На правах рукописи

Константинова Туйаара Петровна

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЁННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ФОРМАМИ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе 2025

Работа выполнена в Политехническом институте (филиале)
ФГАОУ ВО « Северо-Восточного федерального университета
им. М.К.Аммосова» в г. Мирном

Научные руководители: доктор физико–математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиала) ФГАОУ ВО « Северо-Восточного федерального университета им. М.К.Аммосова» в г. Мирном
Гадоев Махмадрахим Гафурович

доктор физико–математических наук, профессор, член-корр. НАН Таджикистана, заведующим отделом теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана
Исхоков Сулаймон Абунасрович

Официальные оппоненты: **Пятков Сергей Григорьевич,**
доктор физико–математических наук, профессор Инженерной школы цифровых технологий ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет».

Сафаров Джумабой,
доктор физико–математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ГОУ «Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»

Защита состоится *27 мая 2025 г. в 14 ч. 00 мин.* на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корп. 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан "____" ____________ 2025 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета 73.2.012.03
доктор физико–математических наук Р.Н.Одинаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений высшего порядка в ограниченной области.

Одним из основных направлений в современной теории краевых задач для уравнений с частными производными является исследование разрешимости краевых задач для различных классов вырождающихся эллиптических уравнений. Интерес к таким исследованиям обусловлен тем, что вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются в теории малых изгибов поверхностей вращения, в теории трещин, в теории броунских движений и во многих других задачах математической физики и механики. Также известно, что с помощью замены независимых переменных некоторые классы дифференциальных уравнений в неограниченных областях и в областях с сингулярностями границы сводятся к вырождающимся эллиптическим уравнениям.

Существуют разнообразные способы вырождения эллиптических уравнений и поэтому для изучения краевых задач для таких уравнений применяются разные методы. Применяемый нами метод основан на элементах теории вложения весовых функциональных пространств и теории полуторалинейных форм. Этот метод разрабатывался и совершенствовался в работах С.М. Никольского, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, С.В. Успенского, К.Х. Бойматова, Х. Трибеля, А. Куфнера, Н.В. Мирошина, Б.Л. Байдельдинова, С.А. Исхокова и др.[1–4].

Основная часть научных публикаций по краевым задачам для эллиптических уравнений с вырождением относится к случаю, когда коэффициенты рассматриваемых дифференциальных уравнений имеют форму произведения двух функций, одна из которых является ограниченной,

[1] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[2] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.// Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с.4 – 30.

[3] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. 2010. Т. 87. №2. С. 201 – 216.

[4] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высокого порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук (Россия). 2012. Т. 443, №3. с. 286-289.

а другая характеризует вырождение. Существуют лишь отдельные работы, в которых исследовалась разрешимость вариационной задачи Дирихле с помощью весового аналога неравенства Гординга для вырождающихся эллиптических уравнений с младшими коэффициентами из весовых L_p-пространств. Результаты этих работ существенно опираются на коэрцитивности интегро-дифференциальных полуторалинейных форм, с помощью которых порождаются исследуемые эллиптические операторы. В диссертации впервые исследуется случай вырождающихся эллиптических операторов с суммируемыми коэффициентами, ассоциированными с некоэрцитивными полуторалинейными формами. Здесь коэрцитивность формы понимается в следующем смысле[2]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$ плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u,\, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u,\, u] + \mu_0\|u\|_0^2 \geq \delta_0\|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Цель диссертации. Целью диссертационной работы является исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области в случае, когда соответствующая полуторалинейная форма может не удовлетворять условию коэрцитивности и изучение спектральных свойств таких операторов.

Объекты исследования. Объектом исследования являются эллиптические операторы высокого порядка с суммируемыми коэффициентами и со степенным вырождением на границе области, которые порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных со степенным весом (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

1. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для нового класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, не содержащих промежуточных коэффициентов, соответствующая полуторалинейная форма которых, в общем случае, не удовлетворяет условию коэрцитивности.

2. Впервые исследована разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда полуторалинейные формы, соответствующие эллиптическим операторам, могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

3. Доказаны теоремы существования и единственности решения неоднородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Выделен случай, когда неоднородные граничные условия задаются в явном виде и их количество зависит от степени вырождения старших коэффициентов исследуемого оператора. Доказано неравенство, в котором норма решения неоднородной вариационной задачи Дирихле сверху оценивается через нормы граничных функций и правой части уравнения.

4. Установлены достаточные условия дискретности спектра широкого класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм с суммируемыми младшими коэффициентами и установлена оценка роста функции распределения собственных значений этих операторов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм, а также при исследовании спектральных свойств таких операторов.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и неоднократно обсуждались автором на следующих семинарах и конференциях:

- семинар кафедры фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиала) Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова в г. Мирном под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А.Исхокова и д.ф.-м.н. М.Г.Гадоева (2011-2024);

- общеинститутский семинар Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан под руководством д.ф.-м.н. член-корреспондента АН РТ, проф. З.Х.Рахмонова (ноябрь, 2016);

- Четвертая международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013 г.);

- Международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу», посвящённая 20-летию Политехнического института (филиала) Северо-Восточного Федерального университета им. М.К.Аммосова (г. Мирный, 12-14 марта 2014 г.);

- Международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященная 75-летию профессора Т.С.Сабирова (г. Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (г. Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова М.Ш. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);

- совместное заседание кафедр «Функциональный анализ и дифференциальные уравнения» и «Математический анализ и теория функций» механико-математического факультета Таджикского национального университета (г. Душанбе, 13 ноября 2024 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-11], список которых приведён в конце автореферата. Работы [1-6] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В работах, написанных совместно с С.А.Исхоковым, М.Г.Гадоевым и И.А.Якушевым, соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, который содержит 86 наименований. Общий объем диссертации – 135 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении даётся обоснование актуальности темы диссертации, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены её основные результаты.

Первая глава диссертации состоит из четырёх параграфов и посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границы области, порождённых с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм. В первом параграфе введены определения основных нормированных пространств функций, сформулированы их основные свойства и доказаны некоторые вспомогательные весовые интегральные неравенства.

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| =$$

$$= \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int_\Omega \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$ – длина мультииндекса k,

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

– обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k, $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, т.е. бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \leq \mathrm{dist}\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq M_k\rho^{1-|k|}(x),$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k; M, M_k – некоторые положительные постоянные.

Основные свойства пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ изучены в работах С.М.Никольского, П.И.Лизоркина и Н.В.Мирошина[2,5,6], К.Х.Бойматова[7], С.А.Исхокова[8]. Согласно результатам этих работ для любого натурального числа r и вещественных чисел α, p, причем $1 \leq p < \infty$, множество $C_0^\infty(\Omega)$ (множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω) плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Пространство $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ тесно связано с функциональным пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которое определяется как пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка r с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_\Omega \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

В отличие от пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ множество $C_0^\infty(\Omega)$ не всегда плотно в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

---

[5] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981, т.157, с.90 – 118.

[6] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983, т.161, с.157 – 183.

[7] Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах // Доклады АН СССР. 1989, т.307, №6, с.1296 – 1299.

[8] Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1995, т. 31, №4, стр. 641-653.

Если $\mathbb{B}$ одно из пространств $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\,\alpha}(\Omega)$, то символом $\mathbb{B}'$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\mathbb{B}$, наделенное нормой сопряженного пространства, а символом $\langle F,\, v\rangle$, где $F \in \mathbb{B}'$ и $v \in \mathbb{B}$, обозначим значение функционала F на функцию v.

Символом $L_{p;\alpha}(\Omega)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u;\, L_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x)\,|u(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Далее в первом параграфе первой главы приведены некоторые вспомогательные леммы и доказаны некоторые вспомогательные интегральные неравенства, которые в последующих параграфах применяются при доказательстве основных результатов.

Второй параграф первой главы посвящен весовому аналогу неравенства Гординга для эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Рассматривается следующая полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$\mathfrak{A}[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

коэффициенты $b_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями.

Основной результат второго параграфа сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $b_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности*

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; число $c > 0$ не зависит от x и ξ.

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$, что

$$\mathrm{Re}\, \mathfrak{A}[u,\, u] \geq C_1 \|u, V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 - C_2 \|u, L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

В **третьем параграфе первой главы** изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Рассматривается интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B_\lambda[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx +$$
$$+\lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \quad (1)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями. Предполагается, что:

(I) функции $a_{kl}(x), |k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

(II) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0,\,\pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \right| < \varphi,$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus 0$.

Здесь и далее функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\,\pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1}\,\xi_2^{k_2}\,\cdots\,\xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\right\}^{1/2}.$$

Следуя работам Н.В.Мирошина[9,10] рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора

$$L_\lambda[u](x) = \sum_{|k|=|l|=r} (-1)^r \left(\rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)} + \lambda\rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)$$

в следующей постановке:

[9] Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т.24. – №3. – С.455 – 464.

[10] Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 1992. – Т.194. – С. 179 – 195.

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in (V^r_{2;\alpha}(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U, v] =< F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Замечание 1. Если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая и число α такое, что

$$\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, \ldots, r\}, \quad -\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p},$$

то решение $U(x)$, $x \in \Omega$, задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, \; s = 0, \, 1, \, \ldots, \, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 такое, что $r - \alpha - 1/p \leq s_0 < r - \alpha + 1 - 1/p$. Поэтому, в общем случае, граничные условия в задачи D_λ формально будем считать однородными.

Теорема 2. *Пусть $\alpha < r$ и выполнены условия I) - II). Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \leq M \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \right\|,$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

В четвертом параграфе первой главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для общих эллиптических операторов (содержащих ненулевые младшие коэффициенты) в ограниченной области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм. Рассматривается следующая интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B_\lambda[u, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \\ + \lambda \int_\Omega \rho^{2(\alpha - r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (2)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, на которых ниже накладываются некоторые условия. Отметим, что форма (2), в отличие от формы (1) имеет младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k| + |l| \leq 2r - 1$.

Изучается разрешимость следующей вариационной задачи:

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in (V^r_{2;\alpha}(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U, v] =< F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Предполагается, что:

(III) младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k|+|l| \le 2r-1,\ |k|, |l| \le r$ формы (2) принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1)\ p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|k|} + \varepsilon, |l| = r,\ n > 2(r-|k|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|} + \varepsilon, |k| = r,\ n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \le r-1, |l| \le r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon,\ n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon},\ n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|k|+\varepsilon},\ n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} - любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε - достаточно малое положительное число.

Основной результат четвертого параграфа первой главы сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть $0 \le \alpha < r$ и выполнены условия (I)-(III). Тогда найдется число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \le M_0 \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \right\|,$$

где число M_0 не зависит от λ и F.

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению разрешимости вариационной задачи Дирихле **с неоднородными граничными условиями** для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм. Она состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены определения основных весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных и сформулированы их основные свойства. В этом же параграфе приведены некоторые вспомогательные леммы.

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым[9].

Систематическое исследование пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву[10]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых заметим работы С.М. Никольского[11], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера[12], О.В. Бесова[13], Х. Трибеля[1] и др. Более подробную библиографию работ по исследованиям весовых пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, опубликованных до 1988 г. можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина[2].

С помощью теоремы вложения разных метрик для весовых пространств $W^{\,r}_{p;\,\alpha}(\Omega)$ в первом параграфе второй главы доказывается следующая вспомогательная лемма:

Лемма 1. *Пусть* $p>1$ *и числа* λ_{kl}, *определенные для мультииндексов* k,l, *удовлетворяющих условиям* $|k|,\ |l|\le r$, $|k|+|l|\le 2r-1$, *такие, что* $\lambda_{kl}>1$, $1/\lambda_{kl}\le 2/p$. *Тогда для всех* $u(x)$, $v(x)\in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\left\|u^{(k)}v^{(l)};\,L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega)\right\|\le M\left\|u;\,W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\right\|\left\|v;\,W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\right\|$$

где

$$\alpha_{kl}=-\frac{1}{\lambda_{kl}}+\varepsilon_1+\left(\alpha-r+|k|+\frac{1}{p}\right)_++\left(\alpha-r+|l|+\frac{1}{p}\right)_+,$$

[9] Кондрашов В. И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам // ДАН СССР.-1938.-Т. 18.- №4-5.-С. 253-254.

[10] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, т. 55, с. 1-182.

[11] Никольский С.М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных // Успехи мат. наук. -1961-Т.16-№5-С.63-114.

[12] Бесов О.В., Кадлец Я., Куфнер А. О некоторых свойствах весовых классов // ДАН СССР.-1966.-Т. 171.- №3.-С. 514-516.

[13] Бесов О. В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1983, т. 161, с. 29-47.

ε_1 *– достаточно малое положительное число; константа* $M > 0$ *не зависит от* u, v.

Здесь и далее $(\mu)_+ = \mu$, если $\mu \geq 0$, и $(\mu)_+ = 0$ в противном случае.

Во втором параграфе второй главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями. Рассматривается полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$\mathbb{B}[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{3}$$

и предполагается, что ее комплекснозначные коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$, $|k|, |l| \leq r$, удовлетворяют следующим условиям:

(IV) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, формы (3) имеют вид

$$b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ удовлетворяют условиям (I), (II);

(V) коэффициенты $b_{kl}(x)$ при $|k|$, $|l| \leq r$ и $|k|+|l| \leq 2r-1$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl};\,\delta_{kl}}(\Omega)$, где $\mu_{kl} > 1$ и

$$\delta_{kl} = 1 - \frac{1}{\mu_{kl}} - \varepsilon_2 - \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{2}\right)_+ - \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{2}\right)_+ ,$$

где ε_2 – достаточно малое положительное число.

Далее исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (3).

Задача $\mathbb{D}$**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{4}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{5}$$

Напомним, что $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пространство всех антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Замечание 2. Если $\Phi(x) \notin \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, то условие (5) означает, что решение $U(x)$ задачи $\mathbb{D}$ и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни и те же ненулевые следы на границе $\partial\Omega$ области Ω. Если граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^1 и $\alpha \le -1/2$ или $\alpha \ge r - 1/2$, то

$$W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Поэтому граничные условия в задаче $\mathbb{D}$ будут неоднородными только в случае

$$-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при выполнении условий (IV), (V) коэффициенты полуторалинейной формы (3) удовлетворяют условиям теоремы 3. Так как

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = V^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$$

при условии

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\}, \tag{7}$$

то применяя теорему 3 к полуторалинейной формы (3) получаем следующий результат:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (II) (IV), (V), (7) . Тогда найдется число $\lambda_1 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_1$ вариационная задача: для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти решение $V(x)$ уравнения*

$$\mathbb{B}[V,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha - 2r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v\rangle \quad \left(\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)\right), \tag{8}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, имеет единственное решение и при этом имеет место следующее неравенство

$$\left\| V;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\| \le M \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\|, \tag{9}$$

где положительная постоянная M не зависит от выбора функционала F.

Далее предположим, что для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ уравнение (8) при $\lambda = 0$ имеет единственное решение

$V(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и для него выполняется неравенство (9). Тогда справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (II) (IV), (V), (6), (7).*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и заданной функции* $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *существует единственное решение* $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *задачи* $\mathbb{D}$ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M\left\{\left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|\right\},$$

где число $M > 0$ *не зависит от выбора* F *и* Φ.

При некоторых дополнительных ограничениях на параметр α можно задавать неоднородные граничные условия в задаче $\mathbb{D}_\lambda$ в явном виде. Пусть число α такое, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$. Определим целое число s_0 неравенством $r - \alpha - 1/2 \leq s_0 < r - \alpha + 1/2$.

Тогда при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$, для заданных граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{10}$$

найдется функция $\Phi \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали, и имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq C\sum_{s=0}^{s_0-1}\left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|,$$

где C – некоторая постоянная.

В этом случае, условие (5), которое имеется в задаче $\mathbb{D}$ принимает следующий вид

$$\left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1. \tag{11}$$

Поэтому в сделанных выше предположениях задачу $\mathbb{D}$ можно сформулировать следующим образом:

Задача $\mathcal{D}$**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций (10) требуется найти решение $U(x)$ уравнения (4) из пространство $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ удовлетворяющее граничным условиям (11).

Применяя теорему 5 получаем следующий результат о разрешимости задачи $\mathcal{D}$.

Теорема 6. *Пусть $0 < \alpha < r - 1/2$, граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены все условия теоремы 5.*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций (10) существует единственное решение $U(x)$ задачи $\mathcal{D}$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le M \left\{ \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и граничных функций (10).

В **третьей главе** диссертационной работы доказана одна оценка нормы резольвенты и изучены спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов. Глава состоит из пяти параграфов. Основные результаты главы изложены в первом параграфе, а их доказательства приведены в последующих четырёх параграфах. Также как в предыдущих глав работы предполагается, что операторы заданы в ограниченной области, их младшие коэффициенты принадлежат некоторым L_p-пространствам со степенным весом и соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Ранее, во многих работах, где изучалась оценка резольвенты несамосопряженных операторов, порожденных с помощью полуторалинейных форм, доказывалось неравенство вида $\|(A - \lambda E)^{-1}\| < M|\lambda|^{-1/2}$. В нашей работе доказано одно представление резольвенты исследуемого оператора A, которое позволяет получить неравенство такого типа с показателем 1 вместо $1/2$. Также доказано, что оператор A имеет дискретный спектр, и изучена асимптотика функции $N(t)$ – число собственных значений оператора A не превосходящих по модулю t, с учетом их алгебраических кратностей.

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r – натуральное, α – вещественное числа. Для мультииндекса $k = (k_1,\, k_2,\, \dots,\, k_n)$ обозначим

$$D_x^k = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{i\partial x_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\partial}{i\partial x_n}\right)^{k_n}.$$

Далее для удобства записи обозначим пространство $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ через H_+, а норму пространства $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ – через $\|\cdot;\, H_+\|$.

Символом H_- обозначим пополнения пространства $H = L_2(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, H_-\| = \sup |(u,\, v)|,$$

где $(\cdot,\, \cdot)$ – скалярное произведение в H и верхняя грань берется по всем $v \in H_+$ таким, что $\|v;\, H_+\| = 1$.

Элементы из H_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над H_+. Действие функционала $F \in H_-$ на элемент $u \in H_+$ будем обозначать символом $< F,\, u >$.

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) D^k_x u(x) \overline{D^l_x v(x)} dx, \tag{12}$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ – комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям (I)–(III) (см. теорему 3).

Здесь ε - достаточно малое положительное число, функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1}\, \xi_2^{k_2} \cdots \xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B'[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_\Omega p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D^k_x u(x) \overline{D^l_x v(x)} dx,$$

Согласно теореме 1 в сделанных выше предположениях существуют постоянные $c_0 > 0,\ c_1 \ge 0$ такие что

$$\operatorname{Re} B'_0[u,\, u] \ge c_0 \|u;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - c_1 \|u;\, L_{2;\,\alpha - r}(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{13}$$

где

$$B'_0[u,\, u] = B'[u,\, v] - \left(\gamma\, \rho^{2(\alpha - r)} a_{00} u,\, u\right).$$

Следовательно, если коэффициент $a_{00}(x)$ формы (12) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \gamma(x) a_{00}(x) \ge c_2, \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

где $c_2 > c_1$ и c_1 - постоянная из (13), то

$$\operatorname{Re} B'[u,\, u] \geq c_0' \|u;\, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega);\, c_0' > 0.$$

Форма (12) является непрерывной в H_+. Поэтому оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством $< \mathcal{A}u,\, v >= B[u,\, v]$ $v \in H_+$, действует из H_+ в H_-.

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия (I)–(III), (14). Пусть* $\alpha < r$ *и* $\alpha{+}1/2 \notin \{1,\, \ldots,\, r\}$. *Тогда существует единственный замкнутый оператор* A *в пространстве* $L_2(\Omega)$, *обладающий следующими свойствами:*

(i) $D(A) \subset L_2(\Omega)$, $(Au,\, v) = B[u,\, v]$ *для всех* $v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ *и всех* $u \in D(A)$,

(ii) найдется число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *такое, что оператор* $A - \lambda_0 E$ *непрерывно обратим.*

Оператор A *совпадает с сужением оператора* $\mathcal{A}$ *в* $L_2(\Omega)$, *т.е.*

$$D(A) = \left\{ u \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega) :\, \mathcal{A}u \in L_2(\Omega) \right\}, \quad Au = \mathcal{A}u \;\forall u \in D(A).$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}[u,\, v] = \sum_{|k|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^k v(x)} dx + \int\limits_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx \tag{15}$$

с областью определения $D[\mathcal{P}] = \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Существует единственный самосопряженный оператор P в $L_2(\Omega)$, связанный с формой (15) равенством

$$\mathcal{P}[u,\, v] = \Big((P+E)^{1/2} u,\, (P+E)^{1/2} v \Big) \;\forall u, v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t) :\, H \to H_-$. Сужение в H оператора $\mathcal{P}^{-1}(t) :\, H_- \to H$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда для любого замкнутого сектора* $S \subset \{z \in \mathbb{C} :\, |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ *с вершиной в нуле существует положительное число* c_S *такое, что при* $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_s$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2}\, Y(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|),$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2}\, Y(\lambda)\, (P + |\lambda| E)^{-1/2},$$

где непрерывный оператор $Y(\lambda): H \to H$ такой, что

$$\sup_{\lambda \in S, |\lambda| > c_s} \|Y(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| < +\infty.$$

Здесь и далее $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в нормированном пространстве $\mathbb{H}$. Пространство ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства $\mathbb{H}_1$ в нормированное пространство $\mathbb{H}_2$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{H}_1;\, \mathbb{H}_2)$.

Следствие 3. *В условиях теоремы 8 резольвента оператора A удовлетворяет оценке $\left\|(A - \lambda E)^{-1};\, \mathcal{L}(H)\right\| \leq M|\lambda|^{-1}$.*

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда оператор A имеет дискретный спектр и для функции $N(t)$ распределения собственных значений оператора A справедлива оценка $N(t) \leq M\, t^{\omega}$ $(t \geq 1)$, где $\omega = \max\{\frac{n}{2r},\, \frac{n-1}{2r-2\alpha}\}$.*

Отметим, что для удобства изложения, сначала в §3.2 доказывается теорема 8, а затем в §3.3 приводится доказательство теоремы 7.

В **заключении** представлены выводы о результатах исследования, перспективы и направления дальнейшего развития.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для нового класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, не содержащих промежуточных коэффициентов, соответствующая полуторалинейная форма которых, в общем случае, не удовлетворяет условию коэрцитивности.

2. Теорема об однозначной разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда полуторалинейные формы, соответствующие эллиптическим операторам, могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

3. Теорема о существовании и единственности решения неоднородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

4. В зависимости от гладкости границы области и степени вырождения старших коэффициентов эллиптического оператора, связанного с некоэрцитивной полуторалинейной формой, выделен случай, когда неоднородные граничные условия вариационной задачи Дирихле задаются в явном виде. В этом случае доказано неравенство, в котором норма решения неоднородной вариационной задачи Дирихле сверху оценивается через нормы граничных функций и правой части уравнения.

5. Доказана дискретность спектра широкого класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм с суммируемыми младшими коэффициентами и установлена оценка роста функции распределения собственных значений этих операторов.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами / С.А. Исхоков, М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Доклады Российской Академии Наук.– 2015. – Т. 462. – №1. – С. 7-10.
перевод в:
Konstantinova T.P. Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators generated by noncoercive forms / S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, T.P. Konstantinova // Doklady Mathematics. – 2015. – Vol. 91. – No. 3. – P. 255-258. **(Web of Science, Scopus).**

2. Константинова Т.П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – №2. – С. 8-21.

3. Константинова Т.П. Однородная вариационная задача Дирихле связанная с некоэрцитивной формой, младшие коэффициенты которой принадлежат лебеговым пространствам /Т.П. Константинова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Серия физ.мат.хим. геол. и тех. науки. – 2015. – №3(160). – С. 15-23.

4. Константинова Т.П. Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26. – №4. – С. 37-50. **(Scopus).**

5. Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2022. – Т. 29. – №2. – С. 3 – 18. **(Scopus).**

6. Константинова Т.П. О сопряженных операторах для одного класса вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами / Т.П. Константинова // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2024. – Т. 67. – №7-8. – С. 358 - 363.

Прочие публикации

7. Константинова Т.П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой / С.А. Исхоков, Т.П. Константинова // Четвертая международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013 г.). Тезисы докладов. – С. 199-200.

8. Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для одного класса вырождающихся дифференциальных операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Международная конференция «Наука и инновационные разработки - Северу» (г. Мирный, 12-14 марта 2014 г.) – С. 261-262.

9. Константинова Т.П. Об оценки резольвенты одного класса эллиптических операторов с вырождением / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова (г. Душанбе, 29-30 октября 2015 г.) – С. 84-87.

10. Константинова Т.П. О суммируемости в смысле Абеля-Лидского системы корневых вектор-функций одного класса эллиптических операторов с вырождением / И.А. Якушев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (г. Душанбе, 14-15 марта 2018 г.) С. 153 – 155.

11. Константинова Т.П. О задаче Дирихле с неоднородными граничны-

ми условиями для одного класса эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мерганда Шабозовича (г. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) – С. 214-218.