На правах рукописи

Абдухаминов Мунъим Абдумамадович

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ СОВМЕСТНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И УСРЕДНЁННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ГЛАДКОСТИ В L_2 И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2023

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель:	**Шабозов Мирганд Шабозович**, академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета
Официальные оппоненты:	**Бабенко Александр Григорьевич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом аппроксимации и приложений Института математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения РАН
	Тухлиев Камаридин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

Защита состоится *27 декабря 2023 г. в 14:00* часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «_____» «________________» 2023 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 73.2.012.03,
доктор физико-математических наук,
доцент **Р.Н. Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. При решении ряда экстремальных задач теории приближения функций в последнее время часто применяют различные модификации классической характеристики гладкости функции – её модуля непрерывности. В большинстве случаев это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить новые содержательные результаты. Так, для определения эффективных характеристик гладкости функции в работах Z.Ditzian, V.Totik[1], К.В.Руновского[2], Н.Н.Пустовойтова[3], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной[4] рассматривались различные способы осреднения конечных разностей, а в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[5], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[6], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[7] и других авторов рассматривались модификации конечных разностей, основанные на применении сглаживающих операторов, например, оператора Стеклова вместо обычного оператора сдвига $T_h(f,x) = f(x+h)$.

Данная диссертационная работа посвящена одной из характеристик гладкости функций, рассмотренной ранее в упомянутой работе К.В.Руновского[2], свойства которой более подробно изучены в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[6] в метрике пространства L_2. В диссертационной работе результаты К.В.Руновского[2], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[6] обобщаются и распространяются на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных, вычисляются точные верхние грани наилучших совместных приближений на различных классах функций, находятся точные значения n-поперечников указанных классов функций. Следует отметить, что экстремальными задачами приближения классов периодических функций в различных ба-

[1] *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of Smoothness // Springer Ser. Comput. Math., 9 Springer. – New York. – 1997.

[2] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1994. – Т.185, №8. – С. 81–102.

[3] *Пустовойтов Н.Н.* Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сб. – 1997. – Т.188, №10. – С. 95–108.

[4] *Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I.* Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206, №1. – PP. 97–114.

[5] *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т.76, №6. – С. 803–811.

[6] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92, №4. – С. 497–514.

[7] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.52, №6. – С. 1414–1427.

наховых пространствах в разное время занимались А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, С.Б.Стечкин, Н.П.Корнейчук, В.К.Дзядык, Л.В.Тайков, В.В.Арестов, Н.И.Черных, В.И.Иванов, В.А.Юдин, А.А.Лигун, А.Г.Бабенко, Ю.Хуссейн, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов и многие другие.

В теории приближения задача совместного (или одновременного) приближения функций и их производных изучена сравнительно мало, а аналогичные задачи для наилучшего совместного полиномиального приближения функций и их производных находятся на стадии разработки. Всё же следует отметить, что экстремальные задачи наилучшего совместного приближения гладких функций сплайн-функциями и соответствующими их производными изучены Н.П.Корнейчуком[8]. Для наилучшего совместного приближения функций тригонометрическими полиномами некоторые результаты получены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной[6], а для аналитических в единичном круге функций экстремальные задачи совместного приближения изучены в работе М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова и Дж.Дж.Заргарова[9].

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме "Теория аппроксимации функций".

Цель исследования. Хорошо известно, что интерес к полиномам и их свойствам проявили математики, занимавшиеся вопросами теории приближений. При выборе аппарата для приближенного представления функций они, как правило, останавливались на алгебраических и тригонометрических полиномах благодаря простоте их структуры и широким аппроксимационным возможностям. В последнее время выяснилось, что полиномы не только в задачах наилучших приближения функций играют главенствующую роль, но и с таким же успехом применяются в экстремальных задачах наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных.

Основной целью диссертационной работы является точное решение различных экстремальных задач наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами классов функций в пространстве L_2 на периоде в терминах как обычного среднего значения характеристики гладкости

[8] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения // М.: Наука. 1984. 342 С.

[9] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.* О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27, №4. – С. 239–254.

Руновского, так и в терминах ее взвешенного L_p-среднего при $0 < p \leq \infty$.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти точную верхнюю грань отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристикой гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$;
- найти точную константу в неравенстве Джексона – Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным L_p-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- решить экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ;
- вычислить точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Основные методы исследования. В работе широко используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в нормированных пространствах, а также современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания в различных функциональных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристики гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$;
- найдена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным L_p-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ;

- вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках наилучшего совместного приближения функций тригонометрическими полиномами, скорости сходимости которых определяются посредством характеристики гладкости Руновского порядка m;
- теоремы о точных константах в неравенстве Джексона – Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратического совместного приближения тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным L_p-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- теоремы о решении экстремальных задач отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых заданной мажорантой;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства можно применять при решении экстремальных задач функций комплексного переменного, принадлежащих пространствам Харди и Бергмана. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика».

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2023 гг.);

- международной научной конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.).
- международной научной конференции “Актуальные проблемы современной математики” (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- международной конференции “Современные проблемы теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 7 – в материалах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 69 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание диссертации

Материал исследования составляет решение ряда экстремальных задач теории наилучших совместных приближении классов комплекснозначных периодических функций тригонометрическими полиномами. При получении основных результатов используются новейшие методы функционального анализа и методы решения экстремальных задач.

Приведём краткое содержание диссертации с формулировкой основных результатов.

Во введении приводится краткая характеристика исследуемой экстремальной задачи для комплекснозначных периодических функций, дан исторический обзор и сформулированы вспомогательные результаты.

В первой главе излагаются экстремальные задачи отыскания верхней грани наилучшего среднеквадратического совместного приближения функций и их промежуточных производных тригонометрическими полиномами на классах функций, определяемые характеристикой гладкости m-го порядка Руновского $\Lambda_m(f,t)$ в норме пространства $L_2 := L_2[0,2\pi]$.

В первом параграфе излагаются предварительные сведения и некоторые основные факты о комплекснозначных рядах Фурье, исследуемых в дальнейшем. Там же приводятся отдельные утверждения с доказательством.

Всюду далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0,+\infty)$, $\mathbb{Z}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и целых чисел. Пусть $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — пространство Гильберта суммируемых с квадратом модуля по Лебегу 2π-периодических комплекснозначных функций с обычным скалярным произведением

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

и конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Часто представляется удобным записывать ряд Фурье в комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \qquad (2)$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\mathcal{T}_{2n-1} := \left\{q_{n-1}(x) : q_{n-1}(x) := \sum_{|k|\le n-1} b_k e^{ikx},\ b_k\in\mathbb{C}\right\},$$

и

$$S_{n-1}(f,x)=\sum_{|k|\le n-1}c_k(f)e^{ikx}$$

— частная сумма $(2n-1)$-го порядка ряда (2). Хорошо известно, что

$$E_{n-1}(f)_2:=\inf\{\|f-q_{n-1}\|_2:q_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\}=$$

$$=\|f-S_{n-1}(f)\|_2=\left\{\sum_{|k|\ge n}\left|c_k(f)\right|^2\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

где положено $\rho_k^2(f):=|c_k(f)|^2+|c_{-k}(f)|^2$. Пусть

$$\Delta_h^m f(x):=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}f(x+lt),\quad m\in\mathbb{N}$$

— разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Равенством

$$\omega_m(f,t)_2:=\sup\{\|\Delta_h^m f(x)\|_2:|h|\le t\}$$

определяется модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2$. Простые вычисления показывают, что

$$\omega_m(f,t)_2=\sup\left\{\left(2^m\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2(1-\cos kh)^m\right)^{1/2}:0\le h\le t\right\}=$$

$$=\sup\left\{\left(2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m\right)^{1/2}:0\le h\le t\right\}. \qquad (4)$$

Для произвольной функции $f\in L_2$ рассмотрим характеристику гладкости m-го порядка

$$\Lambda_m(f,t)_2:=\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\|\Delta_h^m f\|_2^2dh\right)^{1/2}, \qquad (5)$$

введенную К.В.Руновским[2]. Так как

$$\Lambda_m(f,t)_2\le\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^2(f,h)_2dh\right)^{1/2}\le\omega_m(f,t)_2, \qquad (6)$$

то очевидно, что из оценок наилучшего приближения классов функций в терминах характеристики гладкости (5) будут следовать аналогичные оценки в терминах модуля непрерывности (4), т. е. первые упомянутые оценки являются более тонкими, чем вторые.

Поскольку для функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ также принадлежат пространству L_2, то определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(s)})$ на классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$. Легко убедиться, что

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \left\| f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)}) \right\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}.$$

В первом параграфе доказывается следующая

Теорема 1.1.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$. Тогда справедливо следующее точное неравенство*

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leq n^{-(r-s)} E_{n-1}\big(f^{(r)}\big)_2. \tag{7}$$

Неравенство (7) точно в том смысле, что для функции

$$f_0(x) = a\cos(nx + \varphi), \quad a, \varphi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

обращается в равенство.

Одной из основных теорем второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ и $0 < t \leq 2\pi$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, t/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}, \tag{8}$$

где

$$J_{1,m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos h)^m dh \right\}. \tag{9}$$

В частности, из (8) при $t = \pi$ следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2}} \left\{ \frac{m!}{(2m-1)!!} \right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Заметим, что в силу формулы (6) из (10) получаем неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{2^{m/2}} \left\{ \frac{m!}{(2m-1)!!} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \, \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_2 \tag{11}$$

с явной константой

$$\chi := \chi(m) = \frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Неравенство (11) является точным при $m = 1$ и $r = 0$. Это следует из результата Н.И.Черных[10] с точной константой $\chi = 1/\sqrt{2}$. При остальных $m, r \in \mathbb{N}$ вопрос о точности неравенство (11) остаётся открытым.

Далее под весовой функцией φ на отрезке $[0, h]$ будем понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. В соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f \neq const$. Основным результатом третьего параграфа первой главы является

Теорема 1.3.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, φ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\cdot n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

где $$\operatorname{sinc} t := \left\{\frac{\sin t}{t},\ \text{если } t \neq 0;\quad 1,\ \text{если } t = 0\right\}.$$

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.3.1.

Теорема 1.3.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \le \infty$. Тогда при любом $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

где φ — произвольная весовая функция на отрезке $[0, h]$

Из этой теоремы вытекают ряд следствий.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.2 при $p = 2$, $\varphi \equiv 1$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left\{\int\limits_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2\, dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \operatorname{Si}(nh))}\right\}^{1/2}, \tag{13}$$

[10] *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2, №5. – С.513–522.

где $\mathrm{Si}(t) = \int\limits_0^t \mathrm{sinc}\, u du$ — *интегральный синус.*

В частности, из (13) при $h = \pi/(2n)$ *получаем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/2}} = \frac{n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi - 2\mathrm{Si}(\pi/2)}}.$$

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 при* $p = 2$, $\varphi(t) = t$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/2}} = \frac{2}{h}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\cdot\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (14)$$

В частности, из (14) при $h = \pi/(2n)$ *вытекает*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} t\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 8}}.$$

Имеет место также следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0, 2\pi/n]$, φ — *весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (15)$$

Из теоремы 1.4.1 вытекает следующее утверждение

Следствие 1.4.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \le \infty$, $0 < h \le 2\pi/n$ *и* $\varphi \equiv 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1/p}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{nh}\left(\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{16}$$

Отметим, что при некотором жестком ограничении относительно весовой функции φ утверждения вышеприведенных теоремы 1.4.1 и следствия 1.4.1 в частном случае при $s=0$ и $1/r\le p\le 2$ ранее были получены в работе С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной[11]. Кроме того, следует отметить, что приведенная выше теорема 1.4.1. является своеобразным обобщением аналогичного утверждения, ранее доказанного для модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},t\big)_2$ в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[12], на случай характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)=\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$.

В пятом параграфе первой главы приводится решение нижеприведенной экстремальной задачи (17) для некоторых классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ. Доказанные теоремы в четвертом параграфе обеспечивают возможность решить общую экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 : f\in\mathfrak{M}^{(r)}\big\} \tag{17}$$

при всех значениях $n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r>s$ для некоторых классов функций $\mathfrak{M}^{(r)}$, $r\in\mathbb{N}$, задаваемых мажорантой $\Psi(h)$.

Пусть $\Phi(u)$, где $u\in(0,2\pi]$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{u\to+0}\Phi(u)=\Phi(0)=0$. Символом $W^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $\tau\in(0,2\pi]$ имеет место неравенство

$$\Lambda_1(f^{(r)},\tau)\le\Phi(\tau).$$

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$, где $r\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$, Φ — некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$

[11] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99, №2. – С.215–238.

[12] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, №5. – С.764–775.

при любом $0 < \tau \le 2\pi$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^\tau \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)dt \le \Phi^p(\tau).$$

Пусть $0 < h \le 3\pi/(4n)$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, $\varphi(t)$ — весовая на $[0, h]$ функция. Исходя из результата теоремы 1.4.1, символом

$$\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi) := \mathcal{F}_p^{(r)}\big(\Lambda_m, \varphi, h\big)_2$$

обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих ограничению

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt\right)^{1/p} \le 1.$$

Обозначим через t_* величину аргумента функции $\operatorname{sinc}\tau$, при котором она достигает на множестве $(0, 2\pi]$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* — наименьший положительный корень уравнения[6]

$$t = tg\, t \ \ (4.49 < t_* < 4.51).$$

Следуя работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[6], полагаем

$$(1 - \operatorname{sinc}\tau)_* := \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc}\tau, & \text{если } 0 \le \tau \le t_*; \\ 1 - \operatorname{sinc} t_*, & \text{если } t_* \le \tau < \infty. \end{cases}$$

Приведём теперь решение экстремальной задачи (17) для класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, пользуясь результатом следствия 1.3.1.

Теорема 1.5.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \left\{\frac{\pi(1 - \operatorname{sinc}\tau)_*}{\pi - 2}\right\}^{1/2} \quad \text{при} \quad \tau \in (0, 2\pi]. \tag{18}$$

Тогда при всех $s = 0, 1, \ldots, r-1$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) = \sup\big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{19}$$

Множество мажорант Φ, удовлетворяющих условию (18), непусто.

Теорема 1.5.2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \le \infty$. *Если для любых значений* $\tau \in (0, 2\pi]$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\tau)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \frac{\int\limits_0^{n\tau} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt}, \tag{20}$$

то имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\bigr)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}} \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr). \tag{21}$$

При этом множество мажорант Φ, *удовлетворяющих ограничению* (20), *непусто.*

Теорема 1.5.3. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, $\varphi(t)$ — *весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)\bigr)_2 = 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left\{ \int\limits_0^{h} J_{1,m}^p(nt)\varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \tag{22}$$

Из теоремы 1.5.3 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.5.1. *Пусть* $m = 1$, $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, $0 < p \le \infty$, $\varphi(t)$ — *весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(\mathcal{F}_{p,1}^{(r)}(\varphi)\bigr)_2 = \frac{n^{-(r-s)}}{\sqrt{2}\left(\int\limits_0^{h} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{p/2} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/2}}. \tag{23}$$

Из (23), в частности, при $p = 2$, $\varphi(t) \equiv 1$ *получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(1)\bigr)_2 = \left\{ \frac{n}{2(nh - \operatorname{Si}(nh))} \right\}^{1/2} \cdot n^{-(r-s)}. \tag{24}$$

В свою очередь из (24) при $h = \pi/(2n)$ *имеем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\bigl(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(1)\bigr)_2 = \frac{n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi - 2\operatorname{Si}(\pi/2)}}.$$

Следствие 1.5.2. *При выполнении условий теоремы 1.5.3 при $p = 2$, $\varphi(t) = t$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(t)\big)_2 = n^{-(r-s)} \cdot h^{-1} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2},$$

из которого, в частности, при $h = \pi/(2n)$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}} \cdot \frac{1}{n^{r-s-1}}.$$

Основной целью исследования второй главы является вычисление значений различных поперечников для классов функций, возникающих естественным образом из результатов, полученных во втором, третьем и четвёртом параграфах первой главы. Напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс функций из L_2 и пусть $\mathcal{L}_n \subset L_2$ — некоторое подпространство размерности n.

Величину

$$E_n(\mathfrak{N}) = \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{N}\} = \sup\big\{ \inf\big\{\|f-g\| : g \in \mathcal{L}_n\big\} : f \in \mathfrak{N}\big\} \quad (25)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\mathcal{L}_n \subset L_2$ и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : L_2 \to \mathcal{L}_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\mathcal{L}_n \subset L_2$ размерности n, то возникает задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\big\{ \sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\big\} \quad (26)$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\big\{\|f - A^*f\| : f \in \mathfrak{N}\big\}.$$

Если в $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathcal{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathcal{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\big\{ \sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)\big\}. \quad (27)$$

Напомним определения поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Поперечником в смысле А.Н. Колмогорова[13] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\{E_n(\mathfrak{N}) : \mathcal{L}_n \in L_2\} =$$
$$= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : g \in \mathcal{L}_n\} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathcal{L}_n \subset L_2\}, \tag{28}$$

где нижняя грань рассматривается сначала по всем функциям $g(x)$, принадлежащим n-мерному подпространству $\mathcal{L}_n \subset L_2$, а затем по всем подпространствам заданной размерности n.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\{\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) : \mathcal{L}_n \subset L_2\} =$$
$$= \inf\Big\{ \inf\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\} : \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\} \tag{29}$$

называют линейным поперечником. Рассматривают также проекционный поперечник

$$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\Big\{ \inf\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)\} : \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\Big\{ \sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap L_n\} : \mathcal{L}^n \subset L_2\Big\}, \tag{30}$$

где inf берется по всем подпространствам $\mathcal{L}^n$ коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Пусть S — единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \mathfrak{N} \cap \mathcal{L}_{n+1} \supset \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1}\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2\} \tag{31}$$

называется n-поперечником по Бернштейну.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, то имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) \le d^n(\mathfrak{N}, L_2) \le d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}, L_2). \tag{32}$$

Символом $W_p^{(r)}(\varphi_*; \Phi) := W_p^{(r)}(\Lambda_1, \varphi_*; \Phi)$ $(\varphi_*(t) = t)$ обозначим классы функций $f(x) \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}(x)$ при любых $0 < p \le \infty, r \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h t\Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2 dt \le \Phi^p(h).$$

[13] *Kolmogorov A.N.* Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – V.37. – PP.107–110.

Теорема 2.2.1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, $\varphi_*(t) = t$. Если для любых $h \in (0, 2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \int\limits_0^{nh} t\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} t\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right)^{-1}, \tag{33}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*, \Phi\big); L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*, \Phi\big); L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*, \Phi\big)\big)_2 = \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} t\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big), \tag{34}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ и $\Pi_n(\cdot)$, а

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_2 := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Условию (33) удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \pi^2 \bigg/ \left(\int\limits_0^{\pi} t(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} d\tau \right), \ \Big(2 + \frac{p}{2} < \alpha < 2 + p\Big). \tag{35}$$

В третьем параграфе второй главы вычисляются точные значения n-поперечников классов $W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \le \int\limits_0^h \varphi(t) dt.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$ и $0 < h \le 3\pi/(4n)$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h), L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\big)_2 = \frac{1}{2^{m/2} n^r} \left\{ \int\limits_0^h \varphi(t) dt \bigg/ \int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt) \varphi(t) dt \right\}^{1/p},$$

где функция $J_{1,m}(\cdot)$ определяется формулой (9), а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных поперечников.

В четвертом параграфе второй главы вычисляется оценка модулей коэффициентов Фурье на вышеуказанных классах функций.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1. Тогда имеют место равенства*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big\} = \sup\big\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big\} =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\pi} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big), \tag{36}$$

где $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье.

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.5.2. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big\} = \sup\big\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big\} =$$

$$= \frac{n^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{37}$$

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\big\} = \sup\big\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\big\} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2} n^r} \left\{ \int_0^{h} \varphi(t) dt \Big/ \int_0^{h} J_{1,m}^p(nt)\varphi(t) dt \right\}^{1/p}.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристики гладкости Руновского на классе комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$;
- найдена точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным L_p-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ;
- вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функций комплексного переменного аналитических в круге функций, принадлежащих пространствам Харди H_p $(1 \leq p \leq \infty)$ и Бергмана B_p $(1 \leq p \leq \infty)$.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК Российской Федерации:

[1] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 // Известия вузов. Математика. – 2021, №10. – С. 78–91. (Перевод: *Shabozov M.Sh., Abduhaminov M.A.* Some Inequalities Between the Best Polynomial Approximations and Averaged Finite-Difference Norms in Space L_2 // Russian Mathematics. – 2021, №65. – P. 69–81.)

[2] *Абдухаминов М.А.* О совместном приближении периодической функции и ее последовательных производных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2019, №2(175). – С. 7–13.

[3] *Абдухаминов М.А.* О приближении периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 // Доклады АН РТ. – 2019. – Т.62, №9-10. – С. 503–510.

[4] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 и поперечники функциональных классов // Доклады АН РТ. – 2020. – Т.63, №3-4. – С. 146–160.

[5] *Абдухаминов М.А.* О задаче наилучшего совместного полиномиального приближения дифференцируемых периодических функций в L_2 // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65, № 7-8. – С. 445–450.

В других изданиях:

[6] *Абдухаминов М.А.* О приближении периодической функции и ее последовательных производных в L_2 // Материалы международной научной конференции “*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*”, посвященной 60-летию академика АН РТ, профессора З.Х.Рахмонова и члена-корреспондента АН РТ, профессора С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С. 37–40.

[7] *Абдухаминов М.А.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 // Материалы международной научной конференции “*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*”, посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 31–34.

[8] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 и поперечники функциональных классов // Материалы республиканской научно-практической конференции "*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 237–244.

[9] *Абдухаминов М.А.* Наилучшее полиномиальное приближение в пространстве L_2 // Міжнародна наукова конференція "*Теорія наближень і її застосування*", присвячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020 г.). – С. 30–31.

[10] *Абдухаминов М.А.* О неравенствах между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в L_2 // Материалы международной научной конференции "*Актуальные проблемы современной математики*", посвященной 80-летию профессора Т.Собира (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С. 30–31.

[11] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* О наилучшем совместном приближении периодических функций в L_2 // Материалы международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*", посвященной 80-летию профессора Д.Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 10–13.

[12] *Абдухаминов М.А.* Наилучшее совместное полиномиальное приближение дифференцируемых периодических функций в L_2 // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 13–15.