На правах рукописи

Дадабоев Парвиз Абдусаломович

# ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

**Душанбе — 2023**

Работа выполнена на Институте математики им. академика А.Джураева и на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

**Научный руководитель:** **Шабозов Мирганд Шабозович**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

**Официальные оппоненты:** **Волков Юрий Степанович,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт математики имени С.Л.Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук;

**Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Технологического университета Таджикистана

**Ведущая организация:** Бохтарский государственный университет имени Н.Хусрава

Защита состоится *18 октября 2023 г. в 10:00* часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, по адресу: 734025, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, зал диссертационного совета.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2023 г.

**Ученый секретарь**
**диссертационного совета 73.2.012.03,**
**доктор физико-математических наук** **Р.Н. Одинаев**

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** В пятидесятых годах прошлого столетия С.М.Никольский[1] впервые поставил и решил экстремальные задачи построения наилучших квадратурных формул на заданном классе функций – задачи выбора узлов и коэффициентов квадратурной формулы из условия минимальности точной оценки остатка формулы на этом же классе функций. Аналогичную задачу в случае фиксированных узлов впервые рассмотрел А.Сард[2]. В дальнейшем теория построения наилучших квадратурных формул стала важным разделом вычислительной математики. Существенные результаты по отысканию наилучших (оптимальных) квадратурных формул были получены учениками и последователями С.М.Никольского – Н.П.Корнейчуком, В.П.Моторным, А.А.Женсыкбаевым, В.Ф.Бабенко, Б.Д.Бояновым, А.А.Лигуном, К.И.Осколковым, М.И.Левиным, М.Ю.Гиршовичем и многими другими. Все эти результаты приведены Н.П.Корнейчуком в "Дополнение" к книге С.М.Никольского[1]. В этом "Дополнении" отмечается, что данная теория получила значительное развитие, но в ней остался ряд нерешённых проблем. Прежде всего, значительно менее развита теория построения многомерных наилучших кубатурных формул, построения наилучших квадратурных формул для сингулярных и криволинейных интегралов. Поэтому решение экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных формул для вышеперечисленных интегралов является актуальным.

Частично этот пробел – нахождение оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов – восполняется в данной диссертационной работе, а именно: здесь рассматривается задача построения наилучших квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций многих переменных, определённых в точках заданной пространственной кривой.

Отметим, что для некоторых классов многомерных функций и кривых наилучшие квадратурные формулы для криволинейных интегралов найдены С.Б.Вакарчуком[3], М.Ш.Шабозовым[4], М.Ш.Шабозовым и К.Тухлиевым[5],

[1]Никольский С.М. Квадратурные формулы // М.: Наука. – 1988. – 256 С.

[2]Sard A. Best approximation integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math. – 1949. – LXXI. – P.80–91.

[3]Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. – 1986. – Т.38, №5. – С.643–645.

[4]Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. – 2014. – Т.96, №4. – С.637–640.

[5]Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ, Сер.1. – 2015. – Т.2(60). Вып.4. – С.563–575.

М.Ш.Шабозовым и М.К.Абдукаримзода[6], Д.С.Сангмамадовым[7,8], Ф.М.Мирпоччоевым[9], Л.Г.Файзмамадовой[10] и другими.

Несмотря на полученные результаты по оптимизации квадратурных формул для криволинейных интегралов, всё же точные результаты для классов функций и кривых найдены в редких случаях.

**Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами.** Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2018-2023 гг. по теме «Теория приближения функций».

**Цель и задачи исследования.** Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классах кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов;
- найти оптимальную квадратурную формулу типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r = 1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1 \le q < \infty)$.

**Основные методы исследования.** В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания и метод Н.П.Корнейчука отыскания наилучших квадратурных формул на функциях, обращающих квадратурную сумму в нуль.

**Научная новизна исследований.** В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах

[6]Шабозов М.Ш., Абдукаримзода М.К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Чебышевский сборник. – 2020. – Т.21. – Вып. 3. – С.250–261.

[7]Сангмамадов Д.С. Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. – 2011. – Т.54, №9. – С.709–714.

[8]Сангмамадов Д.С. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функции // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2011, №3(144). – С.7–13.

[9]Мирпоччоев Ф.М. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №6. – С.448–454.

[10]Файзмамадова Л.Г. Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №9. – С.701–706.

функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классах кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных вектор-коэффициентах и узлах;
- найдены оптимальные квадратурные формулы типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

**Положения, выносимые на защиту:**

- основные теоремы о нахождении асимптотически точных оценках остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классах кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$;
- основные теоремы об оптимальных квадратурных формулах типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- основные теоремы о наилучших квадратурных формулах вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные в диссертационной работе результаты о приближённом вычислении криволинейных интегралов имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты могут применяться при отыскании точных оценок погрешности приближённых интегралов для вычисления поверхностных интегралов. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2022 гг.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.)
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);

- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.);
- международной научной конференции “Актуальные проблемы современной математики” (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- республиканской научной конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества” (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

**Публикации по теме диссертации.** Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий Перечень ВАК РФ, а 6 – в трудах международных и республиканских конференций.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 45 наименования, занимает 68 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

## Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертационной работы излагаются вопросы получения асимптотически точных оценок погрешности приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых.

В “Дополнении” Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского отмечается, что по экстремальным задачам теории квадратур получен ряд существенных результатов по минимизации погрешности квадратурных формул для соболевских классов функций одной переменной для классов функций, задаваемых модулями непрерывности[1].

В то же время в указанном “Дополнении” отмечается, что до настоящего времени немало задач для многомерных случаев ещё не решено. Можно полагать, что это замечание в полной мере также относится к задаче отыскания наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул для различных классов функций находится на стадии разработки. Отметим, что задача приближённого вычисления криволинейных интегралов для функций двух переменных, определённых на плоской, кривой ранее изучена в работах К.Тухлиева[11], М.Ш.Шабозова и Д.С.Сангмамадова[12], М.Ш.Шабозова и Л.Г.Файзмамадовой[13], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозовой[14] и др.

В перечисленных работах вычислены точные оценки погрешности на некоторых классах функций двух переменных и плоских кривых, задаваемых модулями непрерывности. Желая продолжить исследования по данной тематике, мы в первой главе диссертации вводим в рассмотрение аналог классических квадратурных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона для приближённого вычисления многомерных криволинейных интегралов и найдём асимптотически точные оценки погрешности этих квадратурных формул для некоторых классов функций многих переменных и пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности. При этом при заданных значениях вектор-коэффициентов $P := \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и вектор-узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^{N}$ находятся асимптотически точные оценки погрешности рассматриваемых квадратурных формул на исследуемых классах функций. В первом параграфе приведены определения, обозначения и постановка задач о нахождении асимптотически точных оценок остатка классических квадратурных формул (прямоугольников, трапеции и Симпсона) при фиксированных векторах коэффициентов и узлах для приближенного вычисления многомерных криволинейных интегралов.

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$. Обозначим

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой $\Gamma$ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки $A$. Тогда как известно кривая $\Gamma$ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \ (0 \le t \le L), \tag{2}$$

[11]Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2013. Вып.2. – Ч.1. – С.50–57.

[12]Шабозов М.Ш., Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2012. – Т.55, №11. – С.847–852.

[13]Шабозов М.Ш., Файзмамадова Л.Г. Наилучшая формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2012, №2(147). – С.7–15.

[14]Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2013. – Т.56, №7. – С.509–514.

а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ от переменной $t$. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определённого интеграла по отрезку $[0, L]$

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N\big(f;\Gamma;P,T\big) := \sum_{k=1}^{N} p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) \tag{4}$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^N$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа, и векторами узлов $T = \big\{t_k : 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\big\}$. Через

$$\big|R_N(f;\Gamma)\big| := \big|R_N(f;\Gamma;P,T)\big| = \big|J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\big|$$

обозначим погрешность квадратурной формулы (4).

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\big\{f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_m(t)\big)\big\}$, определённых в точках кривой $\Gamma$ и интегрируемых как сложные функции параметра $t$ на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N\big(\mathfrak{M};\Gamma;P;T\big) = \sup\big\{|R_N(f;\Gamma;P;T)| : f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых $\Gamma$, заданных параметрическими уравнениями (2), длина которых равна $L$. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}$ обозначим

$$R_N\big(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L);P;T\big) = \sup\big\{|R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P;T)| : \Gamma \in \mathfrak{N}(L)\big\}.$$

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega\big(|t' - t''|\big), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \omega(t'') - \omega(t') \le \omega(t'' - t'), \quad 0 \le t' \le t'' \le L, \quad \omega(0) = 0.$$

Через $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких пространственных кривых $\Gamma \subset R^m$, длиною $L$, заданных параметрическими уравнениями (2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L], i = \overline{1, m}$, то есть

$$\big|\varphi_i(t'') - \varphi_i(t')\big| \le \omega_i\big(|t'' - t'|\big),\ t', t'' \in [0, L],\ i = \overline{1, m}.$$

В случае $\omega_i(t) \equiv \omega(t), i = \overline{1,m}$ вместо $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ будем писать $H^{\omega}_m[0,L]$. Если $\omega(t) = Kt^{\alpha}, K > 0, 0 < \alpha \le 1$, то получим класс Гёльдера с константой $K$ порядка $\alpha$, которую обозначим $KH^{\alpha,m}[0,L]$:

$$|\varphi_i(t'') - \varphi_i(t')| \le K|t'' - t'|^{\alpha}, \; t', t'' \in [0,L], \; i = \overline{1,m}.$$

Во втором параграфе первой главы приводится вывод формулы Тейлора с интегральным остатком для сложной функции многих переменных, зависящим от параметра следующего вида

$$F(t) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!} \nabla^{(l)} f\big(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)\big)(t-t_0)^l +$$

$$+\frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^L \big(t-u\big)_+^{r-1} \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_m(u)\big) du, \tag{5}$$

где $u_+^l = \big[\max(0,u)\big]^l$; $l \in \mathbb{N}$, а оператор $\nabla$ определен равенством

$$\nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}$$

и далее для $r = 2, 3, \dots$, $\nabla^{(r)} f$ определим рекуррентно

$$\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) := \nabla\big(\nabla^{(r-1)} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))\big).$$

Полученная обобщённая формула Тейлора (5) в дальнейшем будет основным нашим инструментом для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа (1) при помощи квадратурной формулы (4), при произвольном вектор-коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^N$ и вектор-узлов $T = \big\{t_k\big\}_{k=1}^N$. Здесь в предположении точности квадратурной формулы (4), для многочленов степени $r-1$ найден общий вид остатка квадратурной формула (4) в интегральном виде

$$R_N(f,\Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) dt - \sum_{k=0}^N p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)\big) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^L K_r(t) \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) dt, \tag{6}$$

где ядро $K_r(t)$ имеет вид:

$$K_r(t) = \left[\frac{(L-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^N p_k (t_k - t)_+^{r-1}\right], \;\; u_+^m := \big[\max(0,u)\big]^m. \tag{7}$$

Отметим, что ядро $K_r$ является полиномиальным сплайном степени $r-1$, с дефектом 1 в узлах $t_k$ квадратурной формулы (4).

Формулами (6) и (7) воспользуемся в последующих параграфах первой главы при выводе асимптотически точных оценок погрешности на классах функций многих переменных и классах пространственных кривых. Через

$$W^{(r)}H_m^{\omega} := W^{(r)}H_m^{\omega}[0,L] \ (r \in \mathbb{Z}_+, \ W^{(0)}H_m^{\omega} \equiv H_m^{\omega})$$

обозначим множество функций $f(M) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big)$, у которых почти всюду в области $Q$ существуют частные производные

$$\frac{\partial^r f}{\partial\varphi_i^{r-s}\partial^s\varphi_j}, \ i,j = \overline{0,k}, \ s = \overline{0,r},$$

и для любых двух точек $t', t'' \in [0,L]$ удовлетворяющих условию

$$\Big|\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t'), \varphi_2(t'), \dots, \varphi_m(t')\big) - \nabla^{(r)} f\big((\varphi_1(t''), \varphi_2(t'')), \dots, \varphi_m(t'')\big)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\big| \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_i\big(|t'-t''|\big), \tag{8}$$

где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ – заданные модули непрерывности.

В третьем параграфе при приближённом вычислении криволинейных интегралов вида (1) используется аналог классической формулы средних прямоугольников следующего вида

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \dots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{9}$$

В этой формуле вектор коэффициентов $\bar{P} = \big\{\bar{p_k} : \bar{p_k} = L/N\big\}_{k=1}^{N}$ и вектор узлов $\bar{T} = \big\{\bar{t_k} : \bar{t_k} = (2k-1)L/(2N)\big\}_{k=1}^{N}$ заданы и требуется определить погрешность формулы (9) на классах функций $W^{(l)}H_m^{\omega}$ и классах кривых $H^{\omega_l,\dots,\omega_m}[0,L]$, удовлетворяющих неравенству (8). Таким образом, требуется найти точное или асимптотически точное значение следующей величины

$$R_N\big(W^{(l)}H_m^{\omega}; \ H^{\omega_l,\dots,\omega_m}[0,L]; \ \bar{P}, \bar{T}\big) =$$

$$= \sup\Big\{\big|R_N(f;\Gamma;\bar{P},\bar{T})\big| : f \in W^{(1)}H_m^{\omega}; \ \Gamma \in H^{\omega_l,\dots,\omega_m}[0,L]\Big\}.$$

Здесь основным результатом является

**Теорема 1.3.1.** *Для погрешности квадратурной формулы прямоугольников (9) на классах функций* $W^{(1)}H_m^{\omega}$ *и классах кривых* $\Gamma \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедливы оценки*

$$R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P}, \bar{T}\big) = \theta_N L \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{L/(4N)} \omega_i(t)dt, \quad \frac{1}{2} \le \theta_N \le \frac{5}{2}.$$

*Если же* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *– выпуклые вверх на отрезке* $[0, L]$ *модули непрерывности, то имеет место предельное равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P}, \bar{T}\big)}{L\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt} = 1.$$

**Следствие 1.3.1.** *В условиях теоремы 1.3.1 при* $\omega_i(t) = \omega(t)(i = \overline{1,m})$ *справедливы равенства*

$$R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega,m}; \bar{P}, \bar{T}\big) = \theta_N\, mL \int\limits_0^{L/(4N)} \omega(t)dt, \quad \left(\frac{1}{2} \le \theta_N \le \frac{5}{2}\right). \tag{10}$$

*Если* $\omega(t)$ *– выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega,m}; \bar{P}, \bar{T}\big)}{mL \int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t)dt} = 1. \tag{11}$$

*Из* (10), *в частности, если* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $K > 0$, $0 < \alpha \le 1$, *то имеем:*

$$R_N\big(KW^{(1)}H_m^{\alpha};\ KH^{\alpha,m}; \bar{P}, \bar{T}\big) = \frac{\theta_N mKL}{\alpha+1}\left(\frac{L}{4N}\right)^{\alpha+1}, \quad \frac{1}{2} \le \theta_N \le \frac{5}{2},$$

*а из асимптотического равенства* (11) *получаем*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4R_N\big(KW^{(1)}H^{\alpha,m}, H^{\alpha,m}; \bar{P}, \bar{T}\big)}{mKL\cdot\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\dfrac{L}{2N}\right)^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+3}\cdot(\alpha+1)}{mKL^{\alpha+2}} \lim_{N\to\infty} N^{\alpha+1} R_N\big(KW^{(1)}H^{\alpha,m}, H^{\alpha,m}; \bar{P}, \bar{T}\big) = 1.$$

*Из последнего равенства следует асимптотическое равенство*

$$R_N\big(KW^{(1)}H_m^{\alpha};\ H^{\alpha,m}; \bar{P}, \bar{T}\big) \sim \frac{1}{N^{\alpha+1}}\cdot\frac{mKL^{\alpha+2}}{2^{\alpha+3}(\alpha+1)},\ \text{при } N \to \infty.$$

В четвертом параграфе первой главы рассматривается задача нахождения асимптотически точной оценки погрешности квадратурной формулы Симпсона приближенного интегрирования криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и классах кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, задаваемых модулями непрерывности. В этом случае квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right)dt =$$

$$= \frac{L}{6N}\Bigg\{ f\left(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_m(0)\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{2N}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{2N}\right)\right) + f\left(\varphi_1(L),\ldots,\varphi_m(L)\right)\Bigg\} + R_N(f,\Gamma).$$

Доказано, что для произвольной функции $f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ и $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ справедлива оценка

$$\left|R_N(f,\,\Gamma)\right| \le \frac{L^2}{36N}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{3N}\right)(2+t)dt. \tag{12}$$

Из (12) следует оценка

$$\left|R_N(f,\,\Gamma)\right| \le \frac{5L^2}{72N}\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(\frac{L}{3N}\right).$$

Укажем ещё оценку остатка на классе $W^{(1)}H_m^{\omega}$, усложнённой квадратурной формулой трапеций, имеющей вид:

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f\big(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_m(0)\big) + f\big(\varphi_1(L),\ldots,\varphi_m(L)\big) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_N(f,\,\Gamma) \tag{13}$$

и являющейся точной для многочленов первой степени. Для погрешности квадратурной формулы (13) на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ доказано следующее асимптотическое неравенство

$$\frac{L}{8N}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt \le R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega};\ H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big) \le$$

$$\leq \frac{L}{8N}\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt + \frac{1}{32}\left(\frac{L}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{m}\omega_i(1). \tag{14}$$

Из неравенства (14) сразу следует предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{8NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega};\ H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)}{L\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt} = 1. \tag{15}$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

**Теорема 1.4.1.** *Для погрешности квадратурной формулы трапеций (13) справедливо предельное равенство (15). В частности, если* $\omega_i(t) = \omega(t)$, $i = \overline{1,m}$, *то имеем:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{8NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H_m^{\omega}\big)}{mL\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt} = 1. \tag{16}$$

*Если в (16) полагать* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$ $(K > 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$, *то получаем*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2^{\alpha+3}(\alpha+1)}{mL^{\alpha+1}}N^{\alpha+1}R_N\big(W^{(1)}H_m^{\alpha}; H_m^{\alpha}\big) = 1.$$

Во второй главе диссертации изучается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных малой гладкости и некоторых классов пространственных кривых, заданных параметрическими формулами.

Произвольная квадратурная формула (4) для приближенного вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^{N}$ и векторами узлов $T = \big\{t_k:\ 0 \leq t_1 < \ldots < t_N \leq L\big\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) по аналогии с монографией С.М.Никольского[1] определим равенством

$$|R_N(f;\Gamma)| := |R_N(f;\Gamma;P,T)| = |J(f;\Gamma) - \mathscr{L}_N(f;\Gamma;P,T)|.$$

Если $\mathfrak{M} := \big\{f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))\big\}$ – некоторый класс функций, определенных в точках кривой $\Gamma$ и интегрируемых как сложные функции переменной $t$ на отрезке $[0,L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности квадратурной формулы на классе $\mathfrak{M}$, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) = \sup\big\{\,\big|R_N(f;\Gamma;P,T)\big|:\ f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Через $\mathscr{T} := \mathscr{T}(L)$ обозначим класс пространственных кривых $\Gamma$, заданных параметрическими уравнениями (2), длина которых равна $L$. Максимальную погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\Gamma$ обозначим

$$R_N\big(\mathfrak{M}; \mathscr{T}(L); P, T\big) = \sup\big\{R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) : \Gamma \subset \mathscr{T}(L)\big\}.$$

Чтобы найти оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$, потребуем, чтобы формула (4) была точна на функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) = \mathrm{const}$, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathscr{T}(L)) = \inf\big\{R_N(\mathfrak{M}; \mathscr{T}(L), P, T) : (P, T)\big\}$$

будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$. Если существует вектор $(P^0, T^0)$ коэффициентов $P^0 = \big\{p_k^0\big\}_{k=0}^N$ и узлов $T^0 = \big\{t_k^0\big\}_{k=0}^N$, для которых

$$\mathcal{E}_N\big(\mathfrak{M}, \mathscr{T}(L)\big) = R_N\big(\mathfrak{M}; \mathscr{T}(L), P^0, T^0\big),$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу (4) на указанных классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$.

Таким образом, требуется найти наилучшие (оптимальные) квадратурные формулы вычисления криволинейного интеграла первого рода (1) для некоторых классов дифференцируемых функций, где функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определены и интегрируемы вдоль заданной кривой $\Gamma$ с параметрическими уравнениями (2). Задача отыскания наилучшей квадратурной формулы приближённого интегрирования типа (4) для интеграла $J(f, \Gamma)$ для заданного класса функций и класса кривых, как мы отметили, находится на стадии разработки. Некоторые результаты на классах функций $\mathfrak{M}^{\omega}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющих неравенству

$$\big|f(M') - f(M'')\big| \le \omega\big(\rho_i\big(M', M''\big)\big),\ M', M'' \in \Gamma,$$

где

$$\rho_1\big(M', M''\big) = \sum_{i=1}^m \big|x' - x''\big|; \quad \rho_2\big(M', M''\big) = \left\{\sum_{i=1}^m \big(x' - x''\big)^2\right\}^{1/2}$$

найдены в работе М.Ш.Шабозова[4].

Следует также отметить, что наилучшая квадратурная формула приближённого интегрирования типа Маркова для интеграла $J(f,\Gamma)$ на классах $\mathfrak{M}^{\omega}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ и классах кривых $\Gamma\in H^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m}$ найдена в работе М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева[5], а для некоторых классов функций с ограничением на производной $r$-го порядка в пространствах $L_p[0,L]$ $(1\le p\le\infty)$ в работах С.Б.Вакарчука[3], Д.С.Сангмамадова[8], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозова[14], Л.Г.Файзмамадовой[10]. Обобщение работ[5,10,14] дано в работе М.Ш.Шабозова и М.К.Абдукаримзоды[6].

Во втором параграфе второй главы найдена оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых.

Обозначим через $W^{(2)}L_2(M)$ класс функций $f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$, у которых существуют вторые смешанные и частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-l}\varphi_i\partial^l\varphi_j}\ (l=0,1,2;\ i,j=1,2,\ldots,m),$$

и градиент второго порядка $\nabla^2$ по норме удовлетворяет условию

$$\big\|\nabla^2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))\big\|_{L_2}=\left(\int\limits_0^L\big|\nabla^2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))\big|^2dt\right)^{1/2}\le M.$$

В этих обозначениях справедлива следующая общая

**Теорема 2.2.1** *Среди всех квадратурных формул типа Маркова*

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt=$$

$$=p_0f\big(\varphi_1(0),\,\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+p_{N+1}f\big(\varphi_1(L),\,\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L)\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^N p_kf\big(\varphi_1(t_k),\varphi_2(t_k),\ldots,\varphi_m(t_k)\big)+R_N(f;\Gamma,P,T)$$

*наилучшей для класса $W^{(2)}L_2(M)$ является формула, у которой вектор узлов определен равенством*

$$T^0:=\left\{t_0=0,\ t_{N+1}=L,\ t_k=\frac{\sqrt{2/3}+k-1}{2\sqrt{2/3}+N-1}L,\ \ k=1,2,\ldots,N\right\},$$

*а вектор коэффициентов имеет вид*

$$P^0 := \begin{cases} p_0 = p_{N+1} = \dfrac{\dfrac{3}{8}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \\ p_1 = p_N = \dfrac{\left(1+\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)L}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \\ p_k = \dfrac{L}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \quad k = 2,3,\ldots,N-1. \end{cases}$$

*Точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы типа Маркова на классах $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T} := \Gamma$ равна*

$$\mathcal{E}_N(W^{(2)}L_2(M), \mathscr{T}(L)) = \frac{M}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{L^2}{\left[2\left(2\cdot\sqrt{2/3}+N-1\right)\right]^2}.$$

В третьем параграфе второй главы рассматривается задача минимизации оценки остатка квадратурной формулы общего вида

$$\mathcal{J}(f,\Gamma) = \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) + R_N(f,\Gamma), \tag{17}$$

на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r = 1,2)$. Здесь доказаны следующие теоремы.

**Теорема 2.3.1.** *Наилучшая квадратурная формула приближённого вычисления криволинейного интеграла вида* (17) *на классе* $C^{(1)}[0,L]$ *имеет вид*

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \tag{18}$$

*При этом для погрешности квадратурной формулы* (18) *на всём классе* $C^{(1)}[0,L]$ *имеет место оценка*

$$R_N\big(C^{(1)}[0,L], \mathscr{T}(L)\big) = \frac{M_1 L}{4N}.$$

**Теорема 2.3.2.** *Среди всех квадратурных формул вида* (17) *наилучшей для класса* $C^{(2)}[0,L]$ *является формула, у которой векторы коэффициентов и узлов имеют вид*

$$P := \left\{ p_k = \frac{2L}{\sqrt{3}+2(N-1)},\ (k=\overline{2,N-1}),\ p_1 = p_N = \frac{(2+\sqrt{3})L}{2\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]} \right\},$$

$$T := \left\{ t_k;\ t_k = \frac{\big[\sqrt{3}+4(k-1)\big]L}{2\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]},\ k=\overline{1,N} \right\}.$$

*При этом для оценки погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе* $C^{(2)}[0,L]$ *справедлива оценка*

$$R_N\big(C^{(2)}[0,L],\Gamma\big) = \frac{M_2 L}{8\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]^2}.$$

В заключении третьего параграфа вводится в рассмотрение класс функций $W_0^{(1)}L_q[0,L]$ $(1 \le q \le \infty)$ как подкласс функций $f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)) \in W^{(1)}L_q[0,L]$, имеющих на отрезке $[0,L]$ непрерывные частные производные $\partial f/\partial\varphi_k$ $(k=\overline{1,m})$, удовлетворяющие ограничению

$$\|\nabla(\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot),\dots,\varphi_m(\cdot))\|_{L_q[0,L]} \le M_1^{(q)}.$$

**Теорема 2.3.3.** *Среди всех квадратурных формул вида* (17) *наилучшей на классе* $W_0^{(1)}L_q[0,L]$ *является формула вида*

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \tag{19}$$

*Для минимальной оценки погрешности формулы* (19) *на указанном классе функций и классе кривых имеет место точная оценка*

$$R_N\big(W_0^{(1)}L_q[0,L],\mathscr{T}(L)\big) = \frac{M_1^{(q)}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}\cdot(2N+1)}, (p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le q\le\infty).$$

В четвёртом параграфе рассматривается задача отыскания наилучшей квадратурной формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций $W_p^{(1)}(M_p)$ и кривых $\mathscr{T}_Q(L)$, где через $W_p^{(1)}(M_p)$, $1 \le$

$p \leq \infty$ обозначен класс функций $f(M_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, у которых почти всюду в области $Q := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \leq L^2\right\}$ существуют непрерывные частные производные первого порядка

$$\frac{\partial^1 f}{\partial^{1-l}\varphi_i \partial^l \varphi_j} \ (l = 0, 1, \ i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

удовлетворяющие ограничениям

$$\left\|\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right\|_{L_p(Q)} \leq M_p, \ 1 \leq p \leq \infty.$$

**Теорема 2.4.1.** *Среди всех квадратурных формул вида* (17) *для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_p^{(1)}(M_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ *и классе кривых* $\mathscr{T}_Q(L)$ *наилучшей является формула средних прямоугольников* (18)*:*

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f, \Gamma).$$

*При этом для минимальной погрешности формулы* (18) *на указанных классах функций и кривых имеет место точная оценка*

$$R_N\big(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L)\big) = \frac{M_p L^{1+1/q}}{2N\sqrt[q]{q+1}}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

## Заключение

**Основные научные результаты диссертационной работы**

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов;
- найдены оптимальные квадратурные формулы типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

**Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять при отыскании точных оценок погрешности приближённых интегралов для вычисления поверхностных интегралов. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК Российской Федерации:**


[1] *Шабозов М.Ш., Дадабоев П.А.* Об асимптотически точных оценках приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Проблемы вычислительной и прикладной матем. – 2015. – №201. – С.3–10.

[2] *Дадабоев П.А.* Асимптотически точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – 2016. – С.98–102.

[3] *Дадабоев П.А.* Оценка остатка усложненных квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций малой гладкости // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018, №3(172). – С.19–27.

[4] *Дадабоев П.А.* Оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволиненйного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых // ДАН РТ. – 2020. – Т.63, №11-12. – С.672–680.

**В других изданиях:**

[5] *Хамдамов Ш.Дж., Дадабоев П.А.* Наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математики и её приложений*" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С.53–55.

[6] *Дадабоев П.А.* Об одной оптимальной квадратурной формуле для вычисления криволиненых интегралов // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) – С.97–101.

[7] *Дадабоев П.А.* Точная оценка для погрешности квадратурных формул // Материалы международной научной конференции "*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.) – С.83–86.

[8] *Дадабоев П.А.* Оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейных интегралов // Материалы международной научной конференции "*Актуальные проблемы современной математики*" (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) – С.49–53.

[9] *Дадабоев П.А.* Квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.) – С.16-20.

[10] *Мирпоччоев Ф.М., Файзмамадова Л.Г., Дадабоев П.А.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 106–109.