

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
ТАДЖИКИСТАН  
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. САДРИДДИНА АЙНИ**

УДК 517.55

На правах рукописи



**НАДИРОВА МОХРУХСОР ИНОЯТУЛЛОЕВНА**

**СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА С  
НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертация на соискание ученой степени доктора философии  
(PhD), доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102 –  
Дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление)

ДУШАНБЕ-2025

Диссертация выполнена на кафедре математического анализа  
Таджикского государственного педагогического университета имени  
Садриддина Айни

- Научный руководитель:** **Усмонов Нурулло**  
доктор физико-математических  
наук, профессор
- Официальные оппоненты:** **Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич**  
доктор физико-математических наук,  
и.о. профессор кафедры математического  
анализа и дифференциальных уравнений  
Бохтарского государственного  
университета имени Н.Хусрава  
**Одинабеков Джасур Музофирович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры МЕН, филиала  
Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова в  
городе Душанбе.
- Оппонирующая организация:** Международный университет туризма и  
предпринимательства Таджикистана

Защита состоится 12.09.2025 года в 14:00 часов на заседании  
диссертационного совета 6D.KOA-011 на механико-математическом  
факультете Таджикского национального университета по адресу: 734025,  
г.Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной  
библиотеке Таджикского национального университета, на сайте  
<http://www.tnu.tj>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025г.

**Учёный секретарь диссертационного  
совета 6D.KOA-011, кандидат  
физико-математических наук**



**Гафоров А.Б.**

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Работа посвящена исследованию краевой задачи Римана с непрерывными коэффициентами, когда коэффициенты имеют нуль, полюс, нули и полюсы сопряжённого вида, а также, когда коэффициент имеет особенность модульного характера для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа.

**Степень научной разработанности изучаемой проблемы.** Основные работы, в этом направлении являются научные работы: И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова, и других авторов. Эти исследования являются решения задачи Римана в сингулярном случае для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Задачи о решениях эллиптических уравнений и задачи Римана с коэффициентом из класса Гёльдера и её сингулярные случаи были предметом исследований в научных трудах И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова и других авторов.

И.Н. Векуа исследовал обобщённые аналитические функции для следующей системы дифференциальных уравнений, вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

или в комплексном переменном:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W} + F, \quad (0.0.2)$$

где

$$W = u + iv, \quad \bar{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

и

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib), \quad F = \frac{1}{2}(f + ig).$$

В данной системе уравнений (0.0.1) И.Н. Векуа рассматривал краевую задачу типа Гильберта. И.Н. Векуа не исследовал задачу Римана, задача Римана для данной системы была исследована Л.Г.

Михайловым. Отметим, что коэффициент задачи Римана в работе Л.Г. Михайлова удовлетворял условию Гёльдера.

Также Л.Г. Михайловым была поставлена и исследована задача Римана-Газемана:

$$W^+(t)[\alpha(t)] = A(t)W^-(t) + c(t),$$

он исследовал для системы уравнений:

$$\partial_{\bar{z}}W = AW + B\bar{W}.$$

Для данной системы исследовал следующую граничную задачу:

$$W^+(t) = a(t)W^-(t) + b(t)\bar{W}^-(t) + c(t);$$

$$W^+(t) = a(t)\frac{\partial W^-(t)}{\partial t} + b(t)\frac{\partial \bar{W}^-(t)}{\partial t} + p(t)W^-(t) + q(t)\bar{W}^-(t) + c(t).$$

Далее, Н. Усмоновым и С. Шавкатзода были исследованы сингулярные случаи этих задач. Данная диссертация посвящена исследованию сингулярным случаям задачи Римана обобщённых систем уравнений Коши-Римана. Но коэффициент задачи Римана  $A(t)$ - непрерывная функция.

**Связь работы с научными программами (проектами), темами.** Тема настоящей диссертации связана с научным направлением темой кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни: «Исследования по краевым задачам теории аналитических функций в сингулярном случае».

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Цель исследования.** Целью диссертационной работы являются решение сингулярной краевой задачи Римана для эллиптического уравнения в случае, когда коэффициент задачи является непрерывной функцией:

- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов аналитического вида;
- когда коэффициент задачи Римана характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида;
- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью модульного порядка.

**Задачи исследования.** В соответствии с поставленной целью, исследуются ряд задач при условиях:

- В первом случае изучаются задачи Римана для эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , с непрерывными коэффициентами в условиях, когда коэффициент задачи характеризует собой нули и полюсы целого порядка, нули и полюсы сопряжённого вида, также, когда коэффициент задачи обладает особенностью модульного порядка.

- Затем, исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , когда коэффициент задачи Римана непрерывная функция и характеризует собой нули и полюсы аналитической структуры, нули и полюсы сопряжённо-аналитического вида, а также, когда коэффициент имеет особенность модульного характера.

- Далее исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

когда коэффициент задачи является непрерывная функция, и характеризуется особенностью, нулей и полюсов аналитического вида, сопряжённо-аналитического вида, а также дробного порядка.

**Объект исследования.** Объектом исследования являются изучение сингулярных краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Предмет исследования.** Предметом исследования является доказательство теорем, определяющие число решений однородной задачи  $l$  и число условий разрешимости неоднородной задачи  $p$ .

**Научная новизна исследования.** Результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующих решениях краевых однородных и неоднородных задач Римана, т.е.:

**ЗАДАЧА R.1.** Потребовалось найти две аналитические функции:  $W^\pm(x, y)$ , которые удовлетворяют регулярному решению настоящего уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , принадлежащие к областям  $D^\pm$ , по следующему однородному граничному условию:

$$W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  является коэффициентом задачи Римана и непрерывная функция, которая имеет конечный порядок на бесконечности на границе, где  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$ ,  $\eta_j$  – различные точки контура, причем  $d_r, q_j > 0$ .

**ЗАДАЧА R.2.** Надо найти пару аналитических функций:  $W^\pm(z)$  являющимися регулярным решением эллиптического уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , принадлежащие в областях  $D^\pm$ , и в конечной точке контура стремящихся на бесконечности по следующему граничному условию, вида:

$$W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

в этом случае, коэффициент задачи Римана,  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}$  – везде непрерывная функция, где  $c(t) \in H(\Gamma)$  и  $\xi_r, \eta_j$  – находящие точки контура, причём,  $d_r, q_j > 0$ .

**ЗАДАЧА R.3.** Потребуется найти две аналитические функции:  $W^\pm(z)$ , которые являются регулярными решениями эллиптического уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , находящие в областях  $D^\pm$ , по следующему неоднородному граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

в данной задаче, где  $\xi_r (r=1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j=1, 2, \dots, \gamma)$  – разные точки из  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – целые числа,  $A_1(t)$  – отличная от нуля, причем непрерывная функция и  $c(t) \in H(\Gamma)$ . Поскольку данная задача имеет модульный характер, и решение ищется в классе функций интегрируемой на контуре.

**ЗАДАЧА R.4.** Потребуем, чтобы найти две аналитические функции,  $W^{\pm}(x, y)$ , которые являются регулярным решением настоящего уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , принадлежащие к областям  $D^{\pm}$ , подчиняющие следующим граничным условиям, на контуре  $\Gamma$ :

$$\text{а) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{б) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{в) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

где  $\xi_r (r=1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j=1, 2, \dots, \gamma)$  – различные точки контура,  $d_r, q_j > 0$  и коэффициент задачи Римана,  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0$ , причем непрерывная функция,  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ .

Поскольку данная задача представляется в общем виде и её решение в случаях **а)** и **б)** найдены в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ , а в задаче **в)** решения задача Римана ищется в классе функций, интегрируемых на контуре.

**ЗАДАЧА R.5.** Потребовалось найти две аналитические функции  $W^\pm(x, y)$ -регулярного решения уравнения, вида:  

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right),$$
 лежащих в областях  $D^\pm$ , которые удовлетворяют следующему краевому условию, вида:

$$\text{а) } W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

$$\text{здесь: } A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j},$$

$$\text{б) } W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

$$\text{здесь: } A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j},$$

$$\text{в) } W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

$$\text{здесь: } A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j}, \quad \text{где } \xi_r (r=1, 2, \dots, \mu),$$

$\eta_j (j=1, 2, \dots, \gamma)$  – точки, лежащие на контуре и здесь  $d_r, q_j > 0$ ,  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ .

Решение задачи **а)** и **б)** ищется в классе функций ограниченных на контуре  $\Gamma$ , а в случае **в)** решение ищется в классе функций интегрируемых на контуре.

**Теоретическая и научно-практическая значимость работы.** Работа имеет теоретический характер. Методы развития и полученные результаты диссертационной работы можно применять при исследовании краевых задач теории гармонических функций, краевых задач теории аналитических функций и теории обобщённых аналитических функций.

### Положения, выносимые на защиту:

1. Нахождение теорем о краевой задаче Римана для эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , когда коэффициент непрерывной функции характеризуется особенностью аналитического вида.

2. Теорема о краевой задаче Римана для уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , с непрерывными коэффициентами, имеющие нули и полюсы сопряжённо-аналитического вида, следующего типа.

3. Теорема о сингулярной граничной задаче Римана, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка, для уравнений первого порядка, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ .

4. Нахождение новой теоремы, определяющей число решений однородной сингулярной граничной задаче Римана для эллиптических дифференциальных уравнений, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью аналитического вида.

5. Нахождение новой теоремы о неоднородной сингулярной граничной задаче Римана для эллиптических уравнений,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , когда коэффициент, характеризуется особенностью нулей и полюсы сопряжённо-аналитического порядка.

6. Нахождение новой теоремы о граничной краевой задаче Римана для системы дифференциальных эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , когда коэффициент является непрерывной функцией и имеет особенность модульного порядка.

7. Теорема о сингулярной краевой задаче Римана для системы уравнений, эллиптического типа, в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью целого порядка.

8. Теорема о сингулярной граничной задаче Римана для системы эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

когда коэффициент задачи непрерывная функция, и она обладает нулями и полюсами сопряжённо-аналитического порядка.

**9. Теорема о получении результатов для краевой задачи Римана для уравнений:**

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z) \overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right),$$

когда коэффициент задачи Римана имеет особенность модульного характера.

**Степень достоверности результатов.** Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования).** Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060100 – Математика (6D060102- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), относятся к составной части этой специальности.

**Апробация и реализация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

На республиканской научно-практической конференции «Подготовка современных специалистов по математике в отрасли науки и образования вузов и средних учреждений». (2020 г.) г.Дангара; на международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессору Темура Собира. (25-26 июня, 2021г.) г.Душанбе; на республиканской научно-методической конференции «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)», празднованиям 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летия государственной Независимости Республики Таджикистан. (2021г.) г.Душанбе; на международной конференции «Современные проблемы теории чисел

и математического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова НАНТ. Институт математики им. А. Джуроева и ТНУ. (29-30 апреля, 2022г.) г.Душанбе; на международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков. (20-21 октября, 2022г.) г.Душанбе; на республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях», посвященной «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040». (29 ноября, 2022г.) г.Душанбе; на международной научно-теоритической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) г.Душанбе; на международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам – 27 мая 2025г. –г.Уфа; на Международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040годы)».- 2025г. –г. Душанбе.

**Публикации по теме диссертации.** По материалам диссертационного исследования опубликовано 15 научных статей, в том числе, 4 статьи в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистана и 11 статей в трудах республиканских и международных конференциях.

**Структура и объём диссертации.** Работа состоит из введения, общей характеристики, четырёх глав, заключения и списка литературы из 142 наименований. В диссертации для формул и параграфов используется тройная нумерация, первый номер совпадает с номером главы, второй – с номером параграфа и третий – с номерами формул. Общий объём диссертации 142 страницы компьютерного набора.

## **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Материалы и методы исследования.** В диссертационной работе исследуются сингулярные краевые задачи Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа с непрерывными коэффициентами. В диссертации используются методы краевых задач теории аналитических функций, обобщённо-аналитических функций и элементы функционального анализа.

**Результаты исследования.** Приведём краткое изложение результатов диссертационной работы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, кратко описывается содержание работы, проводится краткий обзор уже существующих результатов, касающихся темы настоящей диссертации.

Первая глава диссертационной работы посвящена анализу литературных источников по теме диссертационной работы и постановку нерешенных краевых задач Римана.

Во 2-й главе диссертации, которая состоит из трёх параграфов, изучается граничная задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений эллиптического типа в сингулярном случае.

В 1.1., второй главы диссертационной работы, исследуется краевая задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, с непрерывными коэффициентами имеющие особенность целого порядка.

Рассматривается:  $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = h(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g(x, y) \end{cases}$$

эта система для теории комплексных переменных, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z),$$

здесь рассматривается краевая задача типа Римана.

**ЗАДАЧА R.** Требуем найти аналитическую функцию:  $W^{\pm}(x, y)$ , регулярного решения дифференциального уравнения вида,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  принадлежащие в областях  $D^{\pm}$ , удовлетворяющему следующему краевую условию:

$$W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) \neq 0$  на границе,  $A_1(t)$  – непрерывная функция,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – точек лежащие на контуре,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – целые числа.

### ТЕОРЕМА 2.1.1.

*Когда индекс задачи Римана  $\alpha - \delta = 0$ , то граничная задача сопряжения имеет единственное решение. Если  $\alpha - \delta > 0$  рассматриваемая граничная задача сопряжения, также имеет  $\alpha - \delta$  решений. Когда  $\alpha - \delta < 0$ , рассматриваемая задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для разрешимости требуем дополнительное условие разрешимости  $|\alpha - \delta|$ .*

Во 2.2., второй главы диссертационной работы изучается краевая задача типа Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , имеющие в конечной точке контура нули и полюсы сопряжённо-аналитического характера.

**ЗАДАЧА R.** Требуется найти пару аналитических функций:  $W^{\pm}(x, y)$ , регулярного решения уравнения вида,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , принадлежащих к областям  $D^{\pm}$ , который удовлетворяют следующему краевому условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} A(t) W^{-}(t) + c(t),$$

здесь:  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} A(t) \neq 0$ , в этом случае, она непрерывная функция и  $c(t)$  из класса Гёльдера,  $\xi_r, \eta_j$  – точки, лежащие на контуре  $\Gamma$ ,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – целые числа.

### ТЕОРЕМА 2.2.1.

Допустим, что  $A_1(t)$  – является коэффициентом задачи Римана и она непрерывная функция,  $c(t)$  – удовлетворяет условия Гёльдера,  $\text{Ind} A_1(t) = \alpha$  – есть индекс задачи Римана,

Тогда, данная задача разрешима и имеет единственное решение а случае, когда  $\alpha - \delta = 0$ . Тогда, при  $\alpha - \delta > 0$ , рассматриваемая однородная задача сопряжения имеет  $\alpha - \delta$  решений. В случае, индекс  $\alpha - \delta < 0$ , задача будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняется  $|\alpha - \delta|$  условие разрешимости, вида:

$$\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) \frac{c_1(t)}{(t - z_0)^{\alpha}} dt = 0.$$

В 2.3., второй главы исследуется граничная задача типа Римана, когда коэффициент имеет особенности модульного характера для уравнений, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ .

**ЗАДАЧА R.** Требуется найти аналитическую функцию:  $W^+(z)$ -регулярного решения для уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  в области  $D^+$  и  $W^-(z)$ - аналитическую вне области, по следующему граничному условию, вида:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ ) – точки, лежащие на  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j > 0$ ,  $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) \neq 0$  и  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ .

Решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре.

**ТЕОРЕМА 2.3.1.** Пусть в задаче  $\varphi_3^{*+}(t) = A_4^*(t) \varphi_3^{*-}(t) + c_2(t)$ ,  $A_4(t) \neq 0$  и является непрерывной функцией,  $c_2(t)$  из класса Гёльдера: ( $\alpha = \text{Ind} A_4(t)$  – индекс задачи Римана).

Тогда:

Когда индекс  $\alpha = 0$ , задача сопряжения вида:

$\varphi_3^{*+}(t) = A_4^*(t) \varphi_3^{*-}(t) + c_2(t)$ , имеет единственное решение, а в случае  $\alpha > 0$  данная задача сопряжения имеет  $\alpha$  решений. Когда  $\alpha < 0$ , задача сопряжения Римана неразрешима. Для решения задачи  $\varphi_3^{*+}(t) = A_4^*(t) \varphi_3^{*-}(t) + c_2(t)$ , требуем дополнительных условий разрешимости  $|\alpha| \cdot \int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$ .

В третьей главе диссертации, которая состоит из трёх параграфов, исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае для уравнений, вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ .

В 3.1., третьей главы изучается сингулярная граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент имеет особенность аналитического характера для системы дифференциальных уравнений, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ .

В этом параграфе диссертационной работы, изучается сингулярная граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического вида, в случае, когда коэффициент имеет особенность аналитического характера, т.е. для

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = ab\left(\frac{u}{b} + \frac{v}{a}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a(u + v). \end{cases}$$

**ЗАДАЧА R.** Требуется найти аналитическую функцию:  $W^{\pm}(x, y)$  – являющимися регулярное решение уравнения:

$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  принадлежащему областям  $D^{\pm}$ , которые удовлетворяют следующему условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \cdot A_1(t) \cdot W^{-}(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t)$  – непрерывная функция,  $c(t)$  – свободный член задачи из класса Гёльдера,  $\xi_r, \eta_j$  – является различие точки контура,  $d_r, q_j$  – положительные числа.

### ТЕОРЕМА 3.1.1.

Когда индекс задачи Римана  $\alpha - d - 1 = 0$ , тогда, краевая задача  $\varphi_1^{*+}(t) = A_1^{*}(t) \varphi_1^{*-}(t) + \psi_1^{*}(t)$  в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ , имеет единственное решение. Когда  $\alpha - d - 1 > 0$ , тогда искомая задача имеет  $\alpha - d - 1$  решений. Тогда, при индексе  $\alpha - d - 1 < 0$ , задача Римана неразрешима. Для её разрешимости требуется  $|\alpha - d - 1|$  дополнительное условие, вида:  $\int_{\Gamma} \frac{R^{+}(t)}{(t - z_0)^{\alpha}} \left[ \frac{\psi_1^{-}(t)}{(t - z_0)^{\alpha}} \right] dt = 0$ .

Во 3.2., третьей главы диссертационной работы, исследуется краевая задача Римана для уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ , с коэффициентом, имеющим нулей и полюсов следующего сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R.** Надо найти пару аналитических функций:  $W^{\pm}(x, y)$  –регулярного решения дифференциального уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  лежащих в областях  $D^{\pm}$ , которые удовлетворяют следующему граничному условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \cdot A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r, \eta_j$  – точки, лежащие на контуре  $\Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – целые положительные числа.

**ТЕОРЕМА 3.2.1.** Пусть в задаче:  $\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t) \varphi_1^-(t) + c_2(t)$ , в уравнение,  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ . где  $A_2(t)$  – отличная от нуля и непрерывная функция,  $c_2(t)$  – из класса Гёльдера, она дифференцируема в любом порядке.

Тогда, имеет место следующий результат:

В случае, индекс  $\alpha - d = 0$ , тогда рассматриваемая граничная задача сопряжения Римана имеет единственное решение. В случае,  $\alpha - d > 0$ , тогда задача сопряжения Римана имеет  $\alpha - d$  решений в классе функции, ограниченном на контуре.

В третьей главе, 3.3., диссертационной работы исследуется краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент в конечной точке имеет особенность модульного характера для уравнений, следующего вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ .

**ЗАДАЧА R.** Найти пару аналитических функций:  $W^{\pm}(x, y)$ , регулярного решения уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  принадлежащие внутри область и вне области  $D$ , удовлетворяющие граничному условию, вида:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь:  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $d_r, q_j$  – произвольные числа. Коэффициент задачи  $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0$ , непрерывная функция,  $c(t)$  – из класса  $H(\Gamma)$ . В искомой задаче Римана, решения найдены в классе функции, интегрируемой на контуре  $\Gamma$ .

**ТЕОРЕМА 3.3.1.**

В случае, индекса задачи  $\alpha = 0$ , тогда рассматриваемая задача сопряжения в искомом классе функции, будет разрешима. Тогда, когда индекс каппа больше нуля, задача имеет каппа линейно-независимых решений. Если индекс каппа меньше нуля, тогда задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для её разрешимости требуется дополнительное условие разрешимости  $|\alpha|$ .

В четвертой главе настоящей диссертации, которая состоит из 6-и параграфов, изучается граничная задача типа задачи Римана для системы уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$  с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае.

В 1.1., настоящей главы диссертационной работы изучается сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент задачи Римана, характеризует особенность целого порядка для системы эллиптического уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$ .

**ЗАДАЧА R.** Требуется найти аналитическую функцию:  $W^+(x, y)$ , регулярного решение уравнения, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  в области  $D^+$  и функцию  $W^-(x, y)$  – аналитическую во внешней области по граничному условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция,  $c(t) \in H$ ,

$\xi_r, \eta_j$  – несовпадающие точки контура,  $d_r, q_j$  – целые числа,

$$\delta = \sum_{r=1}^{\mu} \delta_r, \quad S = \sum_{j=1}^{\gamma} s_j.$$

#### ТЕОРЕМА 4.1.1.

Если  $A_4(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция,

$c_2(t)$  удовлетворяет условию  $H$ , тогда имеет место следующее:

Когда индекс задачи  $\alpha = 0$ , тогда рассматриваемая краевая задача сопряжения имеет единственное решение. Когда индекс каппа больше нуля, тогда задача сопряжения разрешима и имеет каппа решений. В случае, индекса каппа меньше нуля, в этом случае, задача будет разрешима тогда и только тогда, когда требуется  $|\alpha|$

дополнительных условий разрешимости:  $\int_{\Gamma} \frac{R^+(t)}{(t-z_0)^\alpha} [(t-z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$ .

Во втором параграфе четвёртой главы диссертационной работы изучается сингулярная краевая задача Римана для эллиптических уравнений, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$ , когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R.** Требуем найти аналитическую функцию:  $W^+(x, y)$ , регулярного решения дифференциальных уравнений:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left[ W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right]$  в области  $D^+$ , и  $W^-(x, y)$  – аналитическую во внешней области, по граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t-\xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t-\eta_j})^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t-\xi_r})^{d_r} \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t-\eta_j})^{-q_j} \neq 0$  и непрерывная функция на контуре  $\Gamma$ ,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$  и  $\eta_j$  – точки, лежащие на контуре,  $d_r, q_j$  – натуральные числа.

#### ТЕОРЕМА 4.2.1.

Если  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t-\xi_r})^{d_r} \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t-\eta_j})^{-q_j} \neq 0$  непрерывная функция, здесь  $c(t) \in H$  индекс задачи Римана  $\alpha = \text{Ind} A_1(t) - \text{Ind} t^{-q} A_2(t) = \alpha - d$ .

Тогда, когда  $\alpha - d = 0$ , задача разрешима и имеет единственное решение, рассматриваемая задача сопряжения имеет  $\alpha - d$  решения, если индекс задачи  $\alpha - d > 0$ . Когда,  $\alpha - d < 0$ , задача в общем виде

неразрешима. Для существования её решения, необходимо выполнения условий разрешимости, вида  $|\mathfrak{a} - d|$ .

В третьем параграф 4-ой главы диссертационной работы изучается получение результатов задачи Римана для системы эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y),$$

когда коэффициент непрерывная функция и имеет особенность модульного характера.

**ЗАДАЧА R.** Требуется, найти пара аналитическую функций:  $W^+(x, y)$ , регулярного решения эллиптического уравнения, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y) + B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)} + c(x, y)$$

принадлежащие во всей области  $D$ , которая удовлетворяет, следующем условиям:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

где  $A_1(t)$  – непрерывная функция и она не равна нулю, здесь  $c(t) \in H(\Gamma)$ .  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$ ,  $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$ ,  $d_r, q_j$  – любые действительные числа.

#### ТЕОРЕМА 4.3.1.

Пусть  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} \neq 0$ , и непрерывная функция на контуре  $\Gamma$  и  $\text{Ind} A_1(t) = \mathfrak{a}$ , здесь  $c(t)$  из класса Гёльдера.

Тогда, когда индексом задачи:  $\mathfrak{a} - q^{(2)} = 0$  однородная задача разрешима. При  $\mathfrak{a} - q^{(2)} > 0$ , рассматриваемая краевая задача сопряжения Римана, безусловно, разрешима. Когда индекс задачи Римана:  $\mathfrak{a} - q^{(2)} < 0$ , тогда рассматриваемая неоднородная задача

неразрешима, для её разрешимости неоднородной задачи требуем  $|\mathfrak{a} - q^{(2)}|$  условия разрешимости.

В 4.4., этой главы, исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент задачи Римана характеризует особенности целого порядка.

Пусть  $\Gamma$ -контур, состоящий из  $m+1$  простых замкнутых контуров Ляпунова  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ , ограничивающих односвязную область  $D^+$ , дополнительную к ней часть плоскости, состоящую из суммы  $m$  конечных односвязных области  $D_k^-$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) и бесконечной области  $D_k^-$ , будем в дальнейшем для краткости называть также областью и обозначим через  $D^-$ .

**ЗАДАЧА R.** Найти функции:  $W^\pm(z)$  аналитические в областях  $D^\pm$  имеющие почти всюду на контуре  $\Gamma$ , предельные значения,  $W^\pm(t)$  удовлетворяющие граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r, \eta_j$  некоторые точки контура  $\Gamma$  и  $\xi_r$  — является нулями функции  $A_1(t)$ ,  $\eta_j$  — является полюсами функции,  $A_1(t)$ ,  $d_r, q_j$  — натуральные числа,  $A_1(t)$  — непрерывная функция,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .

Обозначим  $\mathfrak{a} = \text{Ind} A_1(t)$ ,  $q = \sum_{j=1}^{\gamma} q_j$ ,  $d = \sum_{r=1}^{\mu} d_k$ . Решение будем искать в классе функций, ограниченных на контуре  $\Gamma$ .

#### ТЕОРЕМА 4.4.1.

*Краевая задача Римана в случае  $\mathfrak{a} - p = 0$ , безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача также, в случае  $\mathfrak{a} - p > 0$ , безусловно, разрешима и имеет  $\mathfrak{a} - p$  линейно независимых решений. Задача разрешима лишь в случае,  $\mathfrak{a} - p < 0$ , при выполнении  $|\mathfrak{a} - p|$  условий*

разрешимости. При выполнении условий разрешимости, решение существует и единственно.

В 4.5., настоящей главы диссертационной работы, исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризует собой особенность нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

**ЗАДАЧА R.** Найти функции:  $W^{\pm}(z)$ , аналитические в областях  $D^{\pm}$ , имеющие почти всюду на контуре  $\Gamma$ , предельные значения,  $W^{\pm}(t)$ , удовлетворяющие граничному условию:

$$W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

здесь  $\xi_r, \eta_j$  некоторые точки контура  $\Gamma$  и  $\xi_r$  — являются нулями функции  $A_1(t)$ ,  $\eta_j$  — являются полюсами функции  $A_1(t)$ ,  $d_r, q_j$  — натуральные числа,  $A_1(t)$  — непрерывная функция,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .

#### ТЕОРЕМА 4.5.1.

*Краевая задача Римана, в случае,  $\alpha - p = 0$ , безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача также, в случае,  $\alpha - p > 0$ , безусловно, имеет  $\alpha - p$  линейно независимых решений. Задача разрешима лишь в случае  $\alpha - p < 0$ , при выполнении  $|\alpha - p|$  условий разрешимости  $S_k g = 0$ , где  $S_k$  линейно независимые функционалы. При выполнении условий разрешимости, решение существует и единственно.*

В параграфе 4.6., этой главы диссертационной работы, исследуется задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае. Установлено, что число решений задачи в классе функций, ограниченных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициента задачи и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов.

**ТЕОРЕМА 4.6.1.** Пусть  $a(t)$  непрерывна,  $Ind a(t) \cdot t^{-m} = \alpha - m$ ,  $\alpha = Ind_{\Gamma} a(t)$ ,  $b(t)$ -ограничена и измерима,  $c(t) \in L_p$ ,  $p > 1$ .

И пусть  $\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + s_p}$ , где  $s_p$ - норма в  $L_p$  сингулярного оператора  $s_\mu = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau$ .

Тогда: при  $\mathfrak{x} - m \geq 0$ ,  $l = 2(\mathfrak{x} - m)$ ,  $p = 0$ ;

при  $\mathfrak{x} - m < 0$ ,  $l = 0$ ,  $p = 2(\mathfrak{x} - m)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Основные научные результаты работы заключаются в следующем:**

- Найдены решения уравнения вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  в случае, когда коэффициент непрерывная функция, но в конечной точке контура, характеризует особенностью аналитического порядка [1-A];

- Найдены решения эллиптических уравнений вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , коэффициенты которых являются непрерывной функцией, отметим, что непрерывность функции в конечной точке стремится на бесконечность, либо нарушается условия нормальное разрешимости [14-A];

- Найдены решения эллиптического уравнения первого порядка, вида:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка [7-A];

- Найдены решение уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность аналитического характера [11-A];

- Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи имеет особенность сопряжённо-аналитического характера [12-A];

- Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  в случае, когда коэффициент задачи характеризует особенность модульного характера [2-A];

- Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , в случае, когда коэффициент обладает нулями и полюсами аналитического характера [15-A];

- Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи Римана имеет особенность сопряжённо-аналитического вида [13-A];

- Найдены решения уравнения:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ ,

когда коэффициенты имеют особенности модульного характера [3-А].

**Рекомендации по практическому использованию результатов.**  
Результаты, полученные в диссертационной работе можно применять в теории краевых задач, теории аналитических функций, обобщённо - аналитических и гармонических функций, а также в теории упругости и электродинамики.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### **1. В журналах, зарегистрированных в ВАК при Президенте Республики Таджикистан**

[1-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник Таджикского национального университета. – 27 декабря 2021. – г. Душанбе №4. – С. 74-86.

[2-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$ , когда коэффициент имеет особенность нецелого порядка и не голоморфной структуры [Текст] / М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2022. – Том 1. №3(25). – С. 22-31.

[3-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа задача Римана, когда коэффициент имеет особенность нецелого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z) + B(z)$  [Текст] / М.И. Надирова // Вестник Хорогского университета. – 2023. – №3(27). – С. 262-267.

[4-А]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. – Том 1, №2(47). – С.33-40.

### **2. В других изданиях:**

[5-А]. Надирова М.И. Сингулярные граничные задачи сопряжения [Текст] / М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ-Душанбе, 02-апреля 2016 г. –С.136-139.

[6-А]. Надирова М.И. Задача сопряжения аналитических функций с нулями и полюсами коэффициента модульного характера [Текст] /М.Б. Холикова, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы обучения математике, физике и информатике в средней и высшей школе»- ДДОТ, -Душанбе, 2016. – С.109-111.

[7-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре [Текст] / Холикова М.Б., Усмонов М.А., Надирова М.И. // Материалы республиканской научно-практической конференции, «посвященные 2020-2040гг. «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования республики Таджикистан», Данғара. – 2020. – с.26-30.

[8-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темурова Собира. Душанбе. 25-26 июня 2021. – с.233-237.

[9-А]. Надирова М.И. Общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости в сингулярном случае [Текст] /М.Б. Холикова, М.А. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы республиканской научно-методической конференции на тему: «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)». Празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. Душанбе.-2021. –с.92-95.

[10-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы

$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z)$  [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Додожона Исмоилова. НАНТ, Инст. математики им. А. Джураева, ТНУ –Душанбе. 29-30 апреля 2022. – с. 223-226.

[11-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы «Современные проблемы математики и её приложения». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков –г.Душанбе. 20-21 октября 2022г. – с.232-236.

[12-А]. Надирова М.И. Сингулярная краевая задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции на тему: «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». Посвященной «Развитию естественных, точных и математических наук» (2020-2040). – 29 ноября 2022. -г. Душанбе. – С. 187-193.

[13-А]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения первого порядка эллиптического типа в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник научных статей международной научно-теоретической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) –30-31 мая 2023г. г.Душанбе. – Стр. 251-254.

[14-А]. Надирова М.И. Сингулярная граничная задача Римана для эллиптических уравнений вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z), \text{ когда коэффициент задачи}$$

непрерывная функция [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова //НИЦ Вестник науки. «Фундаментальные и прикладные научные

исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции – 27 мая 2025г. – г.Уфа № К-554. – С. 18-29.

[15-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно – аналитического вида [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Международная научно-практическая конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040годы)».- 2025г. –г. Душанбе, – С. 312-317.

**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН  
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМУЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН БА  
НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ**

УДК 517.55

*Бо ҳуқуқи дастнавис*



**НАДИРОВА МОҲРУХСОР ИНОЯТУЛЛОЕВНА**

**МАСЪАЛАИ КАНОРИИ СИНГУЛЯРИИ РИМАН БО  
КОЭФФИТСИЕНТИ БЕФОСИЛА БАРОИ СИСТЕМАИ  
МУОДИЛАҲОИ ТИПИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ЯКУМ**

**АВТОРЕФЕРАТИ**

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии  
доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯи ихтисоси  
6D060100-Математика (6D060102-Муодилаҳои дифференциалӣ, системаҳои  
динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

Душанбе – 2025

Рисола дар кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айни иҷро шудааст

**Рохбари илмӣ:**

**Усмонов Нурулло** - доктори илмҳои физикаю математика, профессор

**Муқарризони расмӣ:**

**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич**  
Доктори илмҳои физикаю математика, и.в. профессори кафедраи анализи математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав

**Одинабеков Джасур Музофирович** – номзоди илмҳои физикаю-математика, дотсенти кафедраи математика ва илмҳои табиатшиносии филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе.

**Муассисаи пешбар:**

Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия 12 сентябри соли 2025 соати 14:00 дар ҷаласаи шурои диссертатсионии 6D.KOA-011 факултети механикаю математикаи назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон дар суроғаи: 734025, ш.Душанбе, Буни Ҳисорак, бинои 17, утоқи 203 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути <http://www.tnu.tj> шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи «\_\_» «\_\_\_\_\_» соли 2025 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

**Котиби илмии шурои диссертатсионии 6D.KOA-011,**

номзоди илмҳои физикаю математика



**Ғафоров А.Б.**

## МУҚАДДИМА

**Мубрамияти мавзӯи таҳқиқот.** Масъалаи ҳалли муодилаи эллиптикӣ ва масъалаи Риман бо коэффитсиентҳои шартӣ Гёлдерро қаноаткунанда ва ҳолатҳои сингулярии масъалаи Риман дар асарҳои илмии И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлов, Н. Усмонов ва дигарон омӯхта шудааст.

Векуа И.Н., системаи функцияҳои аналитикии умумикардашударо барои системаи муодилаи зерин омӯхтааст:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Системаи (0.0.1) дар намуди комплексӣ шакли зеринро дорад:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W} + F, \quad (0.0.2)$$

ки дар ин ҷо

$$W = u + iv, \quad \bar{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

ва

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic - ib), \quad F = \frac{1}{2}(f + iq),$$

дода шудааст.

Дар системаи муодилаи додашудаи (0.0.1) И.Н. Векуа масъалаи канории Гилбертро тадқиқ кардааст.  $\bar{U}$  дар ин кор масъалаи Риманро наомӯхтааст.

Масъалаи Риман барои системаи (0.0.1) аз тарафи Л.Г. Михайлов омӯхта шудааст. Бояд қайд намуд, ки коэффитсиенти масъалаи Риман дар тадқиқотҳои Л.Г. Михайлов шартӣ Гёлдерро қаноат менамуданд.

Баъдан, Л.Г. Михайлов масъалаи канории Риман-Газеманро омӯхтааст, ки шакли зеринро дорад:

$$W^+(\alpha(t)) = A(t)W^-(t) + c(t)$$

ё ки дар намуди комплексӣ чунин навишта мешавад,

$$\partial_{\bar{z}}W = AW + B\bar{W}.$$

Инчунин, барои ин муодила масъалаи канории зеринро низ тадқиқ намудааст.

$$W^+(t) = a(t)W^-(t) + b(t)\bar{W}^-(t) + c(t);$$

$$W^+(t) = a(t)\frac{\partial W^-(t)}{\partial t} + b(t)\frac{\partial \bar{W}^-(t)}{\partial t} + p(t)W^-(t) + q(t)\bar{W}^-(t) + c(t).$$

Ва аз тарафи профессор Нурулло Усмонов ва шогирдаш Сайхуна Шавкатзода, ҳолати дигари сингулярнокии ин масъалаҳо омӯхта шудаанд. Диссертатсияи мазкур бошад, ба ҳолатҳои сингулярии масъалаи Риман барои системаи муодилаҳои умумикардасудаи Кошӣ-Риман бахшида шудааст, ки дар ин ҷо, фарз карда мешавад, ки коэффитсиенти масъала, яъне  $A(t)$  функсияи бефосила аст.

**Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва ё мавзуҳои илмӣ.** Мавзуи диссертатсияи мазкур ба мавзуи илмии кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айни «Тадқиқи масъалаи канории назарияи функсияҳоаш аналитикӣ дар ҳолати сингулярӣ» бахшида шудааст.

## ТАСНИФОТИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

**Мақсади таҳқиқот.** Мақсади кори диссертатсионӣ аз, омӯзиши масъалаи сингулярии Риман барои системаи муодилаҳои эллиптикии тартиби якум мебошад, ки коэффитсиенти масъала дар нуктаҳои охиринок махсусиятҳои зеринро доранд:

- ҳолате, ки коэффитсиенти масъалаи канории Риман сифр ва кутбӣ тартиби бутунро дорад;
- ҳолате, ки коэффитсиенти масъалаи канории Риман сифр ва кутбӣ ҳамроҳшудаи аналитикиро дорад;
- инчунин махсусияти характери модулиро доранд.

**Вазифаҳои таҳқиқот.** Аз рӯи масъалаҳои гузошташуда тадқиқотҳои зерин гузаронида шудаанд:

- Дар аввал ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо коэффитсиенти масъала сифр ва кутбӣ тартиби

бутун, сифр ва кутбӣ ҳамроҳшудаи аналитикӣ ва инчунин махсусияти характери модулиро доранд;

○ Баъдан, ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо коэффитсиенти масъала низ сифр ва кутбӣ тартиби бутун, сифр ва кутбӣ ҳамроҳшудаи намуди аналитикӣ ва инчунин махсусияти характери модулиро доранд;

○ Ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо коэффитсиенти масъалаи Риман сифр ва кутбӣ тартиби аналитикӣ, сифр ва кутбӣ ҳамроҳшудаи намуди аналитикӣ ва инчунин махсусияти характери тартиби касриро доранд.

**Объекти таҳқиқот.** Объекти тадқиқот, ин омӯзиши ҳолати сингулярнокии масъалаи Риман бо коэффитсиентҳои бефосила барои муодилаҳои зерин мебошад:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z).$$

**Предмети таҳқиқот.** Предмети тадқиқот аз исботи теоремаҳое, ки дар онҳо шумораи ҳалҳои масъалаи якҷинсаи  $l$  ва шартҳои бо иҷро шудани онҳо масъалаи ғайриякҷинсаи  $p$  ҳал доранд, омӯхта шудааст.

**Навгони илмӣ таҳқиқот.** Натиҷаи диссертатсия нав буда, ба масъалаҳои зерин бахшида шудааст:

**МАСЪАЛАИ R.1.** Функцияи  $W^+(z)$  ҷустуҷӯ карда шавад, ки вай ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$ , дар дохили соҳаи  $D^+$  ва функцияи  $W^-(z)$  аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$ , ҷойгир бошанд ва дар беохири тартиби охиринок дошта, шартҳои канории зеринро қаноат кунанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$  функсияи бефосила буда ва он ғайри нули аст,  $c(t)$  шартӣ Гёлдерро қаноат мекунонанд, инчунин  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои бутуни мусбат мебошанд.

**МАСЪАЛАИ R.2.** Функсияҳои аналитикии  $W^{\pm}(z)$  ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар соҳаҳои  $D^{\pm}$  ҷойгир буда ва шартӣ канории зеринро қаноат кунанда бошанд:

$$W^+(t) = A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо,  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}$ , инчунин  $c(t) \in H(\Gamma)$ , нуқтаҳои  $\xi_r, \eta_j$  – дар контур меҳобанд,  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралӣ мебошанд.

**МАСЪАЛАИ R.3.** Ҷуфти функсияҳои  $W^{\pm}(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаҳои  $D^{\pm}$  аналитикӣ мебошанд, ёфта шаванд, ки онҳо шартӣ канории зеринро қаноат кунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои бутун,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $A_1(t) \neq 0$  ва функсияи бефосила мебошад.

Инчунин, ҳалли масъала дар синфи функсияҳои дар контури  $\Gamma$  интегронидашаванда ҷустуҷӯ карда мешавад.

**МАСЪАЛАИ R.4.** Талаб карда шудааст, ки функсияи  $W^+(z)$ , ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи дифференсиалии намуди эллиптикӣ дар соҳаи  $D^+$  ва  $W^-(z)$  – функсияи аналитикӣ берун аз соҳа, яъне дар  $D^-$  ҷойгир бошад ва шартҳои канории зеринро қаноат кунонанд:

$$\text{а) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{б) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{в) } W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

дар масъалаҳои а) ва б) бошад, ҳал дар синфҳои коэфтуков карда мешаванд, ки дар контур маҳдуд мебошад. Дар ҳолати в) бошад, ҳали масъала дар синфи функсияҳои дар контур интегронидашаванда коэфтуков карда мешавад.

**МАСЪАЛАИ R.5.** Талаб карда мешавад, ки функсияи  $W^+(z)$ , ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи дифференсиалии тартиби якуми намуди эллиптикӣ дар соҳаи  $D^+$  ҷойгир буда ва функсияи  $W^-(z)$  дар соҳаи  $D^-$  аналитикӣ мебошад ва шартҳои канории зеринро қаноаткунонанд:

$$\text{а) } W^+(t) = A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{ки дар ин ҷо } A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j}.$$

$$\text{б) } W^+(t) = A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

$$\text{ки дар ин ҷо } A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{-q_j}.$$

$$\text{в) } W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |(t - \xi_r)|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \neq 0$  – функцияи бефосила ва  $\xi_r (r=1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j=1, 2, \dots, \gamma)$  – нуктаҳои контур буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралӣ ва  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошанд.

Ҳалли масъалаҳои а) ва б) дар синфи функцияҳои дар контур маҳдуд ва ҳолати в) бошад, ҳал дар синфи функцияҳои дар контур интегронидашаванда ҷустуҷӯ карда мешаванд.

**Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот.** Методе, ки дар кори диссертатсионӣ истифода шудааст, натиҷаҳои онро дар татбиқи масъалаҳои канорӣ, назарияи функцияҳои гармоникӣ, назарияи функцияҳои канорӣ умумикардасудаи аналитикӣ ва анализи функционалӣ истифода бурдан мумкин аст.

#### **Нуктаҳои ба ҷимоя пешниҳодшаванда:**

1. Теорема оид ба масъалаи канорӣ Риман бо коэффитсиенти бефосила дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала сифр ва қутбӣ тартиби бутунро доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  оварда шудааст.

2. Теорема оид ба масъалаи канорӣ Риман бо коэффитсиенти бефосила, ки коэффитсиенти масъала сифр ва қутбӣ ҳамроҳшударо доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  оварда шудааст.

3. Теорема оид ба масъалаи канорӣ Риман дар ҳолати коэффитсиенти масъала махсусияти характери модулиро дорад, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  оварда шудааст.

4. Теорема оид ба масъалаи сингулярнокии Риман бо коэффитсиентҳои бефосила ҳангоми коэффитсиенти масъала махсусияти тартиби бутунро доранд барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

5. Теорема оид ба масъалаи канорӣ Риман бо коэффитсиентҳои бефосила, ки коэффитсиенти он сифр ва қутбӣ характери ҳамроҳшудаи

аналитикиро доранд, барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

6. Теорема оид ба масъалаи канории Риман ҳангоме, ки коэффитсиенти масъала махсусияти характери модулиро доранд, барои муодилаи дифференсиалии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$  оварда шудааст.

7. Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффитсиентҳои бефосила, ки махсусияти характери аналитикиро дорад, барои системаи муодилаҳои эллиптикии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

оварда шудааст.

8. Теорема оид ба масъалаи канории Риман ҳангоми коэффитсиенти масъала сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи аналитикиро доранд барои муодилаи дифференсиалии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot \left( W(x, y) + \frac{B(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}}{A(x, y)} + \frac{c(x, y)}{A(x, y)} \right),$$

оварда шудааст.

9. Теорема оид ба масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала махсусияти характери модулиро доранд, барои системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \left( W(z) + \frac{B(z) \cdot \overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)} \right)$$

оварда шудааст.

**Дарачаи эътимоднокии натиҷаҳо.** Ҳама теоремаҳо, тасдиқотҳо ва формулаҳо дар таҳқиқоти диссертатсия бо далелҳои дақиқ тасдиқ карда шудааст, як қатор хулосаҳо бо таҳқиқоти муаллифони дигар мувофиқанд.

**Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ (бо шарҳ ва самти таҳқиқот).** Кори диссертатсионӣ мувофиқи бахшҳои зерини шиносномаи ихтисоси 6D060102- муодилаҳои дифференсиалӣ, системаи

динамикӣ ва идоракунии оптималӣ мутааллиқ буда, ба қисми ин ихтисос тааллуқ дорад.

**Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот.** Гузориш ва методи исботи теоремаҳо ба роҳбари илмӣ мутааллуқ буда, ҳамаи натиҷаҳои дар қисми **навгониҳои диссертатсия** овардашуда ба унвонҷӯ тааллуқ дорад.

**Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия.** Маводҳои диссертатсия дар конференсияҳои байналмиллалӣ ва ҷумҳуриявӣ муаррифӣ ва муҳокима гардиданд:

Дар конференсияи илмию амалии ҷумҳуриявӣ «Тайёр кардани мутахассисони муосири математика дар соҳаи илму маорифи мактабҳои олии миёна». (2020) ш. Данғара; дар конференсияи байналмиллалӣ «Масъалаҳои актуалии математикаи муосир» бахшида ба 80-солагии зодрӯзи доктори илмҳои физикаю математика, профессор Темур Собир (25-26 июни 2021), ш.Душанбе; дар конференсияи илмӣ- методии ҷумҳуриявии дар мавзӯи «Татбиқи алгебра ва назарияи ададҳо дар ҳалли масъалаҳои муосир» бахшида ба «бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи маориф (солҳои 2020-2040)», 90-солагии таъсисёбии ДДОТ ба номи Садриддин Айни ва таҷлили 30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон; дар конференсияи байналмиллалӣ «Проблемаҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Додочон Исмоилов (Душанбе, 29-30 апрели соли 2022); дар конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Масъалаҳои мубрами рушди илми риёзӣ дар замони муосир» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва илми математика дар солҳои 2020-2040». ДМТ ва Занони кумитаи иттиҳодии умумиҷаҳонии математикҳо. (20-21 октябри 2022с.) ш.Душанбе; дар конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-амалӣ дар мавзӯи «Масъалаҳои мубрами рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар замони муосир» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (2020-2040). (29 ноябр, 2022г.) ш.Душанбе; дар конференсияҳои байналмиллалӣ имлӣ-назаравӣ дар мавзӯи «саҳми математика дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ», бахшида ба омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ (солҳои 2020-2040), –30-31 май 2023с. ш.Душанбе; дар

конференсияи байналмиллалии илмӣ-амалӣ бахшида ба «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Маҷмӯи мақолаҳои илмӣ – 27 майи 2025с. – ш.Уфа; дар конференсияи байналмиллалии илмӣ-методӣ дар мавзуи «математика ва татбиқи он дар амалия» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (Солҳои 2020-2040), ш.Душанбе;

**Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия.** Тибқи маводҳои таҳқиқоти диссертатсионӣ 15 мақолаи илмӣ, аз ҷумла 4 мақола дар нашрияҳои аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тақризшаванда ва 11 мақола дар маводҳои конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмиллалӣ нашр шудаанд.

**Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия.** Кори диссертатсионӣ аз муқаддима, чор боб, хулоса ва рӯйхати адабиёт аз 142 номгӯй иборат аст. Дар диссертатсия барои формулаҳо ва параграфҳо нумератсияи сарақама истифода шудааст, ки дар он рақами якум, рақами боб, дуюм рақами параграф ва рақами сеюми қор бошад ба формула тааллуқ дорад. Ҳаҷми умумии диссертатсия 142 саҳифаи ҷопӣ компютерио дар бар мегирад.

## **МУҲТАВОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ**

**Мавод ва усулҳои таҳқиқот.** Дар диссертатсияи мазкур ҳолати сингулярии масъалаи канории Риман бо коэффисиенти бефосила барои муодилаи дифференсиалии тартиби якуми эллиптикӣ татбиқ карда шудааст. Дар диссертатсия методи масъалаи канории функцияҳои аналитикӣ, аналитикии умумикардашуда ва элементҳои анализи функционалӣ истифода шудаанд.

**Натиҷаҳои таҳқиқот.** Натиҷаҳои кори диссертатсиониро мухтасар шарҳ медиҳем.

Дар муқаддима маълумоти мухтасари таърихӣ натиҷаҳо аз рӯи масъалаҳои дахлдор ва муҳиммияти мавзуи интихобшуда асоснок карда шуда, мақсад ва масъалаи таҳқиқот муайян карда шудааст. Инчунин, наwgониҳои илмӣ ва муҳиммияти масъалаи натиҷаҳои ҳосилгардида, нишон дода мешавад. Натиҷаҳои асосии диссертатсия оварда шудаанд.

Боби якуми кори диссертатсионӣ аз таҳлили сарчашмаҳои библиографӣ шуруъ шудааст ва ба ҷамъоварии маводҳое, ки баъдан дар диссертатсия истифода мешаванд, бахшида шудааст.

Дар боби дуоми диссертатсия, ки аз се параграф иборат аст, дар он масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила барои системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ, омӯхта шудааст.

Дар параграфи якуми боби дуюм оид ба масъалаи канории Риман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ бо коэффитсиенти бефосила, ки дорои махсусияти тартиби бутунро доранд, омӯхта шудааст.

Функсияи  $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , ки дар ин ҷо  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = h(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g(x, y) \end{cases}$$

-ро қаноаткунанда мебошад. Ин система дар ададҳои комплексӣ намуди зеринро  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дошта, дар он масъалаи канории Риман дида баромада мешавад.

**МАСЪАЛАИ R.** Талаб карда мешавад, ки  $W^+(z)$  – ёфта шавад, ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаи  $D^+$  ва функсияи  $W^-(z)$  – аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$  ҷойгир буда, дар беохирӣ тартиби охирноқро доранд ва шарти канории зеринро қаноат кунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t) \neq 0$  ва функсияи бефосила буда,  $c(t) \in H$ , инчунин  $\xi_r (r = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $\eta_j (j = 1, 2, \dots, \gamma)$  – баъзе нуқтаҳои контур буда,  $d_r > 0$ ,  $q_j > 0$  – ададҳои бутун мебошанд.

### ТЕОРЕМАИ 2.1.1.

Агар  $\alpha - \delta = 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи канории ҳамроҳшудаи Риман ҳалли ягоноро дорад. Агар  $\alpha - \delta > 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи канории ҳамроҳшуда  $\alpha - \delta$ - ҳалро дорад. Агар  $\alpha - \delta < 0$ , бошад, он гоҳ масъала дар ҳолати умуми ҳал надошта бо иҷро шудани шарти иловагии  $|\alpha - \delta|$  масъала ҳалли худро пайдо мекунад.

Дар параграфи дуюми боби дуюми кори диссертатсионӣ бошад, оид ба масъалаҳои канории Риман, бо коэффитсиентҳои бефосила, ки сифр ва қутбӣ ҳамроҳшудаи тартиби бутунро доранд, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  омӯхта шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Ёфта шавад, функцияи  $W^+(z)$ –ки ҳалли регулярии системаи муодилаи дифференсиалии  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар соҳаи  $D^+$ , инчунин  $W^-(z)$ – функцияи аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$ , чойгир бошад ва дар беохирӣ, махсусияти тартиби охинокро доранд, шарти канории  $W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t)$  -ро қаноат кунонанд. Ки дар ин масъала  $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} A_1(t)$  буда, дар ин ҳолат  $A_1(t) \neq 0$  ва функцияи бефосила аст,  $c(t)$ –ба синфи Гёльдер тааллуқ дошта,  $\xi_r, \eta_j$  – нуқтаҳои контури  $\Gamma$  ва  $d_r > 0, q_j > 0$  ададҳои бутун мебошанд.

**ТЕОРЕМАИ 2.2.1.** Фарз мекунем, ки  $A_1(t)$ – функцияи бефосила аст,  $c(t) \in H$  ва  $\text{Ind} A_1(t) = \alpha$ ,

Он гоҳ:

Агар  $\alpha - \delta = 0$  бошад, пас масъалаи канории Риман ҳалли ягоноро дорад. Агар  $\alpha - \delta > 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда  $\alpha - \delta$  ҳал дорад. Агар  $\alpha - \delta < 0$  масъала фақат ва фақат ҳалли худро пайдо мекунад бо илова намудани шарти иловагии  $|\alpha - \delta|$  ва шарти

ҳалишавандагии  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) \frac{c_1(t)}{(t - z_0)^{\alpha}} dt = 0$  иҷро гардад.

Параграфи сеюми боби дуюм ба масъалаи канории Риман ҳангоми коэффитсиенти масъала махсусияти характери модулиро дорад, барои системаи муодилаҳои эллиптикии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  бахшида шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Талаб карда шудааст, ки функцияи  $W^+(z)$ -ҳалли регулярии системаи муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ , ки дар соҳаи  $D^+$  ва функцияи аналитикии  $W^-(z)$  дар соҳаи  $D^-$ , ҷойгиранд ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин масъала  $\xi_r$  ( $r=1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j=1, 2, \dots, \gamma$ )- нуктаҳои, ки дар контури  $\Gamma$  меҳобанда,  $d_r, q_j$ - ихтиёрӣ, адади бутун аст,  $A_1(t)$ - функцияи бефосила ва  $A_1(t) \neq 0$ ,  $c(t)$  аз синфи Гёльдер мебошад.

Ҳалли масъала дар синфи функцияҳои интегронидашаванда ёфта шудааст.

**ТЕОРЕМАИ 2.3.1.** *Бигуздор дар масъалаи*

$\varphi_3^+(t) = A_4^*(t) \varphi_3^-(t) + c_2(t)$ , *функцияи  $A_4(t) \neq 0$  ва бефосила мебошад,  $c_2(t)$  аз синфи Гёльдер буда,  $(\alpha = \text{Ind} A_4(t) - \text{индекси масъала}) - \text{мебошад.}$*

*Барояш натиҷаҳои зерин ҷой дорад:*

*Агар  $\alpha = 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha > 0$  бошад, масъала  $\alpha$  ҳал дорад. Агар  $\alpha < 0$ , бошад, масъала фақат ва фақат ҳалли худро пайдо карда, бо илова намудани  $|\alpha|$  ва  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$ . шарти ҳалшавандагӣ иҷро гардад.*

Дар боби сеюми диссертатсия, ки аз се параграф иборат мебошад, дар он сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаи дифференсиалии  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби сеюми қор, оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила, ҳангоми

коэффитсиенти масъала сифр ва кутбӣ аналитикии тартиби бутунро дорад, барои муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида, тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Ёфта шавад, функцияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар соҳаи  $D^+$ , ва функцияи  $W^-(z)$  – аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$  буда, барояш шартҳои канонии зерин қойӣ дорад:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \cdot A_1(t) \cdot W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$  – функцияи бефосила буда,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r, \eta_j$  – нуқтаҳои, ки дар контури  $\Gamma$  қойиранд ва  $d_r, q_j$  – ададҳои бутуни мусбат мебошанд.

### ТЕОРЕМАИ 3.1.1.

*Агар  $\kappa - d - 1 = 0$  бошад, пас масъалаи ҳамроҳшудаи яқчинсаи Риман дар синфи функцияҳои дар контур маҳдуд, ҳалли ягона дорад;*

*Барои  $\kappa - d - 1 > 0$  масъалаи мазкур ҳалли  $\kappa - d - 1$ -ро дорад. Барои  $\kappa - d - 1 < 0$  бошад, шартҳои иловагии  $|\kappa - d - 1|$  барои ҳалшаванда будани масъалаи яқчинса талаб карда мешавад.*

Дар параграфи дуҷуми боби сеюми кори диссертатсионӣ доир ба масъалаи канонии Риман бо коэффитсиенти бефосила, ки дорои сифр ва кутбӣ ҳамроҳшударо доранд, барои муодилаи намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  бахшида шуда, оид ба ин масъала тадқиқот карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Талаб карда шудааст, ки функцияи  $W^+(z)$  – ро ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар дохили соҳа, яъне  $D^+$ , ва функцияи аналитикии  $W^-(z)$ , ки дар соҳаи  $D^-$  меҳобанд ва шартҳои канонии зеринро қаноаткунанда мебошанд ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{-q_j} \cdot A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$  – функцияи бефосила,  $c(t) \in H$ ,  $\xi_r, \eta_j$  – нуқтаҳои дар контури  $\Gamma$  ҷойгир буда,  $d_r, q_j$  – ададҳои бутуни манфӣ мебошад.

**ТЕОРЕМАИ 3.2.1.** *Бигзор дар масъалаи  $\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t) \varphi_1^-(t) + c_2(t)$  ва масъалаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , ки дар он  $A_2(t)$  – аз нол фарқкунанда буда, функцияи бефосила аст, инчунин  $c_2(t)$  – тааллуқи синфи Гёльдер бошад.*

*Он гоҳ натиҷаи зеринро ба даст меорем:*

*Агар  $\alpha - d = 0$ , бошад, он гоҳ масъала ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha - d > 0$ , бошад, он гоҳ масъала ба синфи функцияҳои дар контур маҳдуд тааллуқ дошта, ҳалли  $\alpha - d$  – ро дорад.*

Дар параграфи сеюми боби сеюми кори диссертатсионӣ бошад оид ба масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила, ки барояш масъалаи зерин:  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  ҳангоми коэффитсиенти масъала махсусияти модулиро дорад, тадқиқ шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Ёфта шавад, функцияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ , дар дохили соҳаи  $D^+$  ва функцияи  $W^-(z)$  – аналитикӣ дар соҳаи  $D^-$  меҳобанд, инчунин, шarti канории зеринро қаноаткунонанд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$  буда,  $d_r, q_j$  – ихтиёрӣ адади мусбат, функцияҳои  $A_1(t)$  ва  $c(t)$  ба синфи Гёльдер тааллуқ доранд. Ҳалли масъала дар синфи функцияҳои дар контури  $\Gamma$  интегронидашаванда ёфт шудааст.

**ТЕОРЕМАИ 3.3.1.**

*Агар  $\alpha = 0$  бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда дар синфи функцияҳои ҷусташаванда ҳалшаванда буда ҳалли он ягона мебошад.*

Агар  $\alpha > 0$  бошад, он гоҳ масъала ҳалли хаттӣ новобастаи  $\alpha$ –ро дорад. Агар  $\alpha < 0$ , бошад, он гоҳ масъала ҳал надошта, агар бо талаб намудани шартҳои иловагии  $|\alpha|$  масъала ҳалли худро пайдо мекунад.

Боби чоруми кори диссертатсионӣ аз шаш параграф иборат буда, дар он оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила барои системаи муодилаи намуди 
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$$
 бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби чоруми кори диссертатсионӣ доир ба масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила, ҳангоми коэффитсиент сифр ва қутбӣ аналитикии тартиби бутунро доранд, барои муодилаи эллиптикии намуди 
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$$
 тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Талаб карда шудааст, ки функсияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи 
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$$
 дар соҳаи  $D^+$  ва  $W^-(z)$ –функсияи аналитикӣ аз соҳа берун ҷойгир аст ва муносибати канории зеринро қаноат мекунад, ёфта шаванд:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$ –функсияи бефосила,  $A_1(t) \neq 0$  ва  $c(t) \in H$ , инчунин,  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ )-нуқтаҳои гуногуни контур буда,  $d_r$ ,  $q_j$ –ададҳои бутун мебошанд.

#### ТЕОРЕМАИ 4.1.1.

Бигзор  $A_4(t)$ –функсияи бефосила, инчунин ба сифр баробар нест ва  $c_2(t)$  шартҳои Гёльдерро қаноаткунанда бошад.

Он гоҳ:

агар  $\alpha = 0$  ( $\alpha = \text{Ind} A_4(t)$ ) бошад, пас масъала ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\alpha > 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли  $\alpha$ –ро

дорад. Агар  $\alpha < 0$  бошад, масъала ҳалшаванда мешавад фақат ва фақат агар бо илова намудани  $|\alpha|$  ва шарти ҳалшавандагии  $\int_{\Gamma} (t - z_0)^{-\alpha} R^+(t) [(t - z_0)^{-\alpha} c_2(t)] dt = 0$  иҷро гардад.

Дар параграфи дуҷуми боби чоруми диссертатсия оид ба масъалаи канории Риман, бо коэффитсиенти бефосила, ки ҳангоми коэффитсиенти масъала дорои сифр ва қутбӣ ҳамроҳшударо, барои системаи муодилаи эллиптикии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$ , татбиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Талаб карда шудааст, функсияи  $W^+(z)$  – ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар соҳаи  $D^+$  буда,  $W^-(z)$  – функсияи аналитикӣ дар соҳаи берунӣ ҷойгир мебошад, инчунин шарти канории

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

–ро қаноаткунонанд, ҷустуҷӯ карда шаванд. Дар ин ҷо  $A_1(t)$  – функсияи бефосила буда,  $A_1(t) \neq 0$  аст,  $c(t) \in H(\Gamma)$ ,  $\xi_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \mu$ ) ва  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \gamma$ ) – нуқтаҳои фарқкунандаи контур,  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралӣ мебошанд.

#### ТЕОРЕМАИ 4.2.1.

Бигзор  $A_1(t)$  функсияи бефосила ва  $A_1(t) \neq 0$ ,  $c(t) \in H$  бошад,  $\alpha = \text{Ind} A_1(t) - \text{Ind} t^{-q} A_2(t) = \alpha - d$  –индекси масъала мебошад.

Агар  $\alpha - d = 0$ , бошад, пас масъала ҳалли ягона дорад. Агар  $\alpha - d > 0$ , бошад, он гоҳ масъалаи ҳамроҳшуда ҳалли  $\alpha - d$  –ро дорад. Агар  $\alpha - d < 0$ , бошад, дар ин ҳолат масъала ҳал надошта, барои ҳалшаванда будани он шарти иловагии  $|\alpha - d|$  талаб карда мешавад.

Параграфи сеҷуми боби мазкур оид ба масъалаи канории Риман, ҳангоми коэффитсиенти масъала махсусияти модулиро

дорад, барои муодилаи дифференсиалии намуди  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  тадқиқ намуда, натиҷаҳои наво ба даст оварда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Ёфта шавад, функсияи  $W^+(z)$ , ки ҳалли регулярии муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  дар дохили соҳа ва функсияи аналитикии  $W^-(z)$ , ки аз соҳа берун ҷойгир бошад, шарти канории зеринро қаноат кунанд:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

ки дар ин ҷо  $A_1(t)$ —функсияи бифосила ва нобаробари нол аст,  $c(t) \in H(\Gamma)$ .  $\xi_r, \eta_j \in \Gamma$ ,  $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$ ,  $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$ ,  $d_r, q_j$ —ихтиёрӣ адади ҳақиқӣ мебошад.

#### ТЕОРЕМАИ 4.3.1.

*Бигзор  $A_1(t)$ —функсияи бифосила дар контури  $\Gamma$  ва  $\text{Ind} A_1(t) = \alpha$ , ки  $c(t)$  аз синфи Гёльдер дода шуда бошад. Пас:*

*Агар  $\alpha - q^{(2)} = 0$  бошад, он гоҳ масъала ҳалли ягонаро дорад. Агар  $\alpha - q^{(2)} > 0$  бошад, пас масъала ҳалшаванда буда, дорои ҳалли  $\alpha - q^{(2)}$  мебошад. Агар  $\alpha - q^{(2)} < 0$  бошад, масъалаи гайриякҷинсаи ҳалли ягона надорад. Барои ҳалшаванда будани масъалаи гайриякҷинса шартҳои иловагии ҳалшаванда будани масъала  $|\alpha - q^{(2)}|$  талаб карда мешавад.*

Дар параграфи чоруми боби чоруми рисолаи диссертатсионӣ доир ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бифосила татбиқ карда шудааст, ки коэффитсиенти масъала характерӣ аналитикиро доранд.

**ГУЗОРИШИ МАСЪАЛА.** Бигузор контури  $\Gamma$  аз  $m+1$  контурҳои соддаи сарбасти типии Ляпунов  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  гирифта шуда, соҳаи  $D^+$  —ро маҳдуд мекунад ва илова ба он  $m$  соҳаҳои як алоқаи  $D_k^-$  ( $k=1, 2, \dots, m$ )

ва соҳаи беохири  $D_k^-$  ихота карда шудааст. Дар оянда барои кутоҳ шудани тарзи навишт бо  $D^-$  соҳаро ишора мекунем.

**МАСЪАЛАИ R.** Функцияҳои аналитикии  $W^\pm(z)$  ёфта шаванд, ки онҳо дар соҳаҳои  $D^\pm$ , ки нуқтаҳои контурро дарбар гирифта чойгиранд ва шарти канории зеринро қаноаткунонанд, яъне

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j$  баъзе нуқтаҳои контури  $\Gamma$  буда,  $\xi_r$  – сифри функцияи  $A_1(t)$  ва  $\eta_j$  – кутбӣ функцияи  $A_1(t)$  мебошад. Аз ин ҷо  $d_r, q_j$  – ададҳои натуралӣ, ҳуди  $A_1(t)$  – бошад, функцияи бефосила,  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошад.

Индекси масъаларо бо  $\mathfrak{a} = \text{Ind} A_1(t)$  ишора мекунем ва  $q = \sum_{j=1}^{\gamma} q_j, d = \sum_{r=1}^{\mu} d_r$  мебошад. Ҳамин тариқ, ҳалли масъала дар синфи функцияҳои дар контури  $\Gamma$  маҳдуд ҷустуҷӯ карда мешавад.

#### ТЕОРЕМАИ 4.4.1.

*Масъалаи канории Риман дар ҳолате, ки индекси  $\mathfrak{a} - p = 0$  будан ҳалишаванда буда ҳалли ягонро дорад. Ва дар ҳолати индекси масъала  $\mathfrak{a} - p > 0$  будан масъала ҳалли хаттии новобастаи тартиби  $\mathfrak{a} - p - p_0$  дорад. Инчунин, дар ҳолати  $\mathfrak{a} - p < 0$  будан масъалаи канории Риман ҳал надошта, барои ҳалишавандагии масъалаи додашуда талаб карда мешавад, ки шарти ҳалишавандагии  $|\mathfrak{a} - p|$  иҷро шавад ва бо иҷроии шарти талаб кардашуда масъала ҳалли ягонро пайдо мекунад.*

Дар параграфи панҷуми боби чоруми кори диссертатсионӣ бошад оид ба сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффитсинти бефосила, ҳангоми коэффитсиенти масъалаи канори сифр ва кутбӣ типии ҳамроҳшудаи аналитикиро доранд, тадқиқ карда шудааст.

**МАСЪАЛАИ R.** Ёфта шаванд, функцияҳои аналитикии  $W^\pm(z)$  – ро дар соҳаи  $D^\pm$  чойгир мебошанд ва қариб, ки дар ҳама нуқтаҳои контури  $\Gamma$  қимати лимитиро доранд ва  $W^\pm(t)$  шарти канории

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (\overline{t - \xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\overline{t - \eta_j})^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

-ро қаноат кунонанда мебошад. Дар ин ҷо  $\xi_r, \eta_j$  баъзе нуқтаҳо аз контури  $\Gamma$  буда,  $A_1(t)$  — коэффисиенти масъалаи канории Риман мебошад ва он функсияи бефосилааст. Инчунин  $d_r, q_j$  ададҳои натуралӣ ва  $c(t) \in H(\Gamma)$  мебошад.

#### ТЕОРЕМАИ 4.5.1.

*Масъалаи ҳамроҳшудаи канории Риман дар ҳолате, ки индекси  $\alpha - p = 0$  будан, ҳашиаванда буда ҳалли ягоноро дорад. Ва дар ҳолати индекси масъала  $\alpha - p > 0$  будан, масъалаи ҳамроҳшудаи ғайриякҷинсаи Риман ҳалли хаттии новобастаи тартиби  $\alpha - p$  -ро дорад. Инчунин, дар ҳолати  $\alpha - p < 0$  будан масъалаи ҳамроҳшудаи канории Риман ҳал надошта, барои ҳашиавандагии масъалаи додашуда талаб карда мешавад, ки шартҳои иловагии ҳашиавандагии  $|\alpha - p|$  иҷро шавад ва бо иҷроии шартҳои талаб кардашуда, ки дар ин ҷо  $S_k g = 0$  ва  $S_k$  функсияҳои хаттии новобастаанд, масъала ҳашиавандаанд ва ҳалли ягоноро дорад.*

Дар параграфи шашуми боби чоруми кори диссертационӣ бошад, оиди ҳолатҳои сингулярнокии масъалаи канории Риман бо коэффисиенти бефосила, тадқиқ карда шудааст.

Тасдиқ карда шудааст, ки шумораи ҳалҳои масъалаи канорӣ Риман аз синфи функсияҳои дар контур маҳдуд мебошанд, дар он миқдори шумораи нулҳои коэффисиент тағйир наёфта ва дар натиҷа шумораи тартиби суммаи қутбҳо кам мешаванд.

#### ТЕОРЕМАИ 4.6.1.

Бигзор  $a(t)$  функсияи бефосила буда,  $Ind a(t) \cdot t^{-m} = \alpha - m$ ,  $\alpha = Ind_{\Gamma} a(t)$  ва  $b(t)$  — функсияи маҳдуд ва чениаванда аст,  $c(t) \in L_p$  ҳангоми  $p > 1$  будан.

Ва бигузор  $\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + s_p}$ , ки дар ин ҷо  $s_p$  - норма дар фазои  $L_p$

$s_\mu = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau$  — оператори сингулярӣ мебошад.

Аз ин ҷо бар меояд, ки ҳангоми  $\mathfrak{x} - m \geq 0$ ,  $l = 2(\mathfrak{x} - m)$ , ва  $p = 0$

Ва ҳангоми  $\mathfrak{x} - m < 0$  будан,  $l = 0$ ,  $p = 2(\mathfrak{x} - m)$  мешавад.

## ХУЛОСА

### Натиҷаҳои асосии кори илмӣ аз инҳо иборат мебошад:

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате, ки коэффитсиент махсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [1-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате исбот карда шудааст, ки коэффитсиенти масъала махсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [14-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$  дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала махсусияти тартиби касриро дорад, ёфта шудааст [7-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала махсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [11-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала махсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [12-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате, ки коэффитсиенти масъала махсусияти тартиби модулиро дорад, ёфта шудааст [2-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате, ки коэффитсиент масъала махсусияти тартиби бутунро доранд, ёфта шудааст [15-M];
- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате, омӯхта шудааст, ки коэффитсиенти масъала махсусияти характери аналитикии ҳамроҳшударо дорад, ёфта шудааст [13-M];

- Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате омӯхта шудааст, ки коэффитсиенти он махсусияти тартиби касриро доранд, ёфта шудааст [3-М].

**Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот.** Натиҷаҳое, ки дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашудаанд дар назарияи масъалаҳои канории функсияҳои аналитикӣ, функсияҳои аналитикии умумикардасуда ва функсияҳои гармоникӣ ва инчунин барои назарияи чандирӣ ва электродинамика татбиқ кардан

## ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РӯИ МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

**1. Мақолаҳое, ки дар маҷалаҳои тақризшавандаи аз ҷониби Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия шудаанд:**

[1-М]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений эллиптического типа. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник Таджикского национального университета. – 27 декабря 2021. – г. Душанбе №4. – С. 74-86.

[2-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$ , когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры. [Матн] / М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2022. – Том 1. №3(25). – С. 22-31.

[3-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z) + B(z)$  [Матн] / М.И. Надирова // Вестник Хорогского университета. – 2023. – №3(27). – С. 262-267.

[4-М]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в

городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. –Том 1. №2(47). – С. 33-40.

## **2. Дар дигар нашрияҳо:**

[5-М]. Надирова М.И. Сингулярные граничные задачи сопряжения. [Матн] / М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ-Душанбе, 02-апреля 2016 г. –С.136-139.

[6-М]. Надирова М.И. Задача сопряжения аналитических функций с нулями и полюсами коэффициента модульного характера. [Матн] /М.Б. Холикова, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы обучения математике, физике и информатике в средней и высшей школе»- ДДОТ, -Душанбе, 2016. – С.109-111.

[7-М]. Надирова М.И. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре. [Матн] / Холикова М.Б., Усмонов М.А., Надирова М.И. // Материалы республиканской научно-практической конференции, «посвященные 2020-2040гг. «двадцатилетие обучения и развития естественных, и математики в области науки и образования республики Таджикистан», Данғара. – 2020. – с.26-30.

[8-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа. [Матн] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темурова Собира. Душанбе. 25-26 июня 2021. – с.233-237.

[9-М]. Надирова М.И. Общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости в сингулярном случае. [Матн] /М.Б. Холикова, М.А. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы республиканской научно-методической конференции на тему: «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)». Празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. Душанбе.-2021. –с.92-95.

[10-М]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot U(z)$ . [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Додожона Исмоилова. НАНТ, Инст. математики им. А. Джураева, ТНУ –Душанбе. 29-30 апреля 2022. – с. 223-226.

[11-М]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы «Современные проблемы математики и её приложения». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков –г.Душанбе. 20-21 октября 2022г. – с.232-236.

[12-М]. Надирова М.И. Сингулярная краевая задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы. [Матн] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции на тему: «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». Посвященной «Развитию естественных, точных и математических наук» (2020-2040). – 29 ноября 2022. -г. Душанбе. – С. 187-193.

[13-М]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения первого порядка эллиптического типа в сингулярном случае [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник научных статей международной научно-теоретической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) –30-31 мая 2023г. г.Душанбе. – Стр. 251-254.

[14-М]. Надирова М.И. Сингулярная граничная задача Римана для эллиптических уравнений вида  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$ , когда коэффициент задачи

непрерывная функция. [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // НИЦ Вестник науки. «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции – 27 май 2025г. – г.Уфа № К-554-16. – С. 18-29.

[15-М]. Надирова М.И. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно – аналитического вида. [Матн] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Международная научно-практическая конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040годы)».- 2025г. –г. Душанбе, – С. 312-317.

## АННОТАЦИЯ

диссертационной работе Надировой Мохрухсор Иноятуллоевны на тему «Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа», представленную на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100-Математика (6D060102– Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное уравнение).

**Ключевые слова:** эллиптический уравнения, аналитическая функция, ноль, полюс, функция из класса Гёльдера, непрерывная функция, интерполяционный многочлен.

**Цель исследования.** Целью диссертационной работы являются решение сингулярной краевой задачи Римана для эллиптического уравнения в случае, когда коэффициент задачи является непрерывной функцией:

➤ когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов аналитического вида;

➤ когда коэффициент задачи Римана характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида;

➤ когда коэффициент задачи характеризуется особенностью модульного порядка.

**Объект исследования.** Объектом исследования являются изучение сингулярных краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Предмет исследования.** Предметом исследования являются доказательство теорем, определяющие число решений однородной задачи  $l$  и число условий разрешимости неоднородной задачи  $p$ .

**Методы исследования.** В диссертационной работы используются методы краевых задач теории аналитических функций, обобщённо - аналитических функций и элементы функционального анализа

**Научная новизна исследования.** Результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующих решениях краевых однородных и неоднородных задач Римана, т.е.:

○ Изучаются сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z),$$

когда коэффициент задачи Римана характеризуется нулями и полюсами целого порядка, нулей и полюсов сопряжённого вида, также, особенности модульного порядка.

○ Изучается сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z),$$

когда коэффициент задачи Римана обладает нули и полюсы аналитического вида, нулей и полюсов сопряжённо-аналитического характера, а также имеет особенность модульного порядка.

○ Изучается сингулярные случаи, задачи Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

когда коэффициент задачи Римана характеризуется нулей и полюсов целого порядка, нули и полюса сопряжённо-аналитического вида, также, особенность дробного порядка.

**Теоретическая и научно-практическая значимость работы.** Работа имеет теоретического характера. Методы развития в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании краевых задач теории гармонических функций, краевых задач теории аналитических функций и теории обобщённых аналитических функций.

## АННОТАТСИЯИ

**диссертатсияи Надирова Моҳрухсор Иноятуллоевна** дар мавзуи «Масъалаи канории сингулярии Риман бо коэффитсиенти бефосила барои системаи муодилаҳои типии эллиптикии тартиби якум», барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)- доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100-Математика (6D060102-Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ).

**Калимаҳои калидӣ:** Муодилаҳои эллиптикӣ, функсияҳои аналитикӣ, нул, кутб, функсияи шартӣ Гёльдерро қаноаткунанда, функсияи бефосила, бисёрраъзогии интерполясионӣ.

**Мақсади таҳқиқот.** Мақсади кори диссертатсионӣ аз таҳқиқоти масъалаи канории Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикии тартиби якум иборат мебошад, ки коэффитсиенти масъалаи Риман дорои махсусиятҳои зерин мебошад:

- сифр ва кутбӣ характери аналитикиро дорад;
- сифр ва кутбӣ аналитикии ҳамроҳшударо дорад;
- инчунин махсусияти модулиро дорад;

**Объекти таҳқиқот.** Объекти тадқиқот, ин омӯзиши ҳолати сингулярии масъалаи Риман бо коэффитсиенти бефосила барои муодилаҳои зерин мебошад:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Усулҳои таҳқиқот.** Дар диссертатсия методҳои назарияи функсияҳои комплексӣ ва элементҳои анализи функционалӣ истифода шудаанд.

**Предмети таҳқиқот.** Предмети тадқиқот аз исботи теоремаҳое, ки дар онҳо шумораи ҳалҳои масъалаи яқчинсаи  $l$  ва шартҳои бо иҷро шудани онҳо масъалаи ғайрияқчинсаи  $p$  ҳал доранд, омӯхта шудааст.

**Навгониҳои илмӣ таҳқиқот.** Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои нави зерин ба даст оварда шудаанд:

○ Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффитсиенти масъалаи канории Риман сифр ва кутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва кутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда, инчунин, махсусияти тартиби модулиро дорад;

○ Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффитсиенти масъалаи канории Риман сифр ва кутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва кутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда, инчунин, махсусияти тартиби модулиро дорад;

○ Ҳалли муодилаи  $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z)$  дар ҳолате ёфта шудааст, ки коэффитсиенти масъалаи канории Риман, сифр ва кутбӣ намуди аналитикӣ, сифр ва кутбӣ аналитикии ҳамроҳшуда ва махсусияти тартиби касиро дорад.

**Аҳамияти назариявӣ ва илмӣ амалии таҳқиқот.** Кори диссертатсионӣ ҷанбаи назариявӣ дорад. Усулҳои тадқиқот дар кори диссертатсионӣ ва натиҷаҳои бадастоварда шударо барои масъалаҳои канории функсияҳои аналитикӣ, масъалаҳои канории функсияҳои аналитикии умумикардшуда ва масъалаҳои канории гармоникӣ истифода бурдан мумкин аст.

## Annotation

**for the dissertation of Nadirova Mohrukhsor Inoyatulloevna** on the topic of “Singular Riemann boundary value problems with continuous coefficients for a system of first-order elliptic equations” for the academic degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 - Mathematics 6D060102 - Differential equations, dynamical systems, and optimal control.

**Keywords:** elliptic equations, analytic function, zero, pole, Hölder continuous function, continuous function, interpolation polynomial.

**Research objective.** The aim of the dissertation is to solve singular Riemann boundary value problems for a system of first-order elliptic differential equations in the case where the coefficient is a continuous function but has a singularity of the following type at a finite point:

- when the coefficient has zeros and poles of integer order;
- when the coefficient has zeros and poles of conjugate-analytic type;
- a singularity of a modular nature.

**Research methods.** Methods of boundary value problems in the theory of analytic, generalized analytic functions, and elements of functional analysis are used in this dissertation.

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

**Subject of the study.** The subject of the research is the proofs of theorems that define the number of solutions to the homogeneous problem and the number of solvability conditions for the non-homogeneous problem.

**Research methods.** The dissertation uses methods from boundary value problems of the theory of analytic functions, generalised analytic functions, and elements of functional analysis.

**Scientific novelty of the research.** The results of the dissertation are new and consist in solving the following problems:

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has zeros and poles of integer order, zeros and poles of conjugate type, and a singularity of a modular nature.

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has zeros and poles of analytic structure, zeros and poles of conjugate-analytic type, and also a singularity of a modular nature.

- Singular cases of the Riemann problem with continuous coefficients are studied for equations:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z) \overline{W(z)} + c(z),$$

when the coefficient of the Riemann problem has a fractional-order singularity, zeros and poles of an analytic nature, and a singularity of a conjugate-analytic type.

**Theoretical and practical significance of the work.** The work is primarily theoretical. The methods developed in the dissertation and the obtained results can be applied in the study of boundary value problems in the theory of harmonic functions, boundary value problems in the theory of analytic functions, and the theory of generalized analytic functions.