На правах рукописи

Мехмонзода Сабзина Навбухор

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МНОГОГРАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ И СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе — 2024

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научные руководители: **Шабозов Мирганд Шабозович** – доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Бердышева Елена Евгеньевна – доктор физико-математических наук, профессор департмента математики и прикладной математики Университета Кейптауна

Официальные оппоненты: **Волков Юрий Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт математики имени С.Л.Соболева» Сибирского отделения РАН;

Тухлиев Камаридин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова

Ведущая организация: ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского» Уральского отделения РАН

Защита состоится *20 сентября 2024 г. в 10:00* часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj.

Автореферат разослан «______» «__________________» 2024 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 73.2.012.03,
доктор физико-математических наук **Р.Н. Одинаев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В теории приближения функций многогранные функции и сплайн-функции начали использовать сравнительно недавно, примерно с семидесятых годов прошлого столетия, но эти функции заняли прочное место, как бы заранее для них предназначенное. Следует отметить, что в частных задачах аппроксимационного содержания сплайны, или более точно кусочно-полиномиальные функции, применялись гораздо раньше. Достаточно вспомнить метод ломаных Эйлера, предложенное Лебегом доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами, кусочно-полиномиальную аппроксимацию степенной функции в работах С.М. Никольского в начале пятидесятых годов об оптимальных квадратурных формулах, метод промежуточных приближений ломаными Н.П. Корнейчука семидесятых годах прошлого столетия. Следует также отметить, что сплайны вошли в теорию аппроксимации через задачи теории интерполирования и восстановления функции.

При анализе решения экстремальных задач обнаружилось, что интерполяционные сплайны не только предпочтительнее многочленов с точки зрения вычислительных удобств, но в ряде ситуаций обладают наилучшими аппроксимационными свойствами, обеспечивают минимально возможную погрешность на классах функций. В ряде принципиально важных задач, связанных с оценкой погрешности сплайн-интерполяции на классах функций, точное решение оказалось возможным получить благодаря внутренней специфике сплайнов. К настоящему времени многие экстремальные задачи теории сплайн-аппроксимации для функции одной переменной решены и нашли практическое применение в задачах прикладной математики. Однако, по сравнению с одномерным случаем, исследование вопросов приближения функций двух переменных значительно усложняется ввиду появления новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Во-первых, область, на которой осуществляется приближение, может иметь весьма сложную структуру. Трудности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций многих переменных, поскольку эти свойства могут быть различными по разным направлениям. Наконец, усложняется и приближающий аппарат. Всё это вместе взятое приводит к тому, что методы исследования экстремальных задач, существенно использующие специфику одномерного случая, не всегда удаётся перенести на функции двух переменных.

В связи с этим точных результатов в задачах оценки погрешности приближения в многомерном случае, в том числе и в задачах многомерной сплайн-интерполяции, совсем мало.

Диссертационная работа посвящена получению некоторых результатов окончательного характера, связанных с оценкой погрешности приближения многогранными функциями и оценкой погрешности сплайн-аппроксимации на классах функций двух переменных, задаваемых различными модулями непрерывности.

Отметим, что первые точные результаты о сплайн-аппроксимации функций двух переменных получены в работах В.Ф. Сторчая[1,2], С.Б. Вакарчука[3], С.Б. Вакарчука и К.Ю. Мыскина[4] и М.Ш. Шабозова[5,6].

Актуальность диссертационной работы определяется тем, что в ней решены экстремальные задачи сплайн-приближений на более широких классах функций, которые ранее не поддавались решению известными методами.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2022 гг. по теме "Теория приближения функций".

Цель и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$, $Q := \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$;
- найти оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \le l+j \le 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \le l+j \le 1)$;
- найти оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функции класса $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r,s) = (0,1);\ (r,s) = (1,0))$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f;x,y)$ многогранной функции;

[1] *Сторчай В.Ф.* Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Известия вузов. Математика. – 1973, №8. – С. 84–88.

[2] *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике // В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровский. – 1975. – С. 82–89.

[3] *Вакарчук С.Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Матем. заметки. – 1990. – Т.47, №5. – С. 26–30.

[4] *Вакарчук С.Б., Мыскин К.Ю.* Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейнами сплайнами // Укр. матем. журнал. – 2005. – Т.57, №2. – С. 147–157.

[5] *Шабозов М.Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр. матем. журнал. – 1994. – Т.46, №11. – С. 1554–1560.

[6] *Шабозов М.Ш.* Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Матем. заметки. – 1996. – Т.59, №1. – С. 142–152.

- найти точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы многомерной сплайн-аппроксимации и методы решения экстремальных задач теории сплайн-аппроксимации в нормированных пространствах, разработанные в научных школах Н.П.Корнейчука и Ю.Н.Субботина.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- найдены точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$, $Q := \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\}$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x, y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f; x, y)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \le l+j \le 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \le l + j \le 1)$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x, y)$ функции класса $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r, s) = (0, 1);\ (r, s) = (1, 0))$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f; x, y)$ многогранной функции;
- найдены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты о приближении многогранными функциями и билинейными сплайн-функциями имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближений многогранными функциями и сплайн-функциями в многомерном случае на различных классах функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе 2015-2024 гг.);

- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе,15-25 августа 2016 г.);
- международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений "(Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами"(Душанбе, 30-31 июня 2020 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций"(Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 печатных работах [1–8], из них 1 статья опубликована в научном журнале Российской Федерации, 1 статья опубликована в международном журнале Jaen Journal on Approximation и 7 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце автореферата. Из 8 работ 5 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 3 в других изданиях. Из совместных с научными руководителями М.Ш.Шабозовым и Е.Е.Бердышевой работ [1], [2], [3] и [8] соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 36 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста, набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание диссертации

В I главе рассматривается задача приближения функций двух переменных и их производных многогранными функциями. В первом параграфе излагаются предварительные факты, вспомогательные утверждения и история вопроса.

В теории аппроксимации, как правило, многие результаты по наилучшему приближению функций полиномами и сплайнами задаются ограничением на норму в $L_p := L_p[a,b]$ r-й производной. Более тонкой, чем норма $\|f\|_X$, характеристикой функции $f(t)$ является её модуль непрерывности $\omega(f,\delta)_X$ в произвольном функциональном нормированном пространстве X. Если X — нормированное пространство заданных на всей оси (в частности, периодических) функций $f(t)$, то по определению полагаем для $h \geq 0$

$$\omega(f,h)_X := \{\|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_X : \ |u| \leq h\}. \tag{1}$$

Если же X — нормированное пространство функций $f(t)$, заданных на конечном отрезке $[a,b]$, то в равенстве (1) при каждом u, $|u| \leq h$ норма вычисляется по той части отрезка $[a,b]$, которая вместе с точкой t содержит также и точку $t+u$, и при этом $0 < h \leq b-a$.

В случае $X = L_p[a,b]$ функцию (1) называют интегральным модулем непрерывности.

Определим теперь понятие модуля непрерывности для функции двух переменных $f(x,y)$. Всюду далее: $C := C(Q)$ — линейное пространство непрерывных на квадрате $Q = \big\{(x,y) : \ 0 \leq x, y \leq 1\big\}$ функций $f(x,y)$ с обычной чебышевской нормой

$$\|f\|_C := \max\{|f(x,y)| : \ (x,y) \in Q\},$$

$C^{(r,s)} := C^{(r,s)}(Q)$ — множество функций $f(x,y) \in C(Q)$, имеющих в области Q непрерывные частные производные

$$f^{(i,j)}(x,y) := \partial^{i+j} f / \partial x^i \partial y^j, \quad i \leq r, j \leq s, \ r,s \in \mathbb{Z}_+, \ f^{(0,0)} = f.$$

Специфика двумерного случая позволяет функции $f \in C(Q)$ сопоставить различные модули непрерывности. Так, например, равенством

$$\omega(f;h,\eta) := \sup\{|f(x',y') - f(x'',y'')| : \ |x'-x''| \leq h, \ |y'-y''| \leq \eta\}, \tag{2}$$

где (x',y'), $(x'',y'') \in Q$, определяют *полный модуль непрерывности*, а соотношениями

$$\omega(f;h,0) := \sup\{|f(x',y) - f(x'',y)| : \ |x'-x''| \leq \delta, \ 0 \leq y \leq 1\}, \tag{3}$$

$$\omega(f;0,\eta) := \sup\{|f(x,y') - f(x,y'')|:\ |y'-y''| \le \eta,\ 0 \le x \le 1\} \tag{4}$$

определяют *частные модули непрерывности*, которые характеризуют изменение функции $f(x,y)$ вдоль каждой переменной. Известно[7], что функция (2) обладает всеми характеристическими свойствами, которые присущи одномерным модулям непрерывности.

Модулем непрерывности функции $f \in C(Q)$ также называют функцию

$$\omega_*(f;h,\eta) := \sup\big\{|f(x',y') - f(x'',y') - f(x',y'') + f(x'',y'')|:$$
$$|x'-x''| \le h,\ |y'-y''| \le \eta,\ x',x'' \in [0,1],\ y',y'' \in [0,1]\big\}. \tag{5}$$

Введём определения классов функций, рассматриваемых в дальнейшем.

Обозначим через $W^{(r,s)}H^{\omega} := W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$ $(r,s \in \mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H^{\omega} = H^{\omega})$ — класс функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, таких, у которых в области Q существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'') \in Q$ удовлетворяющая условию

$$|f^{(r,s)}(x',y') - f^{(r,s)}(x'',y'')| \le \omega(|x'-x''|,|y'-y''|), \tag{6}$$

где $\omega(t,\tau)$ — заданный двумерный полный модуль непрерывности.

Через $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2} := W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $(r,s \in \mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H^{\omega_1,\omega_2} = H^{\omega_1,\omega_2})$ обозначим класс таких функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$ для любых двух точек $(x',y') \in Q$, $(x'',y'') \in Q$, удовлетворяющих неравенству

$$|f^{(r,s)}(x',y') - f^{(r,s)}(x'',y'')| \le \omega_1(|x'-x''|) + \omega_2(|y'-y''|). \tag{7}$$

Аналогичным образом определим класс $W^{(r,s)}H^{\omega}_{\rho_p}$ функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая ограничению

$$|f^{(r,s)}(M') - f^{(r,s)}(M'')| \le \omega[\rho_p(M',M'')], \quad 1 \le p \le \infty, \tag{8}$$

где

$$\rho_p(M',M'') = \begin{cases} \sqrt[p]{|x'-x''|^p + |y'-y''|^p}, & \text{если } \ 1 \le p < \infty, \\ \max\big\{|x'-x''|,|y'-y''|\,\big\}, & \text{если } \ p = \infty, \end{cases}$$

— l_p – расстояние $(1 \le p \le \infty)$ между двумя произвольными точками $M' := M(x',y')$, $M'' := M(x'',y'')$, принадлежащими Q, а $\omega(t)$ — заданный

[7] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения // М. – 1984. – 352 с.

и определённый для $0 \le t \le \sqrt[p]{2}$ $(1 \le p \le \infty)$ модуль непрерывности. Параллельно введём класс $W^{(r,s)}H^{\omega_*}$ функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая условию

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y')-f^{(r,s)}(x',y'')+f^{(r,s)}(x'',y'')\right| \le \omega_*\big(|x'-x''|,|y'-y''|\big),$$

где $\omega_*(t,\tau)$ — заданный двумерный модуль непрерывности типа (5).

Вышеприведённые классы функций можно задавать посредством нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^2$. Пусть, например, ω — произвольный модуль непрерывности, а $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^2$, и пусть $r,s \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Определим класс $W^{(r,s)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ функций $f(x,y) \in C^{(r,s)}(Q)$, таких, для которых

$$\left|f^{(r,s)}(M')-f^{(r,s)}(M'')\right| \le \omega\big(\|M'-M''\|\big), \quad M',M'' \in Q.$$

При этом полагаем $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q) := W^{(0,0)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$. Как и в большинстве случаев, рассмотрим обычную l_p-норму, которую определим равенством

$$\big\|(x,y)\big\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{|x|^p+|y|^p}, & \text{если } \ 1 \le p < \infty, \\ \max\big\{|x|,|y|\,\big\}, & \text{если } \ p=\infty. \end{cases} \tag{9}$$

Соответствующие классы обозначим $W^{(r,s)}H^{\omega}_p(Q)$ и $H^{\omega}_p(Q)$ при $1 \le p \le \infty$.

Приводим определения многогранных функций. Фиксируем два разбиения отрезка $[0,1]$:

$$\Delta_m : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1,$$
$$\Delta_n : 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < x_n = 1,$$

которыми задаются решётка разбиения $\Delta_{m,n} := \Delta_m \times \Delta_n$ единичного квадрата Q на ячейки

$$Q_{k,i} := [x_{k-1},x_k]\times[y_{i-1},y_i], \quad (k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n}).$$

Точки $M_{k,i} := (x_k,y_i)$, $k=\overline{0,m}$; $i=\overline{0,n}$, называются узлами разбиения квадрата Q. Всюду далее полагаем

$$h_k := x_k - x_{k-1},\ k=\overline{1,m};\ \eta_i := y_i - y_{i-1},\ i=\overline{1,n},$$
$$\|\Delta_m\| := \max\big\{h_k :\ k=\overline{1,m}\big\}, \quad \|\Delta_n\| := \max\big\{\eta_i :\ i=\overline{1,n}\big\}.$$

Равномерное разбиение квадрата Q обозначим через

$$\overline{\Delta}_{m,n} := \big\{(k/m,i/n) :\ k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n}\big\}.$$

Определение 1.1.1.[1] *Для заданной функции $f \in C(Q)$ многогранной функцией, вписанной в $f(x,y)$ в узлах $M_{k,i}$, называется функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$, для которой:*

1) $\mathscr{L}_{m,n}(f;M_{k,i}) = f(M_{k,i}),\ k=\overline{0,m};\ i=\overline{0,n};$

2) каждый прямоугольник $Q_{k,i}$ можно разделить диагональю на два треугольника, внутри каждого из которых $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ совпадает с некоторой плоскостью.

Функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является непрерывным линейным сплайном, интерполирующим $f(x,y)$ в узлах

$$M_{k,i} = (x_k, y_i)\ (k=\overline{0,m};\ i=\overline{0,n}).$$

Ясно, что для любой функции $f(x,y) \in C(Q)$ многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) \in C(Q)$ определяется при фиксированных узлах, вообще говоря, неоднозначно. Для $(x,y) \in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n})$ полагаем

$$H_{0,k}(x) := \frac{x_k - x}{h_k}, \quad H_{1,k}(x) := \frac{x - x_{k-1}}{h_k}, \quad H_{0,k}(x) + H_{1,k}(x) = 1;$$

$$N_{0,i}(y) := \frac{y_i - y}{\eta_i}, \quad N_{1,i}(y) := \frac{y - y_{i-1}}{\eta_i}, \quad N_{0,i}(y) + N_{1,i}(y) = 1.$$

Если соединить точки $M_{k-1,i-1} := (x_{k-1}, y_{i-1})$ и $M_{k,i} := (x_k, y_i)$ диагональю $\overline{M_{k-1,i-1}M}_{k,i}$, то прямоугольник $Q_{k,i}$ разделится на два треугольника

$$T^{(1)}_{k,i} := \{(x,y):\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} + H_{1,k}(x)\eta_i \le y \le y_i\},$$

$$T^{(2)}_{k,i} := \{(x,y):\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} \le y \le y_{i-1} + H_{1,k}(x)\eta_i\}.$$

В этом случае функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ непрерывная и может быть задана формулой[8]

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) := \begin{cases} N_{0,i}(y)f(x_{k-1},y_{i-1}) + \big(N_{1,i}(y) - H_{1,k}(x)\big)f(x_{k-1},y_i) + \\ +H_{1,k}(x)f(x_k,y_i),\ (x,y) \in T^{(1)}_{k,i}, \\ H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_{i-1}) + \big(H_{1,k}(x) - N_{1,i}(y)\big)f(x_k,y_{i-1}) + \\ +N_{1,i}(y)f(x_k,y_i),\ (x,y) \in T^{(2)}_{k,i}. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогичным образом, если соединить точки $M_{k-1,i} := (x_{k-1,i}, y_i)$ и $M_{k,i-1} := (x_k, y_{i-1})$ диагональю $\overline{M_{k-1,i}M}_{k,i-1}$, то получим следующие два треугольника

$$T^{(3)}_{k,i} := \{(x,y):\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} \le y \le y_i - H_{1,k}(x)\eta_i\},$$

$$T^{(4)}_{k,i} := \{(x,y):\ x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_i - H_{1,k}(x)\eta_i \le y \le y_i\}.$$

[8] *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations: Structure for Algorithms and Applications // Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2010.

Многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ в этом случае задаётся выражением

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y):=\begin{cases}\big(H_{0,k}(x)-N_{1,i}(y)\big)f(x_{k-1},y_{i-1})+N_{1,i}(y)f(x_{k-1},y_i)+\\+H_{1,k}(x)f(x_k,y_{i-1}),\ (x,y)\in T_{k,i}^{(3)},\\H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_i)+\big(H_{1,k}(x)-N_{0,i}(y)\big)f(x_k,y_i)+\\+N_{0,i}(y)f(x_k,y_{i-1}),\ (x,y)\in T_{k,i}^{(4)}.\end{cases}\tag{11}$$

Из представлений (10) и (11) сразу видно, что в каждом из треугольников $T_{k,i}^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,3,4)$ многогранная функция имеет вид

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y):=a_{k,i}^{(\nu)}+b_{k,i}^{(\nu)}x+c_{k,i}^{(\nu)}y\ \ (\nu=1,2,3,4),$$

где $a_{k,i}^{(\nu)}\,b_{k,i}^{(\nu)}$, $c_{k,i}^{(\nu)}$ — некоторые действительные числа. Ясно, что значения $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ в фиксированной точке $(x_0,y_0)\in Q$ определяются значениями $f(x,y)$ в вершинах соответствующего треугольника, поэтому погрешность можно оценить локально на каждом из таких треугольников.

Приведём известные точные оценки и сформулируем общую задачу приближения функции f из класса $H_{\|\cdot\|}^{\omega}(Q)$ и её производных $f^{(l,j)}$ функций $f\in W^{(l,j)}H_{\|\cdot\|}^{\omega}(Q)$, $((l,j)=(1,0)$ или $(0,1))$ вписанными в них многогранными функциями и их соответствующими производными. Заметим, что поскольку $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является линейной функцией по обеим переменным x и y, то её производные выше первого порядка обращаются в нуль, а в соответствии с этим приближение производных выше первого порядка функции f соответствующими производными многогранными функциями не имеет смысла.

Для фиксированного разбиения $\Delta_{m,n}$ квадрата Q пусть

$$e^{(0,0)}(f;x,y,\Delta_{m,n})=f(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$$

в каждой точке $(x,y)\in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$. Полагаем

$$e^{(0,0)}(f;\Delta_{m,n}):=\|f-\mathscr{L}_{m,n}(f)\|_{C(Q)}.$$

Заметим, что из наших результатов будет следовать, что значение этой величины не зависит от выбора вписанной в функцию многогранной функции $\mathscr{L}_{m,n}(f)$. Далее, положим

$$e^{(l,j)}(f;\Delta_{m,n}):=\sup\{|f^{(l,j)}(x,y)-\mathscr{L}_{m,n}^{(l,j)}(f;x,y)|:\ (x,y)\in Q_0\},$$

где $(l,j)=(1,0)$ или $(0,1)$ и Q_0 есть подмножество из Q, где $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ является дифференцируемой функцией, то есть мы исключаем из Q стороны прямоугольников $Q_{k,i}$ вместе с диагоналями триангуляции, где частные производные $\mathscr{L}_{m,n}^{(1,0)}(f;x,y)$ и $\mathscr{L}_{m,n}^{(0,1)}(f;x,y)$ претерпевают разрыв первого порядка. После этого мы определим для $(l,j)=(0,0)$, $(1,0)$ или $(0,1)$ и фиксированного разбиения $\Delta_{m,n}$ величину

$$E^{(l,j)}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q);\Delta_{m,n}):=\sup\left\{e^{(l,j)}(f;\Delta_{m,n}):\ f\in W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)\right\}$$

и для фиксированных $m,n\in\mathbb{N}$ положим

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(l,j)}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)):=\inf_{\Delta_{m,n}}E^{(l,j)}(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)).$$

Сформулированную задачу, когда решетка узлов равномерная, то есть когда

$$M_{k,i}:=\big(k/m,i/n\big)\quad\big(k=\overline{0,m};\ i=\overline{1,n}\big)$$

и $l=j=0$, для некоторых классов функций изучал В.Ф.Сторчай[1].

Следует также отметить близкие к теме исследований работы В.Ф. Бабенко[9], В.Ф.Бабенко и А.А. Лигуна[10], В.Ф.Бабенко и Т.Ю. Лескевич[11], в которых получены точные результаты для некоторых классов функций.

Во втором параграфе первой главы решается задача о нахождении точных оценок функций классов $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1<p\le 3)$, $Q:=\{(x,y):0\le x,y\le 1\}$ многогранными функциями.

Сначала мы изучим приближение функции $f\in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ в одном треугольнике линейной функцией, интерполирующей функцию f в вершинах треугольника. Ради простоты рассмотрим замкнутый треугольник T с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Ясно, что оценку погрешности приближения для произвольного треугольника затем можно получить линейной заменой переменных.

Обозначим через $\mathscr{L}(f;x,y)$ линейную функцию, интерполирующую функцию $f(x,y)$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Справедлива следующая

Теорема 1.2.1 *Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^2$ и пусть ω — произвольный модуль непрерывности. Для каждой функции $f\in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$ имеет место неравенство*

$$\max_{(x,y)\in T}|f(x,y)-\mathscr{L}(f;x,y)|\le$$

$$\le\max_{(x,y)\in T}\big\{(1-x-y)\omega(\|(x,y)\|)+x\omega(\|(x,y)-(1,0)\|)+$$

[9] *Бабенко В.Ф.* Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными // Матем. заметки. – 1978. – Т.24, №1. – С.43–52.

[10] *Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Об интерполяции многогранными функциями // Матем. заметки. – 1975. – Т.18, №6. – С.803–814.

[11] *Бабенко В.Ф. Лескевич Т.Ю.* Погрешность при интерполяции некоторых классов функций многих переменных многогранными функциями и полилинейными сплайнами // Вестник Днипропетровского университета. Серия. матем. – 2012. – Т.20. – С. 41–48.

$$+y\omega(\|(x,y)-(0,1)\|)\bigr\}. \tag{12}$$

Оценка (12) *на классе* $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$ *точная в том смысле, что существует функция* $F \in H^{\omega}_{\|\cdot\|}(T)$*, для которой* (12) *обращается в равенство.*

Оценка (12) далее специализируется для случая, когда модуль непрерывности ω является выпуклой вверх функцией, а норма $\|\cdot\|$ является l_p-нормой для $1 \le p \le 3$. Сформулируем одно вспомогательное утверждение, которое используется в дальнейшем.

Лемма 1.2.2. *Пусть* $1 \le p \le 3$. *Для функции* $\varphi(x) = x^p(1-x)+x(1-x)^p$ *имеем*

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p. \tag{13}$$

При $p > 3$ *точка* $x = 1/2$ *является точкой локального минимума функции* $\varphi(x)$ *и, следовательно,*

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

Сформулируем специальный случай теоремы 1.2.1 для модуля непрерывности ω и l_p-нормы, при $1 \le p \le 3$.

Теорема 1.2.2. *Пусть* ω *— выпуклый модуль непрерывности и* $1 \le p \le 3$. *Для каждой функции* $f(x,y) \in H^{\omega}_{p}(T)$ *справедливо неравенство*

$$\max_{(x,y)\in T} |f(x,y) - \mathscr{L}(f;x,y)| \le \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{2}\right). \tag{14}$$

Оценка (14) *точна на классе* $H^{\omega}_{p}(T)$ *в том смысле, что существует функция* $f_0(x,y) \in H^{\omega}_{p}(T)$*, для которой* (14) *обращается в равенство. Неравенство* (14) *при* $p > 3$ *в общем случае не имеет место.*

Из этой теоремы получаем

Следствие 1.2.1. *Пусть* ω *— выпуклый модуль непрерывности и* $1 \le p \le 3$. *Пусть* $f \in H^{\omega}_{p}(Q)$ *и* $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ *есть вписанная многогранная функция в* f. *Для каждого треугольника* $T^{(\nu)}_{k,i}$ ($k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$) *и* $\nu \in \{1,2,3,4\}$*, на котором* $\mathscr{L}_{m,n}(f)$ *является линейной функцией, имеем*

$$\max_{(x,y)\in T^{(\nu)}_{k,i}} |f(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)| \le \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{h_k^p + \eta_i^p}\right).$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* ω *является выпуклым вверх модулем непрерывности и* $1 \le p \le 3$. *Для произвольного фиксированного разбиения* $\Delta_{m,n}$ *имеет место равенство*

$$E^{(0,0)}\bigl(H^{\omega}_{p}(Q,\Delta_{m,n})\bigr) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\|\Delta_m\|^p + \|\Delta_n\|^p}\right). \tag{15}$$

Среди всех разбиений $\Delta_{m,n}$ с фиксированными m и n правая часть (15) *принимает минимальное значение на равномерном разбиении $\overline{\Delta}_{m,n}$, то есть*

$$\mathscr{E}^{(0,0)}_{m,n}\big(H^{\omega}_{p}(Q\big) = \min_{\Delta_{m,n}} E^{(0,0)}\big(H^{\omega}_{p}(Q,\Delta_{m,n})\big) =$$

$$= E^{(0,0)}\big(H^{\omega}_{p}(Q,\overline{\Delta}_{m,n})\big) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}\right)^{p}+\left(\frac{1}{n}\right)^{p}}\right). \tag{16}$$

Этот результат при $p > 3$ в общем случае не имеет места.

Следует отметить, что полученные нами оценки не являются единственным случаем, когда результаты, верные при $1 \le p \le 3$, не имеют места при $p > 3$. Так, например, изучая приближение функций одной переменной из класса $H^{\omega}[0,1]$ кусочно-постоянными функциями, Н.П.Корнейчук[7] получил точную оценку погрешности при $0 < p \le 3$, которая при $p > 3$ не имеет места. Также отметим, что равенство (16) при $p = 2$ было получено В.Ф.Сторчаем[2].

Третий параграф первой главы посвящен нахождению оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f;x,y)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \le l+j \le 1)$ многогранной функции на классе $W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|_p}(Q)$ $(l,j = 0,1;\ 0 \le l+j \le 1)$.

В этом параграфе мы изучаем вопрос приближения частных производных первого порядка $f^{(l,j)}(x,y)$, $(l,j = 0,1;\ 0 \le l+j \le 1)$ функций $f(x,y) \in W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|_p}(Q)$ соответствующими производными вписанной в них многогранной функции. Мы получим оценки сверху для выражений

$$E^{(l,j)}\big(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|_p}(Q),\Delta_{m,n}\big) \quad \text{и} \quad \mathscr{E}^{(l,j)}_{m,n}\big(W^{(l,j)}H^{\omega}_{\|\cdot\|_p}(Q)\big).$$

Не умаляя общности, мы рассмотрим сформулированную задачу относительно переменной x, то есть когда $(l,j) = (1,0)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть ω произвольный модуль непрерывности. Для всех $m,n \in \mathbb{N}$ и всех $1 \le p \le \infty$ и произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ справедлива оценка*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega}_{p}(Q),\Delta_{m,n}\big) \le \frac{1}{\|\Delta_m\|}\int_{0}^{\|\Delta_m\|}\omega\big(\sqrt[p]{t^p+\|\Delta_n\|^p}\big)dt. \tag{17}$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\big(W^{(1,0)}H^{\omega}_{p}(Q)\big) \le m\int_{0}^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\frac{1}{n^p}}\right)dt. \tag{18}$$

Используя норму (9) получаем формулы (17) и (18). Из теоремы 1.3.1 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы* 1.3.1 *при* $p = 1$ *и* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $K > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ *вытекают неравенства*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^{\alpha}}(Q), \Delta_{m,n}\big) \leq \frac{K}{\|\Delta_m\|} \cdot \frac{\big(\|\Delta_m\| + \|\Delta_n\|\big)^{\alpha+1} - \big(\|\Delta_n\|\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^{\alpha}}(Q)\big) \leq \frac{mK}{\alpha+1}\left\{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\right\}.$$

Если $\alpha = 1$, *то из последних соотношений следует, что*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^{\alpha}}(Q), \Delta_{m,n}\big) \leq \frac{K}{2}\big(\|\Delta_m\| + 2\|\Delta_n\|\big),$$

$$\mathscr{E}_{m,n}^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H_1^{Kt^{\alpha}}(Q)\big) \leq \frac{K}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right).$$

Замечание. В завершении этого параграфа отметим, что приведённое в диссертации доказательство теоремы 1.3.1 верно для любой нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$, обладающей тем свойством, что $\|(t,y)\|$ является монотонно возрастающей функцией по t при фиксированной y, а также что $\|(t,x)\| = \|(-t,x)\|$.

Для таких норм утверждение теоремы всегда имеет место. В то же время существуют нормы, для которых указанные свойства не имеют места. В качестве примера рассмотрим норму

$$\|(x,y)\| := \sqrt{(x+y)^2 + 10(x-y)^2}.$$

Простое вычисление показывает, что для этой нормы $\|(0,1)\| > \big\|(1/2,1)\big\|$, а также $\big\|(-1/2,1)\big\| \neq \big\|(1/2,1)\big\|$.

В четвёртом параграфе первой главы найдены оценки для приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функций классов $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$, $((r,s) = (0,1); (r,s) = (1,0))$ соответствующими производными $\mathscr{L}_{m,n}^{(r,s)}(f;x,y)$ многогранной функции. Найдены верхние грани оценки погрешности выражений, аналогичных (17) и (18), для классов функций $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}$ при $(r,s) = (1,0)$ и $(r,s) = (0,1)$.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(\tau)$ — *произвольные модули непрерывности. Для всех* $m, n \in \mathbb{N}$ *и произвольного разбиения* $\Delta_{m,n}$ *справедлива оценка*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q), \Delta_{m,n}\big) \leq \frac{1}{\|\Delta_m\|}\int_0^{\|\Delta_m\|}\omega_1(t)dt + \omega_2\big(\|\Delta_n\|\big),$$

$$E^{(1,0)}\big(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q),\Delta_{m,n}\big)\le\omega_1\big(\|\Delta_n\|\big)+\frac{1}{\|\Delta_n\|}\int\limits_0^{\|\Delta_n\|}\omega_2(t)dt.$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\big(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big)\le m\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathscr{E}^{(0,1)}_{m,n}\big(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big)\le\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+n\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau.$$

Метод доказательства теоремы 1.2.3 и теоремы 1.4.1 обеспечивает возможность получить аналогичные утверждения для класса функций $W^{(r,s)}H^{\omega}$.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\omega(t,\tau)$ — произвольный полный модуль непрерывности. Тогда для произвольных $m,n\in\mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ имеют место неравенства*

$$E^{(1,0)}\big(W^{(1,0)}H^{\omega},\Delta_{m,n}\big)\le\frac{1}{\|\Delta_m\|}\int\limits_0^{\|\Delta_m\|}\omega(t,\|\Delta_n\|)dt,$$

$$E^{(1,0)}\big(W^{(0,1)}H^{\omega},\Delta_{m,n}\big)\le\frac{1}{\|\Delta_n\|}\int\limits_0^{\|\Delta_n\|}\omega(\|\Delta_n\|,\tau)d\tau.$$

Более того,

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\big(W^{(0,1)}H^{\omega}\big)\le m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(t,\frac{1}{n}\right)dt,$$

$$\mathscr{E}^{(0,1)}_{m,n}\big(W^{(0,1)}H^{\omega}\big)\le n\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\frac{1}{m},\tau\right)d\tau.$$

Вторая глава диссертации посвящена получению точных оценок приближения билинейными (дважды линейными) сплайнами на классах функций.

В первом параграфе второй главы изложены предварительные факты, определение сплайнов и классы функций. В задачах теории приближения сплайны (кусочно-полиномиальные функции) появились совсем недавно с опубликованием статьи И.Дж. Шёнберга[12]. После 1946 г. Шёнберг и некото-

[12] *Schoenberg I.J.* Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math., 4 (1946), p.45–99, 112–141

рые его ученики продолжили изучение сплайнов и моносплайнов. В частности Шёнберг и Уитни[13,14] впервые доказали существование и единственность некоторых интерполяционных сплайнов. Для развития современной теории сплайнов весьма важную роль сыграла работа Холлидея[15]. Сплайны вошли в теорию приближения очень стремительно и в дальнейшем сыграли основную роль при решении экстремальных задач теории аппроксимации функций.

В настоящее время теория сплайнов и сплайн-аппроксимации функций представляет собой весьма важный раздел теории приближения функций. Во многих задачах сплайны являются более естественным аппаратом приближения, чем многочлены. К таким задачам относятся практически важные задачи интерполирования и сглаживания функций, численного дифференцирования, численного интегрирования функций. В теоретических исследованиях сплайны появляются как решение различного рода вариационных задач теории приближения, в частности, задачи о поперечниках. Приближения сплайнами, как отмечалось выше, естественно возникают также при исследовании квадратурных формул. Как промежуточное приближение они появились в глубоких исследованиях Н.П.Корнейчука[16] о приближении дифференцируемых функций. Отметим также работы В.М.Тихомирова[17] по поперечникам функциональных классов и Ю.Н.Субботина[18] по функциональной интерполяции, в которых естественным образом появляются полиномиальные сплайны.

Во втором параграфе второй главы найдены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$, где $\omega_*(t,\tau)$ определено равенством (5).
Приводим определение *билинейных интерполяционных сплайнов:* зададим в области $Q := \{(t,\tau):\ 0 \le t,\tau \le 1\}$ сетку узлов $\Delta_{mn} := \Delta_m^t \times \Delta_n^\tau$, где

$$\Delta_m^t : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1,$$
$$\Delta_n^\tau : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1.$$

[13] *Schoenberg I.J., Whitney A.* Sur la positivité des déterminants de translations de fonctions de fréquence de Pólya a vec une application au probléme d'interpolation par les fonctions «spline» // Compt. Rend., 228. 1949. – P. 1996–1998.

[14] *Schoenberg I.J., Whitney A.* On Polya frequency functions. III // Trans. Am. Math. Soc., 1953. 74. – P. 246–259.

[15] *Holladay J.C.* Smoothes curve approximation // Math. Tables Aids Comput., 1957. 11. – P. 233–243.

[16] *Корнейчук Н.П.* О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций // ДАН СССР. – 1961. – Т.141. – С. 304–307.

[17] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближения // Успехи матем. наук. – 1960. Т.15, №3. – С. 81–120.

[18] *Субботин Ю.Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. – 1965. – Т.78. – С. 24–42.

Пусть $h_k = t_k - t_{k-1},\ k = \overline{1,m};\ \eta_l = \tau_l - \tau_{l-1},\ l = \overline{1,n},$

$$\|\Delta_m\| = \max_{1\le k\le m} h_k, \quad \|\Delta_n\| = \max_{1\le l\le n} \eta_l.$$

В случае, когда

$$\overline{\Delta}_m^t:\ \bar{t}_k = k/m,\ k = \overline{0,m}; \quad \overline{\Delta}_n^\tau:\ \overline{\tau}_k = l/n,\ l = \overline{0,n},$$

то разбиение $\overline{\Delta}_{mn} := \left\{(\bar{t}_k, \overline{\tau}_l)\right\}_{k,l=0}^{m,n} = \left\{(k/m, l/n)\right\}_{k,l=0}^{m,n}$ — равномерное разбиение области Q. Поставим в соответствие каждой функции $f(t,\tau) \in C(Q)$ функцию $S_{1,1}(f;t,\tau) \in C(Q)$, однозначно определённую условиями:

а) на каждой ячейке $Q_{k,l} := \left\{t_{k-1} \le t \le t_k,\ \tau_{l-1} \le \tau \le \tau_l\right\}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$ функция $S_{1,1}(f;t,\tau)$ является алгебраическим многочленом первой степени по t и по τ, то есть $S_{1,1}(f;t,\tau) = a_{kl} + b_{kl}t + c_{kl}\tau + d_{kl}t\tau$, где a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, $d_{kl} \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$;

б) $S_{1,1}(f;t_k,\tau_l) = f(t_k,\tau_l),\ (k = \overline{0,m};\ l = \overline{0,n})$.

Функции $S_{1,1}(f;t,\tau)$ называют *интерполяционными сплайнами первой степени двух переменных или билинейными интерполяционными сплайнами.* Очевидно, что для $(t,\tau) \in Q_{k,l}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$ имеет место представление

$$\begin{gathered} S_{1,1}(f;t,\tau) = \\ = f(t_{k-1},\tau_{l-1})H_{0,k}(t)N_{0,l}(\tau) + f(t_k,\tau_{l-1})H_{1,k}(t)N_{0,l}(\tau) + \\ + f(t_{k-1},\tau_l)H_{0,k}(t)N_{1,l}(\tau) + f(t_k,\tau_l)H_{1,k}(t)N_{1,l}(\tau) = \\ = \sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} f(t_{k+p-1},\tau_{l+q-1})H_{p,k}(t)N_{q,l}(\tau), \end{gathered}$$

где

$$H_{0,k}(t) = \frac{t_k - t}{h_k}, \quad H_{1,k} = \frac{t - t_{k-1}}{h_k}, \quad \sum_{p=0}^{1} H_{p,k}(t) \equiv 1,$$

$$N_{0,l}(\tau) = \frac{\tau_l - \tau}{\eta_l}, \quad N_{1,l} = \frac{\tau - \tau_{l-1}}{\eta_l}, \quad \sum_{q=0}^{1} N_{q,l}(\tau) \equiv 1.$$

Отметим, что некоторые точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классах функций найдены в работах В.Ф. Сторчая[1,2], С.Б. Вакарчука[3], С.Б. Вакарчука и К.Ю. Мыскина[4], М.Ш. Шабозова[5,6], М.Ш. Шабозова и У.Н. Зеваршоева[19,20].

[19] *Шабозов М.Ш., Зеваршоев У.Н.* Об одновременном приближении функций двух переменных и их производных билинейными интерполяционными сплайнами // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2018. – Т.18, вып.2. – С.60–72.

[20] *Shabozov M.Sh., Zevarshoev U.N.* Simultaneous Approximation of Functions of two Variables and Their Derivatives by Bilinear Interpolation Splines // Journal of Mathematical Sciences. New York. – 2020. – V.246, No 2. – P.800–812.

Целью второй главы данной работы является получение результатов окончательного характера, связанных с точными оценками погрешности билинейными сплайнами на классах функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Отметим, что порядковые оценки погрешности для норм разности

$$\|e(f;t,\tau)\|_{C(Q)} := \|f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)\|_{C(Q)}$$

приведены в монографии[21]. Для $(t,\tau) \in Q_{k,l}$, положим

$$e(f;t,\tau) := f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau). \tag{19}$$

Если $\mathfrak{M}$ есть одно из вышеприведённых классов функций, то требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M}) := \mathcal{E}(\mathfrak{M};\overline{\Delta}_{m,n}) = \sup\{\|e(f;\cdot,\cdot)\|_{C(Q)} : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Отметим, что В.Ф. Сторчай[1] доказал равенство

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) = \omega_1\big(1/2m\big) + \omega_2\big(1/(2n)\big), \tag{20}$$

а в работе М.Ш. Шабозова[6] доказано

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\big) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau. \tag{21}$$

Во второй главе диссертации требуется найти точное значение следующей величины

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big) := \mathscr{E}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q),\overline{\Delta}_{m,n}\big) :=$$
$$= \sup\big\{\|e(f;\cdot,\cdot)\|_{C(Q)}\colon\ f \in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big\}. \tag{22}$$

Для нахождения величины (22) предварительно доказана, следующая лемма, позволяющая получить оценку погрешности (19) в каждой точке $(t,\tau) \in Q$, для любой функции $f \in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Лемма 2.2.1. *Пусть функция $f(t,\tau) \in C(G)$, $G := \{a \le t \le b; c \le \tau \le d\}$, и пусть для произвольной точки $(x_0,y_0) \in G$ выполняются равенства*

$$\int\limits_a^b f(t,y_0)dt = 0,\ \ c \le y_0 \le d, \quad \int\limits_c^d f(x_0,\tau)d\tau = 0,\ \ a \le x_0 \le b. \tag{23}$$

[21] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций // М.:Наука. – 1980. – 352 с.

Тогда для функции

$$F(t,\tau)=\int\limits_a^t\int\limits_c^\tau f(u,v)dvdu,\quad (t,\tau)\in G,$$

справедливо неулучшаемое неравенство

$$\big|F(t,\tau)\big|\le\frac{(b-t)(t-a)(d-\tau)(\tau-c)}{(b-a)^2(d-c)^2}\int\limits_0^{b-a}\int\limits_0^{d-c}\omega_*(f;t,\tau)d\tau dt.$$

Из леммы 2.2.1 вытекает

Лемма 2.2.2. *Пусть $f(t,\tau)\in C^{(1,1)}(G)$ и $S_{1,1}(f;t,\tau)$ — билинейный сплайн, интерполирующий функцию $f(t,\tau)$ в узлах (t_k,τ_l) произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ квадрата Q на частные прямоугольники $Q_{k,l}$ ($k=\overline{1,m}$; $l=\overline{1,n}$). Тогда в каждой точке $f(t,\tau)\in Q_{k,l}$ выполняется неравенство*

$$\big|e(f;t,\tau)\big|=\big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\big|\le$$

$$\le h_k^{-2}\eta_l^{-2}\cdot(t_k-t)(t-t_{k-1})(\tau_l-\tau)(\tau-\tau_{l-1})\int\limits_0^{t_k-t_{k-1}}\int\limits_0^{\tau_l-\tau_{l-1}}\omega_*\big(f^{(1,1)},Q_{k,l},t,\tau\big)d\tau dt. \quad (24)$$

Если разбиение $\Delta_{m,n}$ квадрата Q равномерное, $\Delta_{m,n}=\overline{\Delta}_{m,n}$, то из (24) для произвольной функции $f(t,\tau)\in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(G)$ в точке

$$(t,\tau)\in\overline{Q}_{k,l}:=\big\{(t,\tau):\ \overline{t}_{k-1}\le t\le\overline{t}_k,\ \overline{\tau}_{l-1}\le\tau\le\overline{\tau}_l\big\}$$

справедлива оценка

$$\big|e(f;t,\tau)\big|=\big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\big|\le$$

$$\le m^2n^2(\overline{t}_k-t)(t-\overline{t}_{k-1})\cdot(\overline{\tau}_l-\tau)(\tau-\overline{\tau}_{l-1})\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega_*\big(t,\tau\big)d\tau dt. \quad (25)$$

Лемма 2.2.2 позволяет доказать основной результат второй главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\omega_*(t,\tau)$ — произвольный выпуклый вверх по каждой переменной модуль непрерывности. Тогда для любых $m,n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\big)=\frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega_*(t,\tau)d\tau dt.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *при*

$$\omega_*\big(t,\tau\big) = 2\min\big\{\omega_1(t), \omega_2(\tau)\big\},$$

где $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(\tau)$ *— заданные выпуклые вверх одномерные модули непрерывности, имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{m,n}\big(W^{(1,1)}H^{\max\{\omega_1,\omega_2\}}\big) = \sup\big\{\|f - S_{1,1}(f)\|_{C(Q)} : f \in W^{(1,1)}H^{\min\{\omega_1,\omega_2\}}\big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{8}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\min\big\{\omega_1(t), \omega_2(\tau)\big\}d\tau dt.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- вычислены точные оценки приближения многогранными функциями на классах $H^{\omega}_{\|\cdot\|}(Q)$ и $H^{\omega}_{p}(Q)$ $(1 \leq p \leq 3)$, $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$;
- получены оценки приближения частных производных $f^{(l,j)}(x,y)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(l,j)}_{m,n}(f; x, y)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \leq l+j \leq 1)$ многогранной функции на классах $W^{(l,j)}H^{\omega}_{p}(Q)$ $(l, j = 0, 1;\ 0 \leq l + j \leq 1)$;
- найдены оценки приближения частных производных $f^{(r,s)}(x,y)$ функций классов $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $((r,s) = (0,1);\ (r,s) = (1,0))$ и $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$ соответствующими частными производными $\mathscr{L}^{(r,s)}_{m,n}(f; x, y)$ многогранной функции;
- вычислены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты о приближении многогранными функциями и билинейными сплайн-функциями имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы могут найти применение при нахождении точных оценок погрешности приближений многогранными функциями и сплайн-функциями в многомерном случае на различных классах функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК Российской Федерации:

[1] *Шабозов М.Ш., Мехмонзода С.Н.* Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций // Матем. заметки. – 2017. – Т.102, №3. – С. 462–469.

[2] *Berdysheva E.E., Mehmonzoda S.N., Shabozov M.Sh.* Approximation of functions of several variables by continuous linear splines on rectilinear grids // Jaen Journal on Approximation. – 2021. – V.12, №1-2. – P. 1–23.

[3] *Шабозов М.Ш., Мехмонзода С.Н.* Точные оценки совместного приближения функций двух переменных и их производных многогранными функциями // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2015, №4(161). – С. 7–15.

[4] *Мехмонзода С.Н.* О приближении функций двух переменных многогранными функциями // ДАН РТ. – 2015. – Т.58, №10. – С. 867–872.

[5] *Мехмонзода С.Н.* Приближение непрерывных функций двух переменных φ-сплайнами в метрике C // ДАН РТ. – 2016. – Т.59, №1-2. – С. 22–27.

В других изданиях:

[6] *Мехмонзода С.Н.* Верхние грани одновременного приближения функций двух переменных и их производных многомерными функциями // Труды международной летней математической Школы – Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – 2016. – С. 173–176.

[7] *Мехмонзода С.Н.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями // Материалы международной научной конференции „*Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций*", посвященной 90-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.). – С. 101–104.

[8] *Бердышева Е.Е., Мехмонзода С.Н., Шабозов М.Ш.* Приближение функций многих переменных многогранными функциями на прямоугольной сетке // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 38–44.