**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН**

ТАДЖИКСКОМ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

УДК 517.9

На правах рукописи

Садиков Маъруфжон Обидович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102
– Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Худжанд – 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа имени профессора А. Мухсинова ГОУ «Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова»

Научный руководитель: **Байзаев Саттор**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики

Официальные оппоненты: **Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н. Хусрава

Шарифзода Зебонисо Иброхим
кандидат физико-математических наук, старшей преподаватель кафедрой информационных-коммуникационных технологий Таджикский национальный университет

Ведущая организация: Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана

Защита состоится «13» сентября 2023 года в «14:00» ч. на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета, а также на сайте:
http: // www.tnu.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2023 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета 6D.КОА-011, доктор физико-математических наук, доцент **И.Дж. Нуров**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Основополагающими работами в теории уравнений и систем уравнений с частными производными с двумя независимыми вещественными переменными, а также одной комплексной переменной являются работы С.Н. Бернштейна[1], И.Г. Петровского[2], И.Н. Векуа[3], Л.Г. Михайлова[4], Л.Берса[5], А.Д. Джураева[6], их учеников и последователей.

Актуальным в теории уравнений и систем уравнений с частными производными эллиптического типа являются исследование задач о решениях, принадлежащих пространствам функций, определенных во всей плоскости или полуплоскости и удовлетворяющих тем или иным условиям: суммируемость, ограниченность или степенной рост на бесконечности.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач о решениях, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих условиям ограниченности или степенного роста на бесконечности систем четырёх линейных уравнений с частными производными с двумя вещественными переменными и эллиптических систем второго порядка с одной комплексной переменной. Отметим, что эти задачи для однородных систем могут иметь бесконечное число линейно независимых решений и выявление условий конечномерности ядра этих задач является важным и актуальным.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Задачи о решениях эллиптических уравнений и систем, принадлежащих конкретным пространствам функций, определённых во всей плоскости были предметом исследований в научных трудах И.Н. Векуа[3], В.С.Виноградова[7], Э. Мухамадиева, С. Байзаева[8], Д. Сафарова[9] и др.

---

[1] Бернштейн, С.Н. Собрание сочинений. Т. 3 [Текст] / С.Н. Бернштейн. М.: Изд. АН СССР. – 1960. – 356.

[2] Петровский, И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: Наука, –1986. – 500 с.

[3] Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции. [Текст] / И.Н. Векуа. М.: Наука, – 1988. – 509 с.

[4] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. [Текст] / Л.Г. Михайлов. Душанбе, 1963.

[5] Bers, L. Theory of pseudoanalytic functions. [Text] / L, Bers. Lecture Notes, New York, – 1953. – 189 p.

[6] Джураев, А. Метод сингулярных интегральных уравнений. [Текст]/ А, Джураев. М.: Наука, – 1987. – 415 с.

[7] Виноградов, В.С. О решениях степенного роста для систем эллиптического типа [Текст] / В.С.Виноградов, В сб.: Комплексный анализ и его приложения. М.: Наука. – 1978. – С. 120 – 125.

[8] Мухамадиев, Э. Байзаев С. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана [Текст] / Э. Мухамадиев, С. Байзаев. ДАН СССР. – 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.

[9] Сафаров, Д. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка [Текст] // Д.Сафаров. Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, №4. – С. 454 – 457.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедр математического анализа и высшей и прикладной математики Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова на 2016 – 2020 гг. по теме «Исследование представления решений некоторых дифференциальных, интегральных и операторных уравнений с особенностями, их свойств, разрешимость краевых задач» и на 2021 – 2025 гг. по теме «Исследование математических моделей и классов дифференциальных уравнений специального вида и их применение в решении задач экономики, естествознания, прикладной механики и технической физики».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЕ

Цель исследования. Изучение систем четырёх вещественных линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B-$ постоянные матрицы четвертого порядка и эллиптических систем уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma-$ постоянные, одновременно не равные нулю, в пространствах функций, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих условиям типа ограниченности или степенного роста на бесконечности.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью решить следующие задачи:

• найти решения модельной системы уравнений, когда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

из пространства S', в частности решения, растущие на бесконечности не быстрее чем $(|x| + |y|)^N$;

• найти умеренно растущие решения системы уравнений вида (1), когда

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где A_1, B_j –матрицы второго порядка;

• составить алгоритм нахождения решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (1);

• найти решения из пространства S', в частности, растущие на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (2), в случае постоянных коэффициентов;

• найти условия, при выполнении которых оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *n*-нормальным, т.е. имеет замкнутый образ LC_α^2 и конечномерное ядро;

• найти условия, при выполнении которых оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *d*-нормальным, т.е. имеет замкнутый образ LC_α^2 и конечномерное коядро.

Объект исследования. Объектом исследования являются системы четырёх вещественных линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными и эллиптические системы уравнений второго порядка с одной комплексной переменной.

Предмет исследования. Предметом исследования являются доказательства теорем о существовании решений рассматриваемых систем уравнений с частными производными в конкретных функциональных пространствах.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

• найдены явные формулы для решений из пространства S' модельной системы;

• найдены явные формулы для решений умеренного роста системы (1), когда коэффициенты определяются формулой (3);

• предложен алгоритм нахождения решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (1);

• найдены явные формулы для решений из пространства S' систем вида (2), в случае постоянных коэффициентов;

• в терминах предельных уравнений найдены необходимые и достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *d*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Положения, выносимые на защиту.

• теорема о решениях модельной системы из пространства S';

• формула для решений умеренного роста системы (1), когда коэффициенты определяются формулой (4);

• алгоритм нахождения решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (1);

• теоремы о решениях из пространства S' систем вида (2), в случае постоянных коэффициентов;

• теорема о необходимых и достаточных условиях n-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

• теоремы о достаточных условиях n-нормальности в терминах коэффициентов оператора;

• теоремы о достаточных условиях d-нормальности в терминах коэффициентов оператора.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов систем уравнений в частных производных в пространствах функций, определённых в неограниченных областях.

Личный вклад соискателя ученой степени. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Все результаты, приведённые в разделе «Научная новизна исследования» получены лично соискателем.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы решений в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, относится к составной части этой специальности – уравнения с частными производными и полностью соответствует формуле специальности и пункту «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвящённая 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, Худжанд, 26 – 27 октября 2018 г.

- Научно-практическая конференция «Наука и инновации в системе реализации целей национальной стратегии», посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, Худжанд, 21 – 24 апреля 2021 г.

- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии 2021. Казань (РФ), 22 – 28 августа 2021 г.

- Уфимская осенняя математическая школа – 2021. Уфа (РФ), 6 – 9 октября 2021 г.

- II международная научно-практическая конференция «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», посвященная 80-летию чл.-корр. НАНТ Э. Мухамадиева. Душанбе, 4 ноября 2021 г.

- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества», Худжанд, 29 – 30 ноября 2021 г.

- Научный семинар при Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики под руководством д.ф.-м.н., проф. С. Байзаева (2018 – 2022 гг.).

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях и материалах научных конференций [1-А] – [12-А]. Работы [1-А] – [4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ с научным руководителем С. Байзаевым на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура диссертации и объем. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов, а также списка литературы, в котором включены 123 наименований. В диссертации используется двойная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй номер параграфа или номер определения, леммы и теоремы в данной главе. Аналогичным образом ведется нумерация формул. Общий объём диссертации – 133 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Материал и методы исследования. Материал исследования состоит из решения задач о медленно растущих и решениях полиномиального роста системы четырёх вещественных линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными и эллиптических систем уравнений второго порядка с одной комплексной переменной. В диссертации используются методы комплексного и функционального анализа и теории матриц.

Результаты исследования. Приведем краткое изложение результатов диссертационной работы.

Первая глава (§§ 1.1, 1.2) диссертации посвящена обзору и анализу литературы по исследуемой теме. В первом параграфе приводится анализ работ, посвященных системам линейных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными. В основном рассмотрены случаи систем линейных уравнений, заданных в неограниченных областях плоскости. Во втором параграфе дается обзор работ, посвященных линейным комплексным уравнениям с частными производными второго порядка эллиптического типа заданных в неограниченных областях комплексной плоскости.

Вторая глава (§§ 2.1 – 2.4) диссертации посвящена системам четырёх линейных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными

В первом параграфе приводится вспомогательный материал, используемый в диссертации.

Во втором параграфе рассматривается система вида (1). Для модельной системы, когда коэффициенты определяют формулы (3)
изложена схема нахождения носителя решения из пространства S' а затем установлена следующая теорема, в которой $\mu = \mathrm{SpB}_1, \gamma = \mathrm{detB}_1$

Теорема 2.3. *Решения модельной системы из S' определяются следующим образом:*

а) если $\mu = 0$, то

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{i\sqrt{\gamma y}} P(x,y) + e^{-i\sqrt{\gamma y}} Q(x,y) \;\; \text{при } \gamma \geq 0, \\ e^{i\sqrt{|\gamma| x}} P(x,y) + e^{-i\sqrt{\gamma x}} Q(x,y) \;\; \text{при } \gamma < 0, \end{cases}$$

где $P, Q-$ *многочлены одинакового порядка, коэффициенты которых определяются через коэффициенты модельной системы;*

б) если $\mu \neq 0$, *то*

$$u(x,y)=\begin{cases} e^{i\mu x}P(x,y)+e^{-\mu x}Q(x,y)+R(x,y) \quad при\ \gamma=0 \\ \sum_{j=1}^{2}[e^{ir_jx}P_j(x,y)+e^{-ir_jx}Q_j(x,y)] \quad при\ \mu^2>4\gamma \\ e^{i(r_3x+r_4y)}P_3(x,y)+e^{-i(r_3x+r_4y)}Q_3(x,y) \quad при\ \mu^2\le 4\gamma \end{cases}$$

где P, Q, R, P_j, Q_j – *многочлены, коэффициенты которых определяются через коэффициенты модельной системы, причем* $\deg P = \deg Q$, $\deg P_j = \deg Q_j$, r_1, r_2 –*значения квадратного корня из чисел*

$$\frac{1}{2}(\mu^2-2\gamma\pm\mu\sqrt{\mu^2-4\gamma}), \qquad r_3=\frac{|\mu|}{2}, r_4=\frac{1}{2}\sqrt{4\gamma-\mu^2}.$$

В третьем параграфе исследована система (1) для случая, когда

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система является гиперболической. Показано, что решения из пространства S' определяются формулой вида

$$U(x,y)=e^{i(\xi_0x+\eta_0y)}P(x,y)+e^{-i(\xi_0x+\eta_0y)}Q(x,y),$$

где P, Q – многочлены степени N (N – произвольное) , коэффициенты которых определяются через элементы матрицы B, (ξ_0, η_0)–решение определенной системы двух алгебраических уравнений.

В четвертом параграфе исследована общая система вида (1). В этом случае составлен алгоритм нахождения носителя образов Фурье решений системы из пространства S'. Определяя эти носители можно затем найти соответствующие решения. Проведенный теоретический анализ и компютерное моделирование показал, что носитель умеренно растущего решения системы (1) может быть пустым, состоять из одной или нескольких точек, может быть замкнутой или неограниченной кривой.

Нами при помощи компьютерного моделирования обнаружено, что для четырёхмерных систем вида (1) эллиптического типа, в отличие от двумерных систем[10], пространство решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$, N – целое неотрицательное число, может быть бесконечномерным. Приведем соответствующий пример.

Пусть в системе (1)

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&2\\2&1&-1&0\\2&1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A равны:

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \lambda_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

В данном случае система (1) является эллиптической. Матрицы A и B не коммутируются, поэтому результаты работы С. Байзаева и Д.А. Воситовой[10] нельзя применять. Можно проверить, что вектор-функции

$$U(x,y)=e^{i(\xi x+\eta y)}p_+ + e^{-i(\xi x+\eta y)}p_-,$$

где $(\xi,\eta)-$ точка кривой $\Gamma:\xi^4+\eta^4-\xi^2+9\eta^2-2=0,$ $p_\pm -$векторы, соответственно удовлетворяющие соотношениям

$$(i\xi E_4+i\eta P\pm Q)p=0,$$

являются решениями системы (1).

Для системы

$$U_x+\begin{pmatrix}A_1&0\\0&-A_1\end{pmatrix}U_y+\begin{pmatrix}0&E_2\\B_3&0\end{pmatrix}=0 \tag{5}$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix},\ \textit{причем}\ a_1+a_4=0,\ a_1^2+a_2a_3=-1\ B_3=(b_{ij})$$

[10]Байзаев, С., Воситова, Д.А. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными [Текст]/ С. Байзаев, Д.А. Воситова. Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 12 – 17.

справедлива ниже приводимая теорема, в которой используется формула[11] о представлении обобщенной функции с носителем на окружности $\{x^2+y^2=r_0^2\}$:

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{N}(c_k(\theta)\times\delta^{(k)}(r-r_0),\psi(r,\theta)), \tag{6}$$

где

$(\xi,\eta)=(r\cos\theta, r\sin\theta), \psi(r,\theta)=\varphi(re^{i\theta}),\ r>0,\ \varphi\in D,$

$c_k(\theta)-2\pi$-периодические обобщенные функции.

Теорема 2.4. *1) При* $\det\mathrm{B}_3<0$ *решение системы (5) имеет вид*

$$U(x,y)=F^{-1}\omega,$$

где ω *определяется по формуле (6), в которой* $r_0=\sqrt{\lambda_1}$;

2) При $\det\mathrm{B}_3>0$ *и* $D>0$*, если* $b_1+b_4<0$*, то*

$$U(x,y)=F^{-1}(\omega_1+\omega_2),$$

где ω_1,ω_2 *определяются по формуле (6) с* $r_0=\sqrt{\lambda_1},\ \sqrt{\lambda_2}$*, соответственно, а если же* $b_1+b_4\geq 0$*, то система (5) в* S' *не имеет нулевых решений;*

3) При $\det B_3=0$*, если* $b_1+b_4<0$*, то*

$$U(x,y)=F^{-1}(\omega_0+\omega_1),$$

где ω_0*– распределение с носителем в точке 0, а если же* $b_1+b_4\geq 0$*, то система (5) не имеет в* S' *ненулевых решений.*

Третья глава (§§ 3.1 – 3.3) посвящена комплексным эллиптическим системам уравнений в частных производных второго порядка вида

$$Lw\equiv\alpha w_{\bar z\bar z}+\beta w_{\bar z z}+\gamma w_{zz}+a_1(z)w_{\bar z}+a_2(z)w_z+a_3(z)\overline{w}_{\bar z}+a_4(z)w+a_5(z)\overline{w}=0, \tag{7}$$

где $\alpha,\beta,\gamma-$постоянные, одновременно не равные нулю.

Изучены задачи о решениях полиномиального роста и о нормальной разрешимости этих уравнений в гёльдеровых пространствах функций на всей комплексной плоскости.

В первом параграфе рассмотрены эллиптические системы второго порядка вида

[11] Байзаев, С., Рахимова, М.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // [Текст]/ С. Байзаев, М.А. Рахимова. Уфимский математический журнал. – 2018. – Т. 10, №1. – С. 3 – 13.

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w + c(z)\overline{w} = 0, \tag{8}$$

где $a, b, c -$ заданные в некоторой области G функции. При $a = b = c = 0$ получаем уравнение бианалитических функций или так называемую систему уравнений Бицадзе[12], для которой задача Дирихле не является нётеровой. Для систем вида (8) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости C решениях может быть не нётеровым. Например, система

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + c\overline{w} = 0,$$

где $c -$ ненулевая постоянная, имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных на C решений

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

здесь $p -$ произвольная постоянная,

$$q = \frac{|c|}{\bar{c}}\,\bar{p}e^{-2i\alpha}, \;\; \omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}z\right)\right], \; 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Когда a и b являются постоянными и $c = 0$ система (8) превращается в уравнение метааналитических функций[13].

Пусть коэффициенты a, b, c являются постоянными и кривая Γ_1 задана следующим образом:

при $|b| < |c|$ уравнением –

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) + 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2}; \tag{9}$$

при $|b| = |c|$ уравнением –

$$\rho = 0 \text{ или } \rho^2 = 8|b|\cos(2\varphi + \varphi_0); \tag{10}$$

при $|b| > |c|$ уравнениями –

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) \pm 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2} \tag{11}$$

Установлена следующая теорема о решениях уравнения (8).

---

[12] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. [Текст]/ А.В. Бицадзе М.: Наука, – 1981. – 448 с.

[13] Балк, М.Б. Полианалитические функции и их обобщения [Текст] // М.Б. Балк. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1991. – Т. 85. – С. 187–246.

Теорема 3.5. *1) При a=b=c=0 все решения из пространства* S' *однородного уравнения соответствующего (8) даются формулой*

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z},$$

где P_N *и* Q_{N-1} *–произвольные многочлены по z степени N и N-1 соответственно (N- произвольное неотрицательное целое число).*

2) При $a = b = 0$ *и* $c \neq 0$ *каждой точке* $\pm\zeta_0$ *окружности* $\left\{\zeta : |\zeta| = 2\sqrt{|c|}\right\}$ *соответствуют решения вида*

$$w(z) = e^{i(\xi 0,z)}\varphi(z,\bar{z}) + e^{-i(\xi 0,z)}\psi(z,\bar{z}), \tag{12}$$

где φ,ψ *вполне определенные многочлены по* $z,\bar{z}$

3) Если a=0 и $bc \neq 0$*, то каждой точке* $\pm\zeta_0$ *кривой* Γ_1 *с уравнением (9) при* $|b| < |c|$ *(соответственно (10) при* $|b| = |c|$ *или (11) при* $|b| > |c|$ *соответствуют решения вида (12).*

4) При $a \neq 0$ $b = 0$ *решениями будут функции вида (12) с точкой* $\pm\zeta_0$*, удовлетворяющей условиям:* $|\zeta_0| = r_0$ *и* $\mathrm{Re}\,\bar{a}\zeta_0 = 0$*, где*

$$r_0 = \sqrt{2|a|^2 + 2\sqrt{|a|^4 + 4|c|^2}}.$$

5) При $ab \neq 0$ *решениями будут функции вида (12) с точкой* $\pm\zeta_0$*, принадлежащей пересечению кривой* Γ_1 *с уравнением вида аналогичным уравнениям (9) - (11) и кривой* Γ_2 *с уравнением*

$$\mathrm{Re}(\bar{a}|\zeta|^2 - 4a\bar{b})\zeta = 0.$$

Во втором параграфе исследованы системы уравнений и операторы вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0. \qquad (13)$$

Предположим, что коэффициенты системы (13) принадлежат пространству C_α. Тогда оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет линейным и ограниченным.

Пусть $a \in C_\alpha$ и $\{h_n\} \subset C$ такая последовательность, что $h_n \to \infty$. Тогда функциональная последовательность $a(z+h_n)$ содержит под последовательность $a(z+h_{n_k})$, равномерно сходящуюся на каждом компакте к некоторой функции $\tilde{a}(z)$ из C_α.

По коэффициентам оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и по всевозможным последовательностям $h_n \to \infty$ будем строить предельные операторы

$$\tilde{L}w = w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{a}_1 w_{\bar{z}} + \tilde{a}_2 w_z + \tilde{a}_3 \overline{w}_{\bar{z}} + \tilde{a}_4 w + \tilde{a}_5 \overline{w} \qquad (14)$$

и множество таких операторов обозначим через $H(L)$. Оказывается, что отсутствие ненулевых решений предельных уравнений вида $\tilde{L}w = 0$ в пространстве C_α^2 является критерием нётеровости оператора L.

Если коэффициенты оператора L являются слабо осциллирующими на бесконечности, то коэффициенты предельных операторов будут постоянными, т.е. множество $H(L)$ будет состоять из операторов вида (14) с постоянными коэффициентами.

Справедлива следующая

Лемма 3.5. *Пусть коэффициенты уравнения (13) являются постоянными и удовлетворяют условиям*

$$|a_4| > |a_5|.,\ |a_3|^2 + 2\sqrt{|a_4|^2 - |a_5|^2} > |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|\overline{a}_1 a_2 + a_4|.$$

Тогда это уравнение в пространстве S' имеет только нулевое решение.

Отсюда получаем, что при выполнении условий этой леммы уравнение (13) не будет иметь ненулевых ограниченных во всей плоскости решений, в том числе периодических, а также решений, имеющих рост на бесконечности не быстрее степенной функции. Эта лемма играет важную роль при исследовании уравнений с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах.

Имеет место следующая связь между n-нормальностью оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и нетривиальной разрешимостью уравнений с предельными операторами.

Теорема 3.6. *Пусть* $a_j(z) \in C_\alpha$, $j=1,\dots,5$. *Оператор* $L\colon C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет n-нормальным, тогда и только тогда, когда все предельные уравнения* $\tilde{L}\, w = 0$ *в пространстве* C_α^2 *не имеют ненулевых решений.*

Далее исследована d-нормальность оператора $L\colon C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и установлена следующая.

Теорема 3.7. *Пусть* $a_j(z) \in C_a$, $j=1,\dots,5$. *Чтобы оператор* $L\colon C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *был d-нормальным, необходимо чтобы все предельные уравнения* $\tilde{L}\,\omega = 0$ *в* C_a^2 *имели только ненулевое решение*

В третьем параграфе исследованы системы уравнений и операторы видов

$$M_1 w \equiv \Delta w + a_1(z) w_{\bar z} + a_2(z) w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar z} + a_4(z) w + a_5(z)\overline{w} = 0, \qquad (15)$$

$$M_2 w \equiv w_{zz} + a_1(z) w_{\bar z} + a_2(z) w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar z} + a_4(z) w + a_5(z)\overline{w} = 0, \qquad (16)$$

где $\Delta -$оператор Лапласа. Для систем видов (15) и (16) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости C решениях может быть не нётеровой. Например, системы

$$\Delta w + c_1 \overline{w} = 0, \qquad w_{zz} + c_2 \overline{w} = 0,$$

где $c_j -$ненулевые постоянные, имеют бесконечное число линейно независимых ограниченных на C решений вида

$$w(z) = p_j \omega_j(z) + q_j \overline{\omega_j(z)},$$

соответственно, здесь $p_j -$ произвольные постоянные,

$$q_1 = \frac{|c_1|}{\bar c_1}\bar p_1,\ \ q_2 = \frac{|c_2|}{\bar c_2} e^{-2i\alpha}\bar p_2,\ \ \omega_j(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c_j|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} z\right)\right],\ 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Аналогично как в параграфе 3.2 образуются множество предельных операторов $H(M_j)$ и устанавливаются связь между n-нормальностью (d-нормальностью) операторов $M_j\colon C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и нетривиальной разрешимостью уравнений $\tilde{M}_j w = 0$ с предельными операторами $\tilde{M}_j \in H(M_j)$. Установлены теоремы 3.9 – 3.14, из которых приведём две.

Теорема 3.11. *Пусть коэффициенты оператора* M_1 *являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдутся положительные числа* ε *и* R, *что для* $|z| > R$ *выполнены условия:*

a) $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

b) $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > (|a_1(z)| + |a_2(z)|)^2 + 2\,\mathrm{Re}\,a_4 + \varepsilon.$

Тогда оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет d-нормальным.*

Теорема 3.14. *Пусть коэффициенты оператора* M_2 *являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдутся положительные числа* ε *и* R, *что для* $|z| > R$ *выполнены условия:*

a) $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

b) $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > |a_1(z)|^2 + |a_2(z)|^2 + 2\left|a_1(z)\overline{a_2(z)} + a_4(z)\right| + \varepsilon.$

Тогда оператор $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет d-нормальным.*

Глава 4 посвящена обсуждению полученных в диссертационной работе результатов.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы системы четырёх вещественных линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида (1) и эллиптические системы уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида (2) в пространствах функций, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих условиям типа ограниченности или степенного роста на бесконечности. По итогам исследования получены следующие новые результаты:

• найдены явные формулы для решений из пространства S' модельной системы [1-А], [5-А], [10-А];

• найдены явные формулы для решений умеренного роста системы (1), когда коэффициенты определяются формулами вида (4) [1-А], [8-А], [9-А];

• предложен алгоритм нахождения решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x| + |y|)^N$, системы уравнений вида (1) [2-А], [11-А];

• найдены явные формулы для решений из пространства S' системы вида (2), в случае постоянных коэффициентов [3-А], [4-А], [6-А], [12-А];

• в терминах предельных уравнений найдены необходимые и достаточные условия n-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ [3-А], [7-А];

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия n-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ [3-А];

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия d-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ [3-А], [7-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов систем уравнений в частных производных в пространствах функций, определённых в неограниченных областях. Отдельные части диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои экспоненсиалии як синфи системаи чор муодилаҳои бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн] / М.О. Содиқов // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2019, №4 (51). – С . 10 – 14.

[2-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазои Швартс [Матн] / М.О. Содиқов, С. Байзаев // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2020, №2 (53). – С . 3 – 10.

[3-А] Садиков М.О. О нормальной разрешимости систем с оператором Бицадзе в гёльдеровых пространствах [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. №4. – С. 65 – 73.

[4-А] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций [Текст] / М.О. Садиков // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2021, №4 (59). – С . 20 – 23.

2. В других изданиях:

[5-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои суст афзуншавандаи як системаи навъи эллипсии чор муодилаи хаттӣ [Матн] /М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан. Худжанд». – Худжанд. – 2018. – С. 128 – 131.

[6-А] Садиков М.О. О решениях обобщенного уравнения бианалитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Материалы межд. научной конф. «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». Т. 1. – Уфа. – 2021. – С. 177 – 179.

[7-А] Садиков М.О. Об одном обобщении бианалитических функций/ [Текст] С. Байзаев, М.О. Садиков // Сборник трудов межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань. – 2021. – С. 174 – 175.

[8-А] Садиков М.О. О бесконечномерности пространства полиномиальных решений одного класса четырехмерной эллиптической системы [Текст] /М.О. Садиков, Д.А. Воситова // Сб. статей II межд. науч.-

практ. конф. «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», посвященная 80-летию чл.-корр. НАНТ Э. Мухамадиева. – Душанбе. – 2021. – С. 37 – 39.

[9-А] Садиков М.О. Об экспоненциальных решениях одной системы уравнений с частными производными в общем случае [Текст] / М.О. Садиков // Материалы конф. «Проблемаҳои муосири таҳсилоти математикӣ ва технологияи иттилоотӣ дар мактабҳои миёнаю олӣ». – Хуҷанд. – 2021. – С. 74 – 77.

[10-А] Садиков М.О. О слабо возрастающих решениях одной системы четырёх уравнений эллиптического типа [Текст] / М.О. Садиков // Материалы конф. «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот». – Хуҷанд. – 2021. – С. 166 – 168.

[11-А] Содиқов М.О. Ҳалҳои суст афзуншавандаи системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн] /М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества». – Худжанд. – 2021. – С. 153 – 156.

[12-А] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Материалы науч.-практ. конф. ”Илм ва инноватсия дар низоми татбиқи ҳадафҳои стратегияи миллӣ”. – Худжанд. – 2021. – С. 36 – 41.

ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.95

Бо ҳуқуқи дастхат

Содиқов Маъруфҷон Обидович

ТАҲҚИҚОТҲО ДОИР БА ҲАЛҲОИ ПОЛИНОМИАЛИИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)
- доктор аз рӯйи ихтисос 6D060100– математика:
6D060102 муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои
динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Хуҷанд – 2023

Диссертатсия дар кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Муҳсинови МДТ «Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б. Ғафуров» иҷро гардидааст.

Роҳбари илмӣ:	**Байзоев Саттор** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон
Муқарризони расмӣ:	**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав
	Шарифзода Зебонисои Иброҳим номзади илмҳои физикаю математика, сармуаллимаи кафедраи технологияҳои иттилоотӣ ва иртиботии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
Муассисаи пешбар:	Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Ҳимоя санаи «13» сентябри соли 2023 соати «14:00» дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-011-и назди Донишгоҳи милии Тоҷикистон баргузор мегардад: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, факултети механикаю матемтика, бинои 17, синфхонаи 216.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи маркази Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» «___________» соли 2023 ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-011, доктори илмҳои физикаю математика, дотсент **И.Ҷ. Нуров**

Муқаддима

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Дар назарияи муодилаҳо ва системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ бо ду тағйирёбандаи ҳақиқӣ ва як тағйирёбандаи комплексии мустақил асарҳои илмии С.Н. Бернштейн[1], И.Г.Петровский[2], И.Н. Векуа[3], Л.Г.Михайлов[4], Л.Берс[5], А.Д. Ҷӯраев[6], шогирдон ва пайравони онҳоро гузоранда меҳисобанд.

Дар назарияи муодилаҳо ва системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии навъи эллипсӣ таҳқиқи масъалаҳо доир ба ҳалҳои ба фазоҳои функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ ё нимҳамворӣ муайян тааллуқдошта, ки шартҳои интегронидашавандагӣ, маҳдудӣ ё афзуншавии дараҷавӣ дар беохирро қонеъ мегардонанд, мубрам аст.

Кори диссертатсионӣ ба таҳқиқи масъалаҳо доир ба ҳалҳои системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақил ва системаҳои эллипсии тартиби дуюми як тағйирёбандаи комплексии мустақил, ки шартҳои маҳдудӣ ё афзуншавии дараҷавӣ дар беохирро қонеъ менамоянд, бахшида шудааст. Қайд менамоем, ки чунин масъалаҳо барои системаҳои якҷинса шумораи беохири ҳалҳои хаттӣ новобастаро доро шуда метавонанд ва ёфтани шартҳои ченаки охирнок доштани ядрои ин масъалаҳо муҳим ва мубрам аст.

Дараҷаи коркарди илмии проблемаи мавриди омӯзиш. Масъалаҳо доир ба ҳалҳои ба фазоҳои мушаххаси функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ муайян тааллуқдоштаи система ва муодилаҳои навъи эллипсӣ дар асарҳои илмии И.Н.Векуа[3], В.С. Виноградов[7], Э. Муҳаммадиев, С. Байзоев[8], Ҷ. Сафаров[9], шогирдон ва ҳаммаслакони онҳо мавриди таҳқиқ қарор гирифтаанд.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо), мавзӯъҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи амалишавии нақшаи илмӣ-татқиқотии кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Муҳсинови МДТ ва математикаи олӣ ва амалӣ «Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б. Ғафуров» дар солҳои 2016 – 2020 дар мавзӯи «Тадқиқоти тасвири ҳалҳо, хосиятҳои онҳо, ҳалшавандагии масъалаҳои канорӣ барои баъзе муодилаҳои дифференсиалӣ, интегралӣ ва операторӣ бо махсусиятҳо ва татбиқи онҳо » ва дар солҳои 2021 – 2025 дар мавзӯи «Тадқиқоти синфҳои муодилаҳои дифференсиалии одӣ бо

---

[1] Бернштейн, С.Н. Собрание сочинений. Т. 3 [Текст] / С.Н. Бернштейн. М.: Изд. АН СССР. – 1960. – 356.

[2] Петровский, И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: Наука, –1986. – 500 с.

[3] Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции. [Текст] / И.Н. Векуа. М.: Наука, – 1988. – 509 с.

[4] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. [Текст] / Л.Г. Михайлов. Душанбе, 1963.

[5] Bers, L. Theory of pseudoanalytic functions. [Text] / L, Bers. Lecture Notes, New York, – 1953. – 189 p.

[6] Джураев, А. Метод сингулярных интегральных уравнений. [Текст]/ А, Джураев. М.: Наука, – 1987. – 415 с.

[7] Виноградов, В.С. О решениях степенного роста для систем эллиптического типа [Текст] / В.С.Виноградов, // В сб.: Комплексный анализ и его приложения. М.: Наука. – 1978. – С. 120 – 125.

[8] Мухамадиев, Э. Байзаев С. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана [Текст] / Э. Мухамадиев, С. Байзаев. ДАН СССР. – 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.

[9]Сафаров, Д. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка [Текст] // Д.Сафаров. Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, №4. – С. 454 – 457.

махсусиятҳо, ҳалшавандагии системаҳои барзиёдмуайяни муодилаҳои дифференсиалӣ дар фазоҳои гуногуни функсионалӣ, татбиқи гурӯҳ ва алгебраи Ли дар омӯзиши муодилаҳои дифференсиалӣ» иҷро гардидааст.

Тавсифи умумии таҳқиқот

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши масъалаҳо доир ба ҳалҳои системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақили намуди

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{1}$$

дар ин ҷо $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B-$ матритсаҳои тартиби чор ва системаҳои эллипсии тартиби дуюми як тағйирёбандаи комплексии мустақил намуди

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0, \tag{2}$$

дар ин ҷо $\alpha, \beta, \gamma-$ доимиҳои якбора ба нул баробар набуда, дар фазоҳои функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ муайян, ки шартҳои маҳдудӣ ё афзуншавии дараҷавӣ дар беохирро қонеъ менамоянд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зерин мушаххас карда шудаанд:

• ҳалҳои системаи муодилаҳои амсилавӣ ҳангоми

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

аз фазои S', хосатан ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ зиёд набуда, ёфта шаванд;

• ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадили системаи муодилаҳои намуди (1) ҳангоми

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

дар ин ҷо $A_1,\ B_j -$матритсаҳои тартиби ду, ёфта шаванд;

• алгоритми ёфтани ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ зиёд набудаи системаи намуди (1) тартиб дода шавад;

• ҳалҳои аз фазои S', хосатан ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ зиёд набудаи системаи муодилаҳои (2) ҳангоми доимӣ будани коэффитсиентҳо, ёфта шаванд;

• шартҳое ёфта шаванд, ки ҳангоми иҷро шудани онҳо оператори $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ n-нормалӣ мешавад, яъне симои LC_{α}^{2} маҳкам ва ядрои охирченак дорад;

• шартҳое ёфта шаванд, ки ҳангоми иҷро шудани онҳо оператори $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ d-нормалӣ мешавад, яъне симои LC_{α}^{2} маҳкам ва коядрои охирченак дорад.

Объекти таҳқиқот. Объекти таҳқиқот аз системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақил ва системаҳои эллипсии муодилаҳои тартиби ду бо як тағйирёбандаи комплексии мустақил иборат аст.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот иборат аст аз исботи теоремаҳо доир ба мавҷудияти ҳалҳои системаҳои муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии муоинашаванда дар фазоҳои функсионалии мушаххас.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шудаанд:

• формулаи ҳалҳо аз фазои S' барои системаи муодилаҳои амсилавии намуди (1) ёфта шудааст;

• формулаи ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадили системаи муодилаҳои намуди (1) ҳангоми бо формулаи (4) дода шудани коэффитсиентҳо ёфта шудааст;

• алгоритми ёфтани ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^{N}$ зиёд набудаи системаи намуди (1) пешниҳод шудааст;

• ҳалҳои аз фазои S' барои системаи муодилаҳои (2) ҳангоми доимӣ будани коэффитсиентҳо ёфта шудаанд;

• тавассути муодилаҳои ҳудудӣ шартҳои зарурӣ ва кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ муайян карда шудаанд;

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ тасвир карда шудаанд;

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии d -нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ тасвир карда шудаанд.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда.

• теорема доир ба ҳалҳои системаи амсилавӣ аз фазои S';

• формулаи ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадили системаи муодилаҳои намуди (1) ҳангоми бо формулаи (3) дода шудани коэффитсиентҳо;

• алгоритми ёфтани ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^{N}$ зиёд набудаи системаи намуди (1);

• теоремаҳо доир ба ҳалҳои аз фазои S' барои системаи муодилаҳои намуди (2) ҳангоми доимӣ будани коэффитсиентҳо;

• теорема доир ба шартҳои зарурӣ ва кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$;

• теоремаҳо доир ба ифодаи шартҳои кофии *n*-нормалӣ будани операторҳои намуди $L:C_{\alpha}^{2}\to C_{\alpha}$ тавассути коэффитсиентҳо;

• теоремаҳо доир ба тасвири шартҳои кофии *d*-нормалӣ будани операторҳои намуди $L:C_{\alpha}^{2}\to C_{\alpha}$ тавассути коэффитсиентҳо

. **Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот.** Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ дорад. Усулҳои дар диссертатсия инкишоф додашуда ва натиҷаҳои ҳосилшударо барои таҳқиқи синфҳои дигари системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазоҳои функсияҳои дар соҳаҳои номаҳдуд муайян буда истифода бурдан мумкин аст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Дар диссертатсия ҳамаи теоремаҳо, тасдиқотҳо ва формулаҳои ҳалҳо ба таври қатъӣ исбот карда шудаанд, баъзе натиҷаҳо бо таҳқиқотҳои муаллифони дигар мутобиқат мекунанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯйи ихтисоси 6D060102 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ, идоракунии оптималӣ иҷро карда шуда, ба қисми таркибии ин ихтисос - муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ мансуб аст ва пурра ба формулаи ихтисос ва ба банди “Назарияи сифатии муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ” соҳаи таҳқиқот мутобиқ аст.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқикт. Масъалаи таҳқиқот ва интихоби усулҳои исбот аз ҷониби роҳбари илмӣ пешниҳод шудааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар банди «Навгонии илмии таҳқиқот» зикр ёфтаанд, шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳои зерин баррасӣ ва муҳокима гардидаанд:

- Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалии “Муаммоҳои муосири илмҳои дақиқ ва нақши онҳо дар ташаккули ҷаҳонбинии илмии ҷомеа”, бахшида ба 30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон, Хуҷанд, 26 – 27 октябри соли 2018.

- Конференсияи илмӣ-амалии «Илм ва инноватсия дар низоми татбиқи ҳадафҳои стратегияи миллӣ”, бахшида ба 30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон, Хуҷанд, 21 – 24 апрели соли 2021.

- Конференсияи байналмилалӣ доир ба алгебра, анализ ва геометрия 2021. Қазон (ФР), 22 – 28 августи соли 2021.

- Конференсияи илмӣ байналмилалии “Мактаби математикии Уфа – 2021”. Уфа (ФР), 6 – 9 октябри соли 2021.

- Конференсияи байналмилалии илмӣ-амалии “Доир ба истифодабарии муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ”, бахшида ба 80-солагии узви вобастаи АМИТ Э. Муҳаммадиев. Душанбе, 4 ноябри соли 2021.

- Конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалии “Муаммоҳои муосири математикаи татбиқӣ ва нақши он дар тавсеаи тафаккури техникии ҷомеа”. Хуҷанд, 29 – 30 ноябри соли 2021.

- Семинари илмии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон таҳти роҳбарии д.и.ф.м., профессор С. Байзоев (солҳои 2018 – 2022).

Қисме аз натиҷаҳои диссертатсия дар ҷараёни хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрҳо истифода шудаанд.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 12 мақолаҳои илмӣ ва маводи конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудаанд [1-М] – [12-М], аз он ҷумла мақолаҳои [1-М] – [4-М] дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудаанд. Аз корҳои шариктаълиф бо роҳбари илмӣ С. Байзоев ба ҳимоя танҳо натиҷаҳои аз тарафи муаллифи диссертатсия ҳосилкардашуда, пешниҳод карда мешаванд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Кори диссертатсионӣ аз муқаддима, чор боб, хулосаҳо, тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот ва рӯйхати адабиёт, ки 123 номгӯйро дарбар мегирад, иборат аст. Дар диссертатсия рақамгузории дугона истифода шудааст. Рақами якум рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ё таъриф, лемма ва теорема дар боби додашударо нишон медиҳад. Айнан ҳамин тавр, формулаҳо низ рақамгузорӣ карда шудаанд. Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 133 саҳифа иборат аст.

Қисмҳои асосии таҳқиқот

Мавод ва методҳои таҳқиқот. Маводи таҳқиқот аз ҳалли масъалаҳо оид ба ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадил ва полиномиалии системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақил ва системаҳои эллипсии муодилаҳои тартиби ду бо як тағйирёбандаи комплексии мустақил иборат аст. Дар диссертатсия методҳои таҳлили комплексию функсионалӣ ва назарияи матритсаҳо истифода шудааст.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мазмуни мухтасари натиҷаҳои кори диссертатсиониро меорем.

Боби якуми (§§ 1.1, 1.2) диссертатсия ба шарҳу таҳлили адабиёт доир ба мавзӯи таҳқиқот бахшида шудааст. Дар банди 1.1 таҳлили адабиёт доир ба системаҳои муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии бо ду тағйирёбандаи мустақил оварда шудааст. Асосан ҳолати системаҳои муодилаҳои хаттии дар соҳаҳои номаҳдуди ҳамворӣ додашуда муоина гардидаанд. Дар банди 1.2 бошад, таҳлили адабиёт, ки ба муодилаҳои хаттии комплексии бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюми навъи эллипсӣ дар соҳаҳои номаҳдуди ҳамвории комплексӣ бахшида шудаанд, баён ёфтааст.

Боби дуюми (§§ 2.1 – 2.4) диссертатсия ба системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақили намуди (1) бахшида шудааст.

Дар банди 2.1 маводи ёрирасон, ки дар диссертатсия истифода мешавад, оварда шудааст.

Дар банди 2.2 системаи намуди (1) муоина шудааст. Барои системаи амсилавӣ, ки дар он коэффитсиентҳо бо формулаи (3) муайян шудаанд, схемаи ёфтани барандаи ҳалҳо аз фазои S' оварда шуда, сипас теоремаи зерин исбот карда шудааст, ки дар он $\mu = \mathrm{trB}_1, \gamma = \mathrm{detB}_1$ мебошад.

Теоремаи 2.3. *Ҳалҳои системаи (1) амсилавӣ аз фазои S' ба тарзи зайл муайян карда мешаванд:*

а) агар $\mu = 0$ бошад, он гоҳ

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{i\sqrt{\gamma}y}P(x,y) + e^{-i\sqrt{\gamma}y}Q(x,y) \text{ ҳангоми } \gamma \geq 0, \\ e^{i\sqrt{|\gamma|}x}P(x,y) + e^{-i\sqrt{|\gamma|}x}Q(x,y) \text{ ҳангоми } \gamma < 0, \end{cases}$$

дар ин ҷо $P, Q -$ бисёрузваҳои тартиби якхела, ки коэффитсиентҳояшон тавассути коэффитсиентҳои системаи амсилавӣ тасвир меёбанд;

б) агар $\mu \neq 0$ бошад, он гоҳ

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{i\mu x}P(x,y) + e^{-i\mu x}Q(x,y) + R(x,y) \quad \text{ҳангоми } \gamma = 0, \\ \sum_{j=1}^{2}\left[[e^{ir_j x}P_j(x,y) + e^{-ir_j x}Q_j(x,y)\right] \quad \text{ҳангоми } \mu^2 > 4\gamma, \\ e^{i(r_3x+r_4y)}P_3(x,y) + e^{-i(r_3x+r_4y)}Q_3(x,y) \quad \text{ҳангоми } \mu^2 \leq 4\gamma, \end{cases}$$

дар ин ҷо P,Q,R,P_j,Q_j бисёрузваҳое, ки коэффитсиентҳояшон тавассути коэффитсиентҳои системаи амсилавӣ тасвир меёбанд $\deg P = \deg Q,\ \deg P_j = \deg Q_j, r_1, r_2$ қиматҳои решаи квадратӣ аз ададҳои $\frac{1}{2}(\mu^2 - 2\gamma \pm \mu\sqrt{\mu^2 - 4\gamma}), \qquad r_3 = \frac{|\mu|}{2}, r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4\gamma - \mu^2}$ мебошанд.

Дар банди 2.3 системаи (1) дар ҳолати

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

таҳқиқ карда шудааст. Дар ин ҳолат система гиперболӣ мебошад. Нишон дода шудааст, ки ҳалҳо аз фазои S' тавассути формулаи поёнӣ ёфта мешаванд:

$$U(x,y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)}P(x,y) + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)}Q(x,y),$$

дар ин ҷо $P, Q-$ бисёрузваҳои тартиби N (N - дилхоҳ), ки коэффитсиентҳояшон тавассути элементҳои матритсаи B тасвир ёфта, $(\xi_0, \eta_0)-$ҳалли системаи ду муодилаҳои алгебравии муайян аст.

Дар банди 2.4 системаи умумии намуди (1) таҳқиқ карда шудааст. Дар ин ҳолат алгоритми ёфтани барандаи тасвири Фуреи ҳалҳои система аз фазои S' пешниҳод шудааст. Ин барандаҳоро муайян намуда ҳалҳои мувофиқро ёфтан мумкин аст. Таҳлили назариявӣ ва амсиласозии компютерӣ нишон дод, ки барандаи ҳалҳои мӯътадил афзуншавандаи системаи (1) маҷмӯи холӣ, як нуқтавӣ ё бисёр нуқтавӣ, каҷхаттаи сарбаст ё номаҳдуд шуда метавонад.

Бо ёрии амсиласозии компютерӣ маълум гардид, ки барои системаҳои чорченаки эллипсии намуди (1), бар хилофи системаҳои дученака[10], фазои ҳалҳои афзуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ (N – адади бутуни ғайриманфӣ) зиёд набуда, беохирченак шуда метавонад. Мисоли мувофиқро меорем.

Бигзор дар системаи (1)

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&2\\2&1&-1&0\\2&1&0&-1\end{pmatrix}$$

бошад. Қиматҳои хоси матритсаи A чунинанд:

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \lambda_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Дар ин ҳолат системаи (1) эллипсӣ аст. Матритсаҳои A ва B ҷойивазшаванда нестанд, аз ин сабаб натиҷаҳои кори С. Байзаев ва Д.А. Воситоваро[10] истифода бурда наметавонем. Санҷидан мумкин аст, ки вектор-функсияҳои

$$U(x,y)=e^{i(\xi x+\eta y)}p_+ + e^{-i(\xi x+\eta y)}p_-,$$

дар ин ҷо $(\xi,\eta)-$ нуқтаи хати каҷи $\Gamma:\xi^4+\eta^4-\xi^2+9\eta^2-2=0,$ $p_\pm -$векторҳои мутаносибан баробариҳои

$$(i\xi E_4+i\eta P\pm Q)p=0$$

-ро қонеъкунанда, ҳалли системаи (1) мешаванд.

Барои системаи

$$U_x+\begin{pmatrix}A_1&0\\0&-A_1\end{pmatrix}U_y+\begin{pmatrix}0&E_2\\B_3&0\end{pmatrix}=0 \qquad (5)$$

дар ин ҷо

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix},\ a_1+a_4=0,\ a_1^2+a_2a_3=-1,\ B_3=(b_{ij})$$

[10]Байзаев, С., Воситова, Д.А. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными [Текст]/ С.Байзаев, Д.А. Воситова. Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5, № 2 . – С. 12 – 17.

теоремаи дар поён овардашаванда ҷой дорад, ки дар он формулаи[11] тасвири функсияи умумикардашудаи барандааш дар давраи $\{x^2+y^2=r_0^2\}$ воқеъбуда

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{N}(c_k(\theta)\times\delta^{(k)}(r-r_0),\psi(r,\theta)), \tag{6}$$

дар ин ҷо

$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta), \psi(r,\theta)=\varphi(re^{i\theta}),\ r>0,\ \varphi\in D,$

$c_k(\theta)-$ функсияи умумикардашудаи давраш 2π,

истифода бурда мешавад.

Теорема 2.4. *1) Агар дар системаи (5)* $\det B_3<0$ *бошад, он гоҳ*

$$U(x,y)=F^{-1}\omega$$

дар ин ҷо ω тавассути формулаи (6), ки дар он

$$r_0=\sqrt{\lambda_1}\,,\ \lambda_1=\frac{1}{2}(-b_1-b_4+\sqrt{D}),\ D=(b_1+b_4)^2-4\det B_3$$

аст, муайян карда мешавад;

2) Агар дар система $\det B_3>0$ *ва D>0 бошад, он гоҳ дар ҳолати* $b_1+b_4<0$ *будан*

$$U(x,y)=F^{-1}(\omega_1+\omega_2)$$

дар ин ҷо ω_1,ω_2 *мувофиқан тавассути формулаи (6), ки дар он* $r_0=\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(-b_1-b_4-\sqrt{D})$ *аст, муайян карда шуда, дар ҳолати* $b_1+b_4\geq 0$ *системаи (5) дар* S' *фақат ҳалли нулӣ дорад;*

3) Агар $detB_3=0$, *он гоҳ дар ҳолати* $b_1+b_4<0$

$$U(x,y)=F^{-1}(\omega_0+\omega_1)$$

дар ин ҷо ω_0 *−функсияи барандааш дар нуқтаи* 0 *буда, дар ҳолати* $b_1+b_4\geq 0$ *системаи (5) дар* S' *фақат ҳалли нулӣ дорад.*

Боби 3 (§§ 3.1 – 3.3) ба системаҳои эллипсии муодилаҳои тартиби ду бо як тағйирёбандаи комплексии намуди

$$Lw\equiv\alpha w_{\bar z\bar z}+\beta w_{\bar z z}+\gamma w_{zz}+a_1(z)w_{\bar z}+a_2(z)w_z+a_3(z)\overline{w}_{\bar z}+a_4(z)w+a_5(z)\overline{w}=0, \tag{7}$$

дар ин ҷо $\alpha,\beta,\gamma-$доимиҳои якбора ба нул баробар набуда, бахшида шудааст.

Масъалаҳо доир ба ҳалҳои афзуншавиаш полиномиалӣ ва нормалӣ ҳалшавандагии ин муодилаҳо дар фазоҳои гёлдерии функсияҳо дар ҳамвории комплексӣ омӯхта шудаанд.

[11] Байзаев, С., Рахимова, М.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // [Текст]/ С. Байзаев, М.А. Рахимова. Уфимский математический журнал. – 2018. – Т. 10, №1. – С. 3 – 13.

Дар банди 3.1 системаҳои эллипсии муодилаҳои тартиби дуи намуди

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w + c(z)\overline{w} = 0, \qquad (8)$$

дар ин ҷо $a, b, c -$ функсияҳои дар ягон соҳаи G додашуда, муоина шудаанд. Ҳангоми $a = b = c = 0$ муодилаи функсияҳои бианалитикӣ ё системаи муодилаҳои Битсадзе[12], ки барои он масъалаи Дирихле нётерӣ нест, ҳосил мешавад. Барои системаҳои намуди (8) масъала доир ба ҳалҳои дар тамоми ҳамвории комплексии C маҳдуд нётерӣ нашуданаш мумкин аст. Масалан, системаи

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + c\overline{w} = 0,$$

дар ин ҷо $c -$доимии ғайринулӣ, шумораи беохири ҳалҳои хаттӣ новобастаи дар C маҳдудро дорад:

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

дар ин ҷо $p -$ доимии ихтиёрӣ,

$$q = \frac{|c|}{\bar{c}}\bar{p}e^{-2i\alpha}, \;\; \omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}z\right)\right], \; 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Дар ҳолати a, b доимӣ ва $c = 0$ будан системаи (8) ба муодилаи функсияҳои метааналитикӣ [13] мубаддал мешавад.

Бигзор коэффитсиентҳои a, b, c доимӣ буда, хати каҷи Γ_1 ба таври зайл дода шудааст:

ҳангоми $|b| < |c|$ бо муодилаи –

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) + 4\sqrt{-|b|^2 \sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2}\,; \qquad (9)$$

ҳангоми $|b| = |c|$ бо муодилаи –

$$p = 0 \quad \rho^2 = 8|b|\cos(2\varphi + \varphi_0); \qquad (10)$$

ҳангоми $|b| > |c|$ бо муодилаҳои –

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) \pm 4\sqrt{-|b|^2 \sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2} \qquad (11)$$

Доир ба ҳалҳои муодилаи (8) теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.5. *1) Ҳангоми a=b=c=0 ҳамаи ҳалҳои системаи (8) аз фазои* S' *бо формулаи*

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z}\,,$$

---

[12] Бицадзе, А.В.Некоторые классы уравнений в частных производных. [Текст]/А.В. Бицадзе М.: Наука, – 1981. – 448 с.

[13] Балк, М.Б. Полианалитические функции и их обобщения [Текст] // М.Б. Балк. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1991. – Т. 85. – С. 187–246.

дода мешаванд, дар ин ҷо P_N ва $Q_{N-1}-$ бисёрузваҳои ихтиёрӣ нисбат ба z, дараҷаҳои мувофиқан N ва N-1.

2) Ҳангоми $a=b=0$ ва $c\neq 0$ ба ҳар як нуқтаи ξ_0 аз давраи $\left\{\zeta:|\zeta|=2\sqrt{|c|}\right\}$ ҳалҳои намуди

$$w(z)=e^{i(\xi_0,z)}\varphi(z,\bar z)+e^{-i(\xi_0,z)}\Psi(z,\bar z) \qquad (12)$$

мувофиқ меоянд, дар ин ҷо $(\xi_0,z)=\frac{1}{2}(\xi_0\bar z+\bar\xi_0 z),\ \varphi,\Psi-$ бисёрузваҳои муайян нисбат ба $z,\bar z$

3) Агар a=0 ва $bc\neq 0$ бошад, он гоҳ ба ҳар як нуқтаи ξ_0 аз хати каҷи Γ_1 бо муодилаи (9) ҳангоми $|b|>|c|$ (мувофиқан (10) ҳангоми $|b|=|c|$ ё (11) ҳангоми $|b|<|c|$ ҳалҳои намуди (12) мувофиқ меоянд.

4) Ҳангоми $a\neq 0$ $b=0$ будан функсияҳои намуди (12) бо нуқтаи ξ_0 $|\xi_0|=r_0$ ва $\mathrm{Re}\,\bar a\xi_0=0$, дар ин ҷо

$$r_0=\sqrt{2|a|^2+2\sqrt{|a|^4+4|c|^2}}$$

ҳалҳои муодилаи (8) мешаванд.

5) Ҳангоми $ab\neq 0$ будан функсияҳои намуди (12) бо нуқтаҳои $\pm\zeta_0$ аз буриши хатҳои каҷи Γ_1 ва Γ_2 бо муодилаҳои ба (9) - (11) монанд, ҳалҳои муодилаи (8) мешаванд.

Дар банди 3.2 системаи муодилаҳо ва операторҳои намуди

$$Lw\equiv w_{\bar z\bar z}+a_1(z)w_{\bar z}+a_2(z)w_z+a_3(z)\overline{w}_{\bar z}+a_4(z)w+a_5(z)\overline{w}=0 \qquad (13)$$

таҳқиқ карда шудаанд.

Фарз менамоем, ки коэффитсиентҳои системаи (13) ба фазои C_α тааллуқ доранд. Он гоҳ оператори $L:C_\alpha^2\to C_\alpha$ хаттӣ ва маҳдуд мешавад.

Бигзор $a\in C_\alpha$ ва $\{h_n\}\subset C$ пайдарпайие, ки $h_n\to\infty$. Пайдарпайии функсионалии $a(z+h_n)$ чунин зерпайдарпайии $a(z+h_{n_к})$ -ро дорад, ки он дар ҳар як компакт ба ягон функсияи $\tilde a(z)$ аз C_α мунтазам наздик мешавад.

Аз рӯи коэффитсиентҳои оператори L: $C_\alpha^2\to C_\alpha$ ва пайдарпайиҳои гуногуни $h_n\to\infty$ оператори худудӣ

$$\tilde L w=w_{\bar z\bar z}+\tilde a_1 w_{\bar z}+\tilde a_2 w_z+\tilde a_3\overline{w}_{\bar z}+\tilde a_4 w+\tilde a_5\overline{w} \qquad (14)$$

сохта, маҷмӯи чунин операторҳоро бо $H(L)$ ишора мекунем. Нишон дода шудааст, ки мавҷуд набудани ҳалҳои ғайринулии ҳамаи муодилаҳои ҳудудии $\tilde L w=0$ дар фазои C_α^2 критерияи нётерӣ будани оператори L аст.

Агар коэффитсиентҳои оператори L дар беохирӣ суст лаппанда бошанд, он гоҳ коэффитсиентҳои операторҳои ҳудудӣ доимӣ мешаванд, яъне маҷмӯи $H(L)$ аз операторҳои намуди (14) бо коэффитсиентҳои доимӣ иборат аст.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Леммаи 3.5. *Бигзор коэффитсиентҳои системаи (13) доимӣ буда, шартҳои зеринро қонеъ гардонанд:*

$$|a_4| > |a_5|.\ |a_3|^2 + 2\sqrt{|a_4|^2 - |a_5|^2} > |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|\bar{a}_1 a_2 + a_4|,$$

Он гоҳ ин система дар фазои S' фақат ҳалли нулӣ дорад.

Аз ин ҷо ҳосил менамоем, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои ин лемма муодилаи (13) ҳалли ғайринулии дар тамоми ҳамворӣ маҳдуд, инчунин ҳалҳои ғайринулии даврӣ ё афзуншавиашон дар беохирӣ аз функсияи дараҷавӣ зиёд набуда, надорад. Ин лемма ҳангоми таҳқиқи муодилаҳои коэффитсиентҳояшон тағйирёбанда дар фазоҳои гёлдерӣ хеле муҳим аст.

Байни n-нормалӣ будани оператори $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ ва ғайринулӣ ҳалшавандагии муодилаҳои ҳудудӣ чунин алоқа мавҷуд аст.

Теоремаи 3.6. *Бигзор коэффитсиентҳои оператори L ба фазои C_α таълуқ дошта бошанд. Он гоҳ барои n-нормалӣ шудани оператори $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ зарур ва кифоя аст, ки ҳамаи операторҳои ҳудудии $\tilde{L}: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ ядрои нулӣ дошта бошанд.*

Сипас d-нормалӣ будани оператори $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ таҳқиқ гардида, тасдиқоти зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 3.7. *Бигзор коэффитсиентҳои $a_1(z),\ a_2(z),\ a_3(z)$ оператори L аз фазои C_α^1 ва коэффитсиентҳои $a_4(z), a_5(z)$ аз фазои C_α бошанд. Он гоҳ барои d-нормалӣ шудани оператори $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ зарур аст, ки ҳамаи операторҳои ҳудудии $\tilde{L}: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ ядрои нулӣ дошта бошанд.*

Дар банди 3.3 системаи муодилаҳо ва операторҳои намуди

$$M_1 w \equiv \Delta w + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z)\bar{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z)\bar{w} = 0, \qquad (15)$$

$$M_2 w \equiv w_{zz} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z)\bar{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z)\bar{w} = 0, \qquad (16)$$

дар ин ҷо $\Delta-$оператори Лаплас, таҳқиқ карда шудаанд.

Барои системаҳои намуди (15) ва (16) масъала доир ба ҳалҳои дар тамоми ҳамвории комплексии C маҳдуд нётерӣ нашуданаш мумкин аст. Масалан, системаҳои

$$\Delta w + c_1\bar{w} = 0, \qquad w_{zz} + c_2\bar{w} = 0,$$

дар ин ҷо c_j-доимиҳои ғайринулӣ, мувофиқан шумораи беохири ҳалҳои хаттӣ новобастаи дар C маҳдудро доранд:

$$w(z) = p_j\omega_j(z) + q_j\overline{\omega_j(z)},$$

дар ин ҷо p_j – доимиҳои ихтиёрӣ,

$$q_1 = \frac{|c_1|}{\bar{c}_1}\bar{p}_1,\ q_2 = \frac{|c_2|}{\bar{c}_2}e^{-2i\alpha}\bar{p}_2,\ \omega_j(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c_j|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}z\right)\right],\ 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Айнан мисли банди 3.2 маҷмӯи операторҳои ҳудудӣ $H(M_j)$ сохта шуда, алоқаи байни *n*-нормалӣ (*d*-нормалӣ) будани операторҳои $M_j : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ ва ғайринулӣ ҳалшавандагии муодилаҳои ҳудудии $\tilde{M}_j w = 0$, $\tilde{M}_j \in H(M_j)$ барқарор карда мешавад. Теоремаҳои 3.9 – 3.14 исбот карда шудаанд, ки аз онҳо дутоашро баён мекунем.

Теоремаи 3.11. *Бигзор коэффитсиентҳои оператори* M_1 *дар беохирӣ суст лаппанда буда, чунин ададҳои* $\varepsilon > 0$ *ва* $R > 0$ *мавҷуд бошанд, ки ҳангоми* $|z| > R$ *шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$a)$ $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

$b)$ $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > \left(|a_1(z)| + |a_2(z)|\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\,a_4 + \varepsilon.$

Он гоҳ оператори $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *d-нормалӣ мешавад.*

Теоремаи 3.14. *Бигзор коэффитсиентҳои оператори* M_2 *дар бехирӣ суст лаппанда буда, чунин ададҳои* $\varepsilon > 0$ *ва* $R > 0$ *мавҷуд бошанд, ки ҳангоми* $|z| > R$ *шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$a)$ $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

$b)$ $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > |a_1(z)|^2 + |a_2(z)|^2 + 2\left|a_1(z)\overline{a_2(z)} + a_4(z)\right| + \varepsilon.$

Он гоҳ оператори $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *d-нормалӣ мешавад.*

Дар **боби 3** натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ ҳосил шуда мавриди муҳокима қарор гирифтаанд.

ХУЛОСАҲО

Кори диссертатсионӣ ба таҳқиқи масъалаҳо доир ба ҳалҳои системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақили намуди (1) ва системаҳои эллипсии тартиби дуюми як тағйирёбандаи комплексии мустақил намуди (2) дар фазоҳои функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ муайян, ки шартҳои маҳдудӣ ё афзуншавии дараҷавӣ дар беохирро қонеъ менамоянд, бахшида шудааст. Дар аснои таҳқиқот натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шудаанд:

• формулаи ҳалҳо аз фазои S' барои системаи муодилаҳои амсилавии намуди (1) ёфта шудааст [1-А], [5-А], [10-А];

• формулаи ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадили системаи муодилаҳои намуди (1) ҳангоми бо формулаи (4) дода шудани коэффитсиентҳо ёфта шудааст [1-А], [8-А], [9-А];

• алгоритми ёфтани ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ зиёд набудаи системаи намуди (1) пешниҳод шудааст [2-А], [11-А];

• ҳалҳои аз фазои S' барои системаи муодилаҳои (2) ҳангоми доимӣ будани коэффитсиентҳо ёфта шудаанд [3-А], [4-А], [6-А], [12-А];

• тавассути муодилаҳои ҳудудӣ шартҳои зарурӣ ва кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ муайян карда шудаанд [3-А], [7-А];

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ тасвир карда шудаанд [3-А];

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии d -нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ тасвир карда шудаанд [3-А], [7-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот

Натиҷаҳои илмии дар кори диссертатсионӣ ба даст оварда шуда характери назариявӣ доранд. Усулҳои дар диссертатсия инкишоф додашуда ва натиҷаҳои ҳосилшударо барои таҳқиқи синфҳои дигари системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазоҳои функсияҳои дар соҳаҳои номаҳдуд муайян буда истифода бурдан мумкин аст. Қисмҳои алоҳидаи диссертатсияро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрантони ихтисосҳои “Математика” ва “Математикаи амалӣ” баррасӣ намудан мумкин аст.

Интишороти муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия

1. Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда:

[1-М] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои экспоненсиалии як синфи системаи чор муодилаҳои бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн]/ М.О. Содиқов // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2019, №4 (51). – С . 10 – 14.

[2-М] Садиков М.О. Доир ба ҳалҳои системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазои Швартс [Текст] / М.О. Садиков, С. Байзаев // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2020, №2 (53). – С . 3 – 10.

[3-М] Садиков М.О. О нормальной разрешимости систем с оператором Бицадзе в гёльдеровых пространствах [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. №4. – С. 65 – 73.

[4-М] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих муодила метааналитических функций [Текст]/ М.О. Садиков // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2021, №4 (59). – С . 20 – 23.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[5-М] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои суст афзуншавандаи як системаи навъи эллипсии чор муодилаи хаттӣ [Матн]/М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан. Худжанд». – Худжанд. – 2018. – С. 128 – 131.

[6-М] Садиков М.О. О решениях обобщенного уравнения бианалитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Содиков // Материалы межд. научной конф. «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». Т. 1. – Уфа. – 2021. – С. 177 – 179.

[7-М] Садиков М.О. Об одном обобщении бианалитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Сборник трудов межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань. – 2021. – С. 174 – 175.

[8-М] Садиков М.О. О бесконечномерности пространства полиномиальных решений одного класса четырехмерной эллиптической системы [Текст] /М.О. Садиков, Д.А. Воситова // Сб. статей II межд. науч.-практ. конф. «О ҳангоми менении дифференциальных муодила ҳангоми решении ҳангоми кладных задач», посвященная 80-летию чл.-корр. НАНТ Э. Мухамадиева. – Душанбе. – 2021. – С. 37 – 39.

[9-М] Садиков М.О. Об экспоненциальных решениях одной системы муодила с частными производными в общем случае [Текст] / М.О. Садиков // Материалы

конф. «Проблемаҳои муосири таҳсилоти математикӣ ва технологияи иттилоотӣ дар мактабҳои миёнаю олӣ». – Хуҷанд. – 2021. – С. 74 – 77.

[10-М] Садиков М.О. О слабо возрастающих решениях одной системы четырёх муодила эллиптического типа [Текст]/ М.О. Садиков // Материалы конф. «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот». – Хуҷанд. – 2021. – С. 166 – 168.

[11-М] Содиқов М.О. Ҳалҳои суст афзуншавандаи системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн]/М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы ҳангоми кладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества». – Худжанд. – 2021. – С. 153 – 156.

[12-М] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих муодила метааналитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Материалы науч.-практ. конф. ”Илм ва инноватсия дар низоми татбиқи ҳадафҳои стратегияи миллӣ”. – Худжанд. – 2021. – С. 36 – 41.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Содиқов Маъруфҷон Обидович дар мавзӯи “Таҳқиқи масъалаҳо доир ба ҳалҳои полиномиалии муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ” барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) - доктор аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060102 – муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Вожаҳои калидӣ: муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ, ҳалҳои афзуншавиаш полиномиалӣ, функсияиҳои бианалитикӣ, метааналитикӣ, ҳалшавандагии нормалӣ, фазоҳои Швартс ва Гёльдер.

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши масъалаҳо доир ба ҳалҳои системаҳои чор муодилаҳои хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ду тағйирёбандаи ҳақиқии мустақили намуди

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \qquad (1)$$

дар ин ҷо $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B-$ матритсаҳои тартиби чор ва системаҳои эллипсии тартиби дуюми як тағйирёбандаи комплексии мустақил намуди

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0, \qquad (2)$$

дар ин ҷо $\alpha, \beta, \gamma-$ доимиҳои якбора ба нул баробар набуда, дар фазоҳои функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ муайян, ки шартҳои маҳдудӣ ё афзуншавии дараҷавӣ дар беохирро қонеъ менамоянд.

Методҳои таҳқиқот. Дар диссертатсия методҳои таҳлили комплексию функсионалӣ ва назарияи матритсаҳо истифода шудааст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шудаанд:

• формулаи ҳалҳо аз фазои S' барои системаи муодилаҳои амсилавии намуди (1) ёфта шудааст;

• формулаи ҳалҳои афзуншавиашон мӯътадили системаи муодилаҳои намуди (1) ҳангоми бо формулаи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

дода шудани коэффитсиентҳо ёфта шудааст;

• алгоритми ёфтани ҳалҳои афуншавиашон дар беохирӣ аз $(|x|+|y|)^N$ зиёд набудаи системаи намуди (1) пешниҳод шудааст;

• ҳалҳои аз фазои S' барои системаи муодилаҳои (2) ҳангоми доимӣ будани коэффитсиентҳо ёфта шудаанд;

• тавассути муодилаҳои ҳудудӣ шартҳои зарурӣ ва кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ муайян карда шудаанд;

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии n-нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ тасввир карда шудаанд;

• тавассути коэффитсиентҳо шартҳои кофии d -нормалӣ будани операторҳои намуди $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ тасввир карда шудаанд.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ дорад. Усулҳои дар диссертатсия инкишоф додашуда ва натиҷаҳои ҳосилшударо барои таҳқиқи синфҳои дигари системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазоҳои функсияҳои дар соҳаҳои номаҳдуд муайян буда истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Садикова Маъруфжона Обидовича на тему "Исследование задач о полиномиальных решениях уравнений с частными производными" на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: уравнения с частными производными, решения полиномиального роста, бианалитические, метааналитические функции, нормальная разрешимость, пространства Шварца и Гёльдера.

Цель исследования. Изучение систем четырёх вещественных линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B-$ постоянные матрицы четвертого порядка и эллиптических систем уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma-$ постоянные, одновременно не равные нулю, в пространствах функций, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих условиям типа ограниченности или степенного роста на бесконечности.

Методы исследования. В диссертации используются методы комплексного и функционального анализа и теории матриц.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

• найдены явные формулы для решений из пространства S' модельной системы;

• найдены явные формулы для решений умеренного роста системы (1), когда коэффициенты определяются формулой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где $A_1,\ B_j$ –матрицы второго порядка;

• предложен алгоритм нахождения решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x| + |y|)^N$, системы уравнений вида (1);

• найдены явные формулы для решений из пространства S' системы вида (2), в случае постоянных коэффициентов;

• в терминах предельных уравнений найдены необходимые и достаточные условия n-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия n-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия d-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов систем уравнений в частных производных в пространствах функций, определённых в неограниченных областях.

ANNOTATION

dissertation of Sadikov Marufjon Obidovich on the topic "Investigation of problems on polynomial solutions of partial differential equations" for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) - Doctor in specialty 6D060100 - Mathematics: 6D060102 - Differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: partial differential equations, solutions of polynomial growth, bianalytic, metaanalytic functions, normal solvability, Schwartz and Hölder spaces.

Purpose of the study. The study of systems of four real linear partial differential equations of the first order with two independent variables

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{1}$$

where $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B-$ are constant matrices of the fourth order and elliptic systems of second order equations with one complex variable of the form

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar z\bar z} + \beta w_{\bar z z} + \gamma w_{zz} + a_1(z) w_{\bar z} + a_2(z) w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar z} + a_4(z) w + a_5(z)\overline{w} = 0, \tag{2}$$

where $\alpha, \beta, \gamma-$ are constants, not simultaneously equal to zero, in spaces of functions defined in the whole plane and satisfying conditions such as boundedness or power growth at infinity.

Research methods. The dissertation uses methods of complex and functional analysis and matrix theory.

Scientific novelty of the research. The results of the dissertation are new and are as follows:

- found explicit formulas for solutions from the space S' of the model system;
- Explicit formulas are found for solutions of moderate growth of system (1), when the coefficients are determined by the formula

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \tag{3},$$

where $A_1,\ B_j$ – are second-order matrices;

- an algorithm for finding solutions that grow at infinity no faster than $(|x| + |y|)^N$, systems of equations of the form (1) is proposed;
- Explicit formulas are found for solutions from the space S' of a system of the form (2), in the case of constant coefficients;
- necessary and sufficient conditions for the n-normality of operators of the form $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;
- in terms of coefficients, sufficient conditions for the n-normality of operators of the form $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;
- in terms of coefficients, sufficient conditions for the d-normality of operators of the form $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Theoretical and scientific-practical significance of the work. The work is theoretical. The methods developed in the dissertation and the results obtained can be applied in the study of other classes of systems of partial differential equations in function spaces defined in unbounded domains.