вырождающегося дифференциальных уравнений на плоскости и в пространстве.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

[1 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задач типа Коши для одного

вырождающегося дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения [Текст] / Сатторов А.С., Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. - 2014. -№1/2(130). - С. 12-18.
[2 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при положительном коэффициенте [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова – 2014. -№2 (29) -С. 242-245.
[3 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциальных уравнений первого рода [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2014. -№1/1(126). -С. 28-31.
[4 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при отрицательном коэффициенте [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. -2014. -№2 (29). -С. 199-201.
[5 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2015. -№1/6(191). -С.12-18.
[6 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Известия АНРТ. -2018. -№1(170). -С.21-28.
[7 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2019. -№1. -С.37-43.
[8 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода вида Гельмгольца в плоскости и пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2020. -№1. –С.78-93.
[9 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2022. -№3. –С.180-194.

В других изданиях:
[10– А] Назаров Дж.Ю. Интегральное представление и решение задачи типа Рикье для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник института предпринимательства и сервиса.
-2010. -№20. –С.110-115.
[11 – А] Назаров Д.Ю. Интегральные представления для одного вырождающегося уравнения второго порядка в эллиптической части области [Текст] / А.С. Сатторов, Д.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и студентов, посвященной «18-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан» и «Году памяти Имама Аъзама» (Душанбе-2010). -С.42-43.
[12 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения одного вырождающегося

дифференциального уравнения при отрицательных коэффициентах [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Современные проблемы естественных и социально-гуманитарных наук» (Душанбе-2014). -С.121-122.

[13 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решений некоторых вырождающихся дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания» (Душанбе-2014). -С.84-85.

[14 – А] Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка с отрицательными коэффициентами [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной науки» (Душанбе-2015). -С.81-82.

[15 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с отрицательными коэффициентами [Текст] / А.С.Сатторов Дж.Ю.Назаров // Материалы республиканской научно-теоретический конференции «Неклассические дифференциальные уравнения и их приложения» (Душанбе-2015). -С.91-93.

[16 – А] Назаров Дж.Ю. Подстановка основных краевых задач и теорема единственности для одного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода типа Гельмгольца [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (Душанбе-2016). -С.103-105.

[17 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задачи типа Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода в плоскости [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе, 27-28 декабри 2018г.). -С.273-279.

[18 – А] Назаров Дж.Ю. Тасвири интегралии ҳалли як муодилаи дифференсиалии таназулёбандаи ҷинси як ва тадбиқи он дар ҳалли масъалаи Коши [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе 14-15 марта 2018г.). –С. 143-144.

[19 – А] Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и регулярные решения одного дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения. Тезисы МГУ, Душанбе-2019.

[20 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представление и решение задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца в пространстве. [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Сборник статей республиканской научно – практической конференции, посвященной «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040глды)» и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ (Душанбе, 14 октября 2022 года), с.53-60.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.53.517.945

Бо ҳуқуқи дастхат

НАЗАРОВ ҶАМШЕД ЮСУФОВИЧ

ТАСВИРИ ИНТЕГРАЛӢ ВА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАИ НАМУДИ КОШИ БАРОИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ ҶИНСИ ЯК

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илми номзади
илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.02 – муодилаҳои дифференсиали, системаи динамикӣ ва идоракунии оптималӣ.

Душанбе – 2023

диссертатсия дар кафедраи математикаи олии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ: **Сатторов Абдуманон Сатторович**

доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи математикаи олии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

МУҚАРИЗОНИ РАСМӢ: Шамсуддинов Файзулло -доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва ва муодилаҳои дифференсиалии донишглҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав.

Зиёмидинов Баҳодур-номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти мудири кафедраи фанҳои риёзӣ-табиатшиносии муосири донишгоҳи давлатии ҳуқуқ бизнес ва сиёсати Тоҷикистон

МУАССИСАИ ПЕШБАР: Донишгоҳи давлатии молия ва қарзи Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия *21 июни соли 2023 соати 14:00 дар ҷалсаи Шӯрои диссертатсионии* 6D.КОА – 011 *назди* Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, факултети механикаю математематика аз рӯи нишонии: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи. БуниХисорак, бинои 17, синфхонаи 203 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи макакзии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон тавасути сомонаи http://www.tnu.tj
Автореферат «___» __________ соли 2023 фиристода шуд.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионӣ
доктори илмҳои физикаю математика **Нуров И.Дж.**

ТАВСИФИ УМУМИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Муҳимият ва дараҷаи коркарди мавзӯи тадқиқшаванда. Назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ яке аз қисмҳои таркибии математика мебошад. Бо сабаби татбиқи васеъ доштан дар математика, физика ва дигар соҳаҳои илм муҳимияти зиёд дорад. Бо ин сабаб муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар соҳаҳои физика, химия, бология, иқтисодиёт ва ғ. дар асрҳои XVII-XX бо суръат инкишоф ёфт.

Назрияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда нимаи аввали асри XX ба амал омад ва асосан аз солҳои 50-уми асри XX инкишоф ёфт, ки яке аз шохаҳои муҳими муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ мебошад. Натиҷаҳои асосӣ дар ин раванд аввалин бор аз ҷониби Ф. Трикоми[1] ба даст оварда шудаанд.

Давраи нави инкишофи муодилаҳоии дифференсиалии навъи омхта аз ба бавуҷуд омадани кори Ф.И. Френкел[2] авҷ мегирад. Дар ин кор нишон дода шудааст, ки масъалаи ҷоришавии газ аз қубур ҳангоми бо суръати аз суръати садо кам ва зиёд будан ба омузиши масъалаҳои Трикоми барои муодилаи Чаплигин оварда мешавад. Давраи дигари инкишофи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда аз кори М.В.Келдыш[3] ибтидо мегирад. Дар ин кор муайян карда шудааст, ки ҳангоми ҳалли масъалаи Дирихле барои муодилаҳои эллиптикӣ қисми сарҳад аз шарти канорӣ озод карда мешавад.

Тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии навъи омехта бо коэффитсиентҳои сингулярӣ низ муҳим мебошанд, бо сабаби татбиқи васеъ доштан дар динамикаи газ, гидродинамика, назарияи чандирӣ ва ғ.

Ф.Трикоми[1]қайд намуд, ки ҳангоми омузиши суръати ҳаракати садо ба омузиши муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду оварда мешавад, ки суръати ҳаракат дар қисми эллиптикӣ аз суръати садо кам буда ва дар қисми гиперболики соҳа аз суръати садо зиёд мебошад ин намуд муодилаҳо навъи омехта мебошанд. Ф.И. Френкел[2] татбиқи масъалаи Трикомиро дар ҳалли масъалаҳои динамикаи газ такрор намуд. И.Н. Векуа[4] қайд намуд, ки ҳангоми омухтани назарияи қадшавии беохир хурди сатҳҳо назарияи муодилаҳои навъи омехта мавқеи зиёд дорад. А.В. Битзадзе[5] натиҷаи нави беҳтаринро, ки аҳмияти муҳим дорад, барои омузиши назарияи муодилаҳои навъи омехта ба даст овард.

---

[1]Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных [текст] / Трикоми Ф. // М.: ИЛ. -1957. -С.443.
[2]Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [текст] / Франкль Ф.И. // -М.: наука. -1973. -С.600.
[3]Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе динамике [текст] / Келдыш М.В. // - ДАН СССР 1951. -Т. 77. -№2. -С.181-183.
[4]Векуа И.Н. О метаграмонических функциях [текст] / Векуа И.Н. // –Труды Тбилисского матем. ин-та 1943. -Т.12. -С. 105-174.
[5]Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа [текст] / Бицадзе А.В. // –М.: ВИНИТИ АН СССР 1959. -С. 164.

Гузориш ва тадқиқи ҳалли масъалаҳои нав барои муодилаҳои навъи омехта бо коэффитсиентҳои сингулярӣ дар корҳои К.И. Бабенко[6], В.Н. Врагов[7], Е.И. Моисеев[8], А.М. Нахушев[9], М.С. Салохиддинов[10], М.М. Смирнов[11], Л.Г. Михайлов[12], Н. Раҷабов[13], В.И. Жегалов[14], А.С. Сатторов[15] ва ғайра омухта шудаанд.

Назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда бо коэффитсиентҳои сингулярӣ дар корҳои математикони шуравӣ: М.М.Смирнов[16], Л.Г.Михайлов[18], Раҷабов[13] Н.Р., Е.И.Моисеев[17] ва ғ. инкишоф ёфт.

Ба тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда олимони зиёди ватанӣ ва хориҷӣ машғул мебошанд.

Мавзӯи омузиши ин кори диссертатсионӣ бахшида шудааст ба омузиши муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси яки тартиби ду ва чор. Дар ин кор тасвири интегралии ҳалли ин синфи муодилаҳо вобаста аз қиматҳои қабулкардаи коэффитсиентҳо ёфта шудаанд. Дар оянд тасвирҳои интегралии муайяншуда дар ҳалли масъалаи намуди Коши дар соҳаи характеристикӣ татбиқ карда мешаванд. Пас аз он натиҷаҳое, ки барои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби ду гирифта шуда барои тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чор татбиқ карда мешаванд. Бояд қайд намуд, ки ин синфи муодилаҳои дар боло номбаршуда дар фазо низ омухта мешаванд.

Соҳаи тадқиқот ва алоқаи он бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзуҳои илмӣ.Тадқиқоти дар кори диссертатсионӣ гузаронидашуда дар қолаби амали гардонидани барномаи дурнамои корҳои илмӣ тадқиқотии кафедраи математикаи олии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон доир ба «Тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда» мебошад.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии ин кори диссертатсиони чунин аст:

- Муайян намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби ду дар соҳаи характеристикӣ бо як ва ду хатҳои таназзулёбӣ;

---

[6]Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа [Текст] / Бабенко К.И. // Успехи матем. наук. -1953. -Т.8. -№2. -С. 160.

[7]Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики [Текст] / Врагов В.Н. // –изд. НГУ. -1983. -С.84

[8]Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнения смешанного типа [Текст] / Моисеев Е.И. // –ДАН СССР. -1978. -Т.242. -С.48-51.

[9]Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа [Текст] / Нахушев А.М. // –Диф. Уравнения. -1969. -Т.5. -№1. -С.44-59.

[10]Салохитдинов М.С. Толипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения [Текст] / Салохитдинов М.С. // -Диф.Уравнения. -1972. -Т.8. -№1. -С.134-142.

[11]Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа [Текст] / Смирнов М.М. // -М.: Высшая школа. -1985. -С.302.

[12]Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Михайлов Л.Г. // –Из-во АН Тадж. ССР. -Душанбе 1963.

[13]Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными линиями или сингулярными поверхностями [Текст] / Раджабов Н. // -Душанбе 1980. -Ч.I. -С.126. -1981. -Ч.II. –С.170. -1982. -Ч.III. –С.170. -1985 -Ч.IV. -С.148.

[14]Жегалов В.И. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка [Текст] / Жегалов В.И. // -Изв. Вузов, математика -1960. -№4. -С.73-78.

[15]Сатторов А.С. Решение задачи Трикоми для одного смешанно-сингулярного уравнения. Докл. АН. Тадж. ССР, 1990, т.33.№2, с.194-198.

[16]Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболический уравнения [Текст] / Смирнов М.М. // –М.: наука. -1966. -С.292

[17]Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях [Текст] / Моисеев Е.И. // -Диффер. уравнения. -1990. -Т.26. -№1. -С.93-103.

[18]Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 [Текст] / Михайлов Л.Г. // -Душанбе: Дониш. -1966. –С.47

- Ҳосил намудани тасвири интегралии ҳал барои яке аз муодилаҳои ҷинси яки тартиби ду дар фазо;
- Муайян намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси яки намуди Гелмголс дар ҳамворӣ ва фазо;
- Ёфтани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чори намуди Гелмголс дар ҳамворӣ ва фазо;
- Гузориш ва тадқиқи масъалаи намуди Кошӣ, ҳангоми ҳалли умумии муодилаи тартиби дуюм ду функсияҳои ихтиёриро дар бар гирифтан;
- Гузориш ва тадқиқи масъалаи намуди Кошӣ, ҳангоми ҳалли умумии муодилаи тартиби чор, чор функсияҳои ихтиёриро дар бар гирифтан;
- Гузориш ва тадқиқи масъалаи намуди Кошӣ, ҳангоми ҳалли умумии муодилаи тартиби чор, чор функсияҳои ихтиёриро дар бар гирифтан дар фазо;
- Гузориш ва тадқиқи масъалаи намуди Кошӣ дар ҳолати ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии тартиби ду ва чори ҷинси яки намуди Гелмголс чор функсияи ихтиёриро дар бар гирифтан;

Усули тадқиқот. Дар рафти тадқиқот усулҳои умумии тадқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, муайян намудани тасвири интегралии ҳал истифода карда мешаванд. Дар рафти тадқиқот инчунин усули ифода намудани ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбанда бо ёрии ҳалли муодилаи дифференсиалии оддӣ истифода карда мешавад, инчунин усулҳое ки дар тадқиқотҳои илмии М.М Смирнов, Н.Раҷабов ва А.С.Сатторов кокард шуда истифода мешаванд.

Нововарии илмии тадқиқотҳо. Натиҷаҳои илмии диссертатсия нав буда аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд.:

- Тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби ду бо як хати таназзулёбанда дар қисми гиперболӣ ёфта мешавад;
- Тасвири интегралии ёфташуда дар ҳалли масъалаи намуди Кошӣ дар қисми гиперболии соҳа тадқиқ карда мешавад;
- Тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуи ҷинси як бо ду хатҳои таназзулёби дар соҳаи характеристикӣ ёфта шудааст;
- Тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуи ҷинси як бо хатҳои таназзулёбӣ барои ҳалли масъалаи намуди Кошӣ татбиқ карда мешавад, дар соҳаи характеристикӣ;
- Тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби чори ҷинси як бо ду хатҳои таназзулёбӣ дар қисми гиперболии соҳа муайян карда мешавад;
- Тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартибҳои ду ва чори ҷинси яки намуди Гелмголс дар ҳамворӣ ва фазо муайян карда шудааст;
- Тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартибҳои ду ва чори ҷинси яки намуди Гелмголс барои масъалаи намуди Кошӣ дар ҳамворӣ ва фазо татбиқ карда шудааст;

Ҳолатҳое ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд:

- Теоремаҳои муайян намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуи ҷинси як вобаста аз қиматҳои коэффитсиентҳо;
- Теоремаҳои ёфтани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби чори ҷинси як бо ёрии функсияҳои ихтиёрӣ дар соҳаи характеристикӣ;

- Теоремаҳои ёфтани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чори ҷинси яки намуди Гелмголс дар ҳамворӣ ва фазо;
- Ҳалли масъалаҳои намуди Кошӣ барои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи дар боло номбаршуда бо татбиқи тасвирҳои интегралии ҳалли ин муодилаҳо дар қисми гиперболии соҳа;

Аҳмияти амалӣ ва назарияви.Тадқиқотҳое, ки дар диссертатсия оварда шудаанд асосан аҳмияти назариявӣ дошта дар инкишофи минбаъдаи ин соҳа арзишнок мебошанд. Инчунин ҳангоми омӯзиши муодилаи дифференсиалии таназзулёбанда дар соҳаи бисёрченака истифода мешаванд. Натиҷаҳои ин диссертатсия барои тадқиқи масъалаи Трикоми заминаи беҳтарин мебошад.

Эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои гирифташуда дар кори диссертатсионӣ бо он асоснок мебошад, ки бо ёрии исботи қатъии математикӣ ба даст оварда шудаанд ва усулҳои асосии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода шудаанд.

Саҳми шахсии муаллиф. Мазмун ва натиҷаҳои асосии диссертатсия аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудааст. Гузориши масъала ва роҳбарии пешбурди тадқиқот саҳми роҳбари илмӣ мебошад.

Тавсияи кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳо ва конференсияҳои илмии зерин муҳокима ва баррасӣ гардидаанд:

- Семинари шуъбаи муодилаҳои дифференсиалии ИИТ ДМТ зери роҳбарии д.и.ф.м., профессор Сатторов А.С. (Душанбе, 2010-2015сол)
- Семинари кафедраи математикаи олии ДМТ (Душанбе, 2016-2020с)
- Конференсияи илми-назариявии устодон ва профессорони ДМТ бахшида ба «18-солагии истиқлолияти Давлатии Тоҷикистон ва хотираи имоми Аъзам» (Душанбе-2010);
- Конференсия ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии муамоҳои рӯзмараи илмҳои табиатшиносӣ ва иҷтимой-гуманитарӣ бахшида ба 10-солаи ИИТ назди ДМТ. (Душанбе-2014);
- Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии «Муамоҳои мубрами математика ва таълими он» бахшида ба хотираи профессор Муртазоев Д.М. (Душанбе-2014);
- Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии «Муодилаҳои дифференсиалии ғайриклассикӣ ва татбиқи онҳо» бахшида ба 3000-солагии Ҳисор ва 50-солагии факултети механикаю математика, (Душанбе-2015);
- Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявии «Муодилаҳои математикӣ, физикӣ ва масъалаҳои наздики таҳлил » (Душанбе-2016);
- Конференсияи байналмилалии илмӣ-назариявӣ бахшида ба 70-солагии д.и.ф.м., профессор Юнуси М.К. (Душанбе, 27-28 декабри 2018с)
- Конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 70-солагии академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Илолов Мамадшо (Душанбе-2018);

Интишорот. Натиҷ а ҳои асосии диссертатсия дар 18 корҳои илмии муаллиф дар ҷ гардидаанд. Аз он ҷумла 8 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯ йхати амалкунандаи КОА-и назди президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон мавҷуданд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсияи мазкур аз ду боб, руйхати адабиётҳо аз 80 номгуй иборат мебошад. Ҳаҷми умумии диссертатсия 103 саҳифаи чопи мошини аст. Барои қуллай шудани хондани диссертатсия ишораҳои сераҷама дохил карда шудааст. Масалан рақами якум боб, рақами ду банд ва рақами сеюм ишораи теоремаҳо ва формулаҳоро ифода мекунад (масалан 1.2.3 ин чунин маъно дорад, ки боби як банди ду формулаи се).

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Мазмуни мухтасари диссертатсия бо нишондодҳои асоси ва натиҷаҳои гирифта шуда оварда шудааст.

Дар хулоса мазмуни мухтасари характристикаи омухтани мушкилот ва натиҷаҳои асосӣ дар диссертатсия оварда шудааст.

Дар боби якуми диссертатсия як синфи муодилаҳои дифференсиали таназзулёбандаи тартиби дуюми ҷинси як дида баромада шудааст.

Дар банди якуми боби якум тадқиқи муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуи ҷинси якум бо ду хатҳои сингулярии намуди зерин

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{6\beta-1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

гузаронида мешавад, ки дар ин ҷо $\alpha,\beta -$ ададҳои доимӣ ҳастанд омухта мешавад.

Бо D^- – соҳаи бо порчаи AB - тири OX ва характеристикаҳои муодилаи (1) $AC:\quad x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=0,\quad BC:\ x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$ маҳдуд буда, ки аз нуқтаҳои $A(0;0), B(1;0)$ ибтидо гирифта дар нуқтаи $C\left[\frac{1}{2};-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$ бурида мешаванд ишора менамоем.

Дар соҳаи D^- муодилаи (1) – ро мегирем.

Ишораи оператори интегралиро дохил мекунем

$$P_{\alpha,\beta}\varphi_j \equiv \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_j\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{\alpha}[\tau(1-\tau)]^{\beta}},$$

$\varphi_j\,(j=1,2,3)$ - функсияҳои ихтиёри мебошанд.

Ҳалли регулярии муодилаи (1) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $u(x;y)$ - ро меномем, ки дар $\overline{D^-}$ - бефосила ва ҳосилаи хусусии бефосилаи тартиби якум ва дуюм дар D^- дорад ва муодилаи (1) – ро қаноат мекунонад.

Вобаста аз қиматҳои қабул кардаи коэффитсиентҳои муодила, тасвирҳои интегралии гуногун ёфта мешаванд. Дар ҳолати $2\alpha \geq 1$ ва $-1<2\beta<0$ будан тастиқоти зерин ҷои дорад:

Теоремаи 1.1.3. *Бигузор $2\alpha \geq 1$ ва $-1<2\beta<0$ бошанд. Он гоҳ ҳалли регулярии муодилаи (1) дар соҳаи D^- чунин тасвир карда мешавад*

$$u(x;y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1-\frac{2}{3}A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1'\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\psi_2, \qquad (2)$$

ки дар ин ҷо $A_\alpha, A_{1-\beta}, A_{1-\beta}$ - ададҳои доимӣ, ψ_1,ψ_2 - функсияҳои ихтиёрии аз як аргумент вобаста буда, мувофиқан аз синфҳои $\psi_1 \in C^3(D^-)$ ва $\psi_2 \in C^2(D^-)$ мебошанд.

Дар асоси тасвири интегралии ёфташуда масъалаи намуди Коши гузошта ва ҳал карда мешавад.

Масъалаи $K_{1.1.2}$**.** Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (1) ҳангоми $2\alpha \ge 1$ ва $-1 < 2\beta < 0$ будан дар соҳаи D^- бо шартҳои аввала ёфта шавад:

$$\lim_{y\to -0} U(x;y) = g_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial y} = g_2(x), \qquad (K_{1.1.2})$$

ки дар ин ҷо $g_1(x), g_2(x)$- функсияҳои бефосила додашуда дар интервали $0 < x < 1.$ мебошанд.

Ҳалли масъалаи $K_{1.1.2}$**.** Дар баробарии (2) шартҳои аввалаи $(K_{1.1.2})$ -ро тадбиқ намуда ҳосил мекунем.

$$(1+2\beta)A_\alpha \int_0^1 \frac{\tilde{\psi}_1[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau = \tilde{g}_1(x), \quad A_\alpha \int_0^1 \frac{\tilde{\psi}_2[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau = \tilde{g}_2(x), \qquad (3)$$

дар ин ҷо $A_{1+\beta} = \dfrac{1}{B(1+\beta;1+\beta)}$ и $A_{1-\beta} = \dfrac{1}{B(1-\beta;1-\beta)}$ ададҳои доимӣ мебошанд.

Барои ҳалли масъалаи $K_{1.1.2}$, баробарии (3)-ро табдил дода меёбем:

$$\tilde{\psi}_1(x) = \tilde{F}_1(x), \;\; \tilde{\psi}_2(x) = \tilde{F}_2(x), \qquad (4)$$

ки дар ин ҷо

$$\tilde{F}_1(x) = \frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{(1+2\beta)2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\ldots(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde{\psi}_1(s)\right]\frac{ds}{(x^2-s^2)^\lambda},$$

$$\tilde{F}_2(x) = \frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\ldots(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde{\psi}_1(s)\right]\frac{ds}{(x^2-s^2)^\lambda}.$$

Теоремаи 1.1.9. *Агар* $\tilde{\psi}_1 \in C^{3+k}$ *ва* $\tilde{\psi}_2 \in C^{2+k}$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (1) ҳангоми* $2\alpha \ge 1, -1 < 2\beta < 0$ *будан, ки шартҳои аввалаи* $(K_{1.1.2})$ *-ро қаноат мекунонад дар соҳаи* D^- *аз баробарии (2) ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо функсияҳои* $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ *аз баробарии (4) муайян карда мешаванд.*

Ҳамин тавр ҳолатҳои дигар ҳангоми $0 < 2\alpha < 1, 0 < 2\beta < 1;$ $2\beta \ge 1, -1 < 2\alpha < 0;$ $0 < 2\alpha < 1, -1 < 2\beta < 0$ будан тадқиқ карда мешавад. Дар баъзе ҳолатҳо масъалаи намуди Коши ҳал карда мешавад.

Бигузор D-соҳаи охирноки ҳамвории xoy бошад. Қисми соҳаи D ки $y > 0$ ва $y < 0$ мебошанд мувофиқан бо D^+ ва D^- ишора мекунем. Дар банди дуюми боби якум, муодилаи дифференсилаии ҷинси якум бо ду хатҳои таназзулёбии намуди зерин омухта мешавад

$$L_\beta u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{6\beta-1}{2}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad (5)$$

ки дар ин ҷо $\beta -$ адади доимӣ аст.

Муодилаи (5)-ро дар соҳаи D^- дида мебароем.

Дар ин банд ишораи зеринро дохил менамоем

$$P_\beta\varphi_j \equiv \int_0^1 \frac{\psi_j\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^\beta},$$

ки дар ин ҷо $\psi_j\,(j=1,2,3)$ -функсияҳои ихтиёри мебошанд.

Вобаста аз қиматҳои қабул кардаи коэффитсиентҳои муодила, тасвири интегралӣ истифода мешавад. Дар ҳолати $-1<2\beta<0$ будан тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теорема 1.2.2. *Ҳалли регулярии муодилаи (5) дар соҳаи* D^- *ҳангоми* $0<2\beta<1$ *будан намуди зерин дорад*

$$\text{u(x, y)} = \mathrm{A}_\beta P_{1-\beta}\psi_1 + \mathrm{A}_{1-\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_\beta\psi_2, \tag{6}$$

ки ин ҷо $\mathrm{A}_\beta,\ \mathrm{A}_{1-\beta}$ *- ададҳои доимӣ,* $\psi_1, \psi_2 -$ *функсияҳои ихтиёрии аз як аргумен вобаста ва аз синфи* $C^2(D^-)$ мебошанд..

Дар асоси тасвири интегралии ёфташуда масъалаи намуди Коши гузошта ва ҳал карда мешавад.

Масъалаи $K_{1.2.2}$. Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (5) дар соҳаи D^- ҳангоми $0<2\beta<1$ будан, бо шартҳои аввалаи зерин ёфта шавад:

$$\lim_{y\to -0}\text{u}(x,y) = g_1(x), \quad \lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(2\beta-1)}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = g_2(x), \quad (K_{1.2.2})$$

ки дар ин ҷо $g_1(x)$, $g_2(x)$ -функсияҳои додашуда мебошад , $\beta -$ адади доимӣ.

Теоремаи 1.2.5. *Бигузор* $0<2\beta<1$ *бошад. Он гоҳ ҳалли масъалаи* $K_{1.2.2}$ *дар соҳаи* D^- *бо формулаи зерин муайян карда мешавад*:

$$\begin{aligned}\text{u(x, y)} = {} & \frac{1}{B(\beta,\beta)}\int_0^1 \frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\beta}} + \\ & + \frac{3}{2(1-2\beta)}\cdot\frac{(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}}{B(1-\beta,1-\beta)}\int_0^1 \frac{g_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^\beta},\end{aligned} \tag{7}$$

ки дар инҷо $B(\beta,\beta),\ B(1-\beta,1-\beta)$ - функсиияҳои Эйлери ҷинси дуюм ва $g_1(x), g_2(x) \in C^2(D^-)\cap C(\overline{D}^-)$-функсияҳои додашуда дар интервали $0<x<1$ мебошанд.

Дар диссертатсия дар ҳолати $2\beta\ge 1$ ва $-1<2\beta<0$ будан тасвири интегралии ёфташуда барои ҳалли масъалаи намуди Коши истифода мешавад.

Дар банди сеюми боби якум тадқиқи муодилаи дифференсиали таназзулёбандаи тартиби дуюми ҷинси якуми намуди зерин гузаронида мешавад:

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

ки дар ин ҷо $\alpha,\beta -$ ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

Бигузор $D -$ соҳаи маҳдуд, дар чоряки якум бо хати каҷи суфтаи Γ маҳдуд ва охирҳояш дар нуқтаҳои $O(0;0)$ ва $A(1;0)$ бошанд, дар чоряки чорум бо характеристикаҳои муодилаи (8) маҳдуд бошад.

Қисмҳои соҳаи D, дар ҳолати $y>0,\ y<0$ мувофиқат бо D^{+} – қисми эллиптикӣ ва D^{-} – қисми гиперболикиро ишора мекунем.

Дар ин банд ишораи зеринро дохил мекунем.

$$P_{\alpha,\beta}\psi_i \equiv A_{\alpha,}B_{\beta}\int_0^1 d\sigma\int_0^1 \frac{\psi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{\alpha}[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \quad (i=1,2,3,4.),$$

ки дар ин ҷо $A_{\alpha}=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}$, $\mathrm{B}(\alpha,\alpha)$-функсияи Эйлери ҷинси дуюм мебошад.

Ҳалли регулярии муодилаи (8) дар соҳаи D^{-} гуфта функсияи $u(x;y)$-ро, меномем, ки ҳосилаҳои хусусии бефосилаи тарибҳои якум ва дуюми дар D^{-} дошта бошад ва дар $\overline{D}^{-}$ бефосила бошад.

Барои муодилаи (8), тасвири интегралии ҳал бо ёрии функсияҳо ёфта шудаанд як қисми онҳо барои ҳалли масъалаи намуди Коши дар соҳаи характестикии D^{-} татбиқ карда мешаванд.

Теоремаи 1.3.6. *Бигузор $2\alpha\geq 1$ ва $-1<2\beta<0$ бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (8) дар соҳаи D^{-} намуди зерин дорад*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})=\mathrm{A}_{\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\phi_1-\mathrm{A}_{\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+\ \mathrm{A}_{\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{1-\alpha,\beta}\phi_2, \tag{9}$$

ки дар ин ҷо A_{α}, $\mathrm{A}_{1+\beta}$, $\mathrm{A}_{1-\beta}$ - ададҳои доимӣ, ϕ_1,ϕ_2 - функсияҳои ихтиёрии як аргумента аз синфи $\phi_1\in C^3\left(D^{-}\right)$ ва $\phi_2\in C^2(D^{-})$ мебошанд.

Масъалаи $K_{1.3.3}$**.** Талаб кард мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (8) ҳангоми $2\alpha\geq 1$ ва $-1<2\beta<0$ будан дар соҳаи D^{-} шартҳои аввалаи

$$\lim_{\mathrm{y}\to-0}\mathrm{u}(x,y)=\tilde{g}_1(x), \qquad \lim_{\mathrm{y}\to-0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \tag{$K_{1.3.3}$}$$

-ро қаноат мекунонад ёфта шавад, ки дар ин ҷо $\tilde{g}_1(x),\tilde{g}_2(x)$ - функсияҳои бефосилаи додашуда дар интервале $0<x<1.$ мебошанд.

Ҳалли масъалаи $K_{1.3.3}$. Дар баробарии (9) шартҳои аввалаи ($K_{1.3.3}$)-ро тадбиқ намуда, ҳосил мекунем.

$$(1+2\beta)\int_0^1\frac{\tilde{\phi}_1\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=\tilde{g}_1(x), \quad \int_0^1\frac{\tilde{\phi}_2\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=\tilde{g}_2(x), \tag{10}$$

дар ин ҷо $A_{1+\beta}=\dfrac{1}{B(1+\beta;\,1+\beta)}$ ва $A_{1-\beta}=\dfrac{1}{B(1-\beta;\,1-\beta)}$.

Баробарии (10)-ро табдилдиҳӣ намуда меёбем:

$$\tilde{\phi}_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\tilde{F}_1(x), \quad \tilde{\phi}_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\tilde{F}_2(x), \tag{11}$$

ки дар ин ҷо $\tilde{F}_1(x)=\dfrac{1}{1+2\beta}F_1(x)$ ва $\tilde{F}_2(x)=F_2(x)$, $g_1(x), g_2(x)$ муфовиқан бо $\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x)$ иваз мекунем.

Теоремаи 1.3.12. *Агар $\tilde{g}_1\in C^{3+k}$ ва $\tilde{g}_2\in C^{2+k}$ бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (8) ҳангоми $2\alpha\geq 1$ ва $-1<2\beta<0$ будан, ки шарти аввалаи $(K_{1.3.3})$ -ро қаноат мекунонад бо формулаи (9) муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ аз баробарии (11) ёфта мешаванд.*

Ба монанди боло, барои муодилаи (8) вобаста аз қиматҳои қабулкардаи коэффитсиентҳо тасвири интегралӣ дар намуди ошкор ёфта мешаванд. Як қисми тасвирҳои интегралии ёфташуда барои ҳалли масъалаи намуди Коши дар соҳаи характеристикии D^- татбиқ карда мешаванд.

Дар банди чоруми боби якум баъзе аз натиҷаҳои дар боло ҳосилшуда барои муодилаҳои дигар дар ҳамворӣ умумӣ карда мешаванд.

Муодилаҳои зеринро дида мебароем

$$(-y)^m U_{xx}-U_{yy}+\frac{m}{2(m+1)y}U_y=0, \tag{12}$$

$$(-y)^m U_{xx}-U_{yy}-\frac{a}{y}U_y=0, \ (y<0) \tag{13}$$

ки дар ин ҷо m ва a -ададҳои доимӣ мебошанд.

Бигузор D^- соҳаи маҳдуд бо интервали $(0;1)$ тири OX ва характеристикаҳои $x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $x+\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$, мувофиқан аз нуқтаҳои $O(0;0)$ ва $A(1;0)$ ибтидо гирифта ва дар нуқтаи $C\left(\dfrac{1}{2};-\left(\dfrac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ буридашаванда бошанд.

Ҳалли регулярии муодилаҳои (12) ва (13) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $U(x,y)$-ро меномем, ки дар соҳаи сарбастаи $\bar{D}^-$ бефосила мебошад ва ҳосилаҳои бефосилаи тартиби як ва дуюмро дар соҳаи D^- дошта бошад ва муодилаҳои (12) ва (13) – ро қаноат кунонад.
Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.4.3. *Бигузор $0<\beta<1$, $a<1$ бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (13) дар соҳаи D^- намуди зерин дорад*

$$U(x,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+B_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}, \tag{14}$$

ки дар ин ҷо φ *ва* ψ *-функсияҳои ихтиёрии як аргумента мебошанд,* $A_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+2a}{2(m+2)};\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, $B_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)};\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$ $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, B *-функсияи Эйлери ҷинси дуюм мебошад.*

Масъалаи $K_{1.4.2}$**.** Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (13) дар соҳаи D^- шарти авваларо қаноат мекунонад:

$$\lim_{y\to-0}U(x,y)=\tilde{g}_1(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial U}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \qquad (K_{1.4.2})$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо $\tilde{g}_1(x)$ ва $\tilde{g}_2(x)$ – функсияҳои бефосилаи додашуда дар интервали $0<x<1$ мебошанд.

Ҳалли масъалаи $K_{1.4.2}$**.** Монанди ҳалли масъалаи $K_{1.3.3}$ дар баробарии (14) шартҳои $(K_{1.4.2})$ -ро истифода намуда ҳосил мекунем:

$$\varphi_2(x)=\tilde{g}_1(x),\quad \psi_2(x)=\tilde{g}_2(x), \qquad (15)$$

Аз баробарии (15) қиматҳои $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$-ро дар баробарии (14) гузошта ҳалли масъали $K_{1.4.2}$ дар намуди ошкор ёфта мешавад.

Ба монанди боло барои муодилаи (12) вобаста аз қиматҳои коэффитсиентҳои муодила, тасвири интегралӣ дар намуди ошкор ёфта мешавад. Тасвири интегралии ёфташуда дар ҳалли масъалаи намуди Коши истифода мешавад.

Дар банди панҷуми боби якум тадқиқи муодилаи дифференсиали таназзулёбандаи ҷинси як дар фазо гузаронида мешавад.

Дар фазои сеченака муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси як омӯхта мешавад.

$$(-y)^m\Delta u-U_{yy}-\frac{a}{y}U_y=0,\quad (y<0) \qquad (16)$$

ки дар ин ҷо m ва a -ададҳои доимӣ, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ -оператор Лаплас мебошад.

Бигузор $D^-\in R^3$-соҳаи охирнок, бо $y=0$ ҳамвори маҳдуд ва дар $y<0$ бо сатҳи конуси характеристикии S -и муодилаи (16) маҳдуд мебошад.

Ҳалли регулярии муодилаи (16) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $u(x_1,x_2,y)$ -ро меномем, ки дар соҳаи $\overline{D^-}$ бефосила мебошад ва ҳосилаҳои бефосилаи хусусии тартибҳои як ва дуюмро дар соҳаи D^- дорад ва муодилаи (16)-ро қаноат мекунонад.

Ба ҳамин монанд, ҳамчун §1.4. барои муодилаи (16) тасвири интегралии ҳал дар намуди ошкор ёфта мешавад. Дар баъзе ҳолатҳо, дар соҳаи D^- асъалаҳои намуди Коши гузошта ва ҳал карда мешаванд.

Ишораи оператори интегралии зеринро дохил мекунем:

$$T_\beta\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^\beta}d\tau,\qquad (i=1,2)$$

Теоремаи 1.5.4. *Бигузор* $0<\beta<1,\ a<1$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (16) дар соҳаи* D^- *намуди зеринро дорад.*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde A_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau, \qquad (17)$$

ки дар ин ҷо $\beta=\dfrac{m+2a}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\dfrac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+2a}{2(m+2)},\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, $\tilde A_{m,a}=\dfrac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)},\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$, B -функсияи Эйлери ҷинси дуюм , ψ_1,ψ_2 - функсияҳои якаргумента ва m -ададӣ доимӣ мебошад.

Масъалаи $K_{1.5.2}$. Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (16) дар соҳаи D^- ҳангоми $a<1,\ 0<\beta<1$ будан бо шартҳои аввалаи

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=g_1(x_1,x_2),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial u}{\partial y}=g_2(x_1,x_2), \qquad (K_{1.5.2})$$

ёфта шавад, ки дар инҷо $g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2)$- функсияҳои бефосила дар қисми ҳамвории $y=0$ додашуда мебошанд.

Ҳалли масъалаи $K_{1.5.2}$**.** Аз баробарии (17) бо шартҳои аввалаи $(K_{1.5.2})$ ҳосил мекунем

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2\right]=g_1(x_1,x_2),$$
$$\lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial u}{\partial y}=\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2\right]=(a-1)g_2(x_1,x_2), \qquad (18)$$

Бо назардошти шарти $(K_{1.5.2})$ аз (17) ҳосил мекунем:

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{g_1\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde A_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{g_2\left[\frac{1}{\sqrt2}x_1+\frac{1}{\sqrt2}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau. \qquad (19)$$

Бо осонӣ санҷида мешавад, ки баробарии (19) муодилаи (16) ва шартҳои аввалаи $(K_{1.5.2})$ -ро қаноат мекунонад.

Ҳамин тавр, барои қиматҳои гуногуни коэффитсиентҳои муодилаи (16) тасвири интегралии ҳал ёфта шудаанд.

Дар банди шашуми боби якум мо муодилаҳои фарққунандаи навъи якуми шакли

Гелмголсро дар ҳамворӣ ва фазо меомӯзем

Муодилаи зеринро дида мебароем.

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0,\quad (y<0) \qquad (20)$$

ки дар ин ҷо $m>0$ ва a - ададҳои доимӣ мебошад.

Бигузор D^- -соҳаи маҳдуд дар интервали (0;1) тири OX ва бо характеристикаҳои $\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ \sqrt{2}x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1,$ муодилаи (20) бошад ва мувофиқан аз нуқтаҳои $O(0;0)$, $A(1;0)$ ибтидо гирад ва дар нуқтаи $C\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right).$ бурида шавад.

Ҳалли регулярии муодилаи (20) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $u(x,y)$ -ро меномем, ки дар соҳаи сарбастаи $\overline{D}^-$ бефосила буда, ҳосилаҳои бефосилаи хусусии тартиби як ва дуро дар соҳаи D^- дорад ва муодилаи (20)-ро қаноат мекунонад..

Теоремаи 1.6.3. *Ҳалли регулярни муодилаи* (20) *дар соҳаи* D^- *ҳангоми* $-1<\beta<0,\ 2a<1,\quad \varphi''-\varphi=0,\ \psi''-\psi=0$ будан намуди зерин дорад

$$u(x,y)=A_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}+$$
$$+(1+2\beta)\int_0^1\frac{\psi_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$
$$-\frac{2\lambda}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1\frac{\psi'_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2t)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}},\qquad(21)$$

ки дар ин ҷо ψ,ψ_1- функсияҳои ихтиёрии дорои як аргумент буда, $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)}$,

$A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)},B_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{3m+4a+4}{2(m+2)},\frac{3m+4a+4}{2(m+2)}\right)}-$ функсияҳои Эйлер мебошанд.

Дар фазои сеченака, муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинсӣ яуми намуди Гелмголс омӯхта мешаад.

$$(-y)^m\Delta u\ -u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0,\qquad(22)$$

ки дар ин ҷо m ва a - ададҳои доимӣ , $y<0,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$ оператори Лаплас мебошад.

Бигузор $D^-\in R^3$- соҳаи охирнок, бо қисми маҳдуди ҳамвории $y=0$ маҳдуд ва ҳангоми $y<0$ будан бо конуси характеристикии сатҳи конуси S муодилаи (22) маҳдуд мебошад.

Ҳалли регулярии муодилаи (22) дар соҳа D^- гуфта функсияи $u(x_1,x_2,y)$ - ро меномем, ки дар соҳаи сарбаста бефосила $\overline{D}^-$, мебошад ва ҳосилаҳои бефосилаи хусусӣ то тартиби дуюмро дар соҳаи D^- дорад ва инчунин муодилаи (22)-ро қаноат мекунонад.

Ишораи оператори интегралиро дохил мекунем

$$T_\beta\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\ (i=1,2)$$

Теоремаи 1.6.5. *Бигузор* $0<\beta<1,\ 2a<1,\ \varphi_1''-\varphi_1=0$ ва $\varphi_2''-\varphi_2=0$ бошанд. Он гоҳ ҳалли р*егулярни муодилаи* (22) *дар соҳаи* D^- *намуди зерин дорад*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\qquad(23)$$

ки дар ин ҷо $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, , $A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right)}$, $\tilde{A}_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $\mathrm{B}-$ функсияи Эйлери ҷинси дуюм , φ_1,φ_2- функсияҳои як аргумента , m -ададӣ доимӣ мебошад.

Масъалаи $K_{1.6.2}$. Талаб карда мешавд , ки ҳалли регулярии муодилаи (22) дар соҳаи D^- ҳангоми $2a<1,\ 0<\beta<1,$ будан бо шартҳои аввалаи

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=g_1[\lambda(x_1,x_2)],\quad \lim_{y\to-0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}=g_2[\lambda(x_1,x_2)],\qquad(K_{1.6.2})$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо $g_1[\lambda(x_1,x_2)],\ g_2[\lambda(x_1,x_2)]$ функсияҳои бефосилаи додашуда дар қисми ҳамвории $y=0$ мебошад.

$$\lim_{y\to-0}u(x_1,x_2,y)=\varphi_1[\lambda(x_1+x_2)]=g_1[\lambda(x_1,x_2)],$$
$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi_2[\lambda(x_1+x_2)]=(2a-1)g_2[\lambda(x_1,x_2)],\qquad(24)$$

Бо назардошти баробарии (23) ҳалли масъалаи $K_{1.6.2}$ дар намуди ошкор ёфта мешавад

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{g_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\qquad(25)$$

Бо осонӣ санҷида мешавад ки баробарии (25) муодилаи (22) ва шартҳои масъалаи $(K_{1.6.2})$ -ро дар соҳаи D^- қаноат мекунонад

Ба ҳамин монанд барои муодилаи (22) вобаста аз қиматҳои гуногуни қабулкардаи коэффитсиентҳои β , тасвири интегралии гуногун ёфта мешавад.

Боби дуюми ин рисола ба омӯзиши баъзе муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси якум бахшида шудааст.

Дар банди якуми боби дуюм мо муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси якумро меомӯзем.

Бигзор $\mathrm{D}-$ соҳаи охирноки ҳамвории xoy бошад. Қисмҳои соҳаи D -ро ҳангоми $y>0$ ва $y<0$ будан, мувофиқан бо D^{+} ва D^{-} ишора мекунем.

Дар соҳаи D^{-} муодилаи зеринро мегирем

$$\Pi_a\left[\frac{(-xy)^{-\frac{4+3\nu-3\alpha}{2}}}{x^3+y^3}\Pi_\nu U\right]=0, \tag{26}$$

ки дар ин ҷо $\Pi_\nu U\equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{6\nu-1}{2}\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $a,\nu-$ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

Оператори интегралии зеринро дохил мекунем

$$\mathrm{P}_\alpha\varphi_j=\int_0^1\frac{\varphi_j\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^\alpha},\quad (j=1,2,3,4),$$

ки дар ин ҷо φ_j-функсияҳои ихтиёрӣ мебошанд.

Теоремаи 2.1.1. *Агар* $\Pi_\nu U_\nu=0$ *ва* $\Pi_a U_a=0$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (26) дар соҳаи* D^{-} *ҳангоми* $a>\nu$ *будан, чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=U_\nu(x,y)+(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}U_a(x,y), \tag{27}$$

ки дар ин ҷо U_ν,U_a-*ҳалли муодилаҳои тартиби ду мебошанд.*

Теоремаи 2.1.4. *Бигзор* $0<2\nu<1,\ 0<2a<1,\ a>\nu$ *ва* $a+\nu<1$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (29) дар соҳаи* D^{-} *чунин тасвир карда мешавад*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=A_\nu\mathrm{P}_{1-\nu}\varphi_1+A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\mathrm{P}_\nu\varphi_2+\\&+A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}\mathrm{P}_{1-a}\psi_1+A_{1-a}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-\nu-a)}\mathrm{P}_a\psi_2,\end{aligned} \tag{28}$$

ки дар ин ҷо $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ *-функсияҳои ихтиёрии дорои як аргумент буда, аз сифи* $C^2(D^{-})$ *мебошанд.*

Масъалаи $K_{2.1.3}$**.** Талаб карда мешавад, ки ҳалли ругулярии муодилаи (26) дар соҳаи D^{-} ҳангоми $0<2\nu<1,\ 0<2a<1$ ва $a>\nu$ будан, бо шартҳои аввалаи

$$\lim_{y\to-0}\mathrm{u}(x,y)=f_1(x),\qquad \lim_{y\to-0}\left[x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g_1(x),$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}(a+\nu-1)}(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_2(x),$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}(2\nu-1)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\}=f_2(x), \tag{$K_{2.1.3}$}$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо $f_1(x),\ f_2(x), g_1(x),\ g_2(x)$-функсияҳои бефосилаи додашуда дар фосилаи $0<x<1$ ва ν,a -ададҳои доимӣ мебошанд.

Теоремаи 2.1.10. *Бигзор* $0<2\nu<1,\ 0<2a<1$ *ва* $a>\nu$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли масъалаи* $K_{2.1.3}$ *дар соҳаи* D^{-} *бо формулаи зерин муайян карда мешаад*

$$U(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\nu,\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\nu}}+$$

$$+\frac{8(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}}{27(1-2\nu)\mathrm{B}(1-\nu,1-\nu)(a-\nu)(1-a-\nu)}\int_0^1\frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^\nu}+$$

$$+\quad \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{3(\nu-\alpha)(\mathrm{B}(a,a)}\int_0^1 \frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}}+$$

$$+\quad \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(1-a-\nu)}}{9\mathrm{B}(1-\alpha;1-\alpha)(1-a-\nu)(1-2\alpha)}\int_0^1 \frac{g_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{a}}, \tag{29}$$

ки дар ин ҷо $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ *- функсияҳои додашуда аз синфи* $C^2(D^-)$ *дар фосилаи* $0<x<1$ *ва* ν,α *- ададҳои доимӣ мебошанд.*

Ба монанди боби якум барои муодилаи (26) тасвири интегралии ҳалҳои гуногун дар намуди ошкор ёфта шудааст. Дар баъзе ҳолатҳо масъалаи намуди Коши гузошта ва ҳал карда шудааст, дар соҳаи характеристикии D^-.

Дар банди дуюми боби ду муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси як бо коэффитсиентҳои гуногун омухта мешавад.

Бигзор D – соҳаи охирнок дар чоряки якум бошад, ки бо хати каҷи Γ бо охирҳояш дар нуқтаҳои $O(0,0)$, $A(1,0)$ буда, дар ҷоряки чорум бо характеристикаҳои муодилаи (26) маҳдуд мебошад. Қисмҳои соҳаи D -ро ҳангоми $x>0,\ y>0$ будан бо D^+- қисми эллиптикӣ ва ҳангоми $x>0,\ y<0$ будан бо D^-- қисми гиперболикӣ ишора мекунем

Дар соҳаи D^- муодилаи намуди зеринро дида мебароем

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q(x,y)L_{\mu,\nu}U\right]=0, \tag{30}$$

ки дар ин ҷо $L_{\mu,\nu}U\equiv y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{6\mu-1}{2}\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{6\nu-1}{2}\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

$$Q(x,y)=x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}(-y)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}\Big/(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha+\mu-1)y^3,$$

α,β,μ,ν – ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

Оператори интегралии зеринро дохил мекунем

$$T_{\alpha,\beta}\varphi_i=A_\alpha A_\beta\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{\varphi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^\alpha[\tau(1-\tau)]^\beta},$$

ки дар ин ҷо $\varphi_i\quad(i=1,2,3,4)$ - функсияҳои ихтиёрӣ, $A_\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)},\ \ A_\beta=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\beta,\beta)}$ - функсияи Эйлери ҷинси ду мебошад.

Теоремаи 2.2.1. *Агар* $L_{\mu;\nu}U_{\mu;\nu}=0$ *ва* $L_{a;\beta}U_{a;\beta}=0$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (30) дар соҳаи* D^- *ҳангоми* $a>\mu$ $\beta>\nu$ *будан, чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=U_{\mu;\nu}(x,y)+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{\alpha\beta}(x,y), \tag{31}$$

ки дар ин ҷо $U_{\mu;\nu},U_{\alpha;\beta}$ *– ҳалли муодилаҳои тартиби дуюм мебошанд.*

Теоремаи 2.2.6. *Бигзор* $2\mu\ge 1,\ \ 0<2\nu<1,\ \ 2\alpha\ge 1,\ 2\beta\ge 1$ *ва* $\alpha>\mu\quad\beta>\nu$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (33) дар соҳаи* D^- *чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu},_{1-\nu}\,\varphi_1+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu},_\nu\,\varphi_2+$$

$$+A_aA_\beta x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \tag{32}$$

ки дар ин ҷо $\varphi_1,\varphi_2.\psi_1$ – функсияҳои ихтиёрии дорои якаргумента буда, аз синфи $C^2(D^-)$ мебошад ва $A_\mu,\mathrm{A}_{1-\nu},A_{\nu,}A_a,A_\beta$ - ададҳои доимӣ мебошанд.

Масъалаи $K_{2.2.2}$. Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (30), ҳангоми $2\mu \geq 1$, $0 < 2\nu < 1$, $2\alpha \geq 1$, $2\beta \geq 1$, ва $\alpha > \mu$, $\nu + \beta > 1$ будан, бо шартҳои аввалаи

$$\lim_{y\to -0} U(x,y) = f_1(x), \qquad \lim_{y\to -0} (-y)^{3\nu-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = f_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{5+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right] = f_3(x), \qquad (k_{2.2.2}),$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо $f_1(x)$, $f_2(x)$ ва $f_3(x)$ – функсияҳои додашуда дар фосилаи $0 < x < 1$ мебошанд.

Ба монанди натиҷаҳои дар боло овардашуда, барои муодилаи (30) вобаста аз қиматҳои қабулнамудаи α, β, μ, ν тасвири гуногуни интегралии ҳалҳо дар намуди ошкор ёфта шудааст. Баъзе тасвирҳои интегралии ёфташуда барои ҳалли масъалаи намуди Коши дар соҳаи характеристикии D^- истифода бурда мешаванд.

Дар банди сеюми боби ду масъалаи намуди Рикье барои як муодилаи дифференсиалии тартиби чор бо ду хатҳои таназзулёбӣ омухта мешавад. Дар банди мазкур, аввалан тасвири интегралии ҳалли муодилаи тартиби дуюм бо ду хатҳои сингулярӣ дода мешавад, баъдан аз алоқамандии ҳалли муодилаи тартиби чорро ҳалҳои муодилаи тартиби ду истифода бурда, тасвири интегралии ҳалли муодилаи тартиби чорум ёфта мешавад. Тасвирҳои интегралии ҳалҳои ёфташуда барои ҳалли масъалаи намуди Рикие дар ҳамворӣ тадбиқ карда мешаванд.

Дар банди чоруми боби ду оиди муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси яки намуди Гелмголс тадқиқот гузаронида мешавад.

Бигзор D – соҳаи охирноки ҳамвории xoy бошад. Қисмҳои ҳамвории D-ро ҳангоми $y > 0$ ва $y < 0$ будан, мувофиқан бо D^+ ва D^- ишора мекунем.

Дар соҳаи D^- муодилаи намуди зеринро дида мебароем

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)\right] = 0, \qquad (33)$$

ки дар ин ҷо $\Pi_a^\lambda U \equiv (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \frac{2a}{y}u_y - \lambda^2(-y)^m$, $\Pi_b^\lambda U \equiv (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \frac{2b}{y}u_y - \lambda^2(-y)^m$ ва $a, b,$ – ададҳои ҳақиқӣ мебошанд.

Ҳалли регулярии муодилаи (33) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $U(x,y)$-ро меномем, ки дар $\overline{\mathrm{D}}^-$ бефосила буда, дорои ҳосилаҳои бефосилаи тартиби чорум дар D^- буда ва муодилаи (33)-ро қаноат кунад.

Оператори интегралии зеринро дохил мекунем

$$\mathrm{P}_\beta^\lambda \varphi_j = \int_0^1 \frac{\varphi_j\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^\beta}, \qquad (j = 1,2,3,4),$$

ки дар ин ҷо φ_j – функсияҳои ихтиёрӣ мебошанд.

Теоремаи 2.4.1. *Агарт* $\Pi_a^\lambda U_a = 0, \Pi_b^\lambda U_b = 0$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (33) дар соҳаи* D^- *ҳангоми* $b > a$ *будан, чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y) = U_a(x,y) + (-y)^{b-a}U_b(x,y), \qquad (34)$$

ки дар ин ҷо U_a, U_b – *ҳалли муодилаҳои тартиби дуюм мебошанд.*

Теоремаи 2.4.4. *Бигзор* $0 < 2\alpha < 1, 0 < 2\beta < 1, b > a$ *ва* $\varphi_1'' - \varphi_1 = 0,\ \varphi_2'' - \varphi_2 = 0,\ \psi_1'' - \psi_1 = 0,\ \psi_2'' - \psi_2 = 0$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (36) дар соҳаи* D^- *чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1+ \\ +C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2, \tag{35}$$

ки дар ин ҷо $\varphi_1, \varphi_2,\ \psi_1, \psi_2 -$ *функсияҳои ихтиёрии дорои як аргумент буда, аз синфи* $C^2(D^-)$ *ва* $\alpha=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\frac{m+4b}{2(m+2)}$, $B_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $C_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4b}{2(m+2)},\frac{m+4-4b}{2(m+2)}\right)}$ мебошад.

Дар матни диссертатсия барои муодилаи (33) тасвирҳои интегралии гуногуни ҳалҳо ёфта шудааст. Барои баъзе ҳолатҳо масъалаи намуди Коши гузошта ва ҳал карда мешавад.

Дар банди панҷуми боби ду оиди як муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси яки намуди Гелмголс дар фазои сеченака тадқиқот гузаронида шудааст.

Дар фазои сеченака муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чоруми ҷинси яки намуди Гелмголси зеринро мегирем

$$\Pi_b^{\lambda}\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^{\lambda}U(x_1;x_2;y)\right]=0, \tag{36}$$

ки дар ин ҷо $\Pi_a^{\lambda}U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$ ва $\Pi_b^{\lambda}U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2b}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$

$a,b,-$ададҳои доимӣ буда, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$оператори Лаплас мебошад.

Бигзор $D^-\in R^3$ - соҳаи охирноки бо қисми ҳамвории $y=0$ ва ҳангоми $y<0$ бо сатҳи характеристикии S маҳдуд гардида бошад.

Ҳалли регулярии муодилаи (36) дар соҳаи D^- гуфта функсияи $u(x_1,x_2,y)$-ро меномем, ки дар $\overline{D}^-$ бефосила буда, дар D^- дорои ҳосилаҳои бефосилаи тартиби чорум мебошад ва муодилаи (36)-ро қаноат мекунад.

Оператори интегралии зеринро дохил мекунем

$$\mathrm{P}_{\beta}^{\lambda}\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\ (i=1,2,3,4),$$

ки дар ин ҷо φ_j-функсияҳои ихтиёрӣ мебошанд.

Теоремаи 2.5.1. *Агар* $\Pi_a^{\lambda}U_a=0,\ \Pi_b^{\lambda}U_b=0$ *бошанд. Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (36) дар соҳаи* D^- *ҳангоми* $b>a$ *будан, чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=U_a(x,y)+(-y)^{b-a}U_b(x,y), \tag{37}$$

ки дар ин ҷо U_a,U_b-*ҳалли муодилаҳои тартиби дуюм мебошанд.*

Исбот. Дар баробарии (37) оператори Π_a^λ -ро тадбиқ мекунем

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda U_\alpha+\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right],$$

аз руйи шарти масъала $\Pi_a^\lambda U_a=0$ мебошад, аз инҷо ҳосил мекунем

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right], \tag{38}$$

Дар қисми рости баробарии (38) оператори Π_a^λ -ро тадбиқ намуда, ҳосил мекунем

$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left((-y)^m\Delta u-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u\right)\left[(-y)^{b-a}U_b\right]=$$

$$(-y)^m\Delta\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{2a}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$

$$=(-y)^m(-y)^{b-a}\Delta U_b-\left[(b-a)(b-a-1)(-y)^{b-a-2}U_b-2(b-a)(-y)^{b-a-1}U'_b\right]-$$

$$-(-y)^{b-a}U''_b-\frac{2a}{y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1}U_b+(-y)^{b-a}U'_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$

$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=(-y)^{b-a}\left((-y)^m\Delta U_b-U''_b-\frac{2b}{y}U'_b-\lambda^2(-y)^m U_b\right)+$$

$$+\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b$$

Аз руйи шарти теоремаи 2.5.1 ҷамъшавандаи якум баробари сифр мешавад.

Акнун $\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b$, (39)

Ҳарду тарафи баробарии (42)-ро ба $(-y)^{b-a-2}$ -тақсим намуда, ҳосил мекунем

$$(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)=(a-b)(b+a-1)U_b$$

Дар баробарии охирон оператори L_b^λ -ро тадбиқ намуда, бо назардошти шартҳои теорема ҳосил мекунем

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^\lambda U_b=0$$

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 2.5.3. *Бигзор* $0<2\alpha<1,\ 2\beta\geq1,\ b>a,\ 2a<1$ *ва* $\varphi_1''-\varphi_1=0,$ $\varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi_1''-\psi_1=0$ бошанд. *Онгоҳ ҳалли регулярии муодилаи (36) дар соҳаи* D^- *чунин тасвир карда мешавад*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1, \tag{40}$$

ки дар ин ҷо $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1 -$ *функсияҳои ихтиёрии дорои як аргумент буда, аз синфи* $C^2(D^-)$ *мебошанд ва* $B_{m,a} = \dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)}, \frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$.

Масъалаи $K_{2.5.2}$. Талаб карда мешавад, ки ҳалли регулярии муодилаи (36) дар соҳаи D^- ҳангоми $0<2\alpha<1,\ 2\beta\geq 1$ ва $b<\frac{m}{2}+2-a$ будан, шартҳои аввалаи зеринро қаноаткунанда:

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = f_1(\lambda x), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial y} = f_2(\lambda x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{(-y)^{2-a-b}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} = g_1(\lambda x), \tag{$K_{2.5.2}$}$$

ки дар ин ҷо $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ -функсияҳои бефосилаи додашуда дар фосилаи $0<x<1$, a,b -ададҳои доимӣ мебошанд.

Ҳалли масъалаи $K_{2.5.2}$. Барои ҳалли масъалаи додашуда, тасвири интегралии (40) ва шартҳои масъалаи $(K_{2.5.2})$ истифода бурда мешавад.

Теоремаи 2.5.9. *Бигзорь* $0<2\alpha<1,\ 2\beta\geq 1$ *ва* $b<\frac{m}{2}+2-a$ бошанд. *Онгоҳ ҳалли масъалаи* $K_{2.5.2}$ *дар соҳаи* D^- *формулаи зеринро медиҳад*

$$U(x,y) = \frac{1}{B(\alpha,\alpha)}\int_0^1 \frac{f_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{(a-b)B(1-\alpha,1-\alpha)}(-y)^{1-2a}\int_0^1 \frac{f_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{(b-a)(b+a-1)B(\beta,\beta)}(-y)^{b-a}\int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_1-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \tag{41}$$

ки дар ин ҷо $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ *-функсияҳои додашуда аз синфи* $C^2(D^-)$, $\alpha=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\frac{m+4b}{2(m+2)}$

, a,b,m *-ададҳои доимӣ мебошанд.*

Бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки баробарии (41) муодилаи (36) ва шартҳои аввалаи $(K_{2.5.2})$ *-ро қаноат мекунонад.*

Хулоса

Натиҷаҳои илмии корҳои диссертатсионӣ иборат аст аз:

1. Ҳосил намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалӣ бо як хати таназзулёбӣ дар соҳаи характеристикӣ [2-А];
2. Дарёфти тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуи ҷинси як бо як хати таназзулёбӣ ва ҳали масъалаи намуди Коши дар соҳаи характеристикӣ [16-А];
3. Ҳосил намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуи ҷинси як бо ду хатҳои таназзулёбӣ ва ҳалли масъалаи намуди Коши дар соҳаи характеристикӣ [1-А];
4. Ёфтани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби чори ҷинси як бо ду ҳатҳои таназзулёбӣ дар қисми гиперболикии соҳа [6-А; 7-А];
5. Ҳосил намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби чори ҷинси яки намуди Гелмголс дар ҳамворӣ ва фазо [8-А];
6. Муайян намудани тасвири интегралии ҳалли муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби ду ва чори намуди Гелмголси ҷинси як ва ҳалли масъалаи намуди Коши дар ҳамворӣ ва фазо [8-А];

Тавсияҳо оиди истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои илмии гирифташуда дар оянда барои инкишофи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ истифода карда мешавад. Инчунин барои тадқиқи масъалаи намуди Трикоми барои ин синфи муодилаҳо замима мегузорад.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷалаҳои тақризшаандаи КОА–и Назди президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Росия нашр:

[1 – А] Назаров Дж.Ю.Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения[Текст] / Сатторов А.С.,Дж.Ю. Назаров //Вестник ТНУ. Серия естественных наук.-2014. -№1/2(130). -С. 12-18.

[2 – А] Назаров Дж.Ю.Интегральные представления и решениезадача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при положительном коэффициенте[Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров //Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова – 2014.-№2 (29)-С. 242-245.

[3 – А]Назаров Дж.Ю.Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающихся дифференциальных уравнения первого рода[Текст] /Дж.Ю.Назаров //Вестник ТНУ.-2014.-№1/1(126).-С. 28-31.

[4 – А] Назаров Дж.Ю.Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при отрицательном коэффициенте[Текст]/ Дж.Ю.Назаров //Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова.-2014.-№2 (29).-С. 199-201.

[5 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями[Текст] /Дж.Ю. Назаров //Вестник ТНУ.-2015.-№1/6(191).-С.12-18.

[6 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода[Текст] /А.С.Сатторов,Дж.Ю.Назаров //Известия АНРТ.-2018. -№1(170).-С.21-28.
[7 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода[Текст] /Дж.Ю. Назаров //Вестник ТНУ.-2019.-№1. -С.37-43.
[8 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типов Коши для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода вида Гельмгольца в плоскости и пространстве[Текст] /А.С.Сатторов,Дж.Ю.Назаров //Вестник ТНУ.-2020.-№1. –С.78-93.
[9 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2022. -№3. –С.180-194.

Дар дигар нашрияҳо:

[10 - А] Назаров Дж.Ю.Интегральное представление и решение задачи типа Рикье для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями[Текст] /А.С.Сатторов, Дж.Ю.Назаров // Вестник институт предпринимательство и сервиза.
-2010.-№20. –С.110-115.
[11 - А] НазаровД.Ю. Интегральные представления для одного вырождающегося уравнения второго порядка в эллиптической часть области[Текст] /А.С. Сатторов, Д.Ю. Назаров// Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и студентов, посвященной «18-ой годовщине независимости Республика Таджикистан» и «году памяти имама аъзама»(Душанбе-2010).-С.42-43.
[12-А] НазаровДж.Ю. Интегральные представление решения одного вырождающегося дифференциального уравнения при отрицательных коэффициентах[Текст]/ А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров// Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Современные проблемы естественных и социально-гуманитарных наук» (Душанбе-2014).-С.121-122.
[13 - А] Назаров Дж.Ю.Интегральные представление решений некоторых вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка[Текст] /Дж.Ю.Назаров //Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания» (Душанбе-2014). -С.84-85.
[14 - А]Сатторов А.С., НазаровДж.Ю. Интегральные представления решения вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка с отрицательными коэффициентами[Текст]/А.С.Сатторов, Дж.Ю.Назаров//Материалы международной научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы соврёмной науки»(Душанбе-2015).-С.81.82.
[15 - А]НазаровДж.Ю.Интегральные представления решения одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с отрицательными

коэффициентами[Текст] /А.С.СатторовДж.Ю.Назаров //Материалы республиканской научно-теоретический конференции «Неклассические дифференциальные уравнения и их приложения» (Душанбе-2015). -С.91-93.
[16 - А]Назаров Дж.Ю. Подстановка основных краевых задач и теорема единственности для одного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода типа Гельмгольца[Текст] /А.С.Сатторов,Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (Душанбе-2016).-С.103-105.
[17 - А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задача типов Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнения первого рода в плоскости[Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю.Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе, 27-28 декабри 2018г.). -С.273-279.
[18 - А] Назаров Дж.Ю.Тасвириинтегралииҳалли як муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси як ва тадбиқи он дар ҳалли масъалаи Коши [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю.Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе 14-15 марта 2018г.). –С. 143-144.
[19 - А] Интегральные представления и регулярных решений одного дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения [Текст] Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. // Тезис МГУ. Душанбе -2019.
[20 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представление и решение задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца в пространстве. [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Сборник статей республиканской научно – практической конференции, посвященной «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040глды)» и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ (Душанбе, 14 октября 2022 года), с.53-60.

ШАРҲИ МУХТАССАР

ба диссертатсияи Назаров Ҷамшед Юсуфович дар мавзӯӣ «Тасвири интеграл ива ҳалли масъалаи намуди Кошӣ барои як синфи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷ инси як» барои дараҷаи илмии номзоди илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.02- муодилаи дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ.

Вожаҳои калидӣ: Тасвири интегралӣ, масъалаи намуди Кошӣ, таназзулёбанда, ҳалли регулярӣ, ҷинси як, қисми гиперболӣ, соҳаи характеристикӣ, сингулярӣ.

Мақсади кор. Мақсади асоси кори диссертатсия барои рушди оияндаи назарияи муодилаҳои дифференсиалии навъи омехта ва ҳалли масъалаҳои канорӣ бахшида шудааст.

Асоси ин тадқиқотҳоро исботи теоремаҳо оиди ба ёфтани тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинсӣ як ва тадбиқи онҳо дар тадқиқи масъалаҳои намуди Кошӣ мебошанд.

Навгониҳои илмӣ. Натиҷаҳои кори диссертатсионӣ нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва иборатан аз:

- дарёфти тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ таназзулёбандаи тартиби дуюми ҷинси як бо ёрии функсияҳои ихтиёрӣ.

- ифода намудани ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси як тартиби чор бо ёрии ҳалҳои ду муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси як.

- дарёфти тасвири интегралии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ таназзулёбандаи ҷинси яки тартиби чор бо ёрии функсияҳои ихтиёрӣ.

-Тадбиқи тасвири интегралӣ дар ҳалли масъалаи намуди Кошии барои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси яки тартиби ду дар ҳамвори ва фазо.

- Тадбиқи тасвири интегралӣ дар ҳалли масъалаи намуди Кошии барои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ҷинси яки тартиби чор дар ҳамвори ва фазо.

Аннотация

диссертации Назорова Джамшеда Юсуфовича на тему «интегральные представления и решение задач типа Коши для одного класса вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода», представленной на соискание учёной степени кандидата физико – математических наук по специвльности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ключевые слова: *интегральный приставленный, задача типа Коши, вырождающийся, регулярные решения, первого рода, гиперболическая часть, характеристическая область, сингулярый,*

Цель работы: Основная цель диссертационной работы заключается в дальнейшем развитии теория дифференциалы уравнения смешении типа и решения краевыой задач. Основны этих исследования доказательства теорем о получении интегральных приставленный решении вырождающийся дифференциальных уравнения первого рода и решение задача типа Коши.

Научная новизна исследования. Результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

- Получение интегральные представления решений модельных вырождающихся дифференциальных уравнении второго порядка первого рода с помощью произволых функции
- Нахождение решении дифференциальных уравнении первого рода четверного порядка через решение двух вырождаются дифференциальных уравнения первого рода второго порядка
- интегральные представление решение вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода четвёртого порядка с помошию произвольных функции,
- Применение полученных интегральные представление решения вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода второго порядка для решение задач типа Коши на плоскости и в пространстве;
- Применение полученных интегральные представление представление решения вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода четвертого порядка для решения задач типа Коши п на плоскости и в пространстве;

Annotation

dissertation by Nazorov Jamshed Yusufovich on the topic "integral representations and the solution of Cauchy-type problems for one class of degenerate differential equations of the first kind", submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

key words:*integral fixed, Cauchy-type problem, degenerate, regular solutions, first kind, hyperbolic part, characteristic domain, singular,*

Purpose of the work: The main purpose of the thesis is to further develop the theory of differentials of mixing equations of type and solutions of boundary value problems. The main studies of these studies are proofs of theorems on obtaining integral solutions attached to degenerate differential equations of the first kind and a solution to a Cauchy-type problem.

Scientific novelty of the research. The results of the thesis are new and are as follows:

Obtaining integral representations of solutions of model degenerate differential equations of the second order of the first kind using arbitrary functions

• Finding a solution to differential equations of the first kind of the fourth order through the solution of two degenerate differential equations of the first kind of the second order. integral representation of solutions for a degenerate second-order differential equation of the first kind

• Application of the obtained integral representation of the solution of degenerate differential equations of the first kind of the second order for the solution of problems of the Cauchy type on the plane and in space;

• Application of the obtained integral representation representation of the solution of degenerate differential equations of the first kind of the fourth order for solving problems of the Cauchy type n on the plane and in space;